199 Matheknobeleien des Monats
Aufgaben und Lösungen

"technikus"
Zeitschrift für Technik
und Naturwissenschaft
1965 - 1981

Abschrift und LaTex-Satz der Aufgaben und Lösungen: Steffen Polster 2018/23
https://mathematikalpha.de

1 Aufgaben und Lösungen

1. Matheknobelei 6/65
In einem Schleusenbecken, das durch Tore abgeschlossen ist und eine Fläche von 4000 m^2 hat, werden 80 m^3 Schlamm (Dichte: 2,5 $\frac{t}{m^3}$) ausgebaggert und auf einem Schleppkahn abgeladen.
Um wieviel senkt sich der Wasserspiegel?

Wenn $V_1 = 80\text{m}^3$ Schlamm aus dem Becken entfernt werden, so sinkt der Wasserspiegel mit F = Beckengrundfläche um

$$h_1 = \frac{V_1}{F} = \frac{80\text{m}^3}{4000\text{m}^2} = \frac{1}{50}\text{m} = 2\text{cm}$$

Wenn die 80 m^3 Schlamm (= 200 t) auf den Kahn im Becken geladen werden, taucht der Kahn um $V_2 = 200\text{m}^3$ tiefer ein, da die Wasserdichte $1\frac{t}{m^3}$ beträgt.
Wenn h die Tiefe des Wassers nach dem Baggern ist und h_2 den Anstieg des Wassers nach Beladen des Kahns wird

$$h_2 = \frac{V_2}{F} = \frac{200\text{m}^3}{4000\text{m}^2} = \frac{1}{20}\text{m} = 5\text{m}$$

Beide Änderungen überlagern sich. Also ist am Ende des Baggerns und nach Beladen des Schleppkahns mit dem Schlamm das Wasser um 3 cm gestiegen und nicht gesunken.

2. Matheknobelei 7/65
Ein $a = 100$ m langer Ferienzug rollt mir einer Geschwindigkeit von $v_Z = 72\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Wie groß ist die Geschwindigkeit v_W des senkrecht auf den Zug auftreffenden Windes, wenn die Rauchfahne der Lok am Zugende um die Strecke $b = 40$ m abgetrieben wird?

Die Lokomotive hat 100 m zurückgelegt, wenn die Rauchfahne 40 m zurückgelegt hat. Die Windgeschwindigkeit v_W muss zur Zuggeschwindigkeit v_Z im gleichen Verhältnis stehen, wie die zurückgelegten Wege zueinander

$$\frac{100}{40} = \frac{72}{x} \rightarrow x = \frac{40 \cdot 72}{100} = 28{,}8$$

Die Windgeschwindigkeit v_W beträgt 28,8 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

3. Matheknobelei 8/65
Ein Kran wird zu einer Baustelle transportiert. Um die Länge des Krans zu messen, läuft Peter von der Spitze des Krans zum Ende und braucht dazu 15 Schritte (Schrittlänge 80 cm).
Um vom Ende wieder zur Spitze des gleichmäßig weiterfahrenden Zugs zu gelangen, benötigt er bei gleicher Schrittgeschwindigkeit 75 Schritte.
Wie lang ist der Kran?

Mit v = Geschwindigkeit, s = Weg, t_1 = Zeit für 15 Schritte, t_2 = Zeit für 75 Schritte und l = Kranlänge wird $l - vt_1 = 12$ m, $l + vt_2 = 60$ m.
Es gilt $\frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{5} \rightarrow t_1 = \frac{1}{5}t_2$.
Also ist $l - v \cdot \frac{1}{5}t_2 = 12$ m und $l + vt_2 = 60$ m. Multiplizieren der ersten Gleichung mit 5 und addieren beider Gleichungen liefert $6l = 120$ m, $l = 20$ m. Die Länge des Krans beträgt 20 m.

4. Matheknobelei 9/65
Ein PKW, dessen Räder einen Durchmesser von d = 56 cm haben, soll bei einer Motordrehzahl von $n = 3000 \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$ mit einer Geschwindigkeit von $v = 72 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ fahren.
Welche Untersetzung muss des Getriebe haben? (Rechnet mit $\pi = \frac{22}{7}$!)

72 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ = 1200 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$, $U = \pi d = \frac{56 \cdot 22}{7}$ = 176 cm, Der Umfang des Rades beträgt 1,76 m.
Bei einem Übersetzungsverhältnis von 1:1 wäre die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{3000 \cdot 1{,}76\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 5280 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$, die tatsächliche Geschwindigkeit v beträgt aber 1200 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$. Das Übersetzungsverhältnis ergibt sich

$$U = \frac{v}{v_1} = \frac{1200}{5280} = \frac{5}{22} = 1 : 4{,}4$$

5. Matheknobelei 10/65
Dem deutschen Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz gelang es einmal zu zeigen, dass 4 gleich 5 ist. Natürlich hat die Sache eine Haken, denn die Beweisführung ist nicht ganz exakt.
Wer findet den Fehler?

$$16 - 36 = 25 - 45 \qquad | + \frac{81}{4}$$
$$16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$$

Beide Seiten werden umgeformt:

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

Es wird die Wurzel gezogen, und wir erhalten

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \qquad | + \frac{9}{2}$$
$$4 = 5$$

Jedes Quadrat hat zwei Wurzeln, nämlich die positive x_1 und die negative x_2. Bei dieser Aufgabe hat Leibniz auf der rechten Seite der Gleichung die Lösung x_1 und auf der linken Seite die Lösung x_2 verwendet. Richtig wäre bei korrekter Anwendung des Betrages

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$
$$-(4 - \frac{9}{2}) = 5 - \frac{9}{2} \qquad | + \frac{9}{2}$$
$$-4 + 9 = 5$$

6. Matheknobelei 11/65
Bei einem Verfolgungsrennen starten die Fahrer jeweils mit einer Minute Abstand.
Wie schnell fährt ein Fahrer, wenn er seinen Vordermann, der eine Geschwindigkeit von 36 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ hat, nach 6 km einholt?

Gegeben sind t = 1 min, s = 6 km, $v_1 = 36 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Gesucht ist v_2.
Lösung: $t_1 = \frac{s}{v_1}$ = 10 min, t_2 = 10 min - 1 min = 9 min und $v_2 = \frac{s}{t_2} = 40 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

7. Matheknobelei 12/65
Ein Flugzeug fliegt auf geradliniger Strecke von A nach B und wieder zurück.
Wie verändert sich die Gesamtflugzeit für Hin- und Rückflug, wenn währenddessen ein Wind mit der Geschwindigkeit w von A nach B herrscht? Die Behauptung ist mathematisch zu beweisen.

Behauptung: Die Gesamtflugzeit für Hin- und Rückflug ist bei der Windgeschwindigkeit w (von A nach B) größer als bei Windstille.
Beweis: $AB = s$ Weg, v Fluggeschwindigkeit bei Windstille, t_1 Flugzeit von A nach B, t_2 Flugzeit von B nach A, t_0 Gesamtflugzeit bei Windstille, t Gesamtflugzeug bei Wind.
Bei Windstille wird $t = t_1 + t_2 = \frac{2s}{v}$.
Mit Wind ($w > 0$) wird

$$t_1 = \frac{s}{v+w}, t_2 = \frac{s}{v-w}, t = \frac{s}{v+w} + \frac{s}{v-w} = \frac{2sv}{v^2 - w^2} = \frac{2s}{v - \frac{w^2}{v}} > \frac{2s}{v}$$

Da der Nenner von t kleiner als der von t_0 ist, ist der Wert des Bruchs größer und damit die Gesamtflugzeit t länger.

8. Matheknobelei 1/66
In einem Mathematikbuch hatte sich bei einer Aufgabe ein Druckfehler eingeschlichen. An Stelle von "berechne $x^2 \cdot 0, *{*}*$" stand dort "berechne $x \cdot 20, *{*}*$".
Dabei ist x eine gerade ganze Zahl, und die drei Sternchen nach dem Komma bedeuten einen endlichen Dezimalbruch. Das Eigenartige ist, dass der Druckfehler keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Die Lösung ist in beiden Fällen dieselbe.
Sucht den Wert von x und den Dezimalbruch. Wie kommt ihr auf die Lösung?

Aufgabe $x^2 \cdot 0, *{*}* = x \cdot 20, *{*}*$
Der endliche Dezimalbruch sei y. Dann ist

$$x^2 y = x(20 + y) \to y = \frac{20}{x-1}$$

Weil y ein endlicher Dezimalbruch ist, ist es auch $\frac{20}{x-1}$. x-1 kann aber nur die Primfaktoren 2 und 5 enthalten, denn andere Primfaktoren ergeben einen unendlichen Dezimalbruch $\frac{20}{x-1}$. Den Primfaktor darf x-1 als ungerade Zahl nicht enthalten. x-1 ist also ein Potenz von 5. Man setzt $x - 1 = 5^{n+1}$.
Dann ist $x = 5^{n+1} + 1$ und $y = \frac{4}{5^n} \quad (n \geq 1)$.
Die ersten 5 Lösungen lauten $x = 26$, $y = 0{,}8$; $x = 126$, $y = 0{,}16$; $x = 626$, $y = 0{,}032$; $x = 3126$, $y = 0{,}0064$ und $x = 15626$, $y = 0{,}00128$.
Diese Aufgabe lässt mehrere Lösungen zu, da ja nicht angegeben war, wieviel Stellen die korrigierte Aufgabe haben soll.

9. Matheknobelei 2/66
Zu Beginn der Fahrt hat ein Autoreifen bei 12 °C Temperatur einen Überdruck von 1,5 at.
Wie groß ist der Überdruck nach längerer Fahrt, wenn der Reifen durch die Reibung eine Temperatur von 41 °C angenommen hat. Das Reifenvolumen nehmen wir als konstant an.

Gegeben sind $T_1 = 12°C = 285$ K; $T_2 = 41°C = 314$ K und $p_1 = 1{,}5$ at $+1$ at $= 2{,}5$ at.
Da das Volumen konstant bleibt, kann in der Zustandsgleichung idealer Gase $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ das

Volumen vernachlässigt werden, d.h.

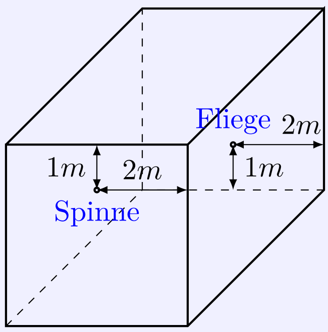
$$p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1} = 2{,}5 \cdot \frac{314}{285} = 2{,}75\text{at}$$

Der Überdruck beträgt also nach längerer Fahrt 1,75 at.

10. Matheknobelei 3/66
Zwei Wanderer haben sich eine Strecke von 40 km vorgenommen. Da der eine ein Fahrrad hat, schlägt er dem anderen vor: "Wir werden abwechselnd das Fahrrad benutzen, und zwar so, dass du eine halbe Stunde fährst, dann das Fahrrad an der Straße stehenlässt und dann weiter zu Fuß gehst. Unterdessen laufe ich bis zum Fahrrad, fahre dir hinterher, bis ich dich einhole, dann fährst du wieder eine halbe Stunde usw."
Wieviel Zeit brauchen die beiden, wenn sie zu Fuß 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und auf dem Fahrrad 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurücklegen?

Der erste Wanderer fährt in 30 Minuten 10 km. Der andere läuft in 30 Minuten 2,5 km, braucht also bis zum Kilometer 10 noch 1,5 h.
Inzwischen ist der erste Wanderer bis zum km 17,5 gelaufen, somit braucht er noch 30 Minuten bis zum km 20. In dieser halben Stunde hat der zweite Wanderer mit dem Fahrrad km 20 erreicht. Das ist die Hälfte der Strecke, jeder hat für die 20 km 2,5 h gebraucht. Da sich der Vorgang noch einmal wiederholt, benötigen die Wanderer für die 40 km eine Zeit von 5 h.

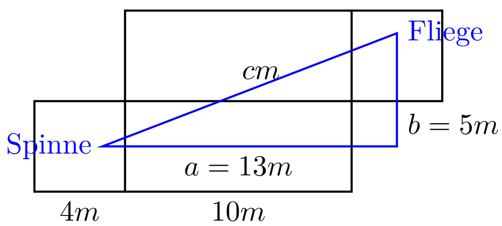
11. Matheknobelei 4/66



In einem quaderförmigen Raum sitzen eine Spinne und eine Fliege an zwei gegenüberliegenden Wänden (siehe Skizze). Der Raum ist 10 m lang, 4 m breit und 4 m hoch. Die Fliege verspricht sich fressen zu lassen, wenn die Spinne einen kürzeren Weg zu ihr als 14 m findet. Muss sich die Fliege fressen lassen?

Man zeichnet die Abwicklung des quaderförmigen Raumes. Die kürzeste Verbindung zwischen der Fliege und der Spinne bildet eine Gerade. Somit ist c nach der Zeichnung die gesuchte Strecke. a (= 1 m + 10 m + 2 m = 13 m) und b (= 2 m + 3 m = 5 m) sind bekannt.

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{13^2 + 5^2} \approx 13{,}928\text{m}$$



Die Fliege muss ihr Versprechen einlösen und sich fressen lassen.

12. Matheknobelei 5/66
Ein Sammler von Zinnsoldaten hat eine fast unübersehbare Anzahl von Figuren. Bei der Aufstellung in verschiedenen Formationen fiel ihm etwas Merkwürdiges auf.
Stellt man die Figuren in Reihen zu 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 Gliedern auf, dann bleibt jeweils gerade eine Figur übrig. Nur bei der Aufstellung in Reihen zu 11 bleibt keine Figur übrig.
Da er im Mathematikunterricht gut aufgepasst hatte, konnte er nach kurzer Rechnung die Anzahl seiner Figuren ermitteln. Wieviel Zinnsoldaten besaß der Sammler?

Aus den Teilern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 folgt 2520 als kleinstes gemeinsames Vielfaches. Nach der Aufstellung behält der Sammler stets eine Figur übrig, wenn er seine Zinnsoldaten in Reihen von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 10 Gliedern aufstellt, bei Aufstellung in Reihen zu Gliedern jedoch keine. So ergibt sich die Gleichung

$$11x = 2520y + 1 \rightarrow x = 229y + \frac{y+1}{11}$$

Wenn $u = \frac{y+1}{11}$, ist $y = 11u - 1$ und $x = 2520u - 229$. Die Zuordnungen zeigt die Wertetafel

u	x	y	$11x$	$2520y$
1	2291	10	25201	25200
2	4811	21	52921	52920
3	7331	32	80641	80640

Die Spalte $11x$ verzeichnet die Anzahl der Zinnsoldaten des Sammlers. 25201 ist als kleinstmögliche Zahl die Lösung.

13. Matheknobelei 6/66
Eine Stenotypistin hat ein langes Manuskript abzuschreiben. Bei der ersten Hälfte schreibt sie je Tag 15 Seiten und bei der zweiten Hälfte je Tag 25 Seiten.
Welche durchschnittliche Tagesleistung erreicht sie so insgesamt?

Wenn das Manuskript $2M$ Seiten hat, benötigt sie für die erste Hälfte $\frac{M}{15}$ Tage, für die zweite Hälfte $\frac{M}{25}$ Tage und insgesamt für $2M$ Seiten:

$$\frac{M}{15} + \frac{M}{25} = \frac{8}{75}M \text{ Tage}$$

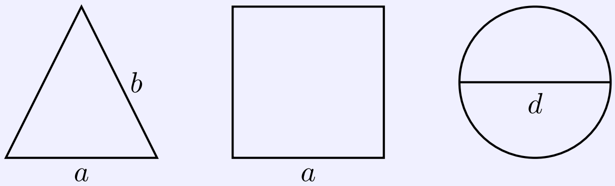
Somit schreibt sie durchschnittlich je Tag $\frac{2M}{\frac{8}{75}M} = \frac{75}{4} = 18{,}75$ Seiten.

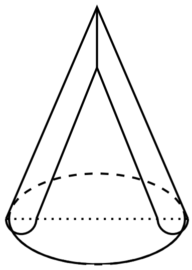
14. Matheknobelei 7/66
Als der Kraftfahrer während der Fahrt seinen Kilometerstand kontrollierte, zeigte der Zähler 15951 km. Er bemerkte, dass dieser Stand eine symmetrische Zahl darstellt, eine Zahl, die man von links nach rechts wie von rechts nach links gleich lesen kann.
Nach zwei Stunden Fahrt zeigte der Kilometerzähler wieder eine Zahl an, die sich von beiden Seiten lesen lässt. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr das Fahrzeug während der zwei Stunden?

Es ist wahrscheinlich, dass es sich um die nächstfolgende symmetrische Zahl handelt. Man erhält sie aus 15951 durch Änderung der dritten Stelle auf die nächsthöhere Ziffer, denn bei Änderung der vorletzten ändert man auch die zweite Stelle und bei Änderung der letzten Stelle auch die erste Stelle, d.h. der Unterschied wäre um eine bzw. zwei Zehnerpotenzen höher.
Nun ist die dritte Ziffer eine 9. Sie wird 0, da sie nicht 10 werden kann, und gleichzeitig muss die zweite Stelle auf 6 erhöht werden, was auch eine Erhöhung der vorletzten Stelle auf 6 verlangt.

Die nächstfolgende symmetrische Zahl ist also 16061. Die zurückgelegte Strecke beträgt 110 km. Somit ergibt sich für die Durchschnittsgeschwindigkeit 55 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Nun wäre es theoretisch möglich, dass der Kilometerzähler eine noch höhere symmetrische Zahl anzeigt. Die nächste wäre 16161.
Dann müsste die Durchschnittsgeschwindigkeit aber schon 105 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ betragen haben, und das ist nicht nur unwahrscheinlich, sondern auch nach der Straßenverkehrsordnung nicht erlaubt.

15. Matheknobelei 8/66
Eine Gütekontrolleur in einem Maschinenbaubetrieb prüfte Werkstücke nach, die Durchbrüche der Form und Größe wie in der Abbildung haben. Da er ungern viel Geräte mit sich herumtrug, ließ er sich nach seinen Angaben eine Patenlehre bauen, mit der jeder Durchbruch gemessen werden kann.
Welche Form könnte solch eine Lehre haben?
Maße: a und d = 1,8 cm , b = 2,1 cm

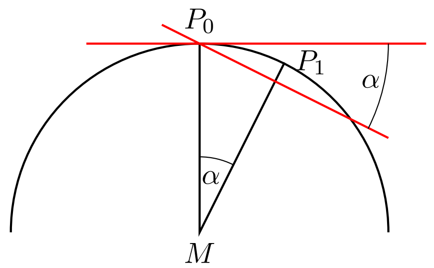




Will man mit einem Körper alle drei Durchbrüche prüfen, muss man einen Körper finden, dessen Grundriss, Aufriss und Kreuzriss Form und Größe der drei Durchbrüche haben.
Ein Körper, dessen Grundriss ein Kreis mit $d = 1{,}8$ cm und dessen Aufriss ein Quadrat ($a = 1{,}8$ cm) ist, hat die Form eines Zylinders, dessen Grundkreisdurchmesser und Höhe gleich 1,8 cm sind.
Damit der Kreuzriss gleich dem dritten Durchbruch ist, wird der Zylinder von beiden Seiten schräg abgeschnitten, so dass der abgebildete Körper entsteht. Man sieht, das sich Grund- und Aufriss durch den Schnitt nicht verändern, denn die Höhe des Dreiecks ist ebenfalls etwa 1,8 cm.

16. Matheknobelei 9/66
Eine Wasserwaage enthält ein Glasröhrchen, "Libelle" genannt. Eine solches Glasröhrchen ist mit einer Flüssigkeit gefüllt, auf der ein kleines Luftbläschen schwimmt. An dem Glasröhrchen befindet sich ein Markierungspunkt. Liegt die Wasserwaage genau waagerecht, so stimmt das Luftbläschen mit dem Markierungspunkt überein.
Um wieviel mm liegen der Markierungspunkt und das Luftbläschen voneinander entfernt, wenn die Wasserwaage um 0,5° geneigt ist?
Der Wölbungsradius des Glasröhrchens beträgt 1 m.

Auf der Peripherie eines Kreises liege die Außenseite der Libelle. Der Umfang des Kreises ist $U = 2\pi r = 6280$ mm. Das ist der Umfang bei einem Winkel von 360°.

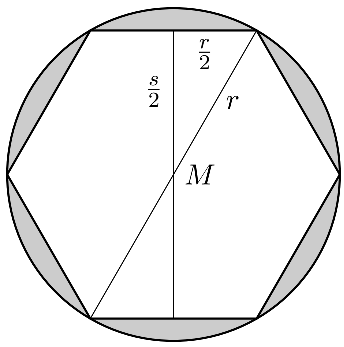


Die Wasserwaage ist dann Tangente an den Kreis. Wenn die Wasserwaage um 0,5° geneigt wird, verschiebt sich der Radius auch um 0,5°, denn Radius und Tangente bilden einen rechten Winkel. Der Berührungspunkt P_1 liegt von Punkt P_0 (Markierung an der Libelle) entfernt:

$$a = \frac{6280}{360°} \cdot 0{,}5° = 8\frac{13}{18} \approx 8{,}72 \text{ mm}$$

17. Matheknobelei 10/66

Ein Werkzeugmacher soll aus Rundstahl einen Sechskant mit der Schlüsselweite s = 32 mm fräsen. Ihm steht dazu Rundstahl mit einem Durchmesser von 30, 32, 34, 36, 38 und 40 mm zur Verfügung.
Welchen Rundstahl benötigt er, um möglichst wenig Abfall zu erhalten?



Mit dem Radius r und der Schlüsselweite 32 mm wird entsprechend der Abbildung

$$r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \to \frac{3}{4}^2 = 16^2 \to r = \frac{32}{3}\sqrt{3} \approx 18{,}5 \text{ mm}$$

Der Mindestdurchmesser ist damit $d = 37$ mm. Es wird also der Rundstahl mit 38 mm Durchmesser benutzt, um die Materialverluste klein zu halten.

18. Matheknobelei 11/66

In jeder von zehn gleichen Geldbörsen befinden sich zehn Münzen von gleichem Wert.
Allerdings enthält eine Börse falsche Münzen, die sich nur dadurch von den echten unterscheiden, dass jede 0,1 g schwerer ist. Es ist bekannt, dass die echten Münzen eine ganze Anzahl Gramm wiegen.
Wie kann man mit einer einzigen Wägung die Börse mit den falschen Münzen herausfinden?

Wir nummerieren die Geldbörsen mit Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3 ... Nr. 10. Aus der Geldbörse 1 nehmen wir eine Münze heraus, aus der Börse 2 zwei Münzen, aus der Börse 3 drei Münzen usw. Die herausgenommenen Münzen wägen wir mit einer Waage, die bis zu 0,1 g genau anzeigt.
Zeigt die Waage einige ganze und einige Zehntel Gramm an, dann gibt die Anzahl der Zehntel Gramm an, wieviel falsche Münzen sich unter den gewogenen befinden. So lässt sich die Nummer der Börse mit den falschen Münzen ermitteln.
Zeigt die Waage eine ganze Anzahl Gramm an, befindet sich das Falschgeld in der Börse 10.

19. Matheknobelei 12/66
Um eine Aluminiumkugel wird ein 10 cm dicker Gummiring gelegt.
Um wieviel cm vergrößert sich der Umfang der Kugel?

Ist D der Durchmesser eines Kreises, so beträgt sein Umfang $u_1 = \pi D$, vergrößert man seinen Durchmesser um $2d$, so beträgt der Umfang $u_2 = \pi(D + 2d)$.
Die Vergrößerung des Umfangs beträgt dann

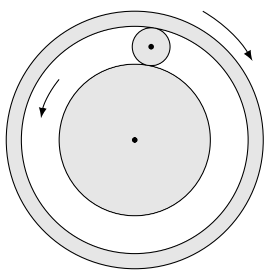
$$\Delta u = u_2 - u_1 = \pi(D + 2d) - \pi D = 2\pi d$$

Mit $d = 10$ cm wird $\Delta u = 20\pi$ cm $\approx 62{,}8$ cm.

20. Matheknobelei 1/67
Im Büro für Erfindungswesen gehen zwei Verbesserungsvorschläge ein, mit denen die Herstellungszeit eines Werkstücks verkürzt werden kann. Beide Vorschläge schließen jedoch einander aus.
Der erste Vorschlag erfordert für die Umstellung der Produktionsvorrichtung 20 Stunden und ergibt eine Zeiteinsparung von 30 % je Werkstück. Der zweite Vorschlag erfordert nur 10 Stunden Vorbereitungszeit, bringt aber nur 10 % Zeitersparnis.
Bei welchen Stückzahlen ist der erste Vorschlag, bei welchen der zweite Vorschlag ökonomischer, wenn nach der bisherigen Methode 10 Arbeitsstunden für ein Werkstück benötigt wurden?

Die Einsparungen betragen $3x - 20$ bzw. $x - 10$. Die aufgewendete Zeit ist gleich, wenn gilt: $3x - 20 = x - 10 \to x = 5$. Somit ist der erste Vorschlag rentabler, wenn $x > 5$ gilt.
Bei 5 Stück ist zwar die Fertigungszeit bei beiden Verfahren gleich, liegt aber noch 5 h über dem alten Verfahren. Tatsächlich ist der erste Vorschlag zeitlich erst ab 7 Werkstücken und der zweite ab 11 Werkstücken rentabel. Absolut wird man also in jedem Fall ab 7 Werkstücken den 1.Vorschlag vorziehen und bei Stückzahlen unter 7 nach der alten Methode weiter produzieren.

21. Matheknobelei 2/67
Eine Welle läuft in einem Kugellager, dessen Innenring einen Durchmesser von 20 mm hat.
Der feststehende Außenring hat eine Innenfläche mit einem Durchmesser von 30 mm.
Wie oft drehen sich die Kugeln bei einer Umdrehung der Welle?



Wenn sich die Kugel des Lagers einmal um ihre Achse dreht, legt sie am Außenring einen Weg von 5π mm (ihr Umfang) zurück. Das entspricht $\frac{1}{6}$ des Umfangs des Außenrings. Zu gleicher Zeit bewegt sie sich auf der Außenfläche des Innenrings 5π mm in umgekehrter Richtung. Das entspricht $\frac{1}{4}$ des Umfangs der Welle. Daraus folgt, dass sich die Achse bei einer Umdrehung der Kugeln um $\frac{5}{12} = 2{,}4$ ihres Umfangs dreht.
Also muss sich jede Kugel bei einer Umdrehung der Welle 2,4 mal herumdrehen.

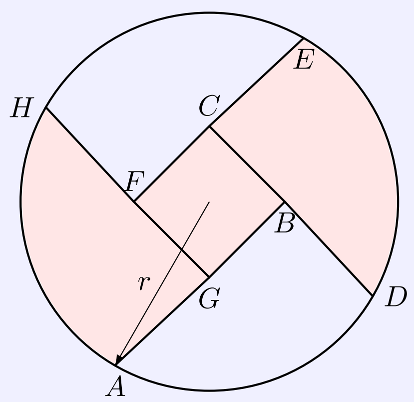
22. Matheknobelei 3/67
Peter will mit einer Balkenwaage, deren Balkenlängen a und b nicht mehr genau gleich sind.
Er legt dabei zuerst ein 5 kg-"Gewicht" auf die linke Schale und wägt ab und dann das 5 kg-Stück auf die rechte Schale und wägt den Rest der Äpfel.
Ist die abgewogene Menge schwerer oder leichter als 10 kg?

Mit dem Hebelgesetz wird für erste Wägung: $5 : F_2 = a : b \to F_2 = 5\frac{a}{b}$ und für die zweite Wägung $F_1 = 5\frac{a}{b}$. So ist das Gewicht der gesamten Menge

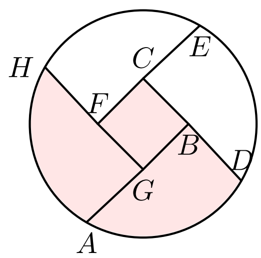
$$G = F_1 + F_2 = 5 \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

Da $a^2 + b^2 > 2ab$ ist (denn $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 > 0$), ist der Nenner größer als der Zähler. Somit ist bewiesen, dass die abgewogene Menge größer als 10 kg ist.

23. Matheknobelei 4/67



Ein Technischer Zeichner soll die Fläche $ACDEGH$ (rot) berechnen. Der Radius des Kreises und die Strecke AC sind ihm bekannt. Die Diagonalen des Quadrats $BCFG$ halbieren sich im Mittelpunkt des Kreises. Wer kann ihm helfen, die allgemeine Lösung zu finden?



Legt man die Figur DGE deckungsgleich auf ACD, so entsteht eine Figur, aus der ersichtlich ist:
Der gesuchte Flächeninhalt ist die Hälfte des Kreisinhalts $\frac{\pi}{2}r^2$ plus die Hälfte des Quadrats. Es ist also notwendig, die Quadratseite zu bestimmen.
Im Dreieck ACD (rechtwinklig) ist die Seite AC bekannt. Um $\overline{CD}$ berechnen zu können, benötigen wir die Länge der Seite AD.
$\overline{AD}$ ist die Sehne über einem Viertel des Kreisumfangs, so dass nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{AD}^2 = r^2 + r^2 = 2r^2 \to \overline{AD} = \sqrt{2}r$$

gilt. Damit ergibt sich aus der Abbildung

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 = \sqrt{2r^2 - \overline{AD}^2} = \overline{AB}$$

und $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} - \sqrt{2r^2 - \overline{AC}^2}$.
Das ist die gesuchte Quadratseite. Der Flächeninhalt des Quadrats ist damit $F_Q = \overline{BC}^2 = 2r^2 - 2\overline{AC}\sqrt{2r^2 - \overline{AC}^2}$. Der gesuchte Flächeninhalt ist dann

$$F = \frac{1}{2}F_K + \frac{1}{2}F_Q = \frac{\pi}{2}r^2 + r^2 - \overline{AC}\sqrt{2r^2 - \overline{AD}^2}$$

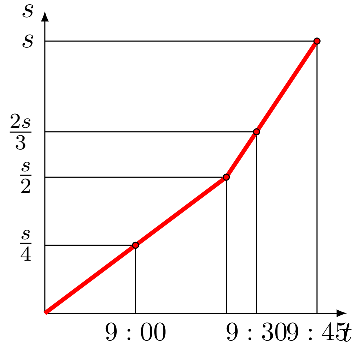
24. Matheknobelei 5/67
Einem Fußgänger, der entlang einer Straßenbahnlinie spazierte, fiel auf, dass ihn regelmäßig alle 12 Minuten ein Bahn überholte und dass ihm alle 4 Minuten eine Bahn dieser Linie entgegenkam. Der Fußgänger ging mit gleichbleibender Geschwindigkeit, ebenso wie die Bahn auf diesem Streckenabschnitt mit konstanter Geschwindigkeit.
In welchem Zeitabstand verkehren die Bahnen auf dieser Straßenbahnlinie?

Der Abstand der Straßenbahnwagen sei x. Da der Fußgänger in Fahrtrichtung geht und ihn alle 12 Minuten eine Bahn überholt, bedeutet das, dass die Straßenbahn diese Strecke in 12-x Minuten zurücklegt. Für den Weg, für den der Fußgänger 1 Minute braucht, benötigt die Bahn $\frac{12-x}{12}$ Minuten. In umgekehrter Richtung benötigt die Straßenbahn nur $\frac{x-4}{4}$ Minuten. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\frac{12-x}{12} = \frac{x-4}{4} \to x = 6 \text{ Minuten}$$

25. Matheknobelei 6/67
Ein Motorradfahrer fährt um x Uhr los und stellt nach dem ersten Viertel der Strecke die Zeit 9.00 Uhr fest. Auf halben Wege biegt er in die Hauptstraße ein und fährt mit doppelter Geschwindigkeit weiter. Eine Uhr am Ende des zweiten Drittels zeigt 9.30 Uhr.
Wann fuhr der Fahrer los und wann erreichte er sein Ziel?

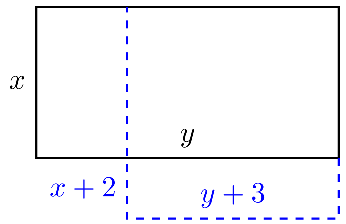
Die Aufgabe ist einfach mittels Diagramm zu lösen, in dem man den Weg über die Zeit einträgt. Die Abszisse wird zweckmäßigerweise in 9 Teile eingeteilt. Auf der Ordinate braucht man nur die Punkte einzuzeichnen, die in der Aufgabenstellung als Wegangaben erwähnt werden.
Für die erste Hälfte der Strecke braucht der Fahrer 6 Teile der Zeitskala, für die zweite Hälfte bei doppelter Geschwindigkeit nur 3 Teile. Für die Teilstrecke von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{2}{3}$ der Gesamtstrecke braucht er nur 4 Teile der Zeitskala = 30 min.



Ein Teil der Zeitskala in demnach 7,5 min. 3 Teile der Zeitskala vor 9.00 Uhr startete er, also 8 h 37 min 30 s. Zwei Teile der Zeitskala nach 9.30 Uhr ist er am Ziel, also 9 h 45 min.

26. Matheknobelei 7/67
Auf dem Sportplatz wird ein Rechteck abgesteckt. Verlängert man die eine Rechteckseite um 2 Meter und verkürzt die andere um 3 Meter, entsteht ein Quadrat, dessen Fläche 1 m^2 kleiner als die des ursprünglichen Rechtecks ist.
Wie groß ist die Fläche des Rechtecks?

Aus der Aufgabenstellung ergeben sich folgende Gleichungen $(x+2)(y-3) = xy - 1$ und $x+2 = y-3$. Demnach ist, wenn wir für $x = y-5$ setzen: $x = 5, y = 10$ und einen Flächeninhalt von 50 m^2.



Der neue Fernsehturm am Berliner Alexanderplatz erreicht nach Fertigstellung eine Höhe von 353 m. Seine Gesamtmasse beträgt dann etwa 19700 t.
Wie groß würde ein maßstab- und detailgerechtes Modell des Fernsehturms werden, das mit denselben Baustoffen angefertigt wird, wenn es eine Masse von 1 kg haben soll?

Da sich bei einer maßstabgerechten Verkürzung der Höhe des Fernsehturms auch die anderen zwei Dimensionen im selben Maßstab verkürzen, gilt:

$$\frac{x}{353} = \sqrt[3]{\frac{1}{19700000}} \to x = \frac{353}{270} \approx 1{,}307 \text{ m}$$

28. Matheknobelei 9/67
An der Hausecke ist eine nischenförmige Aussparung, aus der beim Renovieren eine Figur entfernt wurde. Die Nische hat die Form eines Viertelzylinders mit aufgesetzter Achtelkugel (Höhe: 2 m, Radius: 1 m) und soll nun neu verputzt werden.
Wieviel Mörtel muss gemischt werden, wenn für 1 m^2 Fläche durchschnittlich 22 kg benötigt werden?

Folgende Flächen sind zu berechnen:

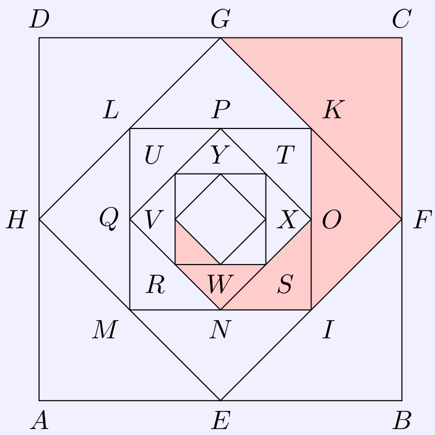
1. Grundfläche der Nische: $A_1 = \frac{\pi}{4} r^2 \approx 0{,}785$ m^2
2. Mantelfläche der Viertelzylinders: $A_2 = \frac{2\pi}{4} r^2 h \approx 1{,}57$ m^2
3. Fläche der Achtelkugel: $A_3 = \frac{4\pi}{8} r^2 \approx 1{,}57$ m^2

Addiert man sich eine neu zu verputzende Fläche von $A_{\text{Gesamt}} = 3{,}925$ m^2. Da 22 kg Mörtel je m^2 gerechnet werden, benötigt man 86,35 kg $\approx$ 87 kg für die angegebene Nische.

29. Matheknobelei 10/67
Wie lang ist die räumliche Diagonale eines Würfels, dessen Oberfläche in cm^2 gemessen zahlenmäßig mit dem Rauminhalt in cm^3 übereinstimmt?

Nach der gegebenen Voraussetzung gilt die Gleichung: $6a^2 = a^3$. Daraus ergibt sich $a = 6$ cm. Nach Pythagoras ist die Diagonale eines Quadrats $a\sqrt{2}$, die Raumdiagonale eines Würfels $a\sqrt{3}$. Für den besagten Würfel gilt also $d = 6\sqrt{3} \approx 10{,}4$ cm.

30. Matheknobelei 11/67
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 10 cm befindet sich das Quadrat $EFGH$. Die Eckpunkte liegen auf der Mitte der Seiten des großen Quadrats. Auf der Mitte der Seiten des Quadrats $EFGH$ liegen die Eckpunkte des Quadrats $IKLM$ usw. Berechnet die rot gekennzeichnete Fläche!



Die Flächeninhalte der ineinandergeschachtelten Quadrate verhalten sich zueinander wie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$. Da die roten Dreiecke jeweils $\frac{1}{8}$ der Fläche des jeweiligen Quadrates sind, ergibt sich für die Fläche der 5 Dreiecke:

$$\frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) a^2 = \frac{31}{128} a^2$$

Mit $a = 10$ cm wird somit für den Flächeninhalt $= \frac{3100}{128} \approx 24{,}2$ cm^2.

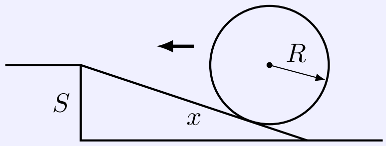
31. Matheknobelei 12/67
Aus einer Statistik geht hervor, dass nur etwa 15 % der landwirtschaftlich genutzten Fläche unserer Erde regelmäßig bewässert werden, wobei dieser Flächenanteil 25 % der Welternte liefert.
Wieviel mal größer ist demnach der durchschnittliche Hektarertrag der bewässerten Fläche als der der unbewässerten?

Der Grundwert G sei einmal die landwirtschaftlich genutzte Fläche unserer Erde, zum anderen die gesamte Welternte E. Gefragt wird nach dem Verhältnis der durchschnittlichen Hektarerträge der bewässerten, wir nennen ihn B, zur unbewässerten Fläche - wir nennen ihn U. Dann gilt

$$0{,}25 \cdot E = 0{,}15 \cdot G \cdot B; 0{,}75 \cdot E = 0{,}85 \cdot G \cdot U \rightarrow \frac{B}{U} = \frac{17}{9} \approx 1{,}9$$

Der Hektarertrag der bewässerten Fläche ist fast doppelt so groß wie der der unbewässerten.

32. Matheknobelei 1/68

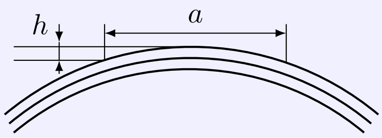


Damit Fässer mit dem Radius R auf eine Stufe der Höhe S ($S < R$) ohne stoß gerollt werden können, wird eine rampenförmige Auffahrt gebaut.
Wie groß muss deren Länge x mindestens sein, damit die Auffahrt ihre Funktion erfüllt? (Die Auffahrt erfüllt ihre Funktion, wenn sie vom Fass berührt werden kann!)

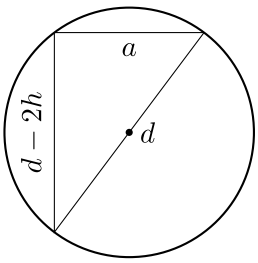
Die Auffahrt erfüllt ihre Funktion, wenn sie das Fass mindestens an der Kante der Stufe tangential berührt. Das ist der Grenzfall, wie man in der Zeichnung sieht.
Tangente und Radius bilden im Berührungspunkt einen rechten Winkel. Aus den ähnlichen Dreiecken lässt sich nun die Mindestlänge der Auffahrt ermitteln:

$$\frac{x}{S} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (R-S)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2RS - S^2}} \to x_{\text{min}} = R\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{2R-S}}$$

33. Matheknobelei 2/68



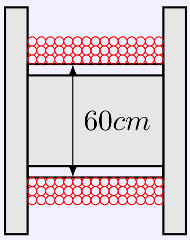
Eine große Trockentrommel wird aus gewölbten Blechen zusammengeschweißt. Durch einen Messschieber werden folgende Maße ermittelt: $a = 400$ mm, $h = 10$ mm.
Wie groß ist der Durchmesser der Trockentrommel?



Nach dem Thalessatz kann man ein rechtwinkliges Dreieck in den Kreis einzeichnen. Mit den gegebenen Werten wird für die Hypotenuse des Dreiecks, also den Durchmesser der Trommel

$$a^2 + (d-2h)^2 = d^2 \to 400^2 + (d-20)^2 = d^2 \to d = 4010 \text{ mm}$$

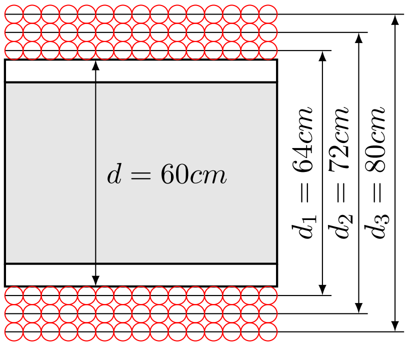
34. Matheknobelei 3/68



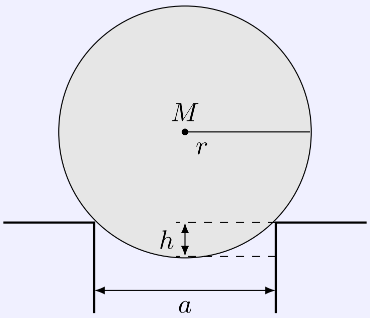
Auf einer Kabeltrommel sind drei Lagen eines Starkstromkabels aufgewickelt. In jeder Lage befinden sich 15 Windungen des Kabels, das einen Durchmesser von 4 cm hat.
Wieviel m Kabel befinden sich auf der Trommel?

Für den Durchmesser der ersten 15 Windungen muss zu den 60 cm Trommeldurchmesser noch zweimal der Kabelradius addiert werden. Für die jeweils 15 weiteren Windungen erhöht sich der Durchmesser auf d_2 und d_3 (siehe Skizze). Die Lösung ist dann

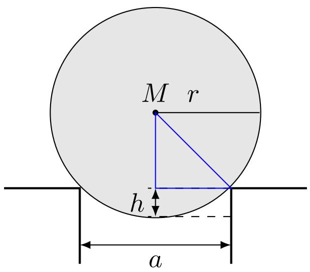
$$n = 15\pi d_1 + 15\pi d_2 + 15\pi d_3 = 15\pi \cdot 216 \approx 101{,}74 \text{ m}$$



35. Matheknobelei 4/68



Eine Kugel liegt $h = 2$ mm tief in einem $a = 12$ mm breiten Spalt. Welchen Durchmesser hat die Kugel?



Im blauen rechtwinkligen Dreieck gilt

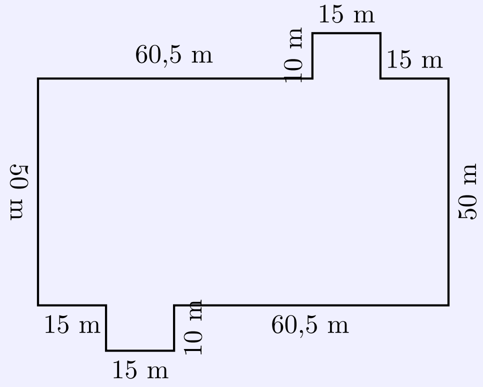
$$r^2 = (r-h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow 2r = d = h + \frac{a^2}{h}$$

und mit den gegebenen Werten $d = 20$ mm.

36. Matheknobelei 5/68

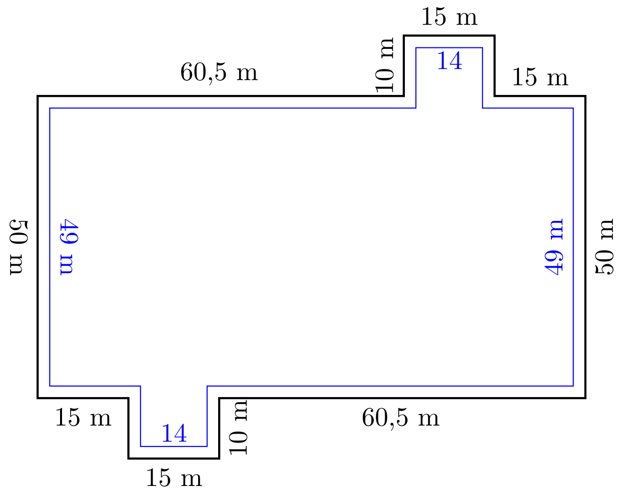
Um das Grundstück soll innerhalb der Begrenzung ein Graben ausgehoben werden. Er hat einen rechteckigen Querschnitt (50 cm breit, 30 cm tief). Der Schüttungskoeffizient beträgt 1,4 (das ausgeworfene Erdreich hat das 1,4fache Volumen des festen Bodens.)

Zum Abtransport steht ein LKW mit Hänger zur Verfügung, die zusammen 2,8 m^3 laden können.
Wie oft muss der LKW fahren, um das Erdreich woanders aufzuschütten?



Die Anzahl der notwendigen LKW-Fahrten zum Abtransport des Erdreichs ergibt sich zu

$$n = \frac{\text{Grabenquerschnitt} \cdot \text{Grabenlänge} \cdot \text{Schüttungskoeffizient}}{\text{Ladefähigkeit}}$$



Es genügt nicht, nur die angegebenen Maße des Graben-Außenumfangs zu addieren. Vielmehr beträgt die Länge des Grabens 319 m, also das Mittel aus dem äußeren (schwarz) und inneren (blau) Grabenrand. Damit wird

$$n = \frac{0{,}15 \cdot 319 \cdot 1{,}4}{2{,}8} = 23{,}925 \approx 24$$

Der LKW muss 24mal fahren, um das Erdreich des Grabens an anderer Stelle wieder aufzuschütten.

37. Matheknobelei 6/68
Ein Schnellzug, der im Abstand von 250 m senkrecht zur Blickrichtung mit einer Geschwindigkeit von $v = 72\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, soll fotografiert werden.
Wie groß darf höchstens die Belichtungszeit sein, wenn die Bewegungsunschärfe auf dem Negativ 0,05 mm nicht überschreiten soll und ein Objektiv mit einer Brennweite von $f = 50$ mm benutzt wird.

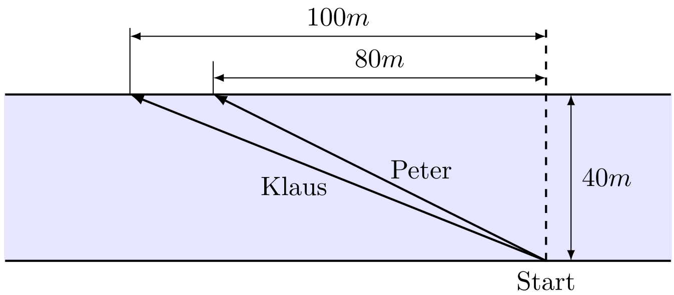
Die maximal zulässige Belichtungszeit betrage x Sekunden. In dieser Zeit hat der Zug die Strecke (v = 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$) 20 x m zurückgelegt, dem entspricht auf dem Bild die Strecke (Abstand des Objektes $a = 250$ m)

$$s = \frac{f}{a} \cdot 20x = \frac{5 \cdot 10}{250} \cdot 20x = 4 \cdot 10^{-3}x$$

s wird als Bewegungsunschärfe empfunden. Sie darf maximal 0,05 mm betragen. Daraus folgt für x mit $4 \cdot 10^{-3}x$ m = 0,05 mm $\rightarrow x = \frac{1}{80}$ s.

38. Matheknobelei 7/68

Klaus und Peter durchschwimmen einen 40 m breiten Fluss um die Wette. Ziel ist die dem Startplatz gegenüberliegende Stelle am Flussufer. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt rund 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Klaus ist zwar der bessere Läufer, aber der schlechtere Schwimmer der beiden. Zur Schwimmprüfung legte er die 400-m-Strecke in 16 min 40 s zurück, beim 75-m-Lauf erreichte er dafür eine Zeit von 10 s. Bei Peter sind die entsprechenden Zeiten 13 min 20 s und 12 s.
Beiden starten gleichzeitig und schwimmen mit ihrer 400-m-Geschwindigkeit senkrecht zur Strömung. Wer ist als erster am Ziel und mit welcher Zeitdifferenz kommt der Verlierer an?



Der schnellere Schwimmer Peter erreicht nach 80 s das andere Ufer, und zwar 80 m unterhalb des Ziels. Klaus braucht 100 s und wird 100 m abgetrieben. Klaus schafft den 100-m-Lauf in nur 13,3 s. Das reicht aber nicht, um Peter einzuholen, der die 80 m in 12,8 s zurücklegt. Peter erreicht also das Ziel 20,5 s eher als Klaus.

39. Matheknobelei 8/68

Sechs Leichtathleten starten zu einem 400-m-Lauf. Ziel- und Gegengerade sind je 100 m lang. Der Abstand zwischen den weißen Linien, die eine Laufstrecke markieren, beträgt 2 m. Wie groß muss der Startabstand zwischen den einzelnen Läufern sein, damit alle die gleiche Strecke bis zum Ziel zurücklegen?

Für die Lösung ist die Differenz von nur zwei Kreisumfängen zu berechnen. Die gesuchten Bahnunterschiede sind nämlich alle gleich.
Die Unterschiede in den Laufstrecken sind durch die beiden 100 m langen Kurven bedingt, die zusammen einen Vollkreis ausmachen. Der Unterschied zweier Kreisumfänge mit den Radien r_1 und r_2 ist

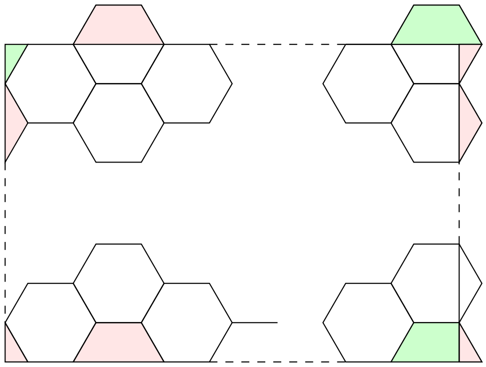
$$\Delta u = u_1 - u_2 = 2\pi r_1 - 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 - r_2)$$

Da der Abstand zwischen den Bahnmarkierungen 2 m beträgt, ist $r_1 - r_2 = 2$ m. Das gilt für alle Bahnen. Damit ist der Abstand, in dem zwei benachbarte Läufer starten müssen

$$\Delta u = 2\pi \cdot 2 \approx 12{,}57 \text{ m}$$

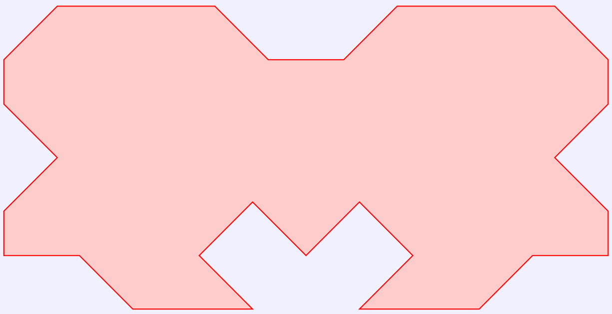
40. Matheknobelei 9/68
Ein Fliesenleger hat den Fußboden eines 4,33 m langen und 3 m breiten Raumes mit sechseckigen Fliesen der Kantenlänge 10 cm auszulegen.
Wie viele Fliesen braucht er dazu und wie viele davon muss er trennen?

Die Rechteckfläche ist $433 \cdot 300 = 129900$ cm^2. Die Sechseckfläche besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge 10 cm. Für eine Dreiecksfläche wird 43,3 cm^2 und somit für die Sechseckfläche 259,8 cm^2.
Die Anzahl der Fliesen ist der Quotient aus Rechteck- und Sechseckfläche und wird gleich 500.



In der rechten senkrechten Reihe liegen $24 + \frac{2}{2} = 25$ Fliesen, von denen überstehende Teile abgetrennt werden müssen (mit denen die Lücken in der linken senkrechten Spalte gefüllt werden). In der obersten und der untersten waagerechten Reihe werden 9 halbe Fliesen verlegt. Insgesamt müssen 34 Fliesen getrennt werden.

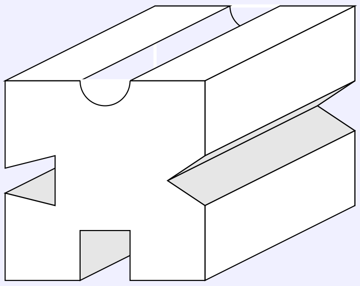
41. Matheknobelei 10/68



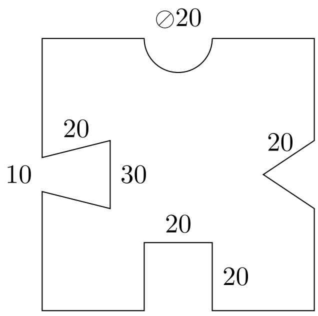
In einer Stanzerei werden aus 8 cm breiten und 16 cm langen Rechteckblechen Formbleche hergestellt, wie sie die Abbildung zeigt. Alle Schnittkanten sind 2 cm lang und verlaufen entweder parallel oder unter 45° zu den Blechkanten. Wieviel Prozent Abfall fällt an?

Der Abfall beim Stanzen lässt sich in 20 rechtwinklige Dreiecke (Hypotenuse 2 cm) und 3 Rechtecke mit den Seiten 2 cm und $\sqrt{2}$ cm zerlegen. Die Flächenberechnung für den Abfall ergibt dann
Dreiecke: $20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20$ cm^2; Rechtecke: $6\sqrt{2}$ cm^2
Das sind in Prozenten des Rechteckblechs 22,5 %.

42. Matheknobelei 11/68



Aus einem Rundeisen von 101 mm Durchmesser wird ein gleichlange Vierkantstab geschmiedet. Dabei bleibt der Rauminhalt des Werkstücks unverändert. Parallel zu den Längskanten wird je eine Nut eingefräst.
Der Querschnitt der ersten Nut ist halbkreisförmig, der zweiten gleichseitig dreieckig, der dritten quadratisch, die vierte ist eine Schwalbenschwanznut. Je 2 cm sind Durchmesser, Quadrat- und Dreieckseite sowie der Schwalbenschwanz, dessen parallele Seiten 1 cm und 3 cm lang sind.
Wieviel Prozent der fertigen Werkstücks beträgt der Abfall?



Es genügte, die Querschnitte des Vierkants und der Nuten zu berechnen, da man jeden Rauminhalt des Werkstücks durch Multiplikation mit der Länge erhält.
Berechnung der Querschnitte
1) Rundeisen (= Querschnitt des Vierkants): $A = \pi r^2 \approx 80{,}7$ cm^2
2) Halbkreisförmige Nut: $A_1 = \frac{\pi}{2} r_1^2 \approx 1{,}5$ cm^2
3) Dreieck-Nut: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \approx 1{,}7$ cm^2
4) Quadratische Nut: $A_3 = 4$ cm^2
5) Schwalbenschwanznut: $A_4 = \frac{1}{2}(3+1) \cdot 2 = 4$ cm^2
Der Querschnitt der Nuten ist 11,2 cm^2 und der Querschnitt des fertigen Werkstücks 68,8 cm^2.
Der Abfall ist 16,3 % des fertigen Werkstücks.

43. Matheknobelei 12/68
Herr Stumpfsinn hat Langeweile. Er zählt alle Zahlen in der natürlichen Reihenfolge: $1 + 2 + 3 + \cdots$ usw. Es klingelt, und Herr Stumpfsinn kann gerade noch das eben gefundene Zwischenergebnis 6328 notieren. Er vergisst aber die zuletzt addierte Zahl.
Könnt ihr ihm helfen, ohne selbst so stumpfsinnig zu addieren?

Das Problem bezieht sich auf die Aufgabe, die der junge Gauß lösen sollte. Der Lehrer hatte aufgegeben, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Gauß war in 5 Minuten fertig, da er bemerkte, dass es 50 Paare von Zahlen gibt, die zusammen 101 ergeben: 100+1, 99+2, 98+3 usw.

Mit diesem Trick wird

$$1 + 2 + 3 + ... + (x - 2) + (x - 1) + x = 6328$$
$$x + (x - 1) + (x - 2) + ... + 3 + 2 + 1 = 6328$$

Addiert man beide Summen, so erhält man $x(x + 1) = 12656$. Die quadratische Gleichung hat die Gleichung $x = 112$. Ist die Lösung quadratischer Gleichungen noch nicht bekannt, so kann man mittels Quadrattafel feststellen, dass $\sqrt{12656}$ zwischen 112 und 113 liegt. Eine Probe mit 112 bestätigt das Ergebnis.

44. Matheknobelei 1/69
Das Quadrat einer zweistelligen Zahl ist leicht im Kopf auszurechnen. Die Zahl wird auf einen vollen Zehner erhöht und mit der Zahl multipliziert, die man wie folgt erhält: Von der ursprünglichen Zahl wird diejenige Zahl abgezogen, um die vorher erhöht wurde. Dann müsst ihr noch das Quadrat dieser "Erhöhungszahl" addieren.
Zum Beispiel: $26^2 = 30 \cdot 22 + 4^2 = 660 + 16 = 676$
Begründet, weshalb dieses Verfahren für alle zweistelligen Zahlen möglich ist!

Die Lösungsidee ist die binomische Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
Ist a^2 gesucht, wird addiert oder subtrahiert, so dass einer der Faktoren eine Zahl mit einer Einerstelle 0 ergibt. Das Produkt der Klammern ist aber nicht das gesuchte a^2, sondern der um b^2 verminderte Betrag. Das muss zum Schluss noch addiert werden, d.h. $a^2 = (a-b)(a+b)+b^2$.

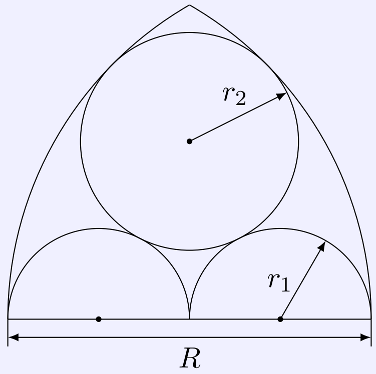
45. Matheknobelei 2/69
Hans soll eine 90 cm breite Lücke im Bretterzaun zunageln. Er hat acht 10 cm breite und sechzehn 8 cm breite Bretter passender Länge. Eine Säge, mit der er die Bretter längs durchsägen könnte, steht nicht zur Verfügung.
Wieviele und welche Möglichkeiten hat Hans, die Öffnung lückenlos zu schließen?

Anzahl der benötigten Bretter: m (10 cm breit) und n (8 cm breit). Dann gilt $10m + 8n = 90$.
Die Gleichung wird mit 2 gekürzt und umgestellt: $4n = 5(9 - m)$.
Daraus folgt, dass n durch 5 teilbar ist, also $n = 0, 5, 10, ...$
1.Fall: ($n = 0$, $m = 9$) Ausgeschlossen, da nur 8 cm-Bretter
2.Fall: ($n = 5$, $m = 5$), d.h. 5 Bretter 10 cm, 5 Bretter 8 cm
3.Fall: ($n = 10$, $m = 1$), d.h. 1 Brett 10 cm, 10 Bretter 8 cm
4.Fall: ($n = 15$, $m = -3$), Ausgeschlossen, da $m > 0$ sein muss
Nur Fall 2 und 3 sind brauchbare Lösungen.

46. Matheknobelei 3/69
Schreibt eine dreiziffrige Zahl auf und zieht davon die Zahl mit umgekehrter Ziffernfolge ab. Teilt das Ergebnis durch die Differenz aus 1. und 3. Stelle der ursprünglichen Zahl, dann nochmals durch 11. Zieht ihr jetzt die Wurzel, so ist das Ergebnis immer 3. Das ist ein feines Rechenkunststück, mit dem man seine Freunde verblüffen kann.
Findet heraus, weshalb es bei dreiziffrigen Zahlen geht!

Darstellung einer beliebigen dreiziffrigen Zahl: $100a + 10b + c$
umgekehrte Ziffernfolge: $100c + 10b + a$
Differenz: $100(a - c) + (c - a) = 99(a - c)$; $a - c$ ist die Differenz aus erster und letzter Stelle der ursprünglichen Zahl; dadurch geteilt, erhält man 99. Und weiter $99 : 11 = 9$ und $\sqrt{9} = 4$.
Der Trick besteht darin, dass die die unbekannte Ziffer b durch Subtraktion herausfällt und mit Teilen durch $(a - c)$ auch die Ziffern a und c entfallen.

47. Matheknobelei 4/69

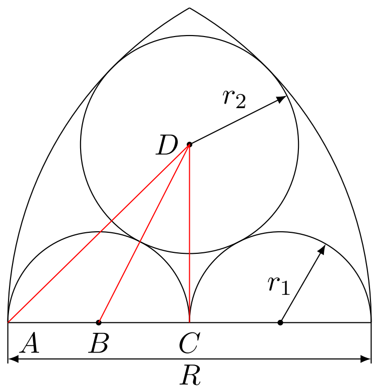


In einem gotischen Bogen sind die Radien r_1 und r_2 zu berechnen, wenn $R = 5$ m beträgt.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt (siehe Abbildung nächste Seite):

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 \quad \text{und} \quad \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2$$

Erste Gleichung minus zweite Gleichung ergibt: $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$. Weiterhin sind nach der Abbildung $\overline{AC} = \frac{R}{2}, \overline{BC} = \frac{R}{4}$ sowie $\overline{AD} = R - r_2, \overline{BD} = r_1 + r_2$.



Daraus ergibt sich $\overline{BC} = r_1 = \frac{R}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ m. Alles eingesetzt wird

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{4}\right)^2 = (R - r_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 \to \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{16} = R^2 - 2Rr_2 - \frac{R^2}{16} - \frac{Rr_2}{2}$$

und damit $\frac{3}{4}R = \frac{5}{2}r_2 \to r_2 = \frac{3}{10}R = 1{,}5$ m.

48. Matheknobelei 5/69
Welche Summe ist größer: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ oder $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

Beide Ausdrücke werden quadriert:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70} \quad \text{und} \quad (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}$$

Wir subtrahieren in beiden Werten 17. Die verbliebenen Werte werden erneut quadriert:

$$(2\sqrt{70})^2 = 280 \quad \text{und} \quad (5 + 2\sqrt{57})^2 = 253 + 20\sqrt{57}$$

Wir subtrahieren jeweils 253 und erhalten 27 bzw. $20\sqrt{57}$. Da $\sqrt{57}$ größer als 2 ist, so ist $20\sqrt{57} > 40$ und folglich $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

49. Matheknobelei 6/69
Ein Zug, bei dem zwischen der ersten und letzten Achse eine Entfernung von 240 m liegt, befährt mit einer Geschwindigkeit von 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine 36 m lange Brücke.
Welche Zeit vergeht vom Befahren des Brückenanfangs durch die erste Achse des Zuges bis zum Verlassen des Brückenendes durch die letzte Achse?

Gegeben waren: Länge des Zuges zwischen erster und letzter Achse $l_Z = 240$ m, Länge der Brücke $l_B = 36$ m und die Geschwindigkeit des Zuges $v = 72\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Mit $t = \frac{s}{v}$, $s = l_B + l_Z = 276$ m wird $t = \frac{276\text{m}}{20\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 13{,}8$ s.

50. Matheknobelei 7/69
"Um eine Frage zu lösen, die sich auf Zahlen und auf abstrakte Verhältnisse von Größen bezieht, muss man lediglich die Aufgabe aus der Muttersprache in die Sprache der Algebra übersetzen", schrieb der berühmte Newton in seinem Lehrbuch "Arithmetika universali".
Ihr sollt eine solche Übersetzung zu einer Aufgabe von Newton einmal durchführen:

"Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme. Im ersten Jahr verbrauchte er 100 Pfund. Zur restlichen Summe legte er ihren dritten Teil hinzu.
Im nächsten verbrauchte er wieder 100 Pfund und vergrößerte die restliche Summe um ihren dritten Teil. Im dritten Jahr verbrauchte er wieder 100 Pfund. Er fügte nun dem Rest den dritten Teil des Restes zu und verdoppelte auf diese Weise sein Anfangskapital."

Aus der Sprache in die Algebra übersetzt, lautet der Lösungsweg

$$(x-100) + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$$
$$\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$$
$$\frac{4x-700}{3} + \frac{4x-700}{9} = \frac{16x-2800}{9}$$
$$\frac{16x-3700}{9} + \frac{16x-3700}{27} = \frac{64x-14800}{27}$$
$$\frac{64x-14800}{27} = 2x$$

Die Lösung der Gleichung ist 1480, d.h. der Kaufmann besaß als Anfangskapital 1480 Pfund.

51. Matheknobelei 8/69
Ein sehr abergläubischer Junge bekam ein Fahrrad geschenkt und wollte fahren lernen. Als er jedoch von einem Fahrradschaden erfuhr, den wir meist mit "Acht" bezeichnen, befürchtete er, dass es Unglück brächte, wenn die im Rahmen eingestanzte Nummer, sie sei sechsstellig, eine oder gar mehrere Ziffern 8 enthielte. Bevor er sich die Fahrradnummer anschaute, machte er die folgende Überlegung: Beim Schreiben jeder Zahl können 10 Ziffern beteiligt sein, nämlich 0, 1, ..., 9.
Unter ihnen erscheint als "unglückliche" Ziffer nur die 8. Deshalb gibt es nur einen Fall von zehn, der als "unglücklich" bezeichnet werden kann.
Hat unser junger Rennfahrer recht?

Da hat sich unser junger Freund aber doch geirrt.
Insgesamt gibt es 999999 Nummern, und zwar läuft die Nummerierung von 000001 ... 999999.
Für die "glücklichen" Zahlen wird:
Auf dem ersten Platz kann jede beliebige der 9 Ziffern stehen, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9; auf dem 2.Platz ebenfalls. Deshalb gibt es $9 \cdot 9 = 9^2$ "glückliche" zweistellige Zahlen.
Für die weiteren Ziffern gibt es jeweils 9 mögliche Ziffern, womit die Anzahl der "glücklichen" sechsstelligen Zahlen gleich 9^6 ist. Da die Fahrradnummer 000000 nicht in Frage kommt, beträgt die Anzahl der "glücklichen" Zahlen $9^6 - 1 = 531440$, was etwas mehr als 53 % aller Nummern ausmacht und nicht 90 %, wie unser Rennfahrer vermutet.

52. Matheknobelei 9/69
Eine Stelle aus einem der Romane von Jack London bietet uns Material für eine geometrische Rechnung.

"Mitten in einem quadratischen Feld befand sich ein stählerner Mast, der tief in die Erde eingegraben war. Von der Mastspitze führte ein Stahlseil, dessen anderes Ende an einem Schlepper befestigt war. Der Traktorfahrer warf den Hebel um, der Motor begann zu arbeiten.
Nun bewegte sich der Schlepper vorwärts, wobei er einen Kreis um den Mast als Mittelpunkt beschrieb.
Graham meinte dazu: 'Damit die Anlage besser arbeitet, bleibt nur noch übrig, den Kreis in ein Quadrat umzuwandeln.'
'Stimmt, auf einem quadratischen Acker bleibt bei unserer bisherigen Arbeitsweise viel Boden ungepflügt.'
Graham rechnete nach und sagte dann: 'Wir verlieren etwa drei Äcker bei einem Feldstück von 10 Äckern.' "
Nun, seid ihr mit der Lösung einverstanden?

Die Rechnung ist falsch.
Der Verlust liegt unter 0,3 des Bodens. Angenommen, die Seite eines Quadrats ist a; seine Fläche demnach a^2. Der Durchmesser des einbeschriebenen Kreises ist ebenfalls a und seine Fläche $\frac{\pi}{4}a^2$.
Der brachliegende Teil eines Feldquadrats beträgt somit

$$a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 = (1 - \frac{\pi}{4})a^2 \approx 0{,}22a^2$$

Daraus ergibt sich, dass der unbearbeitete Teil des Ackerbodens nicht 30 %, wie Graham angenommen hatte, sondern nur 22 % beträgt.

53. Matheknobelei 10/69
Zu Beginn einer Gruppenversammlung begrüßen sich die Pioniere durch Händedruck. Es werden insgesamt 66 Händedrücke ausgetauscht.
Wieviel Freunde nahmen an der Sitzung teil?

Jeder der x Teilnehmer drückte $x - 1$ Hände. Dabei ist zu beachten, dass stets zwei Freunde sich gleichzeitig die Hand geben. Damit gilt die Gleichung:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \rightarrow x_1 = 12, x_2 = -11$$

Die negative Lösung hat in diesem Fall keinen Sinn. An der Sitzung nahmen also 12 Freunde teil.

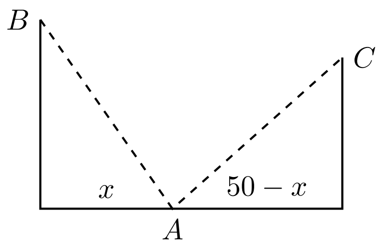
54. Matheknobelei 11/69
Zwei Büchsen, mit Kaffee gefüllt, haben die gleiche Form und sind aus dem gleichen Material hergestellt. Die erste Büchse hat eine Masse von 2 kg und ist 12,0 cm hoch; die zweite besitzt eine Masse von 1 kg bei einer Höhe von 9,5 cm.
Wieviel Kaffee enthalten die Büchsen?

Die Masse des Inhalts der ersten Büchse sei x kg, die der kleineren y kg. Die Masse der Büchsen bezeichnen wir mit z bzw. t kg. So erhalten wir die Gleichungen: $x + z = 2$ und $y + t = 1$.
Da sich die Massen des Inhalts der vollen Behälter wir ihre Volumina verhalten, so ist $\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9{,}5^3} \approx 2{,}02$ oder $x = 2{,}02y$.
Die Massen der leeren Büchsen verhalten sich jedoch wie ihre Oberflächen. Deshalb ist $\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9{,}5^2} \approx 1{,}60$ oder $t = 1{,}60t$.
Nach Einsetzen von x und z in die erste Gleichung erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2{,}02y + 1{,}60t &= 2 \\ y + t &= 1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $y = 0{,}95, t = 0{,}05$. Durch Einsetzen in die entsprechenden Gleichungen wird $x = 1{,}92, z = 0{,}08$. In der größeren Büchse sind 1,92 kg und in der kleineren 0,94 kg Kaffee enthalten.

55. Matheknobelei 12/69
An den Ufern eines Flusses stehen sich zwei Palmen gegenüber. Die Höhe der einen beträgt 30 Ellen, die der anderen 20 Ellen; der Abstand zwischen ihnen 50 Ellen.
Im Wipfel beider Palmen sitzt je ein Vogel. Beide bemerken plötzlich einen Fisch, der an die Oberfläche des Wassers zwischen den beiden Palmen geschwommen war und stürzen sich gleichzeitig auf ihn und erreichen den Fisch zum gleichen Zeitpunkt.
In welcher Entfernung vom Standort der größeren Palme zeigte sich der Fisch?



Aus der Zeichnung wird ersichtlich, dass nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + x^2 \quad \text{und} \quad \overline{AC}^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

Da für die Aufgabe $\overline{AB} = \overline{AC}$ gesetzt wird, erhält man $30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2$ mit der Lösung $x = 20$. Der Fisch zeigte sich 20 Ellen weit von der größeren Palme entfernt.

56. Matheknobelei 1/70
Das Aussichtsgeschoss des Fernsehturms in Berlin hat eine Höhe von 203 m über der Erdoberfläche.
Wie weit (Länge des Sehstrahles) könnte ein Besucher bei guter Sicht die Erdoberfläche beobachten, wenn die Erde als Kugel mit einem Radius von 6370 km angenommen wird?

Es ergibt sich folgende Lösung:

$$x^2 + r^2 = (r + h)^2 \to x = \sqrt{2rh + h^2} \approx 50{,}857 \text{ km}$$

So wäre es beispielsweise möglich, vom Berliner Fernsehturm aus Bad Freienwalde zu entdecken.

57. Matheknobelei 2/70
Der Freitagstundenplan für die Klassen 7, 8s, 8b, 9 und 10 ist aufzustellen. Direktor Meyer weiß:
In Klasse 7 müssen an diesem Tage erteilt werden: Ma (2), G (1), B (1), D (1) und Ch (1); in Klasse 8a: G, Mu, Ru, Stab., Ma und B; in Klasse 8b: Stab., E, B, Ru und Sport (2); in Klasse 9: Stab., Ru, D, Ch, B und G; in Klasse 10: Ch, D, Ru, Ph, B und E.

Alle Stunden werden durch die Kollegen Müller, Kabel, Fuchs, Lehmann und Steidel unterrichtet. Kollege Müller unterrichtet: Geschichte in 7 und 8a, Mathe in 8 und Sport in 8. Kollege Kabel unterrichtet Biologie in den Klassen 7 bis 10 und Deutsch in Klasse 7. Kollegin Fuchs unterrichtet Russisch in den 8., 9. und 10.Klassen und Erdkunde in den Klassen 8 und 10. Kollege Lehmann ist in den Klassen 9 und 10 im Deutschunterricht eingesetzt. Außerdem mit Staatsbürgerkunde in den 8. und 9.Klassen sowie in der 8a mit Musik. Kollegin Steidel unterrichtet Mathe in Klasse 7, Physik in Klasse 10 und Chemie in den Klassen 7, 9 und 10.

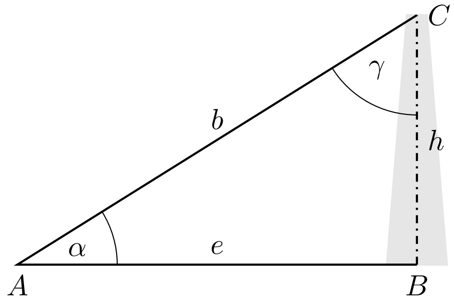
Die Bedingungen, an die ihr euch als Plangestalter zu halten habt, sollen hier kurz genannt werden.
1. Jede Klasse soll 6 aufeinanderfolgende Unterrichtsstunden haben.
2. Ebenso soll jeder Lehrer keine Springstunde in seinem Plan haben.
3. Erschwerend für den Direktor ist, dass er über einige Termine nicht mehr frei verfügen kann. Dazu gehören: Die Sportstunden in der Klasse 8b müssen in der 3. und 4. Stunde liegen. Die Musikstunde in Klasse 8a fällt auf die 6.Stunde und die Chemiestunde in der Klasse 10 auf die 1.Stunde.
Aufgabe: Erstellt einen Stundenplan!

Für die Gestaltung des Stundenplans gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine ist

Kl.7	Kl. 8a	Kl. 8b	Kl. 9	Kl. 10
G	B	Ru	D	Ch
Ma	Ma	B	Ru	D
D	Ru	Sp	Stab	Ph
Ch	Stab	Sp	B	Ru
B	G	Stab	Ch	E
Ma	Mu	E	G	B

58. Matheknobelei 3/70
Die Spitze C eines Turms BC erscheint von einem Punkt A der Horizontalebene, auf der der Turm steht, unter dem Winkel $BAC = \alpha = 18°45'$. Punkt A ist 230 m $= e$ vom Fußpunkt B des Turmes entfernt.
Wie hoch ist der Turm?

Anhand der Skizze sieht man, dass eine trigonometrische Aufgabe vorliegt. Für den Winkel γ wird $\gamma = 180° - \alpha = 71°15'$. Für die Hypotenuse wird $AC = b = \frac{e}{\sin\gamma} \approx 242{,}9$ m und somit für die Höhe des Turms $h = b \cdot \sin\alpha \approx 78{,}07$ m.



Diese Mal sind zwei Aufgaben zu lösen, die beide jedoch in engem Zusammenhang stehen.

1. Stellt euch vor, ihr seid einmal um die Erde herumgegangen und zwar am Äquator entlang. Um welchen Betrag ist die vom Kopf zurückgelegte Strecke länger als die von den Fußspitzen zurückgelegte? Die Normalgröße eines Menschen beträgt 1,70 m.

2. Um den Äquator wird eine Windung Draht fest herum gewickelt und dann um einen Meter verlängert. Wäre eine Maus in der Lage, unter diesem Draht hindurchzukriechen?

1) Die Füße haben den Weg $2\pi r$ (r = Erdradius) zurückgelegt, der Scheitel die Strecke von $2\pi/r + 1{,}7)$. Die vom Kopf zurückgelegte Strecke ist folglich um $2\pi \cdot 1{,}7 \approx 10{,}7$ m länger als der Weg der Füße.
2) Auf den ersten Blick erwartet man, dass die Lockerung um 1 m auf die 40 Millionen Meter Erdumfang winzig ausfallen. Tatsächlich beträgt der Abstand aber $\frac{100}{2\pi} \approx 16$ cm. Durch diesen Zwischenraum kriecht nicht nur eine Maus, sondern auch eine ausgewachsene Katze.

60. Matheknobelei 5/70
Eine Zugmaschine mit Hänger, die mit Fertigteilen beladen sind, fahren vom Betrieb zu einer Baustelle. Hierbei wird eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht. Nach dem Entladen wird auf der Rückfahrt zum Betrieb (gleiche Strecke) eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erzielt.
Welche mittlere Geschwindigkeit ergibt sich für die gesamte Fahrstrecke (Hin- und Rückweg)?

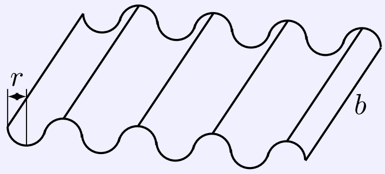
Es bedeuten: s Fahrstrecke Betrieb-Baustelle, t_1 Fahrzeit zur Baustelle, t_2 Fahrzeit zum Betrieb, $v_1 = 15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2 = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und v_M mittlere Geschwindigkeit. Dann gilt:

$$t_1 + t_2 = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = \frac{s(v_1 + v_2)}{v_1 v_2} \to v_M = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Mit den gegebenen Werten wird $v_M = 20$, d.h. die mittlere Geschwindigkeit ist 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

61. Matheknobelei 6/70
Der Querschnitt des in der Abbildung gezeigten Wellblechs bildet eine Wellenlinie, die aus kongruenten Halbkreisen vom Radius r (in cm) besteht.
Das Blech wird in zwei Ausführungen hergestellt: Die eine hat Halbkreise von $r_1 = 2$ cm, die andere von $r_2 = 1$ cm. Beide Blechsorten haben die gleiche Breite b.

Ihr sollt feststellen, bei welcher Sorte mehr Material verbraucht wird.



Den Materialverbrauch kontrolliert man, indem man berechnet, wieviel laufende Meter Flachblech derselben Breite wie das Wellblech benötigt werden, um dieselbe Länge (z.B. 100 cm) Wellblech zu produzieren.
Auf 100 cm Länge gehen $\frac{100}{2r_1}$ Halbkreise bzw. $\frac{100}{r_2}$ Halbkreise. Jeder der Halbkreise hat den Radius r_1 bzw. r_2, so dass die Gesamtlänge des flachen Materials $\frac{100}{2r_1}\pi r_1$ bzw. $\frac{100}{2r_2}\pi r_2$ ist. Die Radien entfallen bei der Berechnung, so dass bei beiden Arten gleichviel Material benötigt wird. Zur Erzeugung von 100 cm Wellblech braucht man etwa 157 cm Flachblech.

62. Matheknobelei 7/70
Zwei Züge fahren aneinander in entgegengesetzter Richtung vorbei. Der eine mit der Geschwindigkeit von 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der andere mit der von 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ein Fahrgast der im zweiten Zug saß, stellte fest, dass der erste Zug zur Vorbeifahrt an ihm 6 s brauchte.
Wie lang war der Zug?

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Fahrgast im zweiten Zug gegenüber dem fahrenden ersten Zug fortbewegt, ist 45 $\frac{\text{km}}{\text{h}} + 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 81 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 22{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Folglich ist die Länge des ersten Zuges $22{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6\text{s} = 135$ m.

63. Matheknobelei 8/70
Auf einem Platz sind fünf Lautsprecher gleicher Leistung angebracht, und zwar befinden sich an einem Mast zwei und an einem anderen drei Lautsprecher.
Die Entfernung zwischen den Masten beträgt 50 m.
Welchen Platz muss man wählen, damit man die Übertragung aus beiden Gruppen von Lautsprechern mit gleicher Stärke hört?

Wenn wir die Entfernung des gesuchten Punktes von dem Mast mit zwei Lautsprechern mit x bezeichnen, so wird dessen Entfernung vom Mast mit drei Lautsprechern durch $(50 - x)$ ausgedrückt.
Da die Schallstärke proportional dem Quadrat der Entfernung abnimmt, gilt die Gleichung

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50-x)^2} \to x^2 + 200x - 5000 = 0 \to x_1 = 22{,}5; x_2 = -222{,}5$$

Der Punkt gleicher Hörbarkeit befindet sich 22,5 m von dem Mast mit zwei Laufsprechern entfernt.

64. Matheknobelei 9/70
Ein Ball wird mit einer Geschwindigkeit von 25 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht in die Höhe geworfen.
In wieviel Sekunden wird er in einer Höhe von 20 m über der Erde sein? Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.

Für den senkrechten Wurf nach oben gilt die Formel $h = vt - \frac{gt^2}{2}$, wobei h die erreichte Höhe des Körpers über der Erde, v die Anfangsgeschwindigkeit, g die Erdbeschleunigung und t Flugzeit ist. Einsetzen der Werte mit dem gerundeten Wert g = 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ergibt

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2} \rightarrow t2 - 5t + 4 = 0 \rightarrow t_1 = 1; t_2 = 4$$

Der Ball befindet sich zweimal in der Höhe von 20 m, einmal beim Aufstieg nach einer Sekunde und dann beim Zurückfallen nach vier Sekunden.

65. Matheknobelei 10/70
Die Seiten eines Rechtecks werden durch ganze Zahlen dargestellt. Wie lang müssen die Seiten sein, damit der Umfang des Rechtecks zahlenmäßig gleich dem Flächeninhalt ist?

Haben wir die Seiten des Rechtecks mit x und y bezeichnet, wird

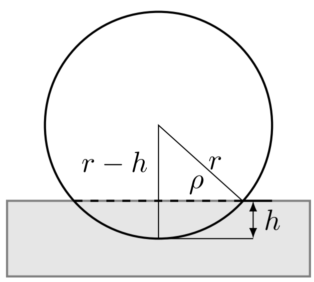
$$2x + 2y = xy \rightarrow x = \frac{2y}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}$$

Da x und y positive Zahlen sein sollen, muss auch die Zahl $y - 2$ positiv sein, d.h. $y > 2$. Da x eine ganze Zahl sein muss, muss auch der Ausdruck $\frac{4}{y-2}$ eine ganze Zahl sein.
Bei $y > 2$ ist dies aber nur möglich, wenn y gleich 3, 4 oder 6 ist. Entsprechende Werte von x werden 6, 4 und 3 sein. Also ist die gesuchte Figur ein Rechteck mit den Seiten 3 und 6.

66. Matheknobelei 11/70
Auf der Radrennbahn trainieren zwei Fahrer. Sie fahren mit konstanter Geschwindigkeit. Fahren sie in entgegengesetzten Richtungen, treffen sie sich alle 10 Sekunden. Fahren sie jedoch in einer Richtung, so überholt einer den anderen alle 170 Sekunden.
Mit welcher Geschwindigkeit fährt jeder, wenn die Bahnlänge 170 m beträgt?

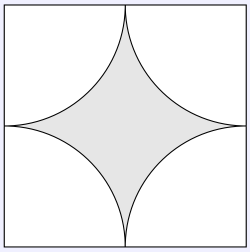
Beträgt die Geschwindigkeit des ersten Fahrers $x\frac{\text{m}}{\text{s}}$, so fährt er in 10 Sekunden $10x$ m. Fährt ihm der zweite Fahrer entgegen, legt dieser in 10 Sekunden den Rest der Bahn $170 - 10x$ m zurück. Ist die Geschwindigkeit der zweiten Fahrers y, so sind das $10y$ m, d.h. $170 - 10x = 10y$.
Fahren beide hintereinander her, der erste legt in 170 Sekunden $170x$ m zurück, der zweite $170y$ m, und der erste schneller als der zweite, so legt von einer Begegnung bis zur anderen eine Runde mehr zurück, d.h. $170x - 170y = 170$.
Auflösen des Gleichungssystems ergibt $x = 9\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $y = 8\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

67. Matheknobelei 12/70
Bei der Härtebestimmung eines Werkstoffes mittels Kugeldruckmethode nach Brinell wird die Eindrucktiefe h einer kleine Stahlkugel von bekanntem Durchmesser $d = 2r$ in einem zu prüfenden Material aus dem Durchmesser $\delta = 2\rho$ des Eindruckkreises berechnet.
Wie groß ist die Eindrucktiefe h bei einem Kugeldurchmesser von $d = 10$ mm und einem Durchmesser des Eindruckkreises von $\delta = 6$ mm?



Nach dem Satz des Pythagoras ist $r^2 = (r-h)^2 + \rho^2$. Nur die Lösung $h = r - \sqrt{r^2 - \rho^2}$ ist brauchbar, da bei der zweiten Lösung das Verfahren ($r = \rho$) nicht mehr verwendet werden kann. Für die angegebenen Werte wird $h = 1$ mm.

68. Matheknobelei 1/71
Aus einem Quadrat ist eine Fläche herausgeschnitten, die von 4 gleichen Kreisbögen begrenzt ist (siehe Abbildung). Wieviel Prozent der Quadratfläche macht sie aus?



Wir bezeichnen die Quadratseite mit a. Wie zu erkennen ist, ergeben die 4 Kreisausschnitte einen Vollkreis, d.h.

$$A = A_Q - A_K = a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 = a^2(1 - \frac{\pi}{4}) \approx 0{,}215a^2$$

Die Fläche macht 21,5 % des Quadrates aus.

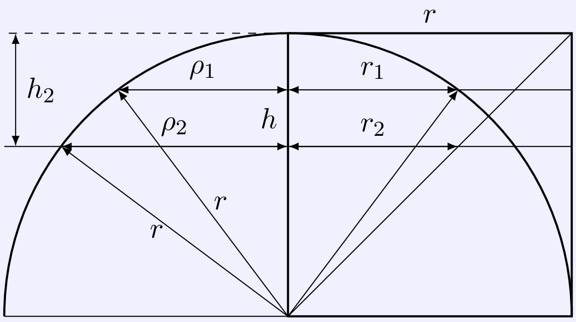
69. Matheknobelei 2/71
In einem Siemens-Martin-Ofen werden 20 t Stahl von 0,5 % Kohlenstoffgehalt mit 5 t Grauguss von 5 % Kohlenstoffgehalt zusammengeschmolzen.
Wieviel Prozent Kohlenstoff enthält die Mischung?

Der Kohlenstoffgehalt der Mischung sei x %, d.h. 25 t Mischung enthalten $\frac{25x}{100}$ t Kohlenstoff. 20 t Stahl enthalten $\frac{20 \cdot 0{,}05}{100}$ t und die 5 t Grauguss $\frac{5 \cdot 0{,}5}{100}$ Kohlenstoff. Die Summe der Kohlenstoffmengen der Teile muss der Gesamtmenge an Kohlenstoff gleich sein.

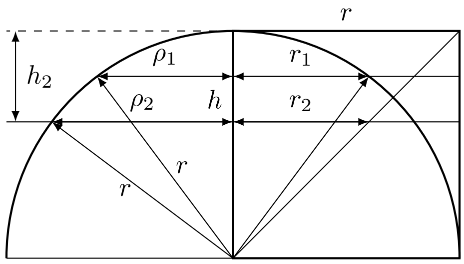
$$\frac{20 \cdot 0{,}05}{100} + \frac{5 \cdot 0{,}5}{100} = \frac{25 \cdot x}{100} \rightarrow x = 1{,}4$$

Die Mischung enthält also 1,4 % Kohlenstoff.

70. Matheknobelei 3/71



Aus dieser Zeichnung ist die Formel für die Berechnung des Volumens einer Kugelschicht abzuleiten.



Hat eine Kugelschicht zwischen den Schnittkreisen mit den Radien ρ_1 und ρ_2 die Höhe h, so ist ihr Volumen nach dem Cavalierischen Prinzip die Differenz eines Zylinders $\pi r^2 h$ und eines Kegelstumpfes mit den Grundkreisradien $r_1 = r_2 + h$ und r_2. Man erhält

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}[(r_2+h)^2 + (r_2+h)r_2 + r_2^2] = \frac{\pi h}{6}(6r^2 - 6r_2^2 - 6r_2 h - 2h^2)$$

Nach den Beziehungen $\rho_1^2 = r^2 - (r_2+h)^2$ und $\rho_2^2 = r^2 - r_2^2$ wird

$$3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 = 6r^2 + 6r_2^2 + 6r_2 h - 2h^2$$

und für das Volumen der Kugelschicht gilt

$$V = \frac{\pi h}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)$$

71. Matheknobelei 4/71
Die Seitenlängen eines Dreiecks betragen $a = 4$ cm, $b = 13$ cm und $c = 15$ cm.
Wie groß sind a) der Flächeninhalt, b) die drei Höhen, c) des Radius des Inkreises und d) die Radien der drei Ankreise?

Der Umfang beträgt $u = 32$ cm, der halbe Umfang $s = \frac{u}{2} = 16$ cm. Nach der heronischen Dreiecksformel folgt $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 24\text{cm}^2$.
Für den Flächeninhalt gilt auch $A = \frac{1}{2}hg$. Daraus ergibt sich für die Höhen $h_a = 12$ cm, $h_b =$ 3,7 cm und $h_c = 3{,}2$ cm.
Aus der Formel für den Dreiecksfächeninhalt $A = \rho \cdot s$ folgt für den Radius ρ des Inkreises: $\rho =$ 1,5 cm. Die Radien der Ankreise bestimmt man aus $A = \rho_a(s-a) = \rho_b(s-b) = \rho_c(s-c)$ zu ρ_a $= 2$ cm, $\rho_b = 8$ cm und $\rho_c = 24$ cm.

72. Matheknobelei 5/71

1. $$\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{10}}}} = \ ?$$

2. Ein $l_1 = 400$ m langer Draht vom Durchmesser $d_1 = 4$ mm hat die Masse $m_1 = 36{,}7$ kg.
   Wieviel Meter Draht aus dem gleichen Material, aber von Durchmesser $d_2 = 6$ mm haben die Masse $m_2 = 90$ kg?

1.
$$\sqrt[2]{\sqrt[5]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{10}}}} = \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}} = \sqrt[100]{10} = 10^{0,01}$$

2. Da die Drähte aus dem gleichen Material bestehen, verhalten sich ihre Massen wie ihre Rauminhalte; es gilt

$$m_1 : m_2 = \frac{\pi}{4}d_1^2 l_1 : \frac{\pi}{4}d_2^2 l_2 \to l_2 = \frac{m_2 d_1^2 l_1}{m_1 d_2^2} \approx 436 \text{ m}$$

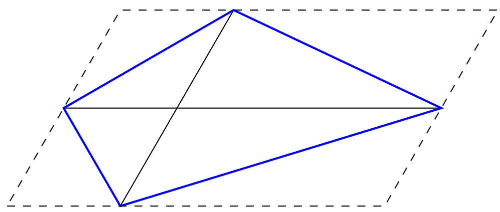
73. Matheknobelei 6/71
Von einem Blechstück in Form eines regelmäßigen Siebenecks, dessen Seiten vom Mittelpunkt einen Abstand von 15 cm haben, wird ringsherum ein 1 cm breiter Streifen abgeschnitten. Wieviel Prozent beträgt der dadurch verursachte Materialabfall?

Nach Abschneiden des Streifens entsteht ein ähnliches Siebeneck. Für die Flächen A_{vor} und A_{nach} gilt dann

$$\frac{A_{nach}}{A_{vor}} = \left(\frac{14}{15}\right)^2 = \frac{196}{225}$$

mit einem relativen Abfall von $\frac{29}{225} \approx 12{,}9$ %.

74. Matheknobelei 7/71
Ein Kartonstück hat die Gestalt eines unregelmäßigen Vierecks. Wie groß ist seine Masse, wenn die Diagonalen des Vierecks die Längen von 30 cm bzw. 50 cm haben und einen Winkel von 60° miteinander bilden und 1 Quadratzentimeter Karton 0,5 g wiegt?



Die Fläche des Kartonstückes sei A. Man ergänzt diese Fläche (wie in der Abbildung) zu einem Parallelogramm der Fläche $2A$, mit $2A = 50 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1300 \to A = 650$ cm^2.
Die Masse ist dann 325 g.

75. Matheknobelei 8/71
Fritz und Klaus stellen Blechteile her und benötigen für jedes Teil 20 Minuten. Sie bauen in 2 Stunden eine Vorrichtung, die eine Einsparung von 50 % der Herstellungszeit bringt.
Wieviel Teile sind mindestens zu fertigen, damit dadurch die Bauzeit für die Vorrichtung zurückgewonnen wird und außerdem 2 Stunden Freizeit herausgewirtschaftet werden?

Es müssen mindestens x Teile hergestellt werden.
Zeitbedarf ohne Vorrichtung: $x \cdot 20$
Zeitbedarf bei Vorrichtung einschließlich Zeitgewinn von 120 Minuten: $x \cdot 10 + 120 + 120$
Beide Terme gleichgesetzt, ergibt $x = 24$. Es müssen daher mindestens 24 Teile hergestellt werden.

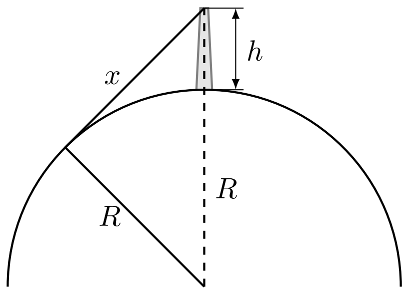
76. Matheknobelei 9/71
Längs einer Eisenbahnstrecke wurden neue Personenbahnhöfe zusätzlich gebaut. Damit auf jeder Station der Linie für jede andere Station Fahrkarten zur Verfügung stehen, wurden vor der Eröffnung der neuen Bahnhöfe 46 Fahrkartensätze (neue Fahrkarten zwischen zwei Stationen) zusätzlich gedruckt.
Wieviel Bahnhöfe lagen schon an der Linie und wieviel Bahnhöfe wurden neu gebaut?

Wenn an der Linie n Bahnhöfe liegen, muss jeder Bahnhof über $n-1$ Fahrkartensätze verfügen; insgesamt sind $n(n-1)$ Fahrkartensätze nötig. Wenn an der Linie bisher x Bahnhöfe lagen und es in Zukunft sein sollen, werden $y(y-1)-x(x-1)$ neue Fahrkartensätze gebraucht.

$$y(y-1)-x(x-1)=46 \rightarrow y^2-x^2-(y-x)=46 \rightarrow (y-x)(y+x-1)=46$$

Beide Faktoren müssen ganze und positive Zahlen sein; das ergibt nur zwei Möglichkeiten: $46=2\cdot 23; 46=1\cdot 46$. Im ersten Fall ist $y-x=2$ und $y+x-1=23$. Die Gleichungen ergeben $x=11$, $y=13$. Folglich lagen bisher an der Linie 11 Bahnhöfe und nach der Eröffnung zweier neuer Bahnhöfe werden es 13 sein.
Der zweite Fall entfällt, da dort nur ein neuer Bahnhof eröffnet würde und nach dem Aufgabentext von "Bahnhöfen"die Rede ist.

77. Matheknobelei 10/71
Wie weit ist der Horizont für einen Beobachter auf einem 200 m hohen Turm entfernt? Wieviel km Horizont überblickt er in 5 Minuten, wenn er in 1 Stunde eine Umdrehung macht?
(Erdradius $R=6400$ km)



Entsprechend der Abbildung gilt (Turmhöhe h, Horizontentfernung x, Erdradius R)

$$(R+h)^2=R^2+x^2 \quad ; \quad x^2=2Rh+h^2$$

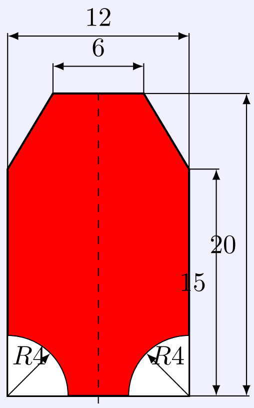
Bei $R=6400$ km und $h=0{,}2$ km wird $x\approx 50{,}6$ km.
Horizontlänge ist $2\pi\frac{R}{R+h}$, womit in 5 Minuten von 60 min je Drehung $\frac{1}{12}$ überblickt werden kann, d.h. 26,5 km.

78. Matheknobelei 11/71
Auf einem 40 km langen Streckenabschnitt hatte ein Schnellzug eine um 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größere Geschwindigkeit als ein Güterzug, der dafür 20 min länger benötigte. Welche Geschwindigkeit hatten die Züge?

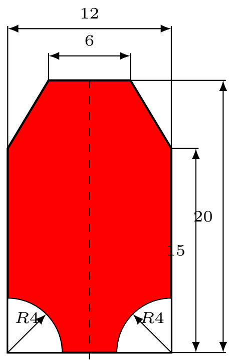
Für den Schnellzug sei v_S die Geschwindigkeit und t_S die Fahrtzeit, für den Güterzug entsprechend v_G und t_G.
Es ist $v_St_S=v_Gt_G=40$ und $v_S+v_G=20$. Einsetzen ergibt $t_S=\frac{1}{60}v_G$ und

$$\frac{1}{60}v_G^2+\frac{1}{3}v_G-40=0 \rightarrow v_G=40\frac{km}{h}; v_S=60\frac{km}{h}$$

79. Matheknobelei 12/71



Wieviel Prozent der skizzierten Fläche nimmt ein weißer Sektor ein? (Maße in mm)



Die Gesamtfläche setzt sich aus der Fläche des Rechtecks mit den Seiten 12 und 15, sowie aus der des Trapezes mit den Seiten 12 und 6 und der Höhe 5 zusammen. Für die Gesamtfläche erhält man

$$F = 12 \cdot 15 + \frac{12+6}{2} \cdot 5 = 227 \text{ mm}^2$$

Ein Kreissektor hat die Fläche $f = \frac{1}{4}\pi r^2 = 12{,}56 \text{ mm}^2$. Ein Kreissektor nimmt damit rund 5,6 % der Gesamtfläche ein.

80. Matheknobelei 1/72
Wieviel Lampen mit der Aufschrift 40 W, 6 V dürfen in einer Wohnung brennen, wenn die Spannung auf 200 V abgesunken ist und die Gesamtstromstärke durch die Sicherung auf 6 A begrenzt wird?

Die Lampen sind hintereinandergeschaltet. Der Innenwiderstand jeder Lampe beträgt

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{36}{40} = 0{,}9\Omega$$

Bei n Lampen gilt 200 V $= nR \cdot 6$ A $= n \cdot 5{,}4$ V; $n = 37$. Es dürfen also höchstens 37 Lampen brennen.

81. Matheknobelei 2/72
Auf einer Holzrolle von 10 cm Durchmesser ist eine lange Papierbahn fest aufgewickelt und bildet mit der Holzrolle einen Zylinder von 30 cm Durchmesser.
Wie lang ist ungefähr die aufgewickelte Papierbahn, wenn das Papier 0,1 mm dick ist, zwischen den Lagen kein Luftzwischenraum gelassen wurde und Anfang und Ende der Bahn auf gleichem Radius (durch die Mittelachse des Zylinders) liegen?

Das gewickelte Papier stellt einen Hohlzylinder mit der Wandstärke von 10 cm dar; somit sind $\frac{100}{0{,}1} = 1000$ Lagen aufgewickelt.
Die Lagen haben eine Länge von durchschnittlich $r_{Mittel} \cdot 2\pi = \frac{5+15}{2} \cdot 2\pi = 20\pi$ cm.
Die gesamte aufgewickelte Länge beträgt $L = 1000 \cdot 20\pi \approx 628$ cm.

82. Matheknobelei 3/72
Falls x betragsmäßig nicht zu groß ist, gilt die Näherungsformel

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

Gesucht ist der Fehler Δ dieser Näherungsformel. Schätze ab, wie groß x höchstens sein darf, damit der Fehler kleiner als 0,01 bleibt. (da Δ nur klein ist, gilt $\Delta^2 \approx 0$).

Es gilt mit dem Fehler $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \Delta$, quadriert

$$1 + x = 1 + x + \frac{x^2}{4} + (2 + \frac{1}{2})\Delta + \Delta^2 \qquad (\Delta^2 = 0)$$

somit

$$\Delta = \frac{-x^2}{8(1+\frac{x}{2})} = -\frac{x^2}{8}$$

da $|x|$ nur klein ist. Für $\Delta = 0{,}01$ muss sein $|x| \leq 0{,}28$. Das negative Zeichen von Δ besagt, dass die Näherungsformel stets zu große Werte angibt.

83. Matheknobelei 4/72
Peter soll fotografiert werden, während er in 50 m Abstand quer über die Bildfläche mit einer Geschwindigkeit von 18 km/h fährt.
Wie groß darf höchstens die Belichtungszeit sein, wenn die Optik eine Brennweite von 50 mm hat und eine Bildkonturen-Unschärfe von 0,05 mm zugelassen wird?
Wie weit müsste Peter entfernt sein, damit bei einer zulässigen Belichtungszeit von 1/20 s und sonst gleichen Bedingungen die gleiche Konturen- Unschärfe erreicht wird?
(Es wird zur Vereinfachung angenommen, dass sämtliche projizierenden Lichtstrahlen durch einen Punkt im Zentrum der Optik laufen.)

In einer Sekunde legt Peter fünf Meter zurück. Dieser Strecke entspricht auf dem Film die Länge x. Nach dem Strahlensatz folgt

$$\frac{x}{50 \text{ mm}} = \frac{5 \text{ m}}{50 \text{ m}}; \qquad x = 5 \text{ mm (Weg je Sekunde)}$$

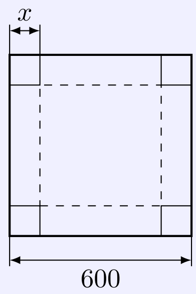
Bei einer Konturen-Unschärfe von 0,05 mm, die durch diese Bewegung erzeugt wird, darf die Belichtungszeit nur $\frac{0{,}05}{5} = \frac{1}{100}$ einer Sekunde betragen.
Bei einer Belichtungszeit $\frac{1}{20}$ s $= \frac{5}{100}$ s, muss der Abstand des Objektes (Peter) den fünffachen Wert haben, also 250 m betragen, damit die Konturen-Schärfe nicht geändert wird.

84. Matheknobelei 5/72
In eine Lore von 800 kg Masse, die mit der Geschwindigkeit 1,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ fährt, fallen senkrecht 600 kg Schotter.
Auf welchen Betrag sinkt dadurch die Geschwindigkeit der Lore?

Mit m_1 als Masse der Lore, m_2 der Masse des Schotters und u_1 der ursprünglichen Geschwindigkeit wird für die Endgeschwindigkeit

$$v = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \approx 0{,}86 \frac{m}{s}$$

85. Matheknobelei 6/72



Aus einem quadratischen Stück Blech mit der Kante $a = 600$ mm werden an den Ecken Quadrate mit der Seite x herausgeschnitten.
Die stehenbleibenden rechteckigen Flächen werden längs der gestrichelten Geraden rechtwinklig umgebogen, so dass ein offener rechtwinkliger Kasten entsteht. Für seinen Verwendungszweck ist es wichtig, dass er ein größtmögliches Volumen besitzt.

a) Für welchen Wert von x ist das Kastenvolumen am größten?
b) Wie groß ist dann für diesen Kasten die Höhe im Vergleich zu seiner Grundflächenkante?
c) Wie groß ist für diesen größten Kasten die Höhe im Vergleich zur Kante a?

a) Das Kastenvolumen ist für $x = 100$ mm am größten (16000 cm^3).
b) Das Verhältnis Höhe: Grundflächenkante beträgt 1 : 4
c) Das Verhältnis Höhere beträgt 1 : 6.

86. Matheknobelei 7/72
Der Wasserbehälter einer LPG enthält 1000 m^3 Wässer und kann von zwei Pumpanlagen in zwei Tagen gefüllt werden, falls kein Wasser verbraucht wird. Dabei fördert die ein Pumpe täglich 300 m^3 Wasser mehr als die andere.
Wieviel Tage kann die LPG täglich 400 m^3 Wasser entnehmen, wenn die größere Pumpanlage ausgefallen ist?

Förderleistung der Pumpen
größere Pumpe: x + 300 m^3/Tag; kleinere Pumpe: x m^3/Tag
Füllbedingung $(x + 300 + x) \cdot 2 = 1000$; $x = 200$ (2 Tage)
Bilanz in t Tagen, wenn größere Pumpe ausgefallen ist $1000 + 100t$ (Zuführung) $= 400t$ (Entnahme); $t = 3$
Die LPG kann aus dem Wasserbehälter 3 Tage je 400 m^3 entnehmen, wenn die größere Pumpe ausgefallen ist.

87. Matheknobelei 8/72
Von einem Rad mit dem Durchmesser 20 cm, das pro Minute 600 Umdrehungen macht, löst sich eine Schraube und fliegt senkrecht nach oben.
Wie hoch fliegt sie?

Die am Umfang des Rades gedrehte Schraube hat eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{\text{Umfang}}{\text{Zeit für eine Umdrehung}} = \frac{20\pi}{0{,}1} = 6{,}28\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nach dem Energieerhaltungssatz $\frac{m}{2}v^2 = mgh$ fliegt die Schraube dann $h = \frac{v^2}{2g} \approx 2$ m hoch.

88. Matheknobelei 9/72
Wir konstruieren ein Quadrat mit 10 cm Seitenlänge und über jeder Seite nach außen ein gleichseitiges Dreieck. Dann biegen wir die vier Dreiecke so nach einer Seite auf, dass sich die Dreiecksspitzen in einem Punkt vereinen.
Berechnet von diesem Körper a) die Oberfläche, b) die Höhe h und c) das Volumen V!

Es handelt sich bei diesem Körper um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
a) $O = 273$ cm^2, b) $h = 7{,}1$ cm, c) $V = 236$ cm^3

89. Matheknobelei 10/72
Wieviel Prozent beträgt der Materialabfall, wenn aus einem Würfel die größtmögliche Kugel gedreht wird?

Der Materialabfall beträgt 48 %.

90. Matheknobelei 11/72
Einem Aufklärungsboot, das zu einem Flottenverband gehört, wird der Auftrag gegeben, ein Meeresgebiet von 70 Seemeilen in Fahrtrichtung des Verbandes zu erkunden. Die Geschwindigkeit des Flottenverbandes beträgt 15 Knoten (1 Knoten = 1 Seemeile je Stunde), die Geschwindigkeit des Aufklärers 28 Knoten.
Nach welcher Zeit kann das Aufklärungsboot beim Verband zurückerwartet werden?

$28x + 15x = 140$, d.h. $x = 3\frac{11}{43}$
Der Aufklärer kehrt in ungefähr 3 Stunden 15 Minuten zum Flottenverband zurück.

91. Matheknobelei 12/72
In einem zylindrischen Behälter, der bis zur Höhe $h = 1{,}2$ m mit Wasser gefüllt ist, wird ein zylindrischer Tauchkörper von $d_2 = 30$ cm bis zum Grund eingesenkt, wodurch der Wasserstand um $\Delta h = 4$ cm steigt. Wieviel Liter Wasser befinden sich im Behälter?

Ist d_1 der Durchmesser des Zylinders, so gilt

$$\frac{d_1^2 \pi h}{4} = \frac{(d_1^2 - d_2^2)\pi(h + \Delta h)}{4}$$

$$d_1 = d_2 \sqrt{\frac{h + \Delta h}{\Delta h}} \to V = \frac{d_2^2 (h + \Delta h)\pi h}{4\Delta h} \approx 2{,}63$$

Im Behält befinden sich 2,63 m^3 Wasser.

92. Matheknobelei 1/73
In ein Ferienlager wird eine Sendung mit 50 Heften Unterhaltungsliteratur mit den Heftpreisen -,50 M, 1,- M und 2,50 M geliefert. Rechnungsbetrag: 62,50 M + Spesen.
Der Lieferschein ging verloren; jedoch erinnerte man sich, dass die meisten Hefte in der billigsten Preisstufe waren und dass in den beiden anderen Preisstufen ungefähr gleich viel Hefte geliefert wurden. Wieviel Hefte der einzelnen Preisstufen enthielt die Sendung?

Die Sendung umfasste x Hefte zu M -,50, y zu M 1,- und z zu M 2,50. Damit ergeben sich: $x + y + z = 50$ und $0{,}5x + y + 2{,}5z = 62{,}5$ oder nach Elimination von x: $y + 4z = 75$.
Dieses Gleichungssystem ist nicht genügend bestimmt; als Zusatzbedingung kommt in Frage, dass x, y bzw. z ganzzahlig und positiv sind.

$$z = \frac{75 - y}{4} = 18 + \frac{3 - y}{4}$$

ist nur ganzzahlig, wenn es $u = \frac{3-y}{4}$ auch ist. Dann gilt $z = 18 + u$, $y = 3 - 4u$ und $x = 29 + 3u$ mit folgender Liste möglicher Lösungen:

u	x	y	z	
0	29	3	18	
-1	26	7	17	
-2	23	11	16	*
-3	20	15	15	*
-4	17	19	14	

* Lösung auf Grund der Zusatzaufgabe am wahrscheinlichsten

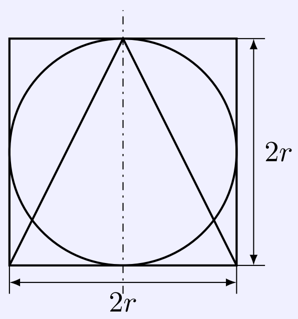
93. Matheknobelei 2/73
Eine Glühlampe für 60 V und 30 W soll bei gleicher Leistung unter Zwischenschaltung eines Kondensators an 120 V Wechselspannung (50 Hz) angeschlossen werden. Welche Kapazität muss dieser haben?

$$R = \frac{U_1^2}{P} = 120\Omega \qquad ; \qquad Z = \frac{U_2}{I} = 240\Omega$$

aus $\frac{1}{\omega C} = X_c = \sqrt{Z^2 - R^2}$ wird

$$C = \frac{1}{2\pi f X_c} \approx 1{,}53\mu\text{F}$$

94. Matheknobelei 3/73



Wie verhalten sich die Volumen eines Kegels, einer Kugel und eines Zylinders zueinander, die demselben Würfel einbeschrieben sind.
Anleitung: Die Abbildung stellt den gemeinsamen Achsenschnitt des Kegels, der Kugel und des Zylinders dar. Die Kegelspitze liegt in der Mitte einer Würfelfläche.

Kegel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r$, Kugel $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, Zylinder $V = \pi r^3 \cdot 2r$
Ins Verhältnis gesetzt ergibt sich

$$\frac{2}{3}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 : 2\pi r^3 = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : \frac{6}{3} = 1 : 2 : 3$$

95. Matheknobelei 4/73
Ein Holzzylinder (Dichte $\rho = 0{,}7\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) steht in einem Gefäß mit rauem Boden. Wie hoch muss mindestens in dem Gefäß der Wasserstand sein, damit der Zylinder sich gerade vom Boden erhebt?

Der Zylinder wird abgehoben, wenn das Gewicht der verdrängten Wassermenge gerade das Gewicht des Zylinders erreicht. Wenn h die Höhe des Zylinders ist und A seine Querschnittsfläche, ist dazu ein Wasserstand der Höhe x nötig:
$A \cdot x = 0{,}7A \cdot h$, d.h. $x = 0{,}7h$. Der Wasserstand beträgt beim Abheben gerade 70% der Zylinderhöhe.

96. Matheknobelei 5/73
Ein $l_1 = 50$ m langer und $d_1 = 1$ mm dicker Kupferdraht wird auf die Länge $l_2 = 1800$ m gezogen. Wie groß ist der neue Durchmesser d_2?

$$\frac{d_1^2 \pi l_1}{4} = \frac{d_2^2 \pi l_2}{4} \qquad \rightarrow \qquad d_2 = d_1 \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = 0{,}17 \text{ mm}$$

97. Matheknobelei 6/73
Gibt es einen Zylinder, dessen Maßzahl der Oberfläche O doppelt so groß wie die Maßzahl seines Volumens V ist, und bei dem die Maßzahl des Umfangs U der Grundfläche mit deren Flächeninhalt A in der Maßzahl übereinstimmt?
Wenn ja, berechne Volumen und Oberfläche!

Es gibt einen Zylinder der geforderten Art. Sein Volumen beträgt $V = \pi r^2 h = 8\pi$ Raumeinheiten, seine Oberfläche $O = 2\pi r(r + h) = 16\pi$ Flächeneinheiten.

98. Matheknobelei 7/73
Ein Kunststoffrohr hat die Dichte 1,218 g/cm^3. Die Wanddicke beträgt 2,0 mm, der Außendurchmesser 32 mm, die Masse 0,8 kg.
Wie lang ist das Rohr?

Innendurchmesser 32,0 mm - 4,0 mm = 28,0 mm
$F = \pi(R^2 - r^2) = \pi(16^2 - 14^2) = 1{,}884$ cm^2 Fläche des Kreisringes
$V = \frac{m}{\rho} = \frac{800}{1{,}218}$ cm^3 = 657 cm^3 = Volumen des Hohlzylinders
Länge des Rohres: $1{,}884 \cdot x = 657$, d.h. $x = 3{,}49$ m

99. Matheknobelei 8/73
Ein Junge hatte einen Fisch geangelt und wurde gefragt, wie schwer dieser sei. Er antwortete darauf, dass der Fisch 3/4 kg und dreiviertel seines Gewichts wiege.
Wieviel kg wiegt der Fisch?

Die $\frac{3}{4}$ kp sind offenbar $\frac{1}{4}$ des Gesamtgewichts des Fisches, de es ja heißt "und dreiviertel seines Gewichts". Danach wiegt der Fisch $4 \cdot 0{,}750$ kp = 3 kp.
Man kann auch über Gleichungen die Aufgabe lösen. x sei das Gesamtgewicht. Dann gilt:

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}x = x; \qquad \frac{1}{4}x = \frac{3}{4} \text{ kp} = 0{,}750 \text{ kp}$$

0,750 kp + $3 \cdot 0{,}750$ kp = 3 kp.

100. Matheknobelei 9/73
Wieviel mal so groß wird die Querschnittsfläche eines Rundstahles bei Verdopplung des Durchmessers?

Die Querschnittsfläche vergrößert sich 4 mal.

101. Matheknobelei 10/73
Beweise, dass die Summe zweier rationaler Zahlen, deren Differenz 1 ist, gleich der Differenz ihrer Quadrate ist.

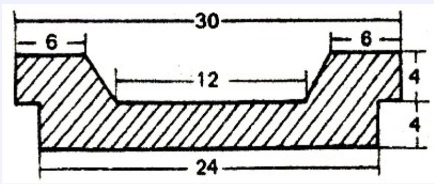
Die beiden rationalen Zahlen seien $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{b}+1$, mit $b \neq 0$. Dann gilt nach der Voraussetzung

$$\frac{a}{b}+1+\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}+1\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$2\frac{a}{b}+1=\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\frac{a}{b}+1-\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Daraus folgt: $2\frac{a}{b}+1=2\frac{a}{b}+1$ und eine gültige Aussage.

102. Matheknobelei 11/73



Wie groß ist die Querschnittsfläche des Trägerprofils? Die Maße sind in cm.

Die Querschnittsfläche des Trägerprofils beträgt 156 cm^2.

103. Matheknobelei 12/73
Gibt es eine natürliche Zahl a >0 für die die folgende Gleichung gilt:

$$a^n+a^n=a^{n+1}$$

Fasst man die linke Seite zusammen und formt die rechte Seite der Gleichung nach einem Potenzgesetz um, erhält man $2a^n=a^{n+1}$. Nach Division mit a^n, das ja stets ungleich 0 ist, ergibt sich sofort $a=2$.
Es gibt genau eine natürliche Zahl a, nämlich die 2, die die oben genannte Gleichung erfüllt.

104. Matheknobelei 1/74
Bestimme die kleinste natürliche Zahl z, die auf 4 endet. Streicht man die 4 hinten weg und setzt sie vorn an, so erhält man das Vierfache von z.

Es sei $z=x...y4$ die kleinste natürliche Zahl, die auf 4 endet. Dann gilt nach Aufgabenstellung $4z=4x...y=(x...y4)\cdot 4$.

Durch fortlaufende Multiplikation erhält man z, indem man die aus den Teilprodukten erhaltenen Ziffern im zweiten Faktor einsetzt. Die Multiplikation beginnt mit $4 \cdot 4 = 16$. Die 6 schreibt man nun statt y. Die nächste Teilmultiplikation ist dann $4 \cdot 6 = 24$ plus 1 von 16 und erhält 25. Die 5 schreibt man nun ebenso wie die 6 im Produkt und im Faktor. Die Multiplikation bricht ab, wenn man im Produkt eine 4 ohne Übertrag erhält. $z = 102564$ ist die gesuchte Zahl.

105. Matheknobelei 2/74
Von zwei ähnlichen Dreiecken ist die Fläche des einen 2,25 mal größer als die anderen.

1. In welchem kleinsten ganzzahligen Verhältnis stehen die Flächen zueinander?

2. In welchem kleinsten ganzzahligen Verhältnis stehen die Dreieckseiten zueinander?

1. 9 : 4, 2. 3 : 2

106. Matheknobelei 3/74
Ein Schwerer Hammer schlägt mit der Geschwindigkeit u gegen eine kleine elastische Stahlkugel.
Mit welcher Geschwindigkeit fliegt diese davon?

Aus $v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}$ ergibt sich wegen $m_1 > m_2$ $v_2 = 2v$.

107. Matheknobelei 4/74
Welchen Abstand hat eine 6 cm lange Sehne vom Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius von 5 cm?

Man verbindet den Kreismittelpunkt M mit den beiden Endpunkten A und B der Sehne und fällt das Lot von M auf die Sehne. Der gesuchte Abstand sei $x = MD$.
In dem rechtwinkligen Dreieck ADM ist nach Pythagoras: $AM^2 = AD^2 + DM^2$ bzw. $5^2 = 3^2 + x^2$, d.h. $x = 4$ cm. Die Sehne ist also 4 cm vom Mittelpunkt des Kreises entfernt.

108. Matheknobelei 5/74
"Kurzweil trieben Affen, die in zwei Parteien aufgeteilt waren. Der achte Teil zum Quadrat tummelte sich fröhlich im Gehölz, während 12 Affen die frische Luft mit ihrem Geschrei erfüllten.
Sag mir, wieviel Affen dort insgesamt waren!"

Wir bezeichnen die Anzahl der Affen zunächst mit x, dann gilt:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x \qquad , \qquad x_1 = 48, x_2 = 16$$

Die Aufgabe hat zwei positive Lösungen: In der Herde können entweder 48 oder 16 Affen sein.

109. Matheknobelei 6/74
Der Mantel eines 40 mm langen Zylinder: hat den Flächeninhalt von 2400 mm^2.
Wie groß ist sein Rauminhalt?

$M = 2\pi r \cdot 40 = 2400$ mm^2, $\qquad r = \frac{2400 \text{ mm}^2}{251{,}2 \text{ mm}} = 9{,}56$ mm
$V = 3{,}14 \cdot (9{,}56 \text{ mm})^2 \cdot 40 \text{ mm} \approx 11{,}5 \text{ cm}^3$

110. Matheknobelei 7/74
Ein Fass von 90 l Inhalt fasst 175,4 kg einer Ware. Wie groß ist die Dichte der Ware?

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{175{,}4 \text{ kg}}{90 \text{ l}} = 1{,}959$ kg/l

111. Matheknobelei 8/74
Ein Pferd und ein Maultier gingen Seite an Seite mit einer schweren Last auf dem Rücken. Das Pferd beklagte sich über seine übermäßig schwere Bürde.
"Was beklagst du dich?", antwortete ihm das Maultier.
"Wenn ich von dir einen Sack nehme, wird meine Last doppelt so schwer wie deine. Würdest du von meinem Rücken einen Sack abnehmen, würde deine Last meiner gleich sein."
Wieviel Säcke trug das Pferd und wieviel trug das Maultier?

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:
(I) $y + 1 = 2(x - 1)$ bzw. $2x - y = 3$
(II) $y - 1 = x + 1$ bzw. $y - x = 2$
Das Pferd trug 5 Säcke und das Maultier 7 Säcke.

112. Matheknobelei 9/74
Die größte Binnenschleuse Europas liegt an der Elbe bei Magdeburg. Die Schleusenkammer hat eine Länge von 325 m, ist 25 m breit und 4,30 m hoch.
Welches Volumen hat die eingelassene Wassermenge, wenn der Wasserspiegel seinen höchsten Stand 50 cm unter der Oberkante der Schleusenkammer hat?
Runde das Ergebnis in Kubikmeter auf Vielfache von Hundert!

Die größte eingelassene Wassermenge hat ein Volumen von annähernd 30800 m^3.

113. Matheknobelei 10/74
Es sind drei aufeinanderfolgende Zahlen zu finden, die sich dadurch unterscheiden, dass das Quadrat der mittleren um 1 größer ist als das Produkt der beiden übrigen.

Ist die erste der gesuchten Zahlen x, hat die Gleichung die Form

$$(x + 1)^2 = x(x + 2) + 1$$

Klammern ausmultipliziert: $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$
Das bedeutet, dass man für x jeden beliebigen Wert wählen kann; jegliche drei aufeinanderfolgende Zahlen erfüllen die geforderte Eigenschaft.

114. Matheknobelei 11/74
Bei einer numerisch gesteuerten Werkzeugmaschine macht die Elektronik 40% des Gesamtpreises aus.
Wieviel kostet die Elektronik im Verhältnis zur eigentlichen Maschine?

Die Werkzeugmaschine kostet insgesamt P Mark. Davon entfallen auf die Elektronik $0{,}40P$ und auf die eigentliche Maschine der Rest, d.h. $0{,}60P$ Mark. Das Verhältnis ist

$$\frac{\text{Elektronik}}{\text{Maschine}} = \frac{0{,}40P}{0{,}60P} = \frac{2}{3} = 67\%$$

Der Preis der Elektronik beträgt 67 % des Preises der eigentlichen Maschine.

115. Matheknobelei 12/74
Ein länglicher rechteckiger Klubraum soll vorgerichtet werden.
Man fand dabei, dass der in Metern gemessene Umfang der Fußbodenfläche maßzahlgleich mit seinem Inhalt ist.
Wie lang sind die Seiten des Raumes, wenn sie eine ganze Zahl von Metern betragen?

Der Klubraum habe die Länge x m, die Breite y m (x und y ganzzahlig). Dann gilt $2(x+y) = xy$

$$y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}$$

Da x und y positiv und ganzzahlig sein sollen, muss 4 durch $x-2$ ohne Rest teilbar und x größer als 2 sein. Es ergeben sich die Möglichkeiten

$$x = 3, y = 6; \qquad x = 4, y = 4; \qquad x = 6, y = 3$$

Die erste und die dritte Möglichkeit sind gleich. Da der Raum länglich sein soll, kommen als Seitenlängen nur die Werte $x = 6$ m, $y = 3$ m in Frage.

116. Matheknobelei 1/75
Ein Rennschlitten geht mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 18 km/h über die Startlinie und bekommt eine gleichmäßige Beschleunigung von 0,8 m/s^2.
Wann und wo erreicht er eine Geschwindigkeit von 90 km/h?

Die Geschwindigkeit von 90 km/h bekommt er nach t Sekunden. Es gilt (v_0 Anfangsgeschwindigkeit = 18 km/h

$$v_0 + a \cdot t = v_{Ende} = 90 \text{ km/h}$$

Wenn die Größen auf m und s bezogen werden, bekommen wir die Zahlenwertgleichung

$$5x0{,}8t = 25 \qquad ; \qquad t = 25 \text{ s}$$

Die Geschwindigkeit $v_{Ende} = 90$ km/h erreicht er x m hinter der Startlinie

$$v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2 = x$$

wobei $t = 25$ s. Wenn die Größen auf m und s bezogen werden, bekommen wir die Zahlenwertgleichung

$$5 \cdot 25 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 625 = 375$$

$x = 375$ m
Der Rennschlitten erreicht die Geschwindigkeit von 90 km/h 25 s nach dem Start und 375 m hinter der Startlinie.

117. Matheknobelei 2/75
Über einem Fenster (Breite 120 cm) befindet sich ein kreisförmiges Gewölbe, das auf beiden Seiten mit der Fensteroberkante beginnt und in der Mitte eine Überhöhung von 12 cm erzeugt.
Berechne den Radius des Gewölbebogens.

Es sei obere Fensterkante $f = 120$ cm, Überhöhung $h = 12$ cm.
Somit folgt aus dem schraffierten Dreieck für den Radius

$$R^2 = (R-12)^2 + \left(\frac{120}{2}\right)^2 \quad , \quad 0 = -24R + 144 + 3600$$

$R = 156$ cm. Der Gewölberadius beträgt 156 cm.

118. Matheknobelei 3/75
Bis zum 31.Dezember 1975 werden über die Erdgasleitung Nordlicht 8,5 Milliarden m^3 Erdgas in die DDR gelangen.
Wieviel Tonnen Steinkohle könnten durch diese Menge Erdgas ersetzt werden, wenn ein m^3 Erdgas im Heizwert 1,5 kg Steinkohle entspricht?

$$\frac{8{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^9}{10^3} = 85 \cdot 15 \cdot 10^4 = 1275000$$

Durch 8,5 Milliarden m^3 Erdgas könnten 12750000 t Steinkohle ersetzt werden.

119. Matheknobelei 4/75
Weiche seitliche Abdrift erfährt ein Flugzeug, das mit der Eigengeschwindigkeit 360 km/h bei Windstärke 10 (23 m/s) quer zum Wind fliegt,
a) je Flugstunde und b) je Flugkilometer?

a) $s = v_2 \cdot t = 0{,}023$ km/s $\cdot 3600$ s $= 82{,}8$ km
b) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 102{,}6$ m/s und Flugzeit je Kilometer $t = \frac{1000}{102{,}6} = 9{,}75$ s
$s' = 23$ m/s $\cdot 9{,}75$ s $= 224$ m

120. Matheknobelei 5/75
Einem Aufklärungsboot der Volksmarine, das zu einem Flottenverband gehört, wird der Befehl erteilt, ein Meeresgebiet von 70 Seemeilen in Fahrtrichtung des Verbandes zu erkunden. Die Geschwindigkeit des Flottenverbandes beträgt 15 Knoten, die Geschwindigkeit des Aufklärers 28 Knoten.
Nach welcher Zeit kann dieser beim Verband zurückerwartet werden (1 Knoten = 1 Seemeile je Stunde)?

Gesuchte Zeit: x Stunden.
In dieser Zeit legte der Verband $15x$ Seemeilen, der Aufklärer $28x$ Seemeilen zurück. Der Aufklärer fuhr 70 Seemeilen in Fahrtrichtung, brauchte aber nur auf der Rückfahrt einen Teil zurückzulegen, den übrigen Teil legte der Flottenverband zurück.
Zusammen legten sie einen Weg von $28x + 15x = 140$ Seemeilen zurück, folgt: $x = 3\frac{11}{43}$.
Der Aufklärer kehrt in etwa 3 Stunden 15 Minuten zum Geschwader zurück.

121. Matheknobelei 6/75
Aus einem am langen Balken von quadratischem Querschnitt (Kantenlänge 80 cm) soll eine Walze von größtmöglichem Durchmesser gedrechselt werden.
Wie groß ist der Holzabfall in dm^3 und in Prozent?

Der Holzabfall beträgt 412 dm^3 bzw. 21,5 Prozent.

122. Matheknobelei 7/75
Peter fährt mit dem Rad von der Schule zum Sportplatz. Als er 3/4 der Strecke zurückgelegt hatte, begegnet ihm sein mit gleicher Geschwindigkeit fahrender Freund Hans.
Wie schnell fahren beide, wenn der Lehrer bei der Fahrt mit dem Moped ($v = 40$ km/h) von der Schule zum Sportplatz Peter und Hans gerade bei ihrer Abfahrt von Schule bzw. Sportplatz trifft?
(Da der Weg durch ein verkehrsarmes und übersichtliches Gebiet führt, können die Geschwindigkeiten als gleichbleibend angesehen werden.)

Die Strecke von der Schule zum Sportplatz betrage s km. Peter legt bis zur Begegnung $\frac{3}{4}s$ km zurück und benötigt dazu $t_P = \frac{3}{4}\frac{s}{v}$ Stunden. (v sei die Geschwindigkeit von Peter und Hans.) Hans legt den Weg $\frac{1}{4}s$ km zurück und fährt $\frac{s}{40}$ h später an. Da sich beide gleichzeitig treffen, folgt

$$t_P = \frac{3s}{4v} = \frac{s}{4v} + \frac{s}{40} \qquad \text{oder} \qquad \frac{2}{4v} = \frac{1}{40}$$

$v = 20$ km/h. Peter und Hans fahren mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h.

123. Matheknobelei 8/75
Junge Pioniere streichen den 36 m langen Zaun des Schulgeländes. Sie hatten dazu eine gewisse Zeit eingeplant. Da sie aber in der Stunde 0,20 m mehr Zaun streichen als geplant, werden sie zwei Stunden eher fertig.
Wieviel Stunden benötigen sie für die Arbeit?

Die Jungen Pioniere benötigen für das Streichen des Zaunes x Stunden bei einer Produktivität $y\ \frac{\text{m Zaun}}{\text{Stunde}}$. Es gilt somit $x \cdot y = 36$.
Geplant waren eine um zwei Stunden längere Zeit bei einer um $0{,}2\frac{\text{m Zaun}}{\text{Stunde}}$ kleineren Produktivität: $(x+2)(y-0{,}2) = 36$
Mit $y = \frac{36}{x}$ ergibt sich daraus

$$36 - 0{,}2x + \frac{2 \cdot 36}{x} - 0{,}4 = 36 \qquad \text{oder}$$

$$x^2 + 2x - 360 = 0 \qquad , \qquad x = -1 \pm \sqrt{1+360} = -1 \pm 19$$

sinnvolle Lösung $x = 18$. Die Jungen Pioniere benötigen 18 Stunden.

124. Matheknobelei 9/75
Eine Erdgasquelle speist täglich 35000 m^3 Gas von 1,5 at in die Sammelleitung.
Wieviel Kubikmeter verliert das Innere der Gasquelle, die unter einem Druck von 60 at steht?

Es gilt das Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \qquad , \qquad V_2 = \frac{1{,}5 \cdot 35000}{60} = 875 \text{ m}^3$$

Die Erdgasquelle verliert täglich 875 m^3 Gas.

125. Matheknobelei 10/75
"Wie spät ist es?"wurde Marie-Luise gefragt. Sie antwortet scherzhaft: "Bis zum Ende des Tages bleiben zweimal zwei Fünftel von dem, was seit seinen Beginn bereits verflossen sind."
Wie spät war es in diesem Augenblick?

Der Tag hat 1440 Minuten. Zweimal zwei Fünftel, vier Fünftel, sind seit Beginn des Tages verflossen. Wenn x die Anzahl der seit 0 Uhr verflossenen Minuten ist, gilt:

$$x + \frac{4}{5} = 1440 \qquad , \qquad x = 800$$

Es sind 800 Minuten seit Tagesbeginn verflossen. Es ist 13.20 Uhr.

126. Matheknobelei 11/75
Ein Gärtner verkaufte dem ersten Käufer die Hälfte aller seiner Äpfel und einen halben Apfel, dem zweiten Käufer die Hälfte der restlichen und noch einen halben Apfel, dem dritten die Hälfte der übriggebliebenen und einen halben Apfel usw.
Dem siebenten Käufer verkaufte er die Hälfte der übrigen Äpfel und noch einen halben Apfel. Dann besaß er keine mehr.
Wieviel Äpfel besaß der Gärtner am Anfang?

Wenn die anfängliche Anzahl der Apfel x ist, gilt die Gleichung

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \frac{x+1}{2^3} + ... + \frac{x+1}{2^7} = x$$

$$(x+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^7}\right) = x$$

Die Glieder in den zweiten Klammer bilden eines geometrische Zahlenfolge. Für die Summe der Folge gilt

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7} \qquad \text{und} \qquad x = 2^7 - 1 = 127$$

Insgesamt waren es 127 Äpfel.

127. Matheknobelei 12/75
Ein Aquarium besitzt folgende Innenmaße:
Länge 4,8 dm; Breite 25 cm; Höhe 220 mm. Es ist bis zur inneren Höhe von 0,17 m mit Wasser gefüllt.
Kann man einen Ziegelstein mit den Kantenlängen 3 dm, 20 cm, 100 mm in das Aquarium legen. ohne dass Wasser überläuft?

Das Aquarium besitzt ein Fassungsvermögen von 26400 cm^3, der Ziegelstein von 6000 cm^3.
Das Aquarium würde nach Eintauchen des Ziegelsteines genau bis zum Rand gefüllt sein.

128. Matheknobelei 1/76
Ein Zirkus gab in der letzten Saison 200 Vorstellungen, die stets ausverkauft waren. Die Anzahl der Sitzplätze im Zirkuszelt ist dreimal so groß wie der vierte Teil der Anzahl der gegebenen Vorstellungen.

a) Wieviel Programmzettel wurden gedruckt, wenn der vierte Teil der Besucher einen Zettel erwarb?
b) Wieviel Mark wurden aus den Eintrittspreisen für die Tierschau zusätzlich eingenommen, wenn sie von der Hälfte der Besucher besucht wurde und der Eintrittspreis 0,30 M betrug.

Aus $(200 : 4) \cdot 3 = 150$ folgt, dass der Zirkus über 150 Sitzplätze verfügt.
a) $(200 \cdot 150) : 4 = 7500$; 7500 Programmzettel wurden während der Saison verkauft.
b) $(200 \cdot 150) : 2 = 15000$ und $30 \cdot 15000 = 450000$; aus der Tierschau wurden 4500,- M eingenommen.

129. Matheknobelei 2/76
Im Rahmen der Aktion "Millionen für die Republik"brachte eine Altstoffsammlung folgendes Ergebnis:

a) Die Schüler der 7. Klasse sammelten 20 kg Altstoffe mehr als die Schüler der 5. Klasse.
b) Das Sammelergebnis der Schüler der 10. Klasse lag um 20 kg über dem doppelten Sammelergebnis der 5. Klasse.
c) Die Schüler der 8. Klasse er- reichten drei Viertel des Sammelergebnisses der Schüler der 10. Klasse.
d) Das Sammelergebnis der 9. Klasse war gleich dem arithmetischen Mittel aus den Sammelergebnissen der Klassen 8 und 10.
e) Die Schüler der 6. und 7. Klasse erzielten gleiche Sammelergebnisse.

Wieviel Kilogramm Altstoffe wurden von den Schülern der einzelnen Klassen gesammelt, wenn insgesamt 1759 kg aufgebracht wurden?

Klasse	Altstoffe in kg
5	202
6	222
7	222
8	318
9	371
10	424

130. Matheknobelei 3/76
Welchen Durchmesser hat eine 6 cm lange Kapillare, deren Masse bei Füllung mit Quecksilber ($\rho = 13{,}55$ g/cm^3) um 75 mg größer wird?

$$m = \frac{d^2\pi l\rho}{4} \qquad , \qquad d = \sqrt{\frac{4m}{\pi l\rho}} = 0{,}034 \text{ cm} = 0{,}34 \text{ mm}$$

131. Matheknobelei 4/76
Beim Luftgewehrschießen am Pioniernachmittag belegte Marion den dritten Platz. Siegerin wurde Beate, sie erzielte vier Ringe mehr als Marion und zwei Ringe mehr als Ina.
Marion erreichte 4/5 der Anzahl aller möglichen Ringe. Addiert man die von den drei Mädchen erreichten Ringe, erhält man das 21/2fache aller möglichen Ringe.
Wie groß ist diese Anzahl? Welche Ringzahlen erhielten die drei Mädchen?

Es sei n die Anzahl der Ringe, die ein Schütze höchstens erreichen kann. Dann fallen auf Marion $\frac{4}{5}n$, auf Beate $\frac{4}{5}n + 4$ und auf Ina $\frac{4}{5}n + 2$ Ringe.

$$\frac{12}{5}n + 6 = \frac{5}{n}, \qquad n = 60$$

Ein Schütze konnte 66 Ringe erreichen. Beate erzielte 52, Ina 50 und Marion 48 Ringe.

132. Matheknobelei 5/76
Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat den Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.
Ermittle die kürzeste Strecke (in cm), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren muss, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat.

Der Wagen muss eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches von 210 cm und 330 cm ist. Die kürzeste Strecke, die der Wagen zurücklegen muss, ist das k. g. V. dieser Zahlen.

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; \quad 330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11; \quad k.g.V. = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

Die kürzeste Strecke beträgt 2310 cm.

133. Matheknobelei 6/76
Eine Fangvorrichtung, die den Förderkorb in einem Schacht sichert, versagt in 1000 Einsatzfällen höchstens einmal. Eine weitere Sicherung, die unabhängig von der ersten ist, fällt höchstens einmal von 100 Fällen aus, wo sie in Anspruch genommen wird.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das die Insassen durch die Sicherungseinrichtungen gerettet werden, wenn die Förderanlage ausfällt?

Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden (voneinander unabhängig) Sicherungseinrichtungen des Förderkorbes zugleich versagen, beträgt nach dem sowohl-als-auch-Gesetz:

$$P_{\text{Ausfall}} = P_1 \cdot P_2 = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{100} = 10^{-5} = 0{,}001\%$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren der Sicherungsanlage

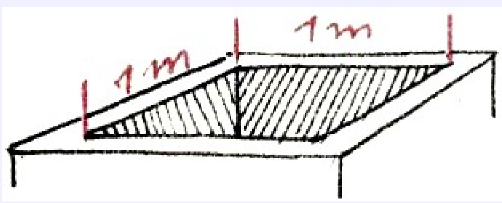
$$P = 1 - P_{\text{Ausfall}} = 1 - 10^{-5} = 0{,}99999 = 99{,}999\%$$

D. h., es kann fast als sicher ($P = 1$) angesehen werden, dass die Sicherungsanlage funktioniert.

134. Matheknobelei 7/76
Für die Umzäunung eines quadratischen Schulhofes, die von den Pionieren und FDJlern einer Schule errichtet wird, wurden an den Staatlichen Forstwirtschaftsbetrieb 992,- Mark gezahlt.
Ein Meter des Zauns kostet 4,- Mark. Wieviel Hektar beträgt die Fläche des Schulhofes?

992 : 4 = 248 m Zaun, 248 : 4 = 62 m Seitenlänge; $62 \cdot 62 = 3844$ m^2 oder 0,3844 ha.

135. Matheknobelei 8/76
Quadratische Grubendeckel haben die Gefahr, beim falschen Abheben in die Öffnung zu fallen. Deshalb wählt man auch oft runde Öffnungs- und Deckelformen.
In einem Betrieb sollen einige quadratische Gruben, die dem unterirdischen Versorgungssystem dienen, mit so großen Deckeln abgedeckt werden, dass diese nicht mehr hineinfallen können.



Wie lang muss dann mindestens die Seitenlänge eines Deckels sein, wenn die Grubenöffnung 1 m × 1 m ist?

Die Deckel können hineinfallen, wenn sie verkanten. Das ist erst dann unmöglich, wenn die Deckelseiten länger als die Diagonale der Grubenöffnung ist. Der Betrieb muss also Deckel anfertigen, deren Seiten länger als 1,415 m sind.

136. Matheknobelei 9/76
In einem Wohnbezirk macht die Zahl der Rentner 40% der wahlfähigen Bevölkerung und 25% der Gesamtbevölkerung aus.
Wie sind die Bevölkerungsgruppen Rentner, übrige Erwachsene, noch nicht wahlfähige Kinder und Jugendliche prozentual im Wohngebiet verteilt?

Im Wohnbezirk seien r % Rentner, e % übrige Erwachsene und k % Kinder und Jugendliche. Dann gilt:

$$r = 0{,}4(r+e), \qquad r = 0{,}25(r+e+k), \qquad r+e+k = 100\%$$

Ergebnis: $r = 25\%$; $e = 37{,}5\%$; $k = 37{,}5\%$.

137. Matheknobelei 10/76
Aus einem Skatspiel wird blindlings eine Karte gezogen. Nachdem sie wieder eingemischt wurde, wiederholt man die "Ziehung".
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte ein Ass, die zweite Karte ein König ist?

Entsprechend den relativen Häufigkeiten gilt:

$$P_{\text{As}} = \frac{4}{32} = 0{,}125; \qquad P_{\text{König}} = \frac{4}{32} = 0{,}125$$

Nach dem sowohl-als-auch-Gesetz gilt:

$$P = P_{\text{As}} \cdot P_{\text{König}} = 0{,}125^2 = 0{,}0156$$

Das heißt: Bei 1000 Versuchen ist das kombinierte Ereignis nur etwa 16 mal zu erwarten, also sehr selten.

138. Matheknobelei 11/76
Eine zylindrische Dose hat einen Rauminhalt von 1 Liter.
Wieviel fasst eine andere zylindrische Dose, deren Durchmesser um 20 Prozent und deren Höhe um 50 Prozent größer ist?

Die größere Dose hat das Volumen V_2, während die bekannte Dose den Inhalt $V_1 = 1$ Liter besitzt. $V_2 = 1{,}2^2 \cdot 1{,}5 \cdot V_1 = 2{,}16$ Liter.

139. Matheknobelei 12/76
Ralf und Marion hatten ihre Uhren, echte "Oldtimer", zu Beginn einer längeren Wanderung gestellt. Am Ziel zeigt Marions Uhr 13.46 Uhr und die von Ralf 14.13 Uhr.
Wie spät ist es wirklich, wenn Marions Uhr täglich 2 Minuten vorgeht und Ralfs alter Wecker täglich 4 Minuten zurückbleibt?

Die Anzeigedifferenz beider Uhren wächst täglich um 2 Minuten, wobei ($\approx$ 33 Prozent von 6 Minuten) bzw. 4 Minuten von den Anzeigen abweicht.
Im vorliegende Falle beträgt die Differenz 27 Minuten, wobei die wahr Zeit von Marions vorgehender Uhr um 33 Prozent $\cdot$ 27 Minuten = 9 Minuten abweicht. Somit ist es 13.46 + 0.09 = 13.55 Uhr.

140. Matheknobelei 1/77
In einem 20-l-Kanister befindet sich ein Kraftstoffgemisch im Mischungsverhältnis Benzinöl = 33,33 : 1. Wieviel Liter Öl sind im Kanister?

Bei einem Kraftstoffmischungsverhältnis von 33,33 : 1 kommt auf 33,33 Liter Benzin 1 Liter Öl - das ergibt 34,33 Liter Gemisch. Wenn als 34,33 Liter Kraftstoff 1 Liter Öl enthalten, dann sind in einem 20-l-Kanister

$$\frac{1}{34{,}33} \cdot 20\text{l} = 0{,}582\text{l Öl}$$

141. Matheknobelei 2/77
Eine KAP will bis 11.00 Uhr bei der Erfassungsstelle Getreide abliefern. Wenn sie den Traktor nimmt, wäre die Ladung erst 11.30 Uhr am Ziel. Nimmt sie den Lkw, so ist es schon bis 10.45 Uhr zu schaffen.
Wie weit ist die Erfassungsstelle entfernt, wenn beide Fahrzeuge bei gleicher Abfahrtzeit starten, der Traktor im Schnitt 15 km/h und der Lkw 30 km/h fährt?

Die Erfassungsstelle ist x km entfernt. Die Abfahrtszeit der beiden Fahrzeuge ist t Uhr. Die Stunden wird bei der Lösung dezimal unterteilt:
Traktor: $15 \cdot (11{,}50 - t) = x$
LKW: $30 \cdot (10{,}75 - t) = x$
daraus folgt: $t = 10$. Entfernung $x = 22{,}5$ km.

142. Matheknobelei 3/77
Wie lange kann eine Glühlampe von 60 W brennen, bis 1 kWh verbraucht ist? Wie hoch sind die Energiekosten?

Eine 60 W-Glühlampe kann x Stunden brennen, wobei $60 \cdot x = 1000\text{Wh}$;
$x = 16{,}67\text{h} = 16\text{h } 40\text{min}$. Die Kosten für 1 kWh Haushaltsenergie betragen in unserem Staat nur 8 Pfennige!

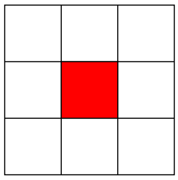
143. Matheknobelei 4/77
Eine 1 m × 2 m große Blechtafel soll eine 0,4 mm dicken Lacküberzug erhalten, wobei mit einem Lackverlust beim Spritzen von 30 Prozent (einschließlich Verdampfung des Lösungsmittels) gerechnet wurde. Durch einen Neuerervorschlag beträgt der Verlust nunmehr nur 20 Prozent.
Wie groß ist die dadurch für die genannte Arbeit eingesparte Lackmenge?

Das Volumen des eingetrockneten Überzuges beträgt in Litern: $V = 1\text{m} \cdot 2\text{m} \cdot 0{,}4\text{mm} = 0{,}8\text{l}$
Dafür war vor dem Neuerervorschlag die Lackmenge V_1 erforderlich, wobei: $0{,}7V_1 = 0{,}8$ l; $V_1 = 1{,}143$ l
danach V_2: $0{,}8V_2 = 0{,}8$ l; $V_2 = 1$ l
Der Nutzen des Vorschlages erbrachte bei dieser Platte eine Lackeinsparung von $V_1 - V_2 = 0{,}143$ l Lack. Der Nutzen ist natürlich wesentlich größer, wenn man mehrere Platten lackiert, wie das bei der modernen Großserienfertigung der Fall ist.

144. Matheknobelei 5/77
Renate wohnt in einem Haus mit der Nummer 149. Sie stellt fest, dass die Quersumme dieser Zahl gleich der aus den ersten beiden Ziffern gebildeten Zahl ist. Könnt Ihr uns noch mehr dreistellige Zahlen mit der dieser Eigenschaft nennen?

Die allgemeine dreistellige Zahl mit der gesuchten Eigenschaft heißt $100a + 10b + c$, wobei die Quersumme gleich der aus den ersten beiden Ziffern gebildeten Zahl ist: $a + b + c = 10a + b$ ($b, c = 0...9$ und $a = 1...9$) oder $9a = c$ (b beliebig).
Wegen der Vorgabe, dass a nur die Ziffern 1,...,9 annehmen kann, folgt: $a = 1$, $c = 9$, $b =$ beliebig, d.h., $b = 0{,}1, 2,..., 9$.
Somit erfüllen folgende Zahlen die gestellte Bedingung: 109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199.

145. Matheknobelei 6/77
Aus einem quadratischen Stück Blech mit 30 cm Kantenlänge soll ein oben offener, würfelförmiger Behälter mit 1 Liter Fassungsvermögen ohne Falze geformt werden. Wie groß ist der Materialabfall?



Die Abbildung zeigt einen möglichen Zuschnitt für den Mantel des gewünschten Behälters. Die genutzte Fläche beträgt $5 \cdot 100$ cm^2, der Abfall $4 \cdot 100$ cm^2.
Der Materialverlust ist somit $\frac{4}{9}$ des Blechstückes, also 45,5 Prozent.

146. Matheknobelei 7/77
Auf einem Teilabschnitt bei einem Radrennen rollt das Feld mit $v = 40$ km/h. Ein Fahrer verliert durch Reifenpanne drei Minuten.
Mit welcher Geschwindigkeit muss er dem Feld hinterherfahren, damit er es nach 20 km eingeholt hat?

Der Radfahrer muss mit der Geschwindigkeit v_F hinter dem Feld herfahren. Dann gilt für die zurückgelegten Wege, da ihm 3 min $= \frac{1}{20}$ Zeit fehlen (t = Fahrzeit für die 20 km):
Fahrer: $v_F \cdot \left(t - \frac{1}{20}\right) = 20$, daraus folgt
Feld: $40 \cdot t = 20$; $t = 0{,}5$ h; $V_F = 44{,}4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

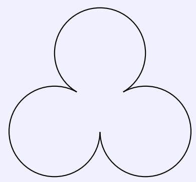
147. Matheknobelei 8/77
Ein Schüler kauft Zeichenstifte für je 0,45 M und Bleistifte für je 0,20 M. Er bezahlt insgesamt 6,- M. Aus der Quittung ist die Aufrechnung nicht mehr zu ersehen. Bei einer späteren Überprüfung braucht man aber genauere Angaben.
Welche Stückzahlen könnte der Schüler möglicherweise gekauft haben?

Der Schüler hat x Zeichenstifte und y Bleistifte gekauft, wobei von vornherein klar ist, dass x und y ganze positive Zahlen sind. Für den Gesamtpreis gilt dann

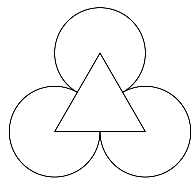
$$0{,}45x + 0{,}20y = 6{,}00 \qquad \text{oder} \qquad 9x + 4y = 120$$

daraus $y = 30 - \frac{9}{4}x$
Da y eine ganze Zahl ist, soll x durch 4 teilbar sein. Damit ergeben sich folgende Möglichkeiten $x = 0$, $y = 30$ (d.h., es wurden nur Bleistifte gekauft, unwahrscheinlich), $x = 4, y = 21$; $x = 8, y = 12$; $x = 12, y = 3$. Bei anderen Kombinationen wäre x oder y negativ!

148. Matheknobelei 9/77



Ein Profilstab hat den gezeichneten Querschnitt, der aus drei gleichen Kreisen mit dem Radius r gebildet wird. Welchen Flächeninhalt hat er?



Entsprechend der Hilfszeichnung besteht die Figur des Querschnittes aus einem gleichseitigen Dreieck (Seitenlänge $2r$) und 3 Kreissektoren mit dem Zentriwinkel 300° Somit ist die Fläche:
Dreieck: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r\sqrt{3} = 1{,}732r$
Sektoren (jeweils $\frac{5}{6}$ Vollkreis): $A_2 = 3 \cdot \frac{5}{6}\pi r^2 = 7{,}855r^2$
Gesamter Querschnitt: $A = 9{,}587r^2$

149. Matheknobelei 10/77
Peter schaltete an eine 12 V-Batterie zwei 6 V-Lampen hintereinander, eine Lampe zu 18 W und eine zu 3 W. Eine der Lampen brannte durch. Welche war es? Warum musste die Lampe durchbrennen?

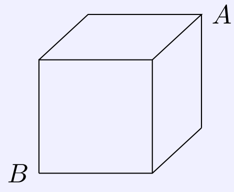
Durch beide hintereinander geschaltete Lampen fließt der gleiche Strom I. Die Innenwiderstände der Lampen betragen:
Lampe 6 V/18 W: $R_1 = \frac{36\mathrm{V}^2}{18\mathrm{W}} = 2\Omega$
Lampe 6 V/3 W: $R_2 = \frac{36\mathrm{V}^2}{3\mathrm{W}} = 12\Omega$
Der Strom I beträgt: $I = \frac{12\mathrm{V}}{(12+2)\Omega} = \frac{12}{14}$ A.
Er erzeugt die Spannungsabfälle über Lampe 6 V/18 W: $U_1 = R_1 \cdot I = 1{,}71$ V.
über Lampe 6 V/3 W: $U_2 = R_2 \cdot I = 10{,}29$ V.
Die Lampe 6 V/3 W wird überlastet und brennt durch.

150. Matheknobelei 11/77
Zur Jugendweihe ließen sich alle Schüler einer Klasse einzeln fotografieren. Jeder ließ von seinem Porträt genügend Abzüge herstellen und tauschte mit jedem Klassenkameraden sein Bild. Insgesamt wurden 812 Fotos getauscht.
Wieviel Schüler gehören zu der Klasse?

In der Klasse sind 29 Schüler. Jeder der 29 gab an 28 Freunde sein Bild. Es wurden $28 \cdot 29 = 812$ Fotos getauscht!

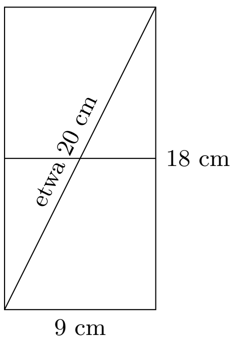
151. Matheknobelei 12/77

Da sitzt eine Ameise auf einem würfelförmigen Pflasterstein, der eine Kantenlänge von 9 cm hat, bei Punkt A. Nehmen wir einmal an, sie möchte nach Punkt B gelangen. Viele Wege führen nach B! Aber welcher ist der kürzeste Weg?



Kürzester Weg gesucht!

Wie lang ist die Strecke, die dabei von der Ameise zurückgelegt werden müsste?
Achtung! Bei Lesern, die auf Grund ihres Alters die mathematische Lösung noch nicht beherrschen, lassen wir auch eine zeichnerische Lösung zu!



Die Gerade ist bekanntlich der kürzeste Weg, um von einem Punkt zum anderen zu gelangen. Die Ameise läuft über zwei quadratische Flächen auf der Strecke $\overline{AB}$.
Nach dem pythagoreischen Lehrsatz für das rechtwinklige Dreieck gilt:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(9^2 + 18^2)\text{cm}^2} = \sqrt{405\text{cm}^2}$$

$c \approx 20{,}1$ cm. Diesen Wert ermittelt man auch in der maßstabsgerechten Zeichnung:

152. Matheknobelei 1/78

Infolge der anhaltenden Krise in den kapitalistischen Staaten verliert der französische Franc jährlich etwa 10 Prozent seines Wertes.
Wieviel würde nach drei Jahren eine Ware im Durchschnitt kosten, die heute 1 Franc kostet, wenn wir eine gleichbleibende Inflationsrate voraussetzen?

Nach einem Jahr kostet die gleiche Ware wegen der Abwertung um 10 Prozent $\frac{1}{0{,}9}$ Franc. Nach drei Jahren beträgt der durchschnittliche Preis einer Ware, die 1 Franc kostete, $\frac{1}{(0{,}9)^3} = \frac{1}{0{,}729} =$ 1,37 Franc.

153. Matheknobelei 2/78

Der vom VEB Robotron hergestellte Computer KRS 4200 hat eine Zykluszeit von 1,3 μs, d.h. er benötigt 1,3 μs für eine Rechenoperation.
Welcher Frequenz entspricht das und wieviele Aufgaben kann er im Schnitt in 1 Minute lösen?

Hinweis: Die Frequenz gibt die Anzahl sich regelmäßig wiederholender Vorgänge pro Sekunde an.

Die Frequenz f gibt die Anzahl der Vorgänge n in einer bestimmten Zelt t an und berechnet sich noch der Formel $f = \frac{n}{t}$.
Für $n = 1$ ist $f = \frac{1}{T}$, wobei T die Dauer eines Vorgangs symbolisiert, z. B. die Zykluszeit des Rechners.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}3 \cdot 10^{-6}\text{ s}} = 770 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{s}}$$

Die Frequenz des Computers beträgt demnach 770 kHz, und es kann ca. 46,2 Millionen Aufgaben in einer Minute lösen.

154. Matheknobelei 3/78
Bei einer Verkehrskontrolle in einer geschlossenen Ortschaft durchfuhr ein Motorradfahrer die 100 m lange Teststrecke in einer Zeit von 6 s.
Entspricht seine Geschwindigkeit den Vorschriften der Straßenverkehrsordnung?

Die Geschwindigkeit des Motorradfahrers auf der Teststrecke beträgt:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{100\text{ m}}{6\text{ s}} = 16{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}} = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

In einer geschlossenen Ortschaft ist nur eine Geschwindigkeit von 50 km/h zugelassen, wenn die Straße nicht als Schnellstraße ausgeschildert ist. Der Motorradfahrer hatte eine zu hohe Geschwindigkeit und gefährdete damit die übrigen Verkehrsteilnehmer (§ 12 und § 1 der StVO).

155. Matheknobelei 4/78
Eine neue Gartensaison hat begonnen. Als erstes wollen die Thälmannpioniere ihren 50 m langen und 20 m breiten Schulgarten einzäunen. Das 2 m breite Tor steht bereits auf der einen Längsseite, und 3 m lange Zaunfelder können geliefert werden.
Wieviele Zaunfelder brauchen die Pioniere und wieviele Zaunpfähle müssen sie setzen, wenn jedes Feld von zwei Pfählen gehalten wird?

Die Thälmannpioniere benötigten für alle vier Seiten des Schulgartens 47 Zaunfelder mit je 3 m Länge.

1. Längsseite 50 m	17 Zaunfelder
2. Längsseite 48 m	16 Zaunfelder
1. Breitseite 20 m	7 Zaunfelder
2. Breitseite 20 m	7 Zaunfelder
insgesamt	47 Zaunfelder

Für diese 47 Felder müssen 46 Zaunpfähle gesetzt werden. Vier Pfähle stehen an den Ecken. Dann fehlen auf den Breitseiten noch je sechs und auf der Längsseite ohne Tor 16 Zaunpfähle. Da das Tor auf der vorderen Seite bereits steht, brauchen die Pioniere hier nur noch 14 Pfähle ($4 + 12 + 16 + 14 = 46$).

156. Matheknobelei 5/78
An eine frisch geladene Mopedbatterie (6 V / 4,5 Ah) ist eine Lampe mit den Kenngrößen 6 V und 0,6 W angeschlossen.
Wie lange leuchtet die Lampe, wenn andere Verbraucher fehlen?

Hinweis: Ah ist die Abkürzung von Amperestunde und gibt die Ladung bzw. Elektrizitätsmenge der Batterie an.

Die Stromaufnahme der Lampe (6 V / 0,6 W) kann man aus der gegebenen Spannung und Leistung ermitteln:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{0{,}6\text{ W}}{6\text{ V}} = 0{,}1\text{ A}$$

Aus der Angabe der Ladung der Batterie (4,5 Ah) lässt sich dann die Brenndauer der Lampe berechnen:

$$I \cdot t = 4{,}5 \text{ Ah} \qquad , \qquad t = \frac{4{,}5 \text{ Ah}}{0{,}1 \text{ A}} = 45 \text{ h}$$

Die Lampe leuchtet 45 Stunden, wenn andere Verbraucher fehlen.

157. Matheknobelei 6/78
Auf einem Klassenfest wurden neben den Milchmixgetränken auch diverse Brauseflaschen geleert. Es waren mehr als 20 und weniger als 25, und zwar fünfmal soviel Flaschen Astoria wie Cola, halb soviel Limonade wie Astoria und drei Flaschen Selters weniger als Astoria. Wieviel Flaschen wurden auf diesem Klassenfest ausgetrunken?

Auf dem Klassenfest wurden zusätzlich 24 Brauseflaschen geleert. Die Anzahl der Astoria-Flaschen sei a, c die der Cola-, l die der Limonade- und s die Anzahl der Seltersflaschen. Dann muss gelten:

$$20 < a + c + l + s < 25 \qquad \text{und} \qquad a = 5c, \quad a = 2l, \quad s = a - 3$$

Die Gesamtzahl der Flaschen beträgt dann

$$a + \frac{a}{5} + \frac{a}{2} + a - 3 = \frac{27}{10}a - 3$$

Damit die Summe ganzzahlig ist, muss a durch 10 teilbar sein. Es gibt die Lösungen:

$$a = 10, c = 2, l = 5, s = 7 \qquad ; \qquad a = 20, c = 4, l = 10, s = 17$$

Die 2.Lösung scheidet aus, weil ab hier die Summe größer als 25 ist.
Nur im ersten Fall sind die Bedingungen erfüllt.

158. Matheknobelei 7/78
Durch eine Störung wurde die Netzspannung kurzzeitig um 10 Prozent gesenkt.
Welche Leistung verbraucht in dieser Zeit eine 40 W-Lampe, wenn man annimmt, dass ihr Widerstand gleich bleibt.

Die normale Netzspannung U wurde um 10 Prozent gesenkt, d.h. auf $0{,}9U$. Da der Widerstand der Lampe gleichbleiben sollte, ändert sich auch im gleichen Maße, proportional, die Stromstärke. Statt des normalen Stromes I fließen nur noch $0{,}9I$. Die elektrische Leistung berechnet sich nach der Formel $P = U \cdot I$.

$$P = 0{,}9U \cdot 0{,}9I = 0{,}81 \cdot 40 \text{ W} = 32{,}4 \text{ W}$$

Die Lampe verbraucht nur etwa 32 W und brennt entsprechend dunkler.

159. Matheknobelei 8/78
Ein Raumschiff fliegt auf einer kreisförmigen Bahn über dem Äquator um die Erde. Für eine vollständige Erdumkreisung muss es eine Strecke von 42600 km zurücklegen.
Wie hoch über der Erdoberfläche fliegt das Raumschiff?

Hinweis: Hierzu notwendige Angaben über die Erde findet ihr im Tafelwerk.

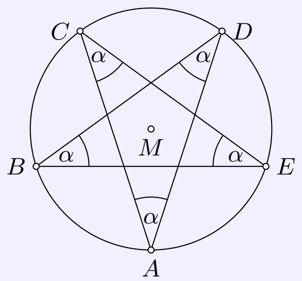
Das Raumschiff fliegt 405 km über der Erdoberfläche. Den Radius des Kreisbahn konnte man nach der Formel $u = 2\pi r$ ermitteln bzw. umgestellt

$$r = \frac{u}{2\pi} = \frac{42600 \text{ km}}{2\pi} = 6783 \text{ km}$$

Davon musste dann nur noch der Radius der Erde am Äquator (6378 km) subtrahiert werden.

160. Matheknobelei 9/78
Auf der 70 km langen Autobahnstrecke Dresden-Karl-Marx-Stadt fahren einige Fahrzeuge mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 70 km/h, andere im Durchschnitt 100 km/h. Wieviel Zeit sparen die schnelleren ein?
Lohnt sich die Raserei, wenn man bedenkt, dass die Häufigkeit und Schwere der Unfälle bei 100 km/h doppelt so hoch ist wie bei 70 km/h?

Die Fahrzeit des langsameren Autos betrug 60 Minuten (70 km : 70 km/h = 1 h), die des schnelleren 42 Minuten (70 km : 100 km/h = 0,7 h).
Die Zeitterersparnis von 18 Minuten wiegt die doppelte Unfallgefahr nicht auf.



161. Matheknobelei 10/78
Wie groß sind die Winkel α an den Spitzen des fünfzackigen Sterns?
Wenn man sich die sechs Teilfiguren näher anschaut und die Gesetzmäßigkeiten der Winkelgrößen in ihnen berücksichtigt, kann man α ganz leicht berechnen.

Mit der Formel $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$ kann man die Winkel eines regelmäßige n-Ecks berechnen. Demnach betragen die Winkel des 5-Ecks in der Mitte der Sterns 108°, denn

$$\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$$

Ihre Nebenwinkel sind $180° - 108° = 72°$ groß. Es sind gleichzeitig die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke, in denen jeweils der Winkel α liegt.
Da die Winkelsumme eines jeden Dreiecks 180° beträgt, muss gelten: $72° + 72° + \alpha = 180°$, also $\alpha = 36°$.

162. Matheknobelei 11/78
Angenommen eine Fliege lege am Sommeranfang, also am 21. Juni, 120 Eier, aus denen sich nach 20 Tagen vollwertige Insekten entwickeln, die nun ihrerseits jeweils 120 Eier legen.
Wieviele "Nachkommen" hätte diese Fliege insgesamt bis zum Herbstanfang?

Der Sommer hat 95 Tage. in dieser Zeit können vier Fliegengenerationen ihre Eier legen:

21.Juni	1 Fliege
nach 20 Tagen	120 Fliegen
nach 40 Tagen	14400 Fliegen
nach 60 Tagen	1728000 Fliegen
nach 80 Tagen	207360000 Fliegen
Insgesamt	209102520 Fliegen

Bis zum Herbstanfang, am 23. September, hätte die Fliege theoretisch mehr als 209 Millionen Nachkommen.

163. Matheknobelei 12/78
Ein Rückhaltebecken hat ein Fassungsvermögen von 0,5 Miliionen m^3 Wasser. Auch bei Niedrigwasser fließen stündlich 20 m^3 Wasser ab.
Nach einem Unwetter fließt zehn Stunden lang eine Flut mit durchschnittlich 120 m^3 Wasser pro Stunde ein.
Um wieviel Prozent wird das Becken gefüllt?

Das Rückhaltebecken wird um 0,2 Prozent gefüllt, denn nach zehn Stunden beträgt

der Zufluss 10·120 m^3	= 1200 m^3
der Abfluss 10·20 m^3	= 200 m^3
die Füllung demnach	1000 m^3

Das ist 1/500 des Fassungsvermögens, also 0,2 Prozent.

164. Matheknobelei 1/79
Wer kann diesen Körper zeichnen oder beschreiben?
Wird er von vorn mit einer Lampe angestrahlt, hat sein Schatten die Form eines Rechtecks, von der Seite die eines gleichschenkligen Dreiecks. Leuchtet man ihn von oben an, sieht man einen kreisförmigen Schatten.
Hinweis: Wer den Grundkörper herausgefunden hat, von dem er abgeleitet ist, kommt durch Basteln z.B. mit Knete oder einem Korken schnell ans Ziel.

Der gesuchte Körper war aus einem Zylinder hervorgegangen z.B. aus einem Korken.
Vom Durchmesser der einen Kreisfläche aus mussten zwei ebene Schnitte ausgeführt werden, zu zwei Randpunkten der anderen Kreisfläche.
Seine perspektivische Darstellung würde etwa so aussehen:

165. Matheknobelei 2/79
Eine Motorradbatterie (6 V) wurde über eine Lampe (6 V, 0,5 W) entladen. Die Lampe war insgesamt 48 Stunden lang in Betrieb.
Wieviel Ah hatte die Batterie geladen?
Erklärung: Ah ist die Abkürzung von Ampere-Stunde, einer Einheit der elektrischen Ladung.

Bei der Entladung der Motorradbatterie fließt 48 Stunden lang der Strom I,

$$I = \frac{P}{U} = \frac{0{,}5\text{ W}}{6\text{ V}} = \frac{1}{12}\text{ A}$$

Das entspricht einer Ladung Q von 4 Ah, denn

$$Q = I \cdot t = \frac{1}{12}\text{ A} \cdot 48\text{ h} = 4\text{ Ah}$$

166. Matheknobelei 3/79
Frank benötigt auf dem Weg zur Schule für die 300 m bis zur Straßenecke vier Minuten, läuft dann 50 m Treppe in fünf Minuten und legt die restlichen 600 m Wegstrecke in zehn Minuten zurück.
Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit?
Kann man ihn, wenn man ihm für die Treppe das Doppelte einer normalen Gangart zubilligt, - verglichen mit der allgemeinen Durchschnittsgeschwindigkeit für Fußgänger (5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$) - als "flotten Läufer" bezeichnen?

Die Durchschnittsgeschwindigkeit v ermittelt man aus dem gesamten zurückgelegten Weg ($s = 950$ m) und der dazu benötigten Zeit ($t = 19$ min).

$$v = \frac{950 \text{ m}}{19 \text{ min}} = 50 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Frank legte auf seinem Schulweg im Durchschnitt 50 m in der Minute zurück, das wären 3000 m in einer Stunde. Er hat also eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 3 km/h, was im Vergleich zu den allgemeinen 5 km/h für Fußgänger kein flottes Tempo ist.
Aber wer weiß, wieviele Straßen er auf seinem Schulweg überqueren muss.

167. Matheknobelei 4/79
Die Arbeiter der Presserei eines Betriebes führten eine Initiativschicht durch. 50 Tonnen Pressgut waren das Ergebnis, mit dem sie ihren Plan um acht Tonnen überholen.
Wieviel Prozent betrug die Planerfüllung?

Da bei der Produktion von 50 t Pressgut 8 t über den Plan erzeugt wurden, betrug das Plansoll (100 Prozent) 50 t -8 t $= 42$ t.
Mit einer Verhältnisgleichung lässt sich dann die prozentuale Planerfüllung errechnen:

$$\frac{x}{100} = \frac{50 \text{ t}}{42 \text{ t}} \qquad , \qquad x = 119$$

Der Plan wurde in dieser Sonderschicht mit 119 Prozent erfüllt.

168. Matheknobelei 5/79
Eine Geflügelfarm liefert 1320 Eier ab, eine zweite liefert ein Drittel weniger.
a) Wieviel Eier liefern beide Geflügelfarmen insgesamt ab?
b) Wieviel Hühner hat jede Farm, wenn ein Huhn jeweils 4 Eier legt?

a) Beide Geflügelfarmen lieferten gemeinem 2200 Eier ab, denn 1320 Eier + 880 Eier = 2200 Eier.
b) Die erste Farm besitzt 330 Hühner: 1320 : 4 = 330.
Die zweite Farm hat 220 Hühner: 880 : 4 = 220.

169. Matheknobelei 6/79
In einem hohen Topf (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau zwei Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{1}{3}$ der Gefäßhöhe.
Welches Fassungsvermögen hat der Topf?

Zwei Liter Wasser entsprachen einer Höhendifferenz von $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$ der Gesamthöhe des Topfes. Mit Hilfe einer Verhältnisgleichung kann man das Fassungsvermögen x des Topfes errechnen:

$$\frac{5}{2}x = 2, \qquad x = \frac{2 \cdot 12}{5}, \qquad x = 4{,}8$$

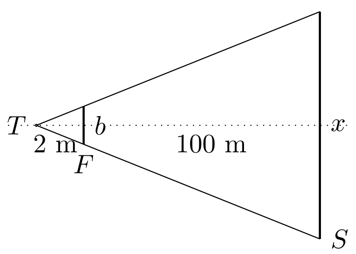
Der Topf fasst insgesamt 4,8 Liter.

170. Matheknobelei 7/79
Michael stellt 3 l einer 7,2prozentigen Kochsalzlösung her, d. h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten. Durch Sieden dieser Lösung verdampft so viel Wasser, dass genau 2,4 l der eingedampften Lösung verbleiben.
Wieviel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

Die 3 l enthalten 216 g Kochsalz: $7{,}2 \cdot \frac{3000}{100} = 216$.
Nach dem Verdampfen des Wassers war die Lösung 9 prozentig, denn

$$\frac{216}{2400} \cdot 100 = 9$$

171. Matheknobelei 8/79
Torsten sitzt 2 m hinter seinem 1 m breiten Fenster. Vor dem Fenster verläuft in 100 m Entfernung quer zur Blickrichtung eine Landstraße.
Welche Geschwindigkeit hat der Radfahrer, den Torsten 5 s lang im Blickfeld des Fensters sehen kann?



Der Weg x des Radfahrers kann man mit Hilfe des Strahlensatzes bestimmen: T ... Torsten, F ... Fenster, S ... Straße, $b = 1$ m
2 m : 1 m = 102 m : x, $\quad x = 51$ m. Der Radfahrer left also in 6 s einen Weg von 51 m zurück. Das entspricht einer Geschwindigkeit von 30,6 km/h, denn es gilt

$$v = \frac{51 \text{ m}}{6 \text{ s}} = 8{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 30{,}6\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

172. Matheknobelei 9/79
Familie Becker aus Halle hat drei Kinder. Sie wollen mit der Eisenbahn zu Verwandten nach Bitterfeld fahren.
Für Anja ist diese Fahrt noch kostenlos, da sie erst zwei Jahre alt ist. Silke und Frank müssen jeweils den halben Fahrpreis der Erwachsenen bezahlen. Für die ganze Familie gibt es jedoch eine Ermäßigung des Fahrpreises um ein Drittel, die durch die sozialpolitischen Maßnahmen für Familien mit 3 und mehr Kindern besteht.
Wieviel Fahrgeld muss Familie Becker für die Hin- und Rückfahrt insgesamt bezahlen (der volle Fahrpreis für einen Erwachsenen für Hin- und Rückfahrt beträgt 4,80 M)?

Familie Becker muss für vier Personen Fahrgeld bezahlen. Für zwei Erwachsene ergibt sich: $2 \cdot 4{,}80$ M = 9,60 M.
Für zwei Kinder ergibt sich: $2 \cdot 2{,}40$ M = 4,80 M.
Das bedeutet einen Gesamtpreis von 9,60 M + 4,80 M = 14,40 M.
Da die Familie zu einem Drittel ermäßigt reisen kann, erhält man einen Gesamtpreis von 9,60 M; denn:
14,40 M : 3 = 4,80 M; 14,40 M - 4,80 M = 9,60 M.

173. Matheknobelei 10/79
Ein Tourist legte am ersten Tag die Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge des geplanten Wanderweges zurück. Am zweiten Tag hatte der Tourist zwölf Kilometer weniger zurückgelegt als am ersten.
Wie weit wanderte der Tourist jeweils am ersten und zweiten Tag, und welche Strecke musste er am dritten Tag noch bewältigen?

Der Tourist legte am ersten Tag ein Sechstel des Weges mehr zurück am zweiten Tag; denn: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
Da $6 \cdot 12 = 72$ ist, betrug die Gesamtlänge des Wanderweges 72 km. Am ersten Tag wurden 36 km, am zweiten 24 km und am an 12 km zurückgelegt.

174. Matheknobelei 11/79
Um die Jahrhundertwende lag in Berlin der tägliche Wasserverbrauch bei 150 l pro Kopf. Jetzt beträgt er 400 l bis 500 l.
Wie hoch wäre eine Säule aus Brauseflaschen mit 0,33 l Inhalt und 17 cm Höhe, wenn wir einen mittleren Tagesverbrauch von 450000 m^3 in derartige Flaschen abfüllen und übereinanderstellen könnten?
Hinweis: 0,33 l = $\frac{1}{3}$ l, 1 m^3 hat 1000 l; und Vorsicht, nicht kippeln!

Der mittlere Tagesverbrauch an Wasser betrug 450000 $m^3 = 45 \cdot 10^7$ l.
In Brauseflaschen abgefüllt ergäbe das $45 \cdot 10^7 \cdot 3 = 135 \cdot 10^7$, da 1 l jeweils in drei Flaschen gefüllt werden kann.
Alle Flaschen übereinandergestellt ergäben eine Länge von $135 \cdot 10^7 \cdot 17$ cm $= 2295 \cdot 10^7$ cm. Umgerechnet erhält man rund 230000 km.

175. Matheknobelei 12/79
Hallo Matheknobler! Zum 175. Mai könnt Ihr Euch diesmal an unserer Knobelei beteiligen. Seit wann es die Matheknobelei gibt, könnt Ihr damit gut errechnen.
In welcher Ausgabe wird die 250. Matheknobelei erscheinen, wenn wie bisher jeden Monat eine Aufgabe veröffentlicht wird?
Nur wer beides richtig berechnet hat Gewinnchancen!

Die erste Matheknobelei war vor 175 Monaten, das sind 14 Jahre und 7 Monate. Demnach erschien sie im Jahr 1965. Berücksichtigt man noch die 7 Monate, so ergibt sich der Juni 1965. (Erklärung: 7/Dez., 6/Nov., 5/Okt., 4/Sep., 3/Aug., 2/Juli, 1/Juni 1965).

Die 250. Matheknobelei wird in 75 Monaten erscheinen, das sind 6 Jahre und drei Monate - also im März 1986.

176. Matheknobelei 1/80
Wenn in der Kinderkrippe einer Kleinstadt 63 Kinder anwesend sind, gilt sie als zu 84 Prozent belegt.
Wie groß ist ihre Kapazität, also die Kinderzahl bei 100 Prozent Auslastung?

Die Kapazität der Kinderkrippe errechnet man mit Hilfe einer Verhältnisgleichung:
63 Kinder : x Kinder = 84 : 100 und damit $x = \frac{6300}{84} = 75$
Die Kinderkrippe kann 75 Kinder aufnehmen.

177. Matheknobelei 2/80
Ein Mopedfahrer fährt sieben Kilometer mit der Geschwindigkeit $v_1 = 30$ km/h und dann vier Kilometer mit $v_2 = 40$ km/h.
Wie groß ist seine durchschnittliche Geschwindigkeit?

Der Gesamtweg s_G des Mopedfahrers setzt sich zusammen aus $s_1 = 7$ km und $s_2 = 4$ km, also $s_G = 11$ km.
Zur Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ muss zunächst die Gesamtzeit t_G errechnet werden: $v = \frac{s}{t}$ daraus folgt $t = \frac{s}{v}$.

$$t_1 = \frac{7 \text{ km} \cdot \text{h}}{30 \text{ km}} = \frac{7}{30} \text{ h} \qquad , \qquad t_2 = \frac{4 \text{ km} \cdot \text{h}}{40 \text{ km}} = \frac{3}{30} \text{ h}$$

$t_G = t_1 + t_2 = \dfrac{10}{30} \text{ h} = \dfrac{1}{3} \text{ h}$
Für die Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt sich nun:

$$\overline{v} = \frac{s_G}{t_G} = 33 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Mopedfahrer fährt also mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit $\overline{v}$ von 33 km/h.

178. Matheknobelei 3/80
Sven hatte aus der Kinderbücherei ein Buch entliehen. Anfangs las er täglich genau zwölf Seiten; nach acht Tagen hatte er die Hälfte des Buches gelesen. Um die Leihfrist einzuhalten, musste er vom neunten Tag an täglich vier Seiten mehr lesen.
a) Wieviel Seiten hatte das Buch?
b) Für wieviel Tag hatte Sven sich das Buch entliehen?

a) Nach acht Tagen hatte Sven die Hälfte des Buches gelesen. Das waren $8 \cdot 12 = 96$ Seiten.

b) Die zweite Hälfte des Buches von 96 Seiten las Sven in Etappen von jeweils $12 + 4 = 16$ Seiten. Er benötigte dazu $96 : 16 = 6$ Tage.
Die gesamte Leihfrist betrug also $8 + 6 = 14$ Tage.

179. Matheknobelei 4/80
Auf einer Buslinie verkehren im 15-Minuten-Abstand zehn Fahrzeuge.
Wieviel Busse müssen zusätzlich eingesetzt werden, um einen 10-Minuten-Abstand zu gewährleisten?

Je kürzer der Fahrabstand der Busse ist, um so mehr Fahrzeuge werden benötigt. Es besteht also eine indirekte Proportionalität:

$$\frac{15 \text{ min}}{10 \text{ min}} = \frac{x}{10}, \qquad 10x = 150, \qquad x = 15$$

Es werden fünf Busse zusätzlich benötigt.

180. Matheknobelei 5/80
In einer siebenten Klasse wurde in einer Physikarbeit folgendes Ergebnis erreicht:

Die Hälfte der Schüler konnte die Note Zwei erhalten. Der sechste Teil zeigte sehr gute Leistungen. Ein Fünftel der Arbeiten trug die Note Drei. Bei vier Schülern waren die Leistungen nur ungenügend.

a) Wieviel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?
b) Welcher Zensurendurchschnitt wurde erreicht?

a) Die Anzahl der Schüler, die bei der Physikarbeit mitgeschrieben haben, errechnet man mit folgender Gleichung:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x}{5} + 4 = x$$

Dabei erhält man die Lösung $x = 30$ Schüler.
b) Der Zensurendurchschnitt war danach leicht zu bestimmen.

Zensuren:	1	2	3	4	5
	5	15	6	0	4

Der Zensurendurchschnitt betrug: $(1 \cdot 5 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 4) = 2{,}43 \approx 2{,}4$.

181. Matheknobelei 6/80
Ein Pkw mit Otto-Motor verbraucht 10,5 l Benzin auf 100 km. Man weiß, dass die Energieausnutzung beim Otto-Motor 24 Prozent beträgt, während sie beim Dieselmotor bei 38 Prozent liegt.
Wieviel Kraftstoff würde demzufolge der Pkw bei Dieselantrieb gleicher Leistung und gleicher Fahrweise verbrauchen?

Der Kraftstoffverbrauch liegt beim Dieselmotor offensichtlich niedriger als beim Otto-Motor. Die Aufgabe ist also mit einer indirekten Proportion lösbar:

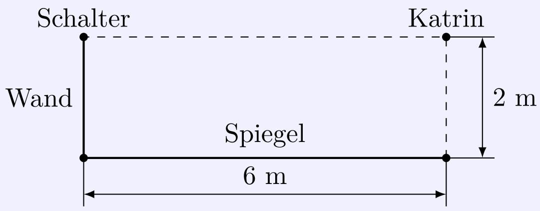
$$10{,}5 : x = 38 : 24, \qquad 38x = 10{,}5 \cdot 24, \qquad x = 6{,}6$$

Der Pkw würde mit Dieselantrieb nur 6,6 l Kraftstoff auf 100 km verbrauchen.

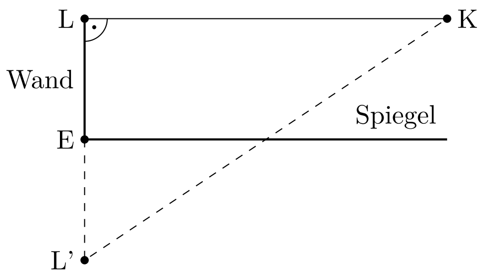
182. Matheknobelei 7/80
In einem Spezialistenlager "Junger Mathematiker" kauft Rainer während einer Pause in der Lagerkantine für sich und seine Freunde ein:
Dreizehn Flaschen Limonade zu je 0,21 M, sechs Bockwürste und neun Lachsbrötchen.
Reiner soll insgesamt 10,43 M bezahlen. "Das kann nicht stimmen", sagt er. Dabei weiß er noch gar nicht, wieviel jedes Lachsbrötchen kostet.
Weshalb kann er trotzdem so sicher sein?

Rainer überlegte sich folgendes:
13 Flaschen Limonade zu 0,21 M kosten 2,73 M. Für die sechs Bockwürste (6 B) und neun Lachsbrötchen (9 L) sollte er also 6 B + 9 L = 7,70 M bezahlen.
Da aber 6 B + 9 L = 3(2 B + 3 L), muss der Preis eine durch drei teilbare Zahl sein.
7,70 M ist jedoch nicht durch drei teilbar.
Deshalb konnte die Gesamtsumme von 10,43 M nicht stimmen.

183. Matheknobelei 8/80



Katrin befindet sich im Übungssaal ihrer Ballettschule. Sie steht so, dass ihre Augen etwa zwei Meter vom großen Wandspiegel entfernt sind. Der Lichtschalter an der angrenzenden Wand ist ebenfalls zwei Meter vom Spiegel entfernt und sechs Meter von Katrin.
Welche Entfernung hat das Spiegelbild des Lichtschalters von Katrins Augen (siehe Skizze)?



Katrins Augen, der Lichtschalter und das Spiegelbild des Lichtschalters bilden ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Zeichnung).
Die Hypotenuse KL' des Dreiecks ist dabei die gesuchte Strecke. Da $KL = 6$ m und $LE = 2$ m (also $LL' = 4$ m) sind. ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras:

$$(KL')^2 = (KL)^2 + (LL')^2 = 36 + 16 = 52 \text{ m}^2 \qquad , \qquad KL' \approx 7{,}2 \text{ m}$$

Die Entfernung zwischen Katrins Augen und dem Spiegelbild des Lichtschalters beträgt also etwa 7,2 m.
Diese Aufgabe war auch zeichnerisch lösbar, besonders für unsere Leser, die den Satz des Pythagoras noch nicht kennen.

184. Matheknobelei 9/80
Rolf stellt seinem neuen Freund Michael folgende Aufgabe:
"Multipliziere dein Alter mit zwei und addiere fünf! Multipliziere das Ergebnis mit fünf! Nun nenne mit die erhaltene Zahl. dann sage ich dir wie alt du bist."
Michael staunte, denn Rolf konnte ihm wirklich sein Alter sagen. Wie hat er das gemacht?

Das Alter von Michael war nicht schwer zu errechnen. Es kam darauf an, einen möglichst kurzen Rechenweg zu finden.
Nach der Aufgabenstellung von Rolf ergab sich folgende Gleichung: $(2x + 5) \cdot 5 = y$.
Das Ergebnis y wurde Rolf genannt. Nun wusste er:

$$(2x + 5) \cdot 5 = 10x + 25$$

Rolf subtrahierte also vom genannten Ergebnis 25 und dividierte dann durch zehn. Als gutem Kopfrechner gelang ihm das schnell.

Auch folgende Verfahrensweise ist möglich: Vom genannten Ergebnis wird die letzte Ziffer, die immer eine 5 ist, weggestrichen und dann die Zahl 2 subtrahiert.

185. Matheknobelei 10/80
In Moskau ist die Geschwindigkeit der Fahrstühle in den Hochhäusern doppelt so groß wie bei Fahrstühlen in gewöhnlichen Gebäuden.
Deshalb ist die Fahrzeit bis zum 20. Stockwerk, das in einer Höhe von 81 m liegt, nur fünf Sekunden länger als bis zum achten Stockwerk eines gewöhnlichen Gebäudes, das in 33 m Höhe liegt.
Welche Geschwindigkeit haben jeweils die Fahrstühle in Hochhäusern und in gewöhnlichen Gebäuden?

Die Geschwindigkeit der Fahrstühle in den gewöhnlichen Gebäuden Moskaus habe den Betrag x in m/s. Dann hat die Geschwindigkeit der Fahrstühle in den Hochhäusern den Betrag $2x$ in m/s.
Entsprechend der Aufgabenstellung erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{81}{2x} = \frac{33}{x} + 5$$

Daraus ergibt sich $x = 1{,}5$.
Die Fahrstühle in gewöhnlichen Gebäuden haben eine Geschwindigkeit von 1,5 m/s, während die Geschwindigkeit der Fahrstühle in Hochhäusern 3 m/s beträgt.

186. Matheknobelei 11/80
Jens soll von zwei zylindrischen Kochtöpfen den mit dem größten Fassungsvermögen heraussuchen.
Dabei ist der braune Topf doppelt so hoch wie der blaue, aber den blaue Topf ist 1 1/2 mal so breit wie der braune.
Welchen Kochtopf muss Jens wählen?

Der blaue Topf hat das Volumen

$$V_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot h_1$$

und der braune Topf das Volumen

$$V_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 \cdot h_2$$

Da der braune Topf doppelt so hoch ist wie der blaue, gilt $2h_1 = h_2$. Für den Durchmesser des blauen Topfes, der eineinhalbmal so breit ist wie der des braunen, ergibt sich $d_1 = \frac{3}{2} d_2$.
Nach dem Einsetzen in die Volumengleichung erhält man:

$$V_1 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{2} d_2\right)^2 \cdot h_1 \qquad , \qquad V_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 \cdot 2h_1$$

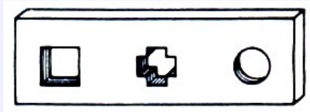
Beim Vergleich der beiden Volumen kann man die übereinstimmenden Faktoren weglassen. Es bleibt so nur der Vergleich von $\left(\frac{3}{2} d_2\right)^2$ bei V_1 und dem Faktor $d_2^2 \cdot 2$ bei V_2.

$$\left(\frac{3}{2} d_2\right)^2 = \frac{9}{4} d_2^2 \qquad , \qquad \frac{9}{4} d_2^2 > 2d_2^2$$

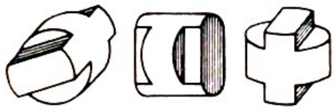
da $\frac{9}{4} > 2$.
V_1 ist größer als V_2. Jens muss den blauen Topf wählen.

187. Matheknobelei 12/80

Im Werkunterricht stellte Michael ein Brett mit drei verschiedenen Durchbrüchen her (wie auf der Zeichnung).
Nun baut er aus einem Flaschenkorken ein Passstück, das alle drei Öffnungen verschließen kann.
Wie muss es aussehen?



Das Passstück für alle drei Öffnungen sieht so aus:



188. Matheknobelei 1/81

Mit einem Dienstwagen (PKW) wurden in einem Monat 1992 km gefahren; davon 379 km Stadtfahrt. Das Limit für den Bezinverbrauch beträgt bei Stadtfahrt elf Liter auf 100 km, bei Fernfahrt zehn Liter auf 100 km.
Zu Beginn des Monats befanden sich noch 20 l Benzin im Tank, dazu wurden noch 190,4 l betankt. Bei der Abrechnung waren noch 30 l im Tank.
Wieviel Kraftstoff hat der Fahrer durch vorbildliche Fahrweise gegenüber dem Limit eingespart?

Um die Kraftstoffeinsparung zu errechnen, muss man den tatsächlichen Benzinverbrauch mit dem vorgegebenen Limit vergleichen.

a) Bestimmung des vorgegebenen Limits für 379 km Stadtfahrt sowie 1992 km - 379 km = 1613 km Fernfahrt:
Da für den Verbrauch in der Stadt 11 l/100 km vorgeschrieben sind, ergibt sich folgende Proportion:

$$11 : x = 100 : 379, \qquad 100x = 4169, \qquad x = 41{,}69$$

Der Fahrer durfte also bei seinen Stadtfahrten 41,69 l Benzin verbrauchen.
Für die Fernfahrten ergibt sich:

$$10 : x = 100 : 1613, \qquad 100x = 16130, \qquad x = 161{,}30$$

Es durften also 161,30 l Kraftstoff verbraucht werden.
Insgesamt kommt man so auf ein Verbrauchslimit von 41,69 l + 161,30 l = 202,99 l.

b) Der tatsächliche Benzinverbrauch wird wie folgt bestimmt: 20 l + 190,4 l - 30 l = 180,4 l.
c) Somit ergibt sich die Kraftstoffeinsparung von 202,99 l - 180,4 l = 22,59 l.
Der Kraftfahrer konnte also durch seine vorbildliche Fahrweise fast 23 l Benzin in einem Monat einsparen.

189. Matheknobelei 2/81

Marlies hat viel Freude an ihrer Zimmerpflanze. Sie wächst monatlich etwa um fünf Prozent höher, als sie am Anfang des Monats war. Zur Zeit beträgt ihre Höhe 60 Zentimeter.
Um wieviel Zentimeter wird die Pflanze in den nächsten drei Monaten etwa gewachsen sein?

Marlies Pflanze wächst weiterhin so gut.

1. Monat: 5 Prozent bedeuten 1/20 des Ausgangswertes. 1/20 von 60 cm sind 3 cm. Am Ende des ersten Monats misst die Pflanze 63 cm.
2. Monat: 1/20 von 63 sind 3,15 cm. Am Ende des zweiten Monats ist die Pflanze 66,15 cm hoch.
3. Monat: 1/20 von 66,15 cm sind rund 3,3 cm.
Die Pflanze ist also nach drei Monaten etwa 69,45 cm hoch gewachsen. Das ist eine Zunahme von rund 9,45 cm.

190. Matheknobelei 3/81
Die Buslinie einer Stadt hat 20 km Länge. Alle 15 Minuten fährt an jeder Endhaltestelle ein Bus los, mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit von 40 km/h.
Wie vielen Bussen begegnet man unterwegs, wenn man die gesamte Strecke mitfährt? Zur Abfahrtszeit soll gerade ein Bus aus der entgegengesetzten Richtung ankommen.

Für die Strecke von 20 km benötigt jeder Bus bei der Geschwindigkeit von 40 km/h, eine halbe Stunde. Das bedeutet: Immer wenn ein Bus die Hälfte der Strecke zurückgelegt hat (nach 15 Minuten), fährt der nächste los.

Als unser Bus losfährt, kommt gerade einer aus der entgegengesetzten Richtung an. Ein zweiter befindet sich noch mm vom Ziel entfernt und ein dritter fährt an der anderen Endhaltestelle los. Den zweiten Bus treffen wir nach 5 km, den dritten nach 10 km, denn wir fahren ja mit gleicher Geschwindigkeit einander entgegen.

Inzwischen, bei der 10 km-Marke, sind weitere 15 min vergangen. Ein vierter Bus fährt an der Endhaltestelle los. Wir treffen ihn nach wiederum 5 km.
Bei unserer Ankunft am Ziel wird gerade der fünfte Bus starten. Wir treffen unterwegs also fünf Busse.

191. Matheknobelei 4/81
Schallwellen legen in der Luft in einer Sekunde eine Strecke von rund 340 m zurück. die Rundfunkwellen dagegen etwa 300000 km.
Wer hört einen vor dem Mikrophon sprechenden Redner früher:
ein Hörer in der ersten Reihe im Saal, der zwei Meter vom Redner entfernt sitzt, oder
ein Rundfunkhörer, der die Sendung in einer Entfernung von 1000 km über Kopfhörer verfolgt?

Da die Schallwellen in der Luft etwa 340 m pro Sekunde zurücklegen, benötigen sie für die zwei Meter bis zum Hörer im Saal $\frac{1}{170}$ Sekunde, denn:

$$t_1 = \frac{2\text{ m} \cdot 1\text{ s}}{340\text{ m}} = \frac{2}{340}\text{ s} = \frac{1}{170}\text{ s}$$

Rundfunkwellen, die etwa 300000 km pro Sekunde zurücklegen. benötigen zum 1000 km entfernten Radiohörer $\frac{1}{300}$ Sekunde, denn

$$t_2 = \frac{1000\text{ km} \cdot 1\text{ s}}{300000\text{ km}} = \frac{1}{300}\text{ s}$$

Der Rundfunkhörer kann also den Redner früher hören, als der Hörer im Saal.

192. Matheknobelei 5/81
Die Schüler der Klasse 7 b sammelten insgesamt 336 kg Altpapier. Aus 1 kg Altpapier stellt man in einer Papierfabrik 700 g reines weißes Papier her und aus je 30 g von diesem ein Schreibheft.
Welches ist die größtmögliche Anzahl von Heften, die aus dem gesammelten Altpapier hergestellt werden kann?

Aus 336 kg Altpapier können 235,2 kg reines weißes Papier hergestellt werden, denn 336 kg - 0,7 kg = 235,2 kg.
Bei einem Verbrauch von 30 g Papier für ein Heft, können aus 235,2 kg 7840 Hefte hergestellt werden: 235200 g : 30 g = 7840.
Die Klasse 7 b sammelte also Altpapier, das für die Herstellung von 7840 Heften reichte.

193. Matheknobelei 6/81
Susanne und Michael hatten so viele Pilze gesammelt, dass sie diese kaum tragen konnten. Die Pilze bestehen aber zu 85 Prozent aus Wasser. Nachdem die Pilze getrocknet waren, betrug ihre Masse 15 kg weniger als vorher. Jetzt enthielten sie nur noch 40 Prozent Wasser.
Wieviel Kilogramm frische Pilze hatten die Kinder gesammelt?

Zunächst muss errechnet werden, wieviel Kilogramm Wasser in den gesammelten Pilzen insgesamt enthalten waren. Dabei werden für 85 Prozent x kg angesetzt und für 40 Prozent $(x - 15)$ kg. Es gilt nun:

$$x = \frac{85(x-15)}{40}, \qquad 40x = 85x - 1275, \qquad x = 28{,}33$$

85 Prozent Wassergehalt bedeuten also, dass in den gesammelten Pilzen 28,33 kg Wasser enthalten sind. Mit Hilfe dieser Angabe kann man die Gesamtmasse der Pilze berechnen, denn die 28,33 kg entsprechen 85 Prozent der Gesamtmasse m.

$$m = \frac{28{,}33 \text{ kg} \cdot 100}{85} = 33{,}33 \text{ kg}$$

Susanne und Michael hatten 33,33 kg Pilze gesammelt und getrocknet.

194. Matheknobelei 7/81
Aus einem Rechenbuch von Adam Ries, der von 1492 bis 1559 lebte, wurde diese Aufgabe entnommen:

Ein Sohn fragt seinen Vater, wie alt dieser sei. Der Vater antwortet: "Wenn du wärest auch so alt wie ich und halb so alt und ein Viertel so alt und ein Jahr dazu, so wärest du 134 Jahre alt."
Wie alt ist der Vater?

Wenn der Vater x Jahre alt ist, so ergibt sich für das Gesamtalter von 134 Jahren folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = \frac{4x + 2x + 1x + 4}{4} &= 134 \\ 7x + 4 &= 536 \\ 7x &= 532 \\ x &= 76 \end{aligned}$$

Der Vater ist also zum Zeitpunkt seiner Aussage 76 Jahre alt.

195. Matheknobelei 8/81
Frank macht mit seinem jüngeren Bruder Dirk einen Wettlauf. Dabei gibt er ihm 30 Meter Vorsprung. Beim Laufen schafft Frank jeweils mit vier Schritten vier Meter, während sein Bruder nur drei Meter mit vier Schritten zurück (in der gleichen Zeit).
Nach welcher Strecke holt Frank Dirk ein? Wieviel Schritte muss er dazu laufen?

Bis Frank Dirk einholt, laufen beide Jungen die gleiche Anzahl 8 von Schritten. Da Frank mit vier Schritten jeweils 4 m schafft und Dirk nur 3 m, er aber einen Vorsprung von 30 m hat, gilt folgende Gleichung:

$$4 \cdot 4a = 3 \cdot 4a + 30 \qquad , \qquad 4a = 30$$

Nach 30 mal 4 Schritten holt also Frank seinen Bruder ein. Das sind 120 Schritte und somit für Frank auch 120 Meter.

196. Matheknobelei 9/81
In einem Haus sind drei Uhren. Am 1.Januar zeigten sie alle die genaue Zeit. Doch richtig ging nur die erste Uhr, die zweite blieb eine Minute am Tag zurück, die dritte ging eine Minute am Tag vor.
Nach welcher Zeit werden alle drei Uhren, wenn sie so weitergehen, erneut die richtige Zeit anzeigen?

Entsprechend der Voraussetzungen besteht zwischen der richtig gehenden Uhr und den beiden anderen pro Tag eine Differenz von einer Minute. Das bedeutet, dass in 60 Tagen, 60 Minuten Unterschied entstehen.
Die notwendigen zwölf Stunden Differenz erhält man nach 720 Tagen, da 12 Stunden 720 Minuten haben. Das bedeutet, dass die Uhren nach genau 720 Tagen wieder die gleiche Zeit anzeigen.

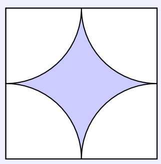
Bei manchen Digitaluhren mit 24-Stunden-Ziffernanzeige verdoppelt sich noch diese Zeit, da hier erst nach 24 Stunden wieder die gleiche Zeit angezeigt wird. Bei solchen Uhren würden 1440 Tage benötigt, bis sie wieder alle drei die richtige Zeit angeben.

197. Matheknobelei 10/81
"Bisher hast Du 6,- Mark Taschengeld erhalten. Ab sofort bekommst Du nur noch den 0,8 Teil dieses Taschengeldes!", sagte der Vater. Jörg ärgerte sich zunächst, denn aber schenkte er vor lauter Freude seiner kleinen Schwester Claudia eine Tüte Bonbons.
Wie kann man sich Jörgs Verhalten erklären?

Zuerst war Jörg ärgerlich, weil er dachte, dass er weniger als 6,00 Mark Taschengeld bekommen würde. Beim Nachrechnen merkte er jedoch, dass er sich geirrt hatte, denn:
6,00 : 0,8 = 60 : 8 = 7,5
Er sollte also in Zukunft 7,50 Mark Taschengeld erhalten. Da ist seine Freude wohl verständlich.

198. Matheknobelei 11/81

Eine Grünanlage soll eine Form erhalten, wie die Fläche auf unserer Zeichnung. Das umschriebene Quadrat hat dabei die Seitenlänge $a = 6$ m.
Wie groß ist der Inhalt der gefärbten Fläche, die mit Blumen bepflanzt werden soll?



$a = 2r$

Der Flächeninhalt A_1 des Quadrates beträgt 6 m · 6 m = 36 m^2.
Wenn man die vier Viertelkreise zusammensetzt, erhält man einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ m. Den Flächeninhalt dieses Kreises A_2 muss man von A_1 subtrahieren, um den Inhalt der gesuchten Fläche A_G zu erhalten. Wir rechnen also folgendermaßen:

$$A_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 9 \text{ m}^2 = 28{,}3 \text{ m}^2$$

$$A_G = A_1 - A_2 = 36 \text{ m}^2 - 28{,}3 \text{ m}^2 = 7{,}7 \text{ m}^2$$

Auf 7,7 m^2 werden Blumen gepflanzt.

199. Matheknobelei 12/81
Die Kumpel der Braunkohlenindustrie der DDR wollen die Förderung von Rohbraunkohle bis zum Jahr 1990 auf 300 Millionen Tonnen pro Jahr steigern. Das macht den Neuaufschluss von 21 Tagebauen erforderlich.
Wie hoch wird im Jahr 1990 die Tagesproduktion von Rohbraunkohle in der DDR sein, wenn täglich, auch sonn- und feiertags, gefördert wird? (Das Ergebnis soll auf volle Tausender gerundet werden.)

300 Millionen Tonnen Jahresproduktion an Rohbraunkohle bedeuten im Jahre 1990 eine tägliche Förderung von 300000000 t : 365 $\approx$ 822000 t.
Dabei wurden auch die Sonn- und Feiertage gezählt.