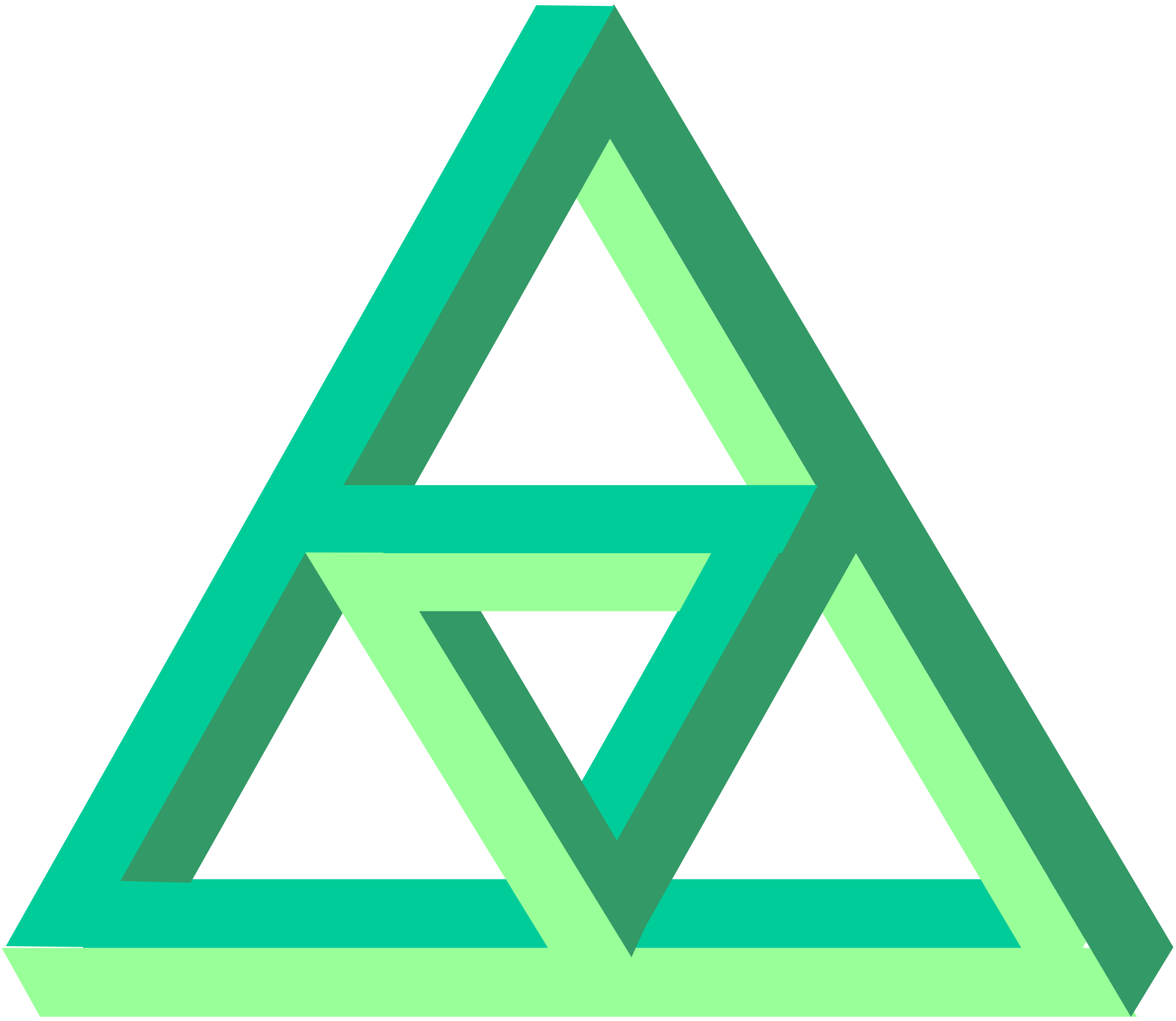
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 10/2023 (Oktober 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir greifen im Zusammenhang mit den Aufgaben **MO620922/MO621022** und **MO620944/MO621044** das Thema 13 zu Bewegungsaufgaben erneut auf, nachdem wir bereits im Heft 1/2022 diese Thematik diskutierten. Im 62. Jahrgang der MO lässt sich verfolgen, wie eine Idee der Aufgabenstellung durch zusätzliche Fragen oder durch modifizierte Bedingungen sowohl zwischen den Klassenstufen 9 und 10 als auch zwischen den MO-Runden differenziert werden kann.

Passend zur Erfordernis, bei diesen Bewegungsaufgaben lineare Gleichungssysteme zu lösen, zeigen wir im historischen Rückblick aus einem **Mathematik-Buch von 1906**, wie Lösungsmethoden erklärt wurden.

Mit Bezug zur aktuellen Aufgabe **KZM 1-4** untersuchen wir geometrische Gerüchte – also Figuren, die sich selbst vervielfachen.

Wir berichten über die **17. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade** (MeMO), von der das sechsköpfige deutsche Team mit einer Gold- und zwei Bronzemedaillen sowie drei ehrende Erwähnungen zurückkam. Eine Besonderheit des Wettbewerbs ist neben dem typischen individuellen Leistungsvergleich ein Teamwettbewerb, in dem die Ländermannschaften in fünf Stunden acht Aufgaben zu lösen haben.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 13.02 - Bewegungsaufgaben[3]

Aufgabe 13.05 - MO620922. Eine Schnecke beginnt um 10:50 Uhr von einem Salatblatt auf kürzestem Wege zu einem 120 cm entfernten Kohlkopf zu kriechen. Um 11:05 Uhr kriecht eine Raupe auf demselben Weg in Gegenrichtung vom Kohlkopf in Richtung des Salatblatts los. Als sich Raupe und Schnecke unterwegs begegnen, ist es 12:00 Uhr.

Sie hätten sich auch um 12:00 Uhr getroffen, wenn die Schnecke erst um 11:00 Uhr und die Raupe bereits um 10:30 Uhr losgekrochen wäre.

Jedes der beiden Tiere kriecht stets mit derselben konstanten Geschwindigkeit, diese beiden Geschwindigkeiten können aber verschieden sein.

Berechnen Sie die Geschwindigkeiten von Raupe und Schnecke in cm/min. Führen Sie die Probe durch.

Lösungshinweise: Wenn sich die Schnecke und die Raupe treffen, haben sie zusammen gerade die Entfernung vom Salatblatt zum Kohlkopf zurückgelegt, also 120 cm.

In der ersten Variante kriecht die Schnecke $t_s = 70$ Minuten und die Raupe $t_r = 55$ Minuten. In der zweiten Variante sind es $t_s = 60$ bzw. $t_r = 90$ Minuten. Wenn v_s und v_r die jeweiligen Geschwindigkeiten in cm/min sind, ergeben sich für die Entfernungen s in cm wegen des allgemeinen Zusammenhangs $t \cdot v = s$ die Gleichungen[4]

$$70 \cdot v_s + 55 \cdot v_r = 120\,,$$
$$60 \cdot v_s + 90 \cdot v_r = 120\,.$$

Subtrahieren wir das Siebenfache der zweiten Gleichung vom Sechsfachen der ersten, erhalten wir $-300 \cdot v_r = -120$ und damit $v_r = 0{,}4$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich $70 \cdot v_s = 98$ und damit $v_s = 1{,}4$. Die Schnecke kriecht also mit einer Geschwindigkeit von 1,4 cm/min und die Raupe mit 0,4 cm/min.

Probe: Wenn die Schnecke 70 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 1,4 cm/min kriecht, legt sie in dieser Zeit einen Weg von $70 \cdot 1{,}4 = 98$ cm zurück. Die Raupe kriecht 55 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 0,4 cm/min und legt damit einen Weg von $55 \cdot 0{,}4 = 22$ cm zurück. Wegen 98 cm + 22 cm = 120 cm treffen sie sich an einer Stelle.

[3] Man beachte zu diesem Thema auch Heft 1/2022.

[4] Es ist zulässig, die Berechnungen ohne die zugehörigen Maßeinheiten durchzuführen. Im Antwortsatz sind die Maßeinheiten aber aufzuführen.

In der zweiten Variante kriecht die Schnecke 60 Minuten lang mit der Geschwindigkeit von 1,4 cm/min und legt damit einen Weg von $60 \cdot 1{,}4 =$ cm zurück. Die Raupe kriecht 90 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 0,4 cm/min und legt jetzt einen Weg von $90 \cdot 0{,}4 = 36$ cm zurück. Auch in diesem Fall gilt 84 cm + 36 cm = 120 cm.

❑

Der Schwierigkeitsgrad für die Klassenstufe 10 wird durch eine zusätzliche Fragestellung erhöht.

Aufgabe 13.06 - MO621022. Eine Schnecke beginnt um 10:50 Uhr auf kürzestem Wege von einem Salatblatt zu einem 120 cm entfernten Kohlkopf zu kriechen. Um 11:05 Uhr kriecht eine Raupe auf demselben Weg in Gegenrichtung vom Kohlkopf in Richtung des Salatblatts los. Als sich Raupe und Schnecke unterwegs begegnen, ist es 12:00 Uhr.

Sie hätten sich auch dann um 12:00 Uhr getroffen, wenn die Schnecke erst um 11:00 Uhr und die Raupe bereits um 10:30 Uhr losgekrochen wäre.

Wann würden sich Schnecke und Raupe treffen, wenn beide um 11:00 Uhr starteten?

Gehen Sie dabei von folgender Annahme aus: Jedes der beiden Tiere kriecht stets mit derselben konstanten Geschwindigkeit, diese beiden Geschwindigkeiten können aber verschieden sein.

Lösungshinweise: Obwohl in der Aufgabestellung nicht ausdrücklich gefordert, müssen wir zunächst wie bei Aufgabe **MO620922** die Geschwindigkeiten von Schnecke (1,4 cm/min) und Raupe (0,4 cm/min) berechnen. Damit verhalten sich ihre Geschwindigkeiten wie 1,4 : 0,4 = 7 : 2. Bei gleichzeitigem Start legt die Schnecke also bis zum Treffpunkt $\frac{7}{9}$ der 120 cm zurück, das sind $\frac{280}{3}$ cm. Wegen $t = \frac{s}{v}$ dauert das $\frac{\frac{280}{3}}{1{,}4} = \frac{200}{3}$ Minuten bzw. 66 Minuten und 40 Sekunden. Damit treffen sich beide um 12:06:40 Uhr.

Probe: Die Raupe würde bis zum Treffpunkt $\frac{2}{9}$ der 120 cm zurücklegen, das sind $\frac{80}{3}$ cm. Wegen $t = \frac{s}{v}$ dauert das $\frac{\frac{80}{3}}{0{,}4} = \frac{200}{3}$ Minuten wie auch bei der Schnecke. ❑

Hinweis für die Korrektoren: Wird in der Schülerlösung deutlich, dass Gleichungen und Gleichungssysteme äquivalent umgeformt wurden (oft auch ohne entsprechende Zeichen), dann muss die Probe nichtzwingend durchgeführt werden und der eine Bewertungspunkt ist der Lösung des Systems zuzurechnen.

Trotz dieses Hinweises ist zu empfehlen, wenn möglich stets eine Probe durchzuführen, um auch Übertragungs- und Rechenfehler in der Lösungsdarstellung auszuschließen.

Obwohl die folgenden Aufgaben qualitativ sehr ähnlich erscheinen, besteht nun die zusätzliche Schwierigkeit, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, an welcher Stelle die zweite Begegnung stattfindet.

Aufgabe 13.07 - MO620944. Rudi und Simon gehen jede Woche auf dem Waldweg zwischen Adorf und Bedorf spazieren. Rudi wohnt in Adorf, Simon wohnt in Bedorf. Jeder geht mit seiner eigenen konstanten Geschwindigkeit daheim los bis zum anderen Ort und dann wieder zurück nach Hause.

Heute sind beide genau um 12 Uhr mittags losgegangen. Zum ersten Mal haben sie sich heute bei der alten Eiche getroffen, die genau 3 km von Adorf entfernt ist. Einige Zeit später kamen sie gleichzeitig bei der Grillhütte an, die genau 4 km von Adorf entfernt liegt.

Wie weit ist der Weg von Adorf nach Bedorf? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Entfernung zwischen beiden Orten in km mit e, die Geschwindigkeiten in km/h, mit denen sich Rudi und Simon bewegen, mit v_R und v_S, und messen die Zeiten in h. Damit können wir in Gleichungen auf Maßeinheiten verzichten.

Das erste Treffen findet statt, wenn sich beide auf dem Hinweg befinden. Rudi hat zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s_R = 3$ zurückgelegt, Simon eine Strecke der Länge $s_S = e - 3$. Es gilt also für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_1 = \frac{3}{v_R} = \frac{e-3}{v_S}$$

und folglich

$$v_S = \frac{e-3}{e} \cdot v_R \qquad (\#).$$

Beim zweiten Treffen muss Simon schon auf dem Rückweg sein, hat also zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s'_S = e + 4$ zurückgelegt. Es gibt die zwei Möglichkeiten, dass Rudi noch auf dem Hinweg ist und von Simon überholt wird, oder dass er sich auf dem Rückweg befindet und Simon ihm ein zweites Mal begegnet.

Fall 1: Rudi ist noch auf dem Hinweg und wird von Simon überholt. Dann gilt für den von Rudi zurückgelegten Weg $s'_R = 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}.$$

Wir erhalten daraus mit (#) die Gleichung

$$(e+4)\cdot v_R = 4\cdot v_S = \tfrac{4}{3}\cdot(e-3)\cdot v_R,$$

woraus $3\cdot(e+4) = 4\cdot(e-3)$ und deshalb $e = 24$ folgt.

Fall 2: Rudi ist bei der zweiten Begegnung mit Simon ebenfalls bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2\cdot e - 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{2\cdot e - 4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}.$$

Nun erhalten wir mit (#) die Gleichung

$$(e+4)\cdot v_R = (2\cdot e - 4)\cdot v_S = \tfrac{1}{3}\cdot(2\cdot e - 4)\cdot(e-3)\cdot v_R,$$

also $3\cdot(e+4) = (2e-4)\cdot(e-3) = 2e^2 - 10e + 12$. Diese Gleichung ist gleichbedeutend zu $2\cdot e^2 - 13\cdot e = 0$, woraus wir wegen $e > 0$ schließlich $e = 6{,}5$ finden.

Im ersten Fall beträgt die Entfernung zwischen Adorf und Bedorf 24 km und Simons Geschwindigkeit ist $\frac{24-3}{3} = 7$ Mal so hoch wie die von Rudi. (Läuft z. B. Rudi mit 1 km/h und Simon mit 7 km/h, so tritt dieser Fall auch wirklich auf, mit erstem Treffen um 15 Uhr und zweitem Treffen um 16 Uhr.)

Im zweiten Fall beträgt die Entfernung zwischen Adorf und Bedorf 6,5 km und Simons Geschwindigkeit $\frac{6{,}5-3}{3} = \frac{7}{6}$ Mal so hoch wie die von Rudi. (Läuft z. B. Rudi mit 3 km/h und Simon mit 3,5 km/h, so tritt dieser Fall auch wirklich auf, mit erstem Treffen um 13 Uhr und zweitem Treffen um 15 Uhr.) ❑

Aufgabe 13.08 - MO621044. Rudi und Simon gehen jede Woche auf dem Waldweg zwischen Adorf und Bedorf spazieren. Rudi wohnt in Adorf, Simon wohnt in Bedorf. Jeder geht mit seiner eigenen konstanten Geschwindigkeit daheim los bis zum anderen Ort und dann wieder zurück nach Hause.

Heute sind beide genau um 12 Uhr mittags losgegangen. Zum ersten Mal haben sie sich heute bei der alten Eiche getroffen, die genau 3 km von Adorf entfernt ist. Einige Zeit später kamen sie gleichzeitig bei der Grillhütte an, die genau 1 km von der alten Eiche entfernt liegt.

Wie weit ist der Weg von Adorf nach Bedorf? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Entfernung zwischen beiden Orten in km mit e, die Geschwindigkeiten in km/h, mit denen sich Rudi und Simon bewegen, mit v_R und v_S, und messen Zeiten in h. Damit können wir in Gleichungen auf Maßeinheiten verzichten.

Das erste Treffen findet statt, wenn sich beide auf dem Hinweg befinden. Rudi hat zu dem Zeitpunkt eine Strecke der Länge $s_R = 3$ zurückgelegt, Simon eine Strecke der Länge $s_S = e - 3$. Es gilt also für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_1 = \frac{3}{v_R} = \frac{e-3}{v_S}$$

und folglich

$$v_S = \frac{e-3}{3} \cdot v_R \quad (\#)$$

Von der Grillhütte wissen wir nicht, ob sie 4 km oder 2 km von Adorf entfernt ist. Wenn die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt ist, könnten sich Rudi und Simon dort begegnen, wenn beide auf dem Rückweg sind; es wäre aber auch möglich, dass Rudi noch auf dem Hinweg ist und dort von Simon, der bereits auf dem Rückweg ist, überholt wird.

Wenn die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt ist, können sich Rudi und Simon dort begegnen, wenn beide auf dem Rückweg sind; es könnte aber auch sein, dass Rudi bereits auf dem Rückweg ist und Simon dort überholt, der noch auf dem Hinweg ist.

Fall 1: Die Grillhütte ist 4 km von Adorf entfernt, Rudi ist noch auf dem Hinweg und wird von Simon überholt. Dann gilt für den von Rudi zurückgelegten Weg $s'_R = 4$, für den von Simon zurückgelegten Weg $s'_S = e + 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}.$$

Somit erhalten wir die Gleichung

$$(e+4) \cdot v_R = 4 \cdot v_S = \frac{4}{3} \cdot (e-3) \cdot v_R\,,$$

woraus $3 \cdot (e+4) = 4 \cdot (e-3)$ und schließlich $e = 24$ folgt.

Fall 2: Die Grillhütte ist 4 km von Adorf entfernt, Rudi ist bei der zweiten Begegnung mit Simon ebenfalls bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2 \cdot e - 4$, $s'_S = e + 4$ und für die bis dahin verflossene Zeit $t_2 = \frac{2 \cdot e - 4}{v_R} = \frac{e+4}{v_S}$. Wir erhalten die Gleichung

$$(e+4) \cdot v_R = (2 \cdot e - 4) \cdot v_S = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot e - 4) \cdot (e-3) \cdot v_R,$$

woraus $3 \cdot (e+4) = (2 \cdot e - 4) \cdot (e-3) = 2 \cdot e^2 - 10 \cdot e + 12$, und weiter $2 \cdot e^2 - 13 \cdot e = 0$ und wegen $e > 0$ schließlich $e = 6{,}5$ folgt.

Fall 3: Die Grillhütte ist 2 km von Adorf entfernt, Rudi und Simon sind bei der zweiten Begegnung beide bereits auf dem Heimweg. Dann gilt $s'_R = 2 \cdot e - 2$, $s'_S = e + 2$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{2 \cdot e - 2}{v_R} = \frac{e + 2}{v_S}\,.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$(e + 2) \cdot v_R = (2 \cdot e - 2) \cdot v_S = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) \cdot v_R,$$

woraus $3 \cdot (e + 2) = (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) = 2 \cdot e^2 - 8 \cdot e + 6$, und somit weiter $2 \cdot e^2 - 11 \cdot e = 0$ und wegen $e > 0$ schließlich $e = 5{,}5$ folgt.

Fall 4: Die Grillhütte ist 2 km von Adorf entfernt, Rudi überholt bei der zweiten Begegnung auf seinem Rückweg Simon, der noch auf dem Hinweg ist. Dann gilt $s'_R = 2 \cdot e - 2$, $s'_S = e - 2$ und für die bis dahin verflossene Zeit

$$t_2 = \frac{2 \cdot e - 2}{v_R} = \frac{e - 2}{v_S}.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$(e - 2) \cdot v_R = (2 \cdot e - 2) \cdot v_S = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) \cdot v_R,$$

woraus $3 \cdot (e - 2) = (2 \cdot e - 2) \cdot (e - 3) = 2 \cdot e^2 - 8 \cdot e + 6$, und somit weiter $2 \cdot e^2 - 11 \cdot e + 12 = (e - 4) \cdot (2 \cdot e - 3) = 0$ und wegen $e > 3$ (die alte Eiche liegt zwischen Adorf und Bedorf) schließlich $e = 4$ folgt.

Es gibt also vier Möglichkeiten für die Entfernung, nämlich 24 km oder 6,5 km oder 5,5 km oder 4 km. Alle Fälle können auch wirklich auftreten:

- Beträgt die Entfernung 24 km, liegt die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 1 km/h und Simon mit 7 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 15 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 16 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 6,5 km, liegt die Grillhütte 4 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 3,5 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 15 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 5,5 km, liegt die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 2,5 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 15 Uhr.
- Beträgt die Entfernung 4 km, liegt die Grillhütte 2 km von Adorf entfernt. Laufen Rudi mit 3 km/h und Simon mit 1 km/h, gibt es ein erstes Treffen an der Eiche um 13 Uhr und ein zweites Treffen an der Grillhütte um 14 Uhr. ❑

Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen [5]

Definition. Ein Polygon heißt geometrisches Gerücht, wenn es sich in einzelne kleine Polygone zerlegen lässt, die untereinander entweder deckungsgleich oder spiegelbildlich sind und außerdem alle die gleiche Form haben wie das große Polygon selbst.

Eine alte Rätselaufgabe, die zum Beispiel von DANIEL SCHWENTER (1585 – 1636) in dem Buch „Geometriae Practicae“ angegeben wird, beschäftigt sich mit solchen Polygonen.

> *Ein Bauer liegt auf dem Sterbebett und ruft seine 4 Söhne zu sich: „Ihr seid mir alle vier gleich lieb. Deshalb soll jeder von euch gleich viel erben. Teilt euch meinen Acker (Abb. 1a) in vier gleiche Teile. Damit es keinen Streit gibt, sollen alle vier Teile die gleiche Form haben wie das gesamte Feld.“*

Es ist nicht schwierig, dieses Problem zu lösen und die vier Erben werden gewusst haben, wie sie den Willen ihres Vaters entsprechen konnten (Abb. 1b).

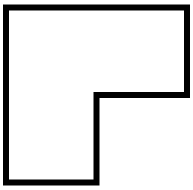


Abbildung 1a

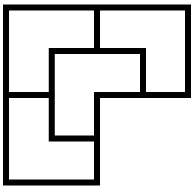


Abbildung 1b

Das beschriebene geometrische Gerücht soll vierteilig heißen, weil wir die Ausgangsfigur in vier Stücke zerlegen müssen.

Gibt es noch mehr geometrische Gerüchte? Mit einem **zweiteiligen Gerücht** haben wir ständig zu tun: Wenn wir ein A4-Blatt parallel zu den kurzen Seiten zusammenfalten und dann aufschneiden, erhalten wir zwei A5-Blätter. Die kurze und die lange Seite stehen bei beiden Blattformaten im gleichen Verhältnis. Damit dies so ist, kann die Verhältniszahl leicht bestimmt werden. Bezeichnet a die Länge der langen Seite und b die Länge der kurzen Seite, so muss gelten:

$$\frac{b}{a} = \frac{a/2}{b}, \qquad \text{also} \quad \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Das Verhältnis von $\sqrt{2}$ zwischen langer und kurzer Seite gilt für alle A-Formate, wobei A0 als Ausgangsfläche genau einen Quadratmeter umfasst. Aber natürlich muss das Viereck kein Rechteck sein, um ein Gerücht zu ergeben. Jedes Parallelogramm, bei dem die Seiten im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, ist ein zweiteiliges Gerücht. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist ebenfalls ein zweiteiliges Gerücht.

---

[5] Aus: T. Devendran: Das Beste aus dem Mathematischen Kabinett. Deutsche Verlags-Anstalt, 1990.

Von den **dreiteiligen Gerüchten** sind zwei bekannt. Das Parallelogramm mit den Seiten 1 und $\sqrt{3}$ lässt sich in 3 formgleiche kleinere Parallelogramme zerlegen. Auch ein rechtwinkliges Dreieck ergibt ein dreiteiliges Gerücht (Abb. 2), wenn wir die Seitenlängen geeignet wählen: Da die kleinen rechtwinkligen Dreiecke ähnlich zum Ausgangsdreieck sind, betragen die Winkel 30° bzw. 60°. Bezeichnen wir die kurze Kathetenlänge mit a, die lange Kathetenlänge mit b und die Länge der Hypotenuse mit c, so gilt zunächst $b = a\sqrt{3}$ und daraus folgend entsprechend der Skizze nach Satz des PYTHAGORAS: $b^2 + (a+c)^2 = 4 \cdot b^2$. Setzen wir $a = 1$ und deshalb $b = \sqrt{3}$, so erhalten wir $c = 2$.

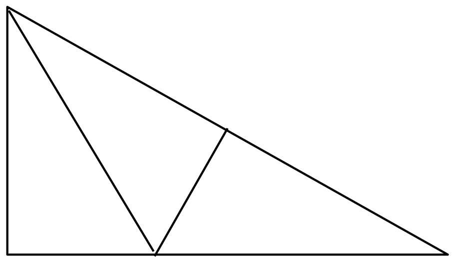
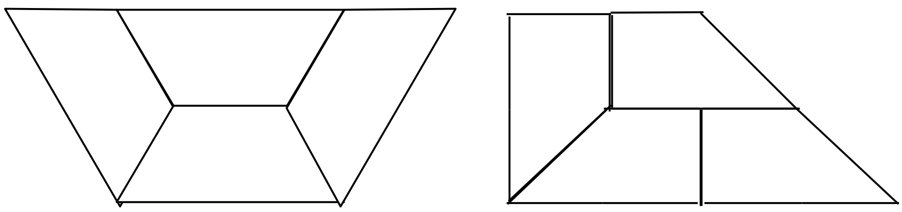
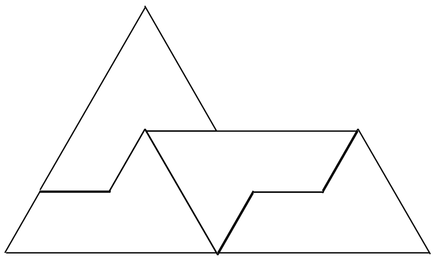


Abbildung 2

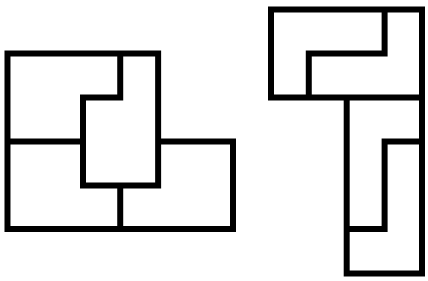
Vierteilige Gerüchte gibt es in großer Zahl. Jedes beliebige Dreieck gehört dazu: Indem wir die Seitenmittelpunkte miteinander verbinden, zerlegen wir das Dreieck in vier kongruente Dreiecke, die dem Ausgangsdreieck ähnlich sind. Jedes Parallelogramm gehört ebenfalls dazu (Verbindung gegenüberliegender Seitenmittelpunkte). Verhalten sich die Seitenlängen wie 1 : 2, so gibt es sogar zwei Möglichkeiten, das Parallelogramm in vier kongruente kleiner Parallelogramme zu zerlegen. Aber auch andere Vierecke lassen sich entsprechend zerlegen, beispielsweise:



Bis heute kennt man nur ein Fünfeck, das ein vierteiliges Gerücht ist:



Die eingangs beschriebene Zerlegung des Ackers entspricht einem sechseckigen vierteiligen Gerücht. Es sind zwei andere Formen bekannt, für die eine Lösung der Teilungsaufgabe existiert:



Für jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich ein Parallelogramm angeben, dass sich als ein n-teiliges Gerücht erweist. Es genügt, die eine Seitenlänge 1 und die andere $\sqrt{n}$ zu setzen. Können wir dagegen bei einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenlängen so festlegen, dass es für jedes vorgegebene n ein n-teiliges Gerücht wird? Für $n = 3$ und $n = 4$ wurden oben die Lösungen besprochen. Auch $n = 2$ lässt sich wie beschrieben einfach lösen. Für $n = 5$ wurde das Problem im aktuellen Jahrgang des KZM gestellt.

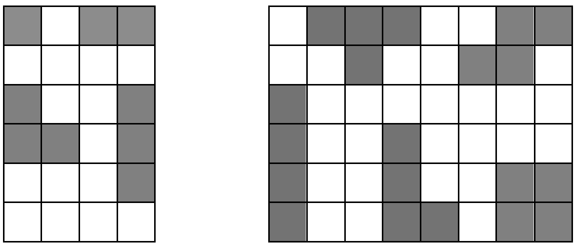
Aufgabe KZM 1-4[6]. Man zeige: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dass sich in 5 untereinander kongruente und jeweils zum Dreieck ABC ähnliche Dreiecke zerlegen lässt. (D.h. das Dreieck ABC ist ein sogenanntes fünfteiliges Gerücht). Man gebe die Seitenlängen des Dreiecks und die Zerlegung an.

Hinweis: Es ist begründen, dass die Zerlegung die geforderte Eigenschaft hat.

Für größere n besteht die Herausforderung darin, ein rechtwinkliges Dreieck in n ebenfalls rechtwinklige Dreiecke zerlegen zu können. Dies misslingt jedoch im Allgemeinen für $n > 5$.

Haben wir ein n-teiliges Gerücht gefunden, können wir daraus ein n^2-, n^3- oder n^k-teiliges Gerücht konstruieren, denn jede Teilfigur lässt sich ja wieder als n-teiliges Gerücht zerlegen.

Die Suche nach interessanten geometrischen Gerüchten kann systematisch geführt werden, wenn wir uns auf bestimmte Ausgangsstrukturen festlegen. Als Beispiel dafür gelten die von SOLOMON WOLF GOLOMB (geb. 1932) im Jahr 1954 beschriebenen „Polyminos“: In Verallgemeinerung eines Domino-Steines (der aus zwei aneinander gereihten Einheitsquadraten besteht), können wir den Monomino (ein Einheitsquadrat), die Triominos (drei Quadrate), die Tetrominos (vier Quadrate) und allgemein für jedes natürliche n die n-minos (Polyminos genannt) betrachten. Für $n > 2$ existieren natürlich verschiedene Varianten, die n Quadrate aneinander zu reihen. Wenn wir beispielsweise fordern, dass zwei benachbarte Quadrate eine vollständige Seite gemeinsam haben und sich nicht nur an einem (Eck-) Punkt berühren, so gibt es zwei verschiedene Triominos und fünf verschiedene Tetrominos.



n-minos für $n = 1, 2, 3, 4$

[6] Die Lösungsdiskussion erscheint im Heft 11/2023.

Welche Polyminos sind geometrische Gerüchte, d.h. welche Form können wir vergrößern, indem wir nur Polyminos der gleichen Form zusammensetzen?

- Ein Monomino führt in trivialer Weise zu einem 4-, 9- oder allgemein k^2-teiligen Gerücht, denn aus k^2 einzelnen Quadraten können wir ein großes Quadrat zusammensetzen.
- Aus vier Domino-Steinen können wir ein 2×4 – Rechteck zusammensetzen, das wie ein großer Domino-Stein erscheint, also zu einem vierteiligen Gerücht führt.
- Auch beide Triomino-Formen führen zu einem vierteiligen Gerücht (wie in der „Acker"-Aufgabe bzw. als 6×2 – Rechteck).
- Für die Tetrominos mit I-Form bzw. Quadratform ist es leicht, auf geometrische Gerüchte zu kommen. Für die L-Form ist ein vierteiliges Gerücht bereits oben gezeigt. Für die T-Form benötigen wir bereits 16 Teile, um diese Form zu vergrößern. Die Treppenform kann dagegen nicht zu einem Gerücht geführt werden.

Setzen wir fünf Quadrate zusammen, erhalten wir Pentominos, von denen 12 verschiedene Formen existieren - nur vier davon sind Gerüchte.

17. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (MeMO) ist ein staatenübergreifender Mathematikwettbewerb, der 2007 erstmalig ausgerichtet wurde und an dem seit 2014 die zehn Länder Deutschland, Kroatien, Litauen, Polen, Österreich, Schweiz, Slowakei, Slowenien, Tschechien und Ungarn teilnehmen. Er bietet Jugendlichen (in Deutschland der Jahrgangsstufen 10 und 11) eine zur Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) zusätzliche Möglichkeit, an internationalen Vergleichen teilzunehmen. Dabei wird jedoch die Doppel-Teilnahme an MeMO und IMO in einem Kalenderjahr per Reglement ausgeschlossen.

Jedes teilnehmende Land entsendet sechs Schüler zur MeMO. Es gibt sowohl einen Einzel- als auch einen Mannschaftswettbewerb. Jeder Teilnehmende schreibt am ersten Wettkampftag eine fünfstündige Individualklausur. Am Folgetag steht die ebenfalls fünfstündige Teamklausur auf dem Programm. Die vier Aufgabenstellungen des Einzelwettbewerbs und die acht Probleme für die Teamentscheidung orientieren sich im Schwierigkeitsgrad am Niveau der IMO. Es sind je Aufgabe 8 Punkte möglich. Wie auch zur IMO wird die siebentägige Veranstaltung von einem reichhaltigen Exkursionsprogramm umrahmt.

In diesem Jahr fand die MeMO vom 21. bis 27. August 2023 in Strečno (Slowakei) statt. Zu den sechs deutschen Teilnehmenden gehörte Jieoh Ahn vom Nexö-

Gymnasium Dresden (Olympiadeklasse 11). Insgesamt wurden 4 Gold-, 10 Silber- und 17 Bronze-Medaillen vergeben. Zusätzlich erhielten 20 Teilnehmende, die es nicht auf einen Medaillenplatz schafften, aber bei mindestens einer Aufgabe die volle Punktzahl erreichten, eine ehrende Erwähnung. Nur ein Starter aus Polen schaffte im Individualwettbewerb die Idealpunktzahl 32. Verwenden wir für die Länderwertung den Modus der IMO, die Platzierung anhand der Summe der sechs Einzelleistungen festzulegen, erreichte Deutschland mit 113 von 198 möglichen Punkten den Platz 5 (2022: 104 Punkte/Platz 2; 2021: 59 Punkte/Platz 4).

Platz	2023	Punkte	Gold	Silber	Bronze	Ehrende Erwähnung
1	Ungarn	146	1	4	-	1
2	Polen	133	2	-	3	1
3	Kroatien	122	-	3	1	2
4	Schweiz	114	-	2	2	-
5	Deutschland	113	1	-	2	3
6	Österreich	112	-	-	4	2
7	Slowakei	107	-	-	3	3
8	Slowenien	88	-	1	-	4
9	Tschechien	79	-	-	1	3
10	Litauen	72	-	-	1	1

Im Teamwettbewerb können insgesamt 64 Punkte erreicht werden. Das deutsche Team kam auf Platz 7 (nach 2021/47 Punkte und 2022/37 Punkte mit jeweils Platz 6).

Platz	Team	Punkte
1	Polen	55
2	Ungarn	47
3	Tschechien	37
3	Kroatien	37
5	Schweiz	34
6	Slowakei	25
7	Deutschland	22
8	Slowenien	21
9	Litauen	18
10	Österreich	16

Turnusgemäß wurde nach der 8. MeMO 2014 in Dresden die 19. MeMO wieder nach Deutschland vergeben[7]. Sie wird vom 25. bis 31. August 2025 in der Kulturhauptstadt Europas Chemnitz stattfinden.

[7] Pandemie-bedingt wurde die 14. MeMO 2020 virtuell durchgeführt und damit keinem Veranstalterland zugeordnet.

Aufgaben der 17. MeMO

Aufgabe I[8]–1. Sei R die Menge aller reellen Zahlen. Bestimme für jedes Paar (α, β) nichtnegativer reeller Zahlen, mit der Eigenschaft $\alpha + \beta \geq 2$, alle Funktionen $f : R \to R$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y.$$

Aufgabe I–2. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, n Sehnen eines Kreises so zu zeichnen, dass ihre $2n$ Endpunkte alle paarweise verschieden sind und jede Sehne genau k andere Sehnen schneidet, wobei:

(a) $k = n - 2$,
(b) $k = n - 3$.

Bemerkung: Eine Sehne eines Kreises ist eine Strecke, deren beide Endpunkte auf der Kreislinie liegen.

Aufgabe I–3. Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis ω von ABC berühre die Seite BC im Punkt D. Wir bezeichnen mit E und F diejenigen Punkte, für die sowohl $AI \parallel BE \parallel CF$ als auch $\sphericalangle BEI = \sphericalangle CFI = 90°$ gelten. Die Geraden DE und DF schneiden ω jeweils ein weiteres Mal in den Punkten E' bzw. F'.

Zeige, dass $E'F' \perp AI$.

Aufgabe I–4. Seien n und m zwei positive ganze Zahlen. Wir nennen eine Menge S positiver ganzer Zahlen (n, m)-*gut*, falls sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

(i) Es gilt $m \in S$.
(ii) Für jedes $a \in S$ sind auch alle positiven ganzen Teiler von a Elemente von S.
(iii) Für alle paarweise verschiedenen Zahlen $a, b \in S$ gilt auch $a^n + b^n \in S$.

Bestimme alle Paare (n, m), für die die Menge aller positiven ganzen Zahlen die einzige (n, m)-gute Menge ist.

Aufgabe T[9]–1. Seien Z die Menge aller ganzen Zahlen und $Z_{>0}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen.

(a) Eine Funktion $f : Z \to Z$ heiße Z-*ilinisch*, falls für alle $a, b \in Z$ die Gleichung $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ gilt. Bestimme die größtmögliche Anzahl paarweise verschiedener Werte unter $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, wobei f eine Z-ilinische Funktion ist.

[8] I - Individualwettbewerb (Arbeitszeit: 5 Stunden)
[9] T – Teamwettbewerb (Arbeitszeit: 5 Stunden)

(b) Eine Funktion $f : Z_{>0} \to Z_{>0}$ heiße $Z_{>0}$-*ilinisch*, falls für alle $a, b \in Z_{>0}$ die Gleichung $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ gilt. Bestimme die größtmögliche Anzahl paarweise verschiedener Werte unter $f(1), f(2), \ldots, f(2023)$, wobei f eine $Z_{>0}$-ilinische Funktion ist.

Aufgabe T–2. Seien a, b, c und d positive reelle Zahlen mit $abcd = 1$. Zeige, dass

$$\frac{ab+1}{a+1} + \frac{bc+1}{b+1} + \frac{cd+1}{c+1} + \frac{da+1}{d+1} \geq 4$$

gilt, und bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), für die Gleichheit gilt.

Aufgabe T–3. Bestimme die kleinste ganze Zahl b mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Art, exakt b Quadrate eines 8 × 8-Schachbretts grün zu färben, kann man immer 7 Läufer so auf 7 der grünen Felder stellen, dass keine zwei der Läufer sich gegenseitig bedrohen.

Bemerkung: Zwei Läufer bedrohen sich gegenseitig, wenn sie auf derselben Diagonalen stehen.

Aufgabe T–4. Sei $c \geq 4$ eine gerade ganze Zahl. In einer Fußball-Liga hat jedes Team ein Heim- und ein Auswärts-Trikot. Jedes Heim-Trikot hat genau zwei verschiedene Farben, und jedes Auswärts-Trikot ist einfarbig. Das Auswärts-Trikot eines Teams darf keine der Farben seines Heim-Trikots haben. Für alle Trikots in der Liga werden insgesamt höchstens c verschiedene Farben verwendet. Falls zwei Teams dieselben zwei Farben auf ihrem Heim-Trikot haben, dann haben ihre Auswärts-Trikots verschiedene Farben.

Wir sagen, ein Paar von Trikots *beißt sich*, wenn eine Farbe auf beiden Trikots vorkommt. Angenommen, für jedes Team X in der Liga gebe es kein Team Y in der Liga, sodass sich das Heim-Trikot von X mit beiden Trikots von Y beißt.

Bestimme die größtmögliche Anzahl von Teams in der Liga.

Aufgabe T–5. Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$ ohne rechte Innenwinkel. Es gebe Punkte P, Q, R und S so auf den Seiten AB, BC, CD bzw. DA, dass $PS \parallel BD$, $SQ \perp BC$ und $PR \perp CD$ gelten. Außerdem sei angenommen, dass sich die drei Geraden PR, SQ und AC in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Zeige, dass die Punkte P, Q, R und S auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Aufgabe T–6. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Sei J der Mittelpunkt des A-Ankreises von ABC. Sei D der Fußpunkt des Lotes von J auf die Gerade BC. Die Innenwinkelhalbierenden der Winkel $\sphericalangle BDJ$ und $\sphericalangle JDC$ schneiden die Geraden BJ bzw. JC in X bzw. Y. Die Strecken XY und JD schneiden sich in P. Sei Q der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade BC.

Zeige, dass die Innenwinkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle QAP$ senkrecht auf die Gerade XY steht.

Bemerkung: Der A-Ankreis des Dreiecks ABC ist derjenige Kreis außerhalb des Dreiecks, der die Geraden AB und AC und die Strecke BC berührt.

Aufgabe T–7. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, für die es positive ganze Zahlen $a > b$ mit

$$n = \frac{4ab}{a-b}$$

gibt.

Aufgabe T–8. Seien A und B positive ganze Zahlen. Wir betrachten eine Folge positiver ganzer Zahlen $(x_n)_{n\geq 1}$, für die

$$x_{n+1} = A \cdot ggT(x_n, x_{n-1}) + B \quad \text{für alle } n \geq 2$$

gilt. Zeige, dass in dieser Folge nur endlich viele verschiedene Werte vorkommen.

Bemerkung: Dabei bezeichnet $ggT(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler zweier positiver ganzer Zahlen a und b.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten, wie sie in Thema 13.2 zu lösen sind, behandelten bereits die BABYLONIER um 2000 v. Chr., ohne jedoch allgemeine Lösungstheorien zu nutzen. Die erste systematische Untersuchung von linearen Gleichungssystemen wird GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) zugeschrieben. Seine Ergebnisse wurden zu Lebzeiten jedoch nicht veröffentlicht. CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855) betrachtete lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang mit astronomischen Problemen. Im Jahr 1811 entwickelte er dafür den nach ihm benannten Algorithmus. Diese Lösungsmethoden werden schon seit über 100 Jahre so wie heute an Schulen gelehrt.

Dr. E. Bardeys
Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik
Vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten.
Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906.[10]

Zweiter Teil. Algebra (Bestimmungsgleichungen)

XVIII. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten

[10] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigen Schrift gesetzt.

A. Theorie

I. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten

Eine Gleichung mit zwei Unbekannten x und y heißt vom ersten Grad, wenn sie auf die Form gebracht werden kann $ax + by = c$. Aus einer einzigen derartigen Gleichung lassen sich die Unbekannten x und y nicht bestimmen. Man braucht hierzu vielmehr zwei Gleichungen zwischen denselben Unbekannten. Beide Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein, d. h. die eine Gleichung darf keine bloße Folge der anderen sein. Zwei Gleichungen, durch welche zwei Unbekannte bestimmt werden können, heißen ein *System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten*. Ihre Zusammengehörigkeit wird durch senkrechte Striche bezeichnet.

Um ein System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, sucht man auf denselben zunächst eine Gleichung mit nur einer Unbekannten abzuleiten. Man muß daher die eine Unbekannte fortschaffen oder *eliminieren*. Diesem Zwecke dienen drei Methoden: 1) die Additionsmethode, 2) die Einsetzungsmethode, 3) die Gleichsetzungsmethode.

1. Die **Additionsmethode**.

a) Spezialfälle: ...

b) Im allgemeinen besteht die Additionsmethode darin, daß man die Gleichungen mit solchen möglichst kleinen Faktoren multipliziert, daß die Koeffizienten der zu eliminierenden Unbekannten entgegengesetzt gleich werden, so daß bei der Addition (oder Subtraktion) der Gleichungen diese Unbekannte herausfällt.

Man eliminiert zweckmäßig diejenige Unbekannte, welche die kleinsten Koeffizienten hat. Beispiel:

$$\left|\begin{array}{l} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = \;\;5 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \mathrm{I}8 \;\; \mathrm{I}+7 \\ \mathrm{I}3 \;\; \mathrm{I}-5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 40x & +24y & = 168 \\ 21x & -24y & = \;\;15 \\ 61x & & = 183 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 35x & +21y & = 147 \\ -35x & +40y & = -25 \\ & 61v & = 122 \end{array}$$

$$x = 3 \qquad\qquad y = 2$$

Hat man x gefunden, so kann man y auch ermitteln, indem man den Wert x in eine der gegebenen Gleichungen einsetzt. So verwandelt sich die erste Gleichung für $x = 3$ in

$15 + 3y = 21$, woraus folgt $y = 2$.

2. Die **Einsetzungsmethode** besteht darin, daß man die eine Gleichung nach der einen Unbekannten auflöst und den gefundenen Ausdruck für dieselbe in die zweite Gleichung einsetzt. Beispiel:

$$\left|\begin{array}{l} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = \;\;5 \end{array}\right|$$

Auf der ersten Gleichung folgt $y = \frac{21-5x}{3}$; dies in die zweite Gleichung eingesetzt ergibt:

$$7x - 8 \cdot \frac{21-5x}{3} = 5$$
$$21x - 168 + 40x = 15$$
$$61x = 183$$
$$x = 3$$
$$y = \frac{21-5x}{3} = \frac{21-15}{3} = 2.$$

3. Die **Gleichsetzungsmethode** besteht darin, daß man beide Gleichungen nach derselben Unbekannten auflöst und die für dieselben gefundenen Ausdrücke gleich setzt. Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = \ \ 5 \end{vmatrix}$$
$$y = \frac{21-5x}{3} \qquad\qquad y = \frac{7x-5}{8}$$
$$\frac{21-5x}{3} = \frac{7x-5}{8}$$
$$168 - 40x = 21x - 15$$
$$x = 3$$
$$y = \frac{21-5x}{3} = \frac{21-15}{3} = 2.$$

4. **Einführung neuer Unbekannten.** Bei Systemen von Gleichungen wie

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{vmatrix}$$

setze man $\frac{1}{x} = u$ und $\frac{1}{y} = v$ und berechne zunächst u und v. Gleiches gilt von Systemen wie

$$\begin{vmatrix} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2a \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2b \end{vmatrix}.$$

B. Theorie

[Es folgen 131 Aufgaben, darunter:]

40. $\left|\begin{array}{l} 15x + 16y = \ \ 70 \\ 35x - 24y = 116 \end{array}\right|$

83. $\left|\begin{array}{l} ax + by = e \\ mx - ny = 0 \end{array}\right|$

110. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2x-3y} = \frac{9}{3x-2y} \\ \frac{1}{2x-9} = \frac{9}{4y-3} \end{array}\right|$

131. $\left|\begin{array}{l} \frac{4x-3y+19}{4} - \frac{x-2y+9}{6} = x \\ \frac{5x-4y+21}{6} - \frac{3x-2y-2}{9} = y \end{array}\right|$

Termine

"Jugend forscht" - Online-Veranstaltungsreihe „Wissenschaft: LIVE!"
Am 12.10.2023, 15:30 bis 16:45 Uhr, referiert Dr. Dina Dechmann vom Max-Planck-Institut für Verhaltensbiologie zum Thema Energieeffizienz „Energie sparen leicht gemacht – warum Spitzmäuse im Winter schrumpfen". Eine Anmeldung ist unter https://www.max-wissen.de/slide/vortragsreihe-zu-den-max-heften/ erforderlich.

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben": Nach der 1. Runde der 63. MO mit Aufgabenanalysen zur Vorbereitung der 2. Runde (detailliertes Programm unter http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).
21.10.2023, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz (09126 Chemnitz, Reichenhainer Str. 39). Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

"Jugend forscht" - Online-Veranstaltungsreihe „Wissenschaft: LIVE!"
Am 14.11.2023, 15:30 bis 16:45 Uhr, referiert Nobelpreisträger Prof. Dr. Benjamin List vom Max-Planck-Institut für Kohlenforschung und stellt die Bedeutsamkeit organischer Katalysatoren für die Chemie vor: „Magische Moleküle – organische Katalysatoren beflügeln die Chemie". Eine Anmeldung ist unter https://www.max-wissen.de/slide/vortragsreihe-zu-den-max-heften/ erforderlich.

Am 30.11.2023 ist Anmeldeschluss für die Teilnahme an der 59. Wettbewerbsrunde von „Jugend forscht" unter dem Motto „Mach Dir einen Kopf" (https://anmeldung.jugend-forscht.de/#formular).

Monatsaufgabe 10/2023[11]

Wir nennen eine positive ganze Zahl N infektiös, wenn es 1000 aufeinanderfolgende nichtnegative ganze Zahlen gibt, sodass die Summe aller ihrer Ziffern N ergibt.

Bestimme alle infektiösen positiven ganzen Zahlen.

[11] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.11.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort 2
Thema 13.02 - Bewegungsaufgaben 3
Geometrische Gerüchte – Figuren, die sich selbst vervielfachen 9
17. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade 12
Aufgaben der 17. MeMO 14
In alten Mathe-Büchern geblättert 16
Termine 19
Monatsaufgabe 10/2023 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[12]	Nr.	Thema	Aufgabe
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[12] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.