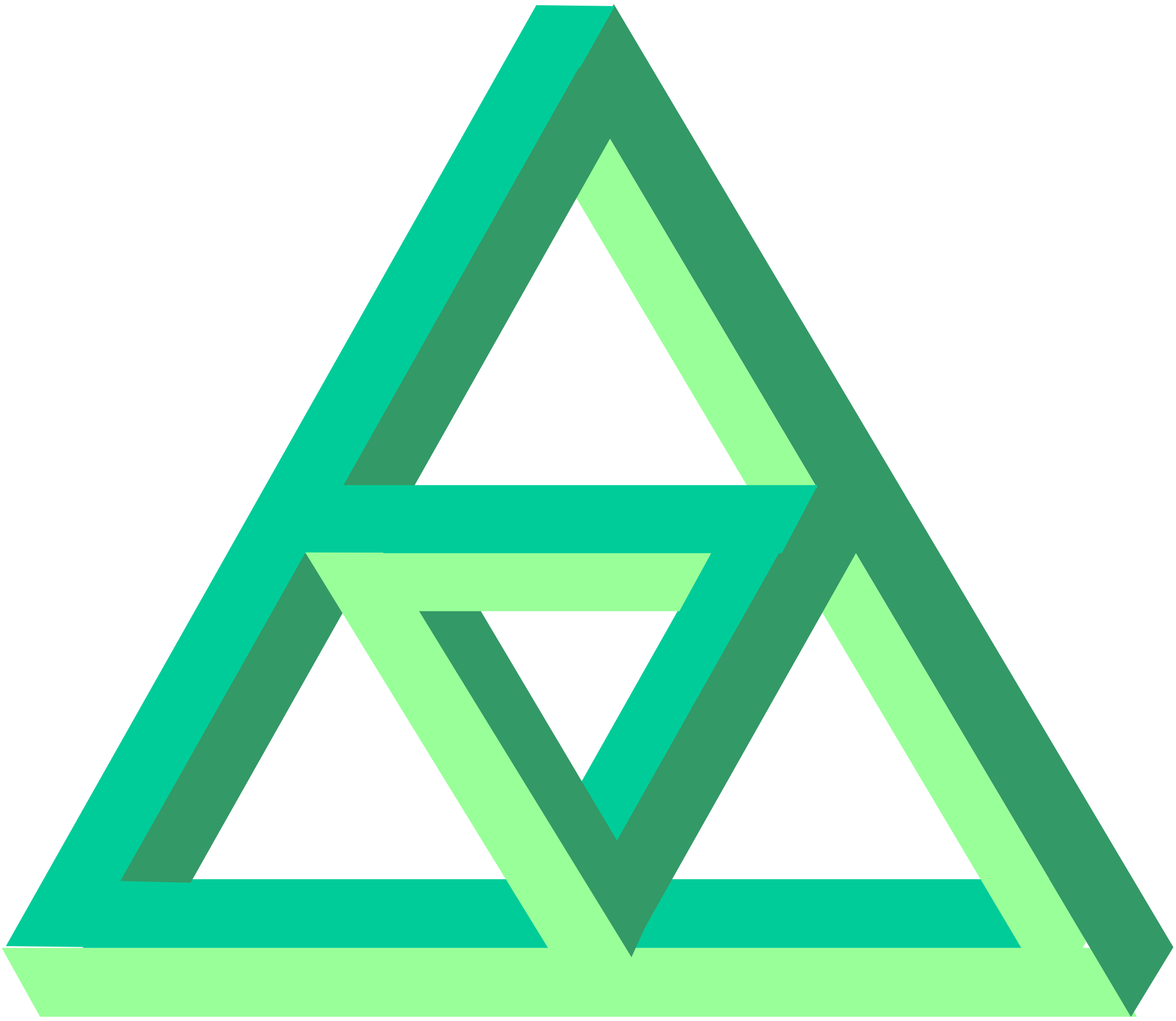
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2023 (Dezember 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir blicken noch einmal auf die Aufgabe **MO631014** und diskutieren Ungleichungen mit Wurzelausdrücken. Da hierbei die Probe aufwendig werden kann, kommt es besonders darauf an, nur äquivalente Umformungen vorzunehmen. Für die Lösungsdarstellung bietet sich aber dennoch an, von einer offenbar richtigen Aussage auszugehen und diese durch Umformungen auf die Behauptung zu führen.

Ergänzend zu den (nummerierten) Themen betrachten wir rationale und irrationale Zahlen und konzentrieren uns vor allem auf die Nachweise, dass gegebene Ausdrücke keine rationalen Zahlen sein können. Für den „Klassiker“, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, zitieren wir unter der Rubrik „Alte Mathe-Bücher“ den Beweis aus dem Zehnten Buch der Elemente von EUKLID

Wir stellen den Bundewettbewerb Mathematik vor und laden zur Teilnahme an der aktuellen Ausschreibung für 2024 ein. Ein statistischer Überblick zeigt, dass sächsische Jugendliche im vergangenen Wettbewerb erneut sehr erfolgreich waren. Allerdings blieb die Anzahl der sächsischen Teilnehmer an der ersten Runde hinter den Erwartungen zurück. Also, auf ein Neues!

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 25.02 – Gleichungen/Ungleichungen mit Wurzelausdrücken

Wir können zu Übungszwecken alle bisherigen Gleichungen des Themas 25 als Ungleichungen schreiben. Da wir die Gleichungen bereits gelöst haben, könnten wir durch Einsetzen geringfügig veränderter Werte prüfen, welche Relationszeichen geeignete Ungleichungen ergeben. Verwenden wir die Gleichung aus Teil a der Aufgabe **MO631014,** also $\sqrt{x} - \sqrt{x-6} = \sqrt{2 \cdot x - 14}$, so finden wir beispielsweise für $x = 7$ die Ungleichung $\sqrt{7} - \sqrt{1} > 0$ oder für $x = 9$ die Ungleichung $\sqrt{9} - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$. Es sind demnach beide Richtungen der Ungleichung möglich. Wir untersuchen folgende Aufgabe.

Aufgabe 25.07. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Ungleichung

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-6} \geq \sqrt{2 \cdot x - 14}.$$

Lösungshinweise: In der Ungleichung $\sqrt{x} - \sqrt{x-6} \geq \sqrt{2 \cdot x - 14}$ muss $x \geq 7$ sein, damit alle Wurzeln definiert sind. Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion folgt aus $x > x - 6$ auch $\sqrt{x} > \sqrt{x-6}$. Beide Seiten sind deshalb nichtnegativ und wir können mit Quadrieren und Zusammenfassen äquivalent umformen. Wir erhalten

$$x - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} + x - 6 \geq 2 \cdot x - 14 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} \leq 4.$$

Wieder sind beide Seiten positiv (da für positive Zahlen $x \geq 7$ keiner der beiden Faktoren negativ sein kann) und wir können erneut quadrieren. Dies führt nun zur quadratischen Ungleichung $x^2 - 6 \cdot x - 16 \leq 0$.

Lösungsvariante 1: Wir lösen mit der bekannten Lösungsformel die zugehörige Gleichung $x^2 - 6 \cdot x - 16 = 0$ und erhalten

$$x_1 = 3 - \sqrt{25} = -2 \text{ und } x_2 = 3 + \sqrt{25} = 8$$

Damit erkennen wir die Möglichkeit der Faktorisierung und können die Ungleichung äquivalent umformen zu

$$(x+2) \cdot (x-8) \leq 0$$

Das Produkt ist genau dann nichtpositiv, wenn beide Faktoren unterschiedliche Vorzeichen haben. Dies erfordert $x + 2 \geq 0$ (d.h. $x \geq -2$) und $x - 8 \leq 0$ (d.h. $x \leq 8$). Dies ist gleichzeitig erfüllt für alle reellen Zahlen x mit $-2 \leq x \leq 8$. Unter Berücksichtigung der eingangs festgestellten Einschränkung $x \geq 7$ erhalten wir als Lösungsmenge alle reellen Zahlen x mit $7 \leq x \leq 8$.

Lösungsvariante 2: Wir suchen für die Funktion $f(x) = x^2 - 6 \cdot x - 16$ die quadratische Ergänzung und können damit umformulieren zu

$$f(x) = x^2 - 6 \cdot x - 16 = (x-3)^2 - 25.$$

Wir erkennen, dass der Funktionsverlauf eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt bei $x = 3$ darstellt. Damit ist der Kurvenverlauf für $x \geq 3$ monoton wachsend. Deshalb ist wegen $f(-2) = 0$ und $f(8) = 0$ für alle reellen Zahlen x mit $-2 \leq x \leq 8$ die Ungleichung $f(x) \leq 0$ erfüllt. Unter Berücksichtigung der eingangs festgestellten Einschränkung $x \geq 7$ erhalten wir als Lösungsmenge alle reellen Zahlen x mit $7 \leq x \leq 8$.

Für die Probe setzen wir $x = 7 + t$ mit nichtnegativer Zahl $t \leq 1$. Dann lautet die Ausgangsungleichung

$$\sqrt{7+t} - \sqrt{1+t} \geq \sqrt{2t}.$$

Da beide Seiten positiv sind, können wir quadrieren

$$7 + t - 2\sqrt{7+t} \cdot \sqrt{1+t} + t + 1 \geq 2t$$

also

$$4 \geq \sqrt{7+t} \cdot \sqrt{1+t}$$

Wir können erneut quadrieren und erhalten

$$16 \geq (7+t)(1+t) = 7 + 8t + t^2$$

Diese Ungleichung ist wegen $7 + 8t + t^2 \leq 7 + 8 + 1$ für alle nichtnegativen Zahlen $t \leq 1$ erfüllt. Damit wird die Lösungsmenge bestätigt. ❑

Vergleichbare Aufgabenstellungen liegen in der Mathematik-Olympiade jedoch schon weit zurück, beispielsweise

Aufgabe 25.08 – MO401032. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\left(\sqrt{x} - 0{,}5 \cdot x\right) : \left(0{,}5 \cdot \sqrt{x} - x\right) \leq 15 \cdot \sqrt{x}$$

erfüllen!

Lösungshinweise: Wir stellen $x \geq 0$ (damit die Wurzeln existieren) und $\frac{1}{2}\sqrt{x} - x \neq 0$ (also $x \neq \frac{1}{2}\sqrt{2}$, damit der Nenner von 0 verschieden ist) fest. Wir schreiben die Ungleichung um zu

$$\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}\sqrt{x} - x} \leq 15 \cdot \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 2x} = \frac{2 - \sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}} \leq 15 \cdot \sqrt{x}$$

Fall 1: Es gelte $1-2\sqrt{x}<0$ (d.h. $\frac{1}{4}<x$). Dann können wir unter Beachtung der Umkehrung des Relationszeichens mit $1-2\sqrt{x}$ multiplizieren und erhalten die zur Ausgangsungleichung äquivalente Ungleichung

$$2-\sqrt{x}\geq 15\cdot\sqrt{x}\cdot\left(1-2\sqrt{x}\right)=15\sqrt{x}-30x$$

also

$$x-\frac{8}{15}\sqrt{x}-\frac{1}{15}=\left(\sqrt{x}-\frac{4}{15}\right)^2-\frac{1}{225}\leq 0$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für alle x mit

$$-\frac{\sqrt{17}}{15}\leq\sqrt{x}-\frac{4}{15}\leq\frac{\sqrt{17}}{15}\quad\Rightarrow\quad\frac{4-\sqrt{17}}{15}\leq\sqrt{x}\leq\frac{4+\sqrt{17}}{15}$$

Berücksichtigen wir die Einschränkung dieses Falls, so finden wir

$$\frac{1}{4}<x\leq\frac{33+8\cdot\sqrt{17}}{225}$$

Fall 2: Es gelte $1-2\sqrt{x}>0$ (d.h. $\frac{1}{4}>x$). Dann können wir mit $1-2\sqrt{x}$ multiplizieren und erhalten die zur Ausgangsungleichung äquivalente Ungleichung

$$2-\sqrt{x}\leq 15\cdot\sqrt{x}\cdot\left(1-2\sqrt{x}\right)=15\sqrt{x}-30x$$

Also

$$x-\frac{8}{15}\sqrt{x}-\frac{1}{15}=\left(\sqrt{x}-\frac{4}{15}\right)^2-\frac{31}{225}\geq 0$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für alle x mit

$$-\frac{31}{225}\leq\sqrt{x}-\frac{4}{15}\leq\frac{31}{225}\quad\Rightarrow\quad-\frac{27}{225}\leq\sqrt{x}\leq\frac{35}{225}$$

Berücksichtigen wir die Einschränkung dieses Falls, so finden wir $\frac{1}{4}<x\leq\frac{49}{2025}$ ❑

Aufgabe 25.08 – MO291034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1}>1$$

Lösungshinweise: Für $x<-5$ ist die Wurzel nicht definiert. Zudem ist $x\neq -1$, damit der Nenner des Bruches von 0 verschieden ist.

Für $-5 \leq x < -1$ wird die Ungleichung nicht erfüllt, weil der Zähler positiv und der Nenner negativ sind, also der Bruch auf der linken Seite negativ ist.

Für $x > -1$ gilt $x + 1 > 0$. Deshalb können wir durch Multiplikation mit $x + 1$ die Ungleichung äquivalent umformen

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+5} > x+1 & \text{I quadrieren (da beide Seiten positiv)} \\
x+5 > x^2+2x+1 & \text{I zusammenfassen} \\
x^2+x-4 < 0 & \text{I quadratische Ergänzung} \\
\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{17}{4} &
\end{array}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$-\frac{\sqrt{17}}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{17}}{2}$$

also

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{17}+1\right) < x < \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{17}+1\right)$$

Wegen $\sqrt{17} > 4$ folgt $-\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{17}+1\right) < -\frac{5}{2} < -1$. Deshalb müssen wir die bereits bekannte Einschränkung $x > -1$ beachten und erhalten als Lösungsmenge alle reellen Zahlen x mit $-1 < x < \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{17}+1\right)$. ❑

Aufgabe 25.09 – MO211034. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1-\sqrt{1-3x^2}}{x} < 1$$

Lösungshinweise: Offensichtlich kann x nicht 0 sein, da sonst der Bruch nicht definiert wäre. Außerdem muss $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ gelten, da für $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ sofort $x^2 > \frac{1}{3}$ und damit $1 - 3x^2 < 1 - 1 = 0$ folgen würde, sodass der Radikand negativ und damit die Wurzel nicht mehr definiert wäre.

Es sei also im Folgenden $0 < |x| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dann ist $1 - 3x^2 < 1$ und damit auch $\sqrt{1-3x^2} < 1$und folglich $1 - \sqrt{1-3x^2} > 0$. Der Bruch besitzt also das gleiche Vorzeichen wie der Nenner x.

Ist x negativ, so ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, sodass wir ein erstes Lösungsintervall erhalten, nämlich

$$x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$$

Ist dagegen x positiv, dann ist die Ungleichung nach Multiplikation mit $x > 0$ und Subtraktion von 1 äquivalent zu

$$-\sqrt{1-3x^2} < x-1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-3x^2} > 1-x$$

Da $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ gilt, sind beide Seiten dieser Ungleichung nichtnegativ und also ist die Ungleichung äquivalent zu

$$1-3x^2 > (1-x)^2 = x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \quad 4x^2-2x < 0$$

Betrachten wir die Faktorenzerlegung $4x^2-2x = (-2x)\cdot(1-2x)$, so finden wir für den zweiten Faktor wegen $x > 0$ und damit $-2x < 0$, dass diese Ungleichung äquivalent zu $1-2x > 0$ bzw. zu $x < \frac{1}{2}$ ist. Da $2 > \sqrt{3}$ gilt, ist zudem $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, so dass tatsächlich alle positiven x mit $x < \frac{1}{2}$ die Ungleichung erfüllen (und die weiteren nicht).

Zusammenfassend erhalten wir, dass genau all jene x aus der Menge $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right)\setminus\{0\}$ die Ungleichung erfüllen. ❑

Aufgabe - MO241032. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen gelten!

$$2\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$$

Lösungshinweise: Zunächst beweisen wir die linke Ungleichung. Für alle $x > 1$ gilt stets

$$\begin{array}{ll} x^2+x < x^2+x+\frac{1}{4} & \\ x\cdot(x+1) < \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 & \text{I zusammenfassen} \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} < x+\frac{1}{2} & \text{I radizieren} \\ 2\cdot\left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}-x\right) < 1 & \text{I } -x \text{ I} \cdot 2 \\ 2\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{I } :\sqrt{x} \end{array}$$

Damit ist die Behauptung beweisen. Die rechte Ungleichung beweisen wir nach dem gleichen Prinzip:

$$\begin{array}{ll} x^2-x < x^2-x+\frac{1}{4} & \text{I zusammenfassen} \\ x\cdot(x-1) < \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 & \text{I radizieren} \\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1} < x-\frac{1}{2} & \text{I } -x \text{ I} \cdot(-2) \end{array}$$

$$2 \cdot \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} - x\right) < 1 \qquad | :\sqrt{x}$$
$$2 \cdot \left(\sqrt{x} - 1\right) > \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Damit ist auch diese Ungleichung bewiesen (die Einschränkung $x \geq 1$ ist für die Definition von $\sqrt{x-1}$ notwendig, wurde aber im Beweis anderweitig nicht verwendet). ❑

Aufgabe - MO261035. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen gelten!

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

Lösungshinweise: Für jedes $x > 1$ gilt $0 < 9x + 8$. Wir addieren auf beiden Seiten $27x^3 + 54x^2 + 27x$ und erhalten

$$27 \cdot (x^3 + 2x^2 + x) < 27x^3 + 54x^2 + 36x + 8$$

und fassen zusammen zu

$$27 \cdot x \cdot (x+1)^2 < (3x+2)^3$$

Da alle Faktoren positiv sind, können wir als äquivalente Umformung radizieren und erhalten

$$3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x+1)^2} < 3x + 2$$

Nach Division durch $\sqrt[3]{x}$ finden wir

$$3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2} < 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

Nun können wir das Umformen abschließen und erhalten die zu beweisende linke Ungleichung

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Für jedes $x > 1$ gilt aber auch $8 < 9x$. Wir addieren auf beiden Seiten

$$27x^3 - 54x^2 + 27x$$

und erhalten

$$27 \cdot (x^3 - 2x^2 + x) < 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

und fassen zusammen zu

$$27 \cdot x \cdot (x-1)^2 < (3x-2)^3$$

Da alle Faktoren für $x > 1$ positiv sind, können wir als äquivalente Umformung radizieren und erhalten

$$3 \cdot \sqrt[3]{x \cdot (x-1)^2} < 3x - 2$$

Nach Division durch $\sqrt[3]{x}$ finden wir

$$3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} < 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

Nun können wir das Umformen abschließen und erhalten die zu beweisende rechte Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$$

❑

Ergänzung: Wir können die zu beweisende Ungleichungskette nach Division durch $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ äquivalent umformen zu

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) < \frac{1}{x} < \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Es gilt die (verallgemeinerte) BERNOULLIsche[3] Ungleichung:

$$(1+z)^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot z \text{ für } z \geq -1 \text{ und } \alpha \geq 0.$$

Gemäß der Einleitung zu den MO-Aufgaben „… *Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.“* kann dieser Sachverhalt genutzt werden.

Aufgabe - MO500943. Es seien a und b reelle Zahlen mit $3a \geq b$ und $3b \geq a$. Man beweise, dass alle Wurzeln in der Ungleichung

$$\sqrt{a+b} \cdot \left(\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}\right) \leq 4\sqrt{ab}$$

definiert sind und dass die Ungleichung gültig ist.

Lösungshinweise: Aus $3a \geq b$ und $3b \geq a$ folgt $9a \geq a$ und somit $a \geq 0$, und mit analoger Argumentation $b \geq 0$. Also gilt

[3] Benannt nach JAKOB BERNOULLI (1655 – 1705) Schweizer Mathematiker und Physiker.

$$a+b \geq 0 \quad ; \quad 3a \geq b \quad ; \quad 3b \geq a \quad ; \quad ab \geq 0$$

Damit sind alle Wurzeln definiert. Außerdem gilt $3ab \geq a^2$ und $3ab \geq b^2$ und somit $8ab-(a+b)^2 \geq 0$. Schließlich gilt für alle reellen Zahlen a und b

$$0 \leq 4 \cdot (a-b)^4 = 4 \cdot (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)$$

Die Summanden lassen sich geschickt aufteilen zu

$$-3a^4 + 4a^3b + 14a^2b^2 + 4ab^3 - 3b^4 \leq a^4 - 12a^3b + 38a^2b^2 - 12ab^3 + b^4$$

Dies ist äquivalent zu

$$(a^2+2ab+b^2)(-3a^2+10ab-3b^2) \leq (-a^2+6ab-b^2)^2$$

Alle Umformungsschritte waren umkehrbar (insbesondere der erste und vierte Schritt, da auf beiden Seiten der ersten und vierten Ungleichung nichtnegative Ausdrücke stehen), und da die letzte Ungleichung wahr ist, ist die gegebene Ungleichung als richtig nachgewiesen. ❑

Aufgabe 4 - MO280934. Beweisen Sie, dass für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6}$$

gilt!

Lösungshinweise: Die zu zeigende Ungleichung ist symmetrisch in x und y, sodass wir o.B.d.A. $y \geq x$ annehmen können. Durch Multiplikation mit $y^6 > 0$ geht sie äquivalent über in

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{y^6 \cdot \sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{y^6}{x^6} + 1$$

bzw. nach der Substitution $t = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{y}{x}} \geq 1$ in $\frac{1}{t} + t^{13} \geq t^{12} + 1$. Multiplizieren wir beide Seiten mit t, so finden wir

$$t^{14} - t^{13} - t + 1 \geq 0$$

also

$$(t^{13}-1) \cdot (t-1) \geq 0$$

Wegen $t \geq 1$ ist auch $t^{13} \geq 1$. Somit sind beide Faktoren nicht negativ und die letzte Ungleichung ist erfüllt. Da alle Umformungen äquivalent waren, gilt auch die Ausgangsungleichung. ❑

Aufgabe - MO251022. Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}$$

Lösungshinweise: Es gilt $a^2 + 3ab < a^2 + 3ab + 2b^2 = (a+b)(a+2b)$, weil b positiv ist. Da die Wurzelfunktion streng monoton steigt und beide Terme positiv sind, gilt auch $\sqrt{a^2+3ab} < \sqrt{a^2+3ab+2b^2}$.

Nach Multiplikation mit 2, Anwendung der Wurzelgesetze und Addition von $2a + 3b$ erhalten wir

$$a + (a+3b) + 2\sqrt{a}\sqrt{a+3b} < (a+b) + (a+2b) + 2\sqrt{a+b}\sqrt{a+2b}$$

Unter Benutzung der binomischen Formel ergibt sich daraus

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{a+3b}\right)^2 < \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}\right)^2$$

Weil für reelle Zahlen u und v aus $u^2 < v^2$ stets $|u| < |v|$ folgt, gilt weiter

$$\left|\sqrt{a} + \sqrt{a+3b}\right| < \left|\sqrt{a+b} + \sqrt{a+2b}\right|$$

Da die Terme in den Beträgen positiv sind, können die Betragszeichen weggelassen werden und es gilt die ursprüngliche Behauptung. ❑

Rationale und irrationale Zahlen

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational [4].

Beweis: Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2 \cdot n^2 = m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ❑

[4] Eine reelle Zahl r heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $r = \frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

Beweisvariante: Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Dies ist gleichbedeutend zur Aussage, dass es eine positive ganze Zahl n gibt, so dass $n \cdot \sqrt{2}$ eine ganze Zahl ist.

Nun wenden wir als Lösungsansatz das Extremalprinzip. In der Zahlenmenge mit der angenommenen Eigenschaft gibt es stets ein kleinstes Element (es sei dies die Zahl *k*, „kleinste Zahl“ als Extremaleigenschaft). Dann ist auch $k_0 = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot k < 0.5 \cdot k$ ganzzahlig und kleiner als k. Zudem hat $k_0 < k$ wegen

$$k_0 \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot k \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot k - k \cdot \sqrt{2}$$

auch die Eigenschaft, dass ihr Produkt mit $\sqrt{2}$ ganzzahlig ist – im Widerspruch zur Extremaleigenschaft von k. ❑

Diese als bekannt vorausgesetzte Aussage wurde in einer MO-Aufgabe verallgemeinert.

Aufgabe MO301022. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist.

(Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.)

Lösungshinweise: Für eine Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, gilt $n > 1$, weil sowohl $0 = 0^2$ und $1 = 1^2$ Quadratzahlen sind.

Wir nehmen an, $\sqrt{n}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen r und s mit $s > 0$ und $\sqrt{n} = \frac{r}{s}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $n \cdot s^2 = r^2$. Wegen $n > 1$ gilt auch $r^2 > 1$ und damit $r > 1$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von s^2 und von r^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primfaktoren der Zahl n. Jedoch muss in n ein Primfaktor in ungerader Anzahl auftreten, denn andernfalls wäre n eine Quadratzahl. Somit tritt dieser Primfaktor auf der linken Seite in ungerader Anzahl und auf der rechten Seit in gerader Anzahl auf. Das widerspricht der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{n}$ rational ist, d.h. $\sqrt{n}$ ist irrational. ❑

Satz. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 \pm r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}, r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}, \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind die Ergebnisse selbst wieder rationale Zahlen ❑

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei r eine rationale und t eine irrationale Zahl. Wir nehmen an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, s sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.
Wir nehmen an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, p sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Wird die Differenz als Summe mit einem negativen Summanden und der Quotient als Produkt mit dem Reziproken des Faktors interpretiert, ist der Nachweis auch für Differenz und Quotient erbracht.

Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

$$\underbrace{\left(2+\sqrt{2}\right)}_{irrational} + \underbrace{\left(2-\sqrt{2}\right)}_{irrational} = 4,$$

$$\left(2+\sqrt{2}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2}\right) = 2.$$

Aufgabe – MO290934. Beweisen Sie, dass es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a und b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt.

Lösungshinweise: Für die gegebenen rationalen Zahlen a und b gilt für die rationale Zahl $x = \frac{a+b}{2}$ die Ungleichung $a < x < b$.

Die Zahl $y = x + (b - x) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2} - 1 \ < 1$ stets

$$x < x + (b - x) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = y$$

und

$$y = x + (b - x) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) < x + (b - x) \cdot 1 = b.$$

Also gilt für die rationale Zahl x und die irrationale Zahl y die Ungleichungskette $a < x < y < b$. ❑

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, geeignete rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich wird.

Aufgabe MO221033. Beweisen Sie, dass $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ eine irrationale Zahl ist.

Lösungshinweise: Angenommen, die Zahl $z=\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ wäre rational. Wir formen die Gleichung um:

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{7} = z-\sqrt{2}-\sqrt{5} & \text{I quadrieren} \\
7 = z^2 - 2\cdot z\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) + 2 + 2\cdot\sqrt{10} + 5 & \text{I zusammenfassen} \\
2\cdot z\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) = z^2 + 2\cdot\sqrt{10} & \text{I quadrieren} \\
4\cdot z^2\cdot\left(2+2\cdot\sqrt{10}+5\right) = z^4 + 4\cdot z^2\cdot\sqrt{10} + 40 & \text{I zusammenfassen} \\
4\cdot z^4\cdot\sqrt{10} = z^4 - 28\cdot z^2 + 40 & \text{I: } (4\cdot z^2) \\
\sqrt{10} = \frac{z^4-28\cdot z^2+40}{4\cdot z^2} &
\end{array}
$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehen Produkte, Summen, Differenz und Quotienten von rationalen Zahlen. Folglich ist die rechte Seite selbst eine rationale Zahl, im Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{10}$ (da 10 nicht Quadratzahl ist). Damit ist die obige Annahme falsch und der Beweis erbracht. ❑

Aufgabe MO201031. Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{1989+\sqrt{1990}}}}}$$

rational oder irrational ist.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, x sei eine rationale Zahl. Dann ist auch die Zahl

$$((((x^2-1)^2-2)^2-3)^2 \ldots - 1988)^2 - 1989 = \sqrt{1990}$$

rational, da nur Produkte und Differenzen gebildet werden. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass 1990 nicht Quadratzahl und folglich $\sqrt{1990}$ eine irrationale Zahl ist. ❑

Hinweis: Würden wir die Aufgabe angepasst im Jahr 2025 stellen, führt das Umstellen bis zur innersten Wurzel wegen $\sqrt{2025}=45$ nicht zum Ziel. Stattdessen formen wir um bis zu

$$((((x^2-1)^2-2)^2-3)^2 \dots - 2022)^2 - 2023 = \sqrt{2024+\sqrt{2025}} = \sqrt{2069}$$

Aufgabe MO381024. Beweisen Sie: Zu jeder rationalen Zahl a existiert ein Paar $(x; y)$ von rationalen Zahlen, so dass $x^2 = y^2 + a$ gilt.

Lösungshinweise: Ein solches Paar können wir wie folgt wählen. Wir setzen zunächst

$$y = \frac{a-1}{2}$$

Dann finden wir

$$x^2 = y^2 + a = \frac{a^2-2a+1}{4} + a = \frac{a^2+2a+1}{4} = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

Wir können also $x = \frac{a+1}{2}$ wählen. Die Zahlen x und y sind rational und erfüllen die geforderte Gleichung.

Lösungsvariante: Aus $a = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ können wir für eine beliebige rationale Zahl $p \neq 0$ das folgende Gleichungssystem aufstellen.

$$x - y = p$$
$$x + y = \frac{a}{p}$$

Lösen wir dieses System auf, erhalten wir

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(p + \frac{a}{p}\right) \quad ; \quad y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{p} - p\right)$$

Beide Zahlen x und y sind offensichtlich wieder rational. Wir können die geforderte Aussage bestätigen:

$$x^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(p^2 + 2a + \frac{a^2}{p^2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(p^2 - 2a + \frac{a^2}{p^2}\right) + \frac{4 \cdot a}{4} = y^2 + a$$

❑

Aufgabe MO470931. Beweisen Sie, dass es unendlich viele positive ganze Zahlen a gibt, für welche die Zahl $a + 0{,}25$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Lösungshinweise: Für jede positive ganze Zahl k können wir $a = k \cdot (k+1)$ wählen. Dann gilt

$$a + \frac{1}{4} = k \cdot (k+1) + \frac{1}{4} = k^2 + k + \frac{1}{4} = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$$

Da für k unendlich viele Werte eingesetzt werden können, ist die Existenz von unendlichen vielen Zahlen a mit der geforderten Eigenschaft gezeigt. ❑

Lösungsvariante: Wir nehmen an, dass es eine rationale Zahl k mit $a = k^2 - \frac{1}{4}$ gibt, dann gilt die Faktorisierung $a = \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)$. Wählen wir also k in der Form $k = \frac{1}{2} \cdot (2n + 1)$ für $n \geq 1, 2, 3, \ldots$, so finden wir die Zahlen $a = n \cdot (n + 1)$.

Bundeswettbewerb Mathematik 2024

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist die Bildung & Begabung gGmbH mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung gGmbH von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs sind die LEPPER Stiftung und der Arbeitgeberverband Gesamtmetall.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In zwei Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.

In der dritten Runde, dem Kolloquium, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt.“

Die Teilnehmerzahlen[5] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Jahr 2021/22).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2020/21	1182	366 (31.0%)	45 (3.8%)	17 (37.8%)
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)
2022/23	1764	576 (32.7%)	67 (3.8%)	36 (53.7%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2022/23 in Sachsen wieder weit über dem Durchschnitt!

Unter den 67 sächsischen Teilnehmern wurden 3 erste, 2 zweite und 25 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmenden gehörte zu den Preisträgern (44.8%, bundesweit 26.5%). Dazu kamen noch 30 Anerkennungsurkunden (44.8%). Somit wurden in Sachsen 89.6% aller Teilnehmenden ausgezeichnet (bundesweit 87.6%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 30 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	**Teilnehmer 2. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Teilnehmer aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2020/21	193	57 (29.5%)	9 (4.7%)	3 (33.3%)
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)
2022/23	246	78 (31.5%)	15 (6.1%)	8 (53.3%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

[5] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

In der 2. Runde 2022/23 wurden insgesamt 121 Preise vergeben (49.2% aller Teilnehmer), darunter 1 zweiter und 4 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (33.3% aller sächsischen Teilnehmer, darunter 1 Starter aus den Klassenstufen 9/10). Ende November/Anfang Dezember fanden die regionalen Auszeichnungsveranstaltungen statt. Die erfolgreichen Jugendlichen aus Berlin, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen, Sachsen-Anhalt und Thüringen wurden am 4. Dezember in der KPMG AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft (einem internationalen Unternehmen aus dem weltweiten KPMG-Netzwerk in den Bereichen Wirtschaftsprüfung, Steuerberatung, Rechtsberatung und Unternehmens- bzw. Managementberatung mit Sitz in Berlin) empfangen, darunter aus Sachsen

II. Preis

	TOBIAS PÖTZSCH	(Geschw.-Scholl-Gymn. Taucha),

III. Preise

	WOLF-PETER DÖGE	(Evang. Kreuzgymn. Dresden),
	TILMAN FERCHLAND	(Ostwald-Gymn. Leipzig),
	MELIA HAASE	(Gymn. Zschopau),
	ENRICO MUTH	(Mathesius-Gymn. Rochlitz).

Im Festvortrag zeigte Prof. Dr. GÜNTER M. ZIEGLER (Freie Universität Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik) Beispiele aus dem von ihm und MARTIN AIGNER 2002 erstmal in deutscher Sprache herausgegebenen „Buch der Beweise" (M. AIGNER, G.M. ZIEGLER. *Das BUCH der Beweise.* Springer, Berlin 2014, ISBN 3-540-42535-7; 4. Auflage; ISBN 978-3-662-44456-6). Äußerst informativ und zugleich unterhaltsam referierte er über die Schönheit der Mathematik.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2023 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten. Einsendeschluss ist der 4. März 2024 (Datum des Poststempels).

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. LÖFFLER.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. LANGMANN, E. QUAISSER, E. SPECHT: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik" wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. SPECHT, E. QUAISSER und P. BAUERMANN herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396

Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids
Elemente[6]

Funfzehn Bücher
auf dem griechischen übersetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Waysenhauses[7]

[Im Zehnten Buch wird der Beweis geführt, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Es werden zunächst die Textstellen aus den Büchern zitiert, auf die im Beweis hingewiesen wird.]

Erklärung
Der zur Abkürzung gebrauchten Zeichen

□AB	das Quadrat der geraden linie AB.
A : B	die Verhältnis der A zu B.
A : B = C : D	die A verhält sich zu B, wie C zu D.
A ∩ B	die Flächen A, B, sind commensurabel; oder die geraden Linien, A, B, sind in Länge commensurabel

(S. 23) Erstes Buch. Der 47. Satz. In jedem rechtwinklichen Triangel, ABC, ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den Quadraten der ihn einschliessenden Seiten, BA, AC, gleich.

(S. 112) Siebentes Buch. Definitionen.

1. Die Einheit ist, nach welcher jedes Ding Eins heißt.
2. Eine Zahl aber ist die auf Einheiten bestehende Vielheit.
3. Eine kleinere Zahl ist ein Theil der größeren, wenn die grössere sich von ihr genau messen läßt.

...

11. Eine Primzahl ist, welche sich nur von der Einheit genau messen läßt.

---

[6] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[7] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/ dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022.

…

16. Wenn zwey Zahlen einander vervielfältigen, so heißt die daraus entstehende Zahl, oder das Product, eine Flächenzahl; die Zahlen aber, welche einander vervielfältigt haben, heissen ihre Seiten (Factoren).

…

18. Eine Quadratzahl ist, deren beyde Seiten einander gleich sind.

(S. 127) Siebentes Buch. Der 24. Satz.

Wenn eine Verhältnis in den kleinsten Zahlen, A, B, gegeben ist: so sind solche Primzahlen zu einander.

(S. 143) Achtes Buch. Der 14. Satz.

Wenn Quadratzahlen, A, B, einander messen; so werden auch ihre Seiten, C, D, einander messen. Und wenn die Seiten, C, D, einander messen; so werden auch die Quadratzahlen, A, B, einander messen.

(S. 161) Neuntes Buch. Der 23. Satz.

Die Summe einer ungeraden Menge von ungeraden Zahlen, AB, BC, CD, ist eine ungerade Zahl.

(S. 167) Zehntes Buch. Definitionen.

1. Commensurabel heissen die Grössen, so sich von einem und demselben Maaße messen lassen.
2. Incommensurabel aber sind die, zu denen sich gar kein gemeinschaftliches Maaß finden kann.

(S. 252) Zehntes Buch. Der 117. Satz.

In jedem Quadrate, ABCD, ist die Diagonale, AC, mit der Seite, AB, in Länge incommensurabel.

Gesetzt AC sey $\cap$ AB. Folglich verhielten sich AC, AB, wie Zahlen. Es seyen EF, G, die kleinsten Zahlen in dieser Verhältnis. Nun ist offenbar $AC > AB$. Folglich ist EF unmöglich die Einheit, folglich eine Zahl.

Da $AC : AB = EF : G$, so ist $\square AC : \square AB = EF^2 : G^2$. Nun ist (1, 47. S.) $\square AC = 2\,\square AB$. Folglich ist $EF^2 = 2\,G^2$, folglich EF^2, und daher (9, 23. S.) EF, eine gerade Zahl, folglich ist G ungerade. Denn wäre G auch gerade, so würden EF und G von der Zahl Zwey gemessen werden, da sie doch die kleinsten in ihrer Verhältnis, folglich (7, 24. S.) Primzahlen zu einander sind. Halbire EF in H, so ist $EF = 2\,EH$, folglich (8, 11. S.) $EF^2 = 4\,EH^2$. Nun ist $EF^2 = 2\,G^2$. Folglich $G^2 = 2\,EH^2$. Folglich G^2, und daher (9, 23. S.) G, gerade. Nun war G auch ungerade; welches offenbar sich wiederspricht.

Ein andrer Beweis. Wäre AC $\cap$ AB, so mache $AC : AB = EF : G$, so daß EF, G, die kleinsten Zahlen in dieser Verhältnis, folglich (7, 24. S.) Primzahlen zu einander sind.

Da AC : AB = EF : G, ſo iſt □AC : □AB = EF^2: G^2. Nun iſt □AC =2 □AB. Folglich iſt EF^2 = 2 G^2. Demnach wird EF^2 von G, folglich (8, 14. S.) EF von G gemeſſen. Nun wird G von ſich ſelbſt gemeſſen. Folglich werden EF, G, von G gemeſſen. Nun iſt G nicht die Einheit. Denn wäre G die Einheit, ſo würde, weil EF^2 = 2 G^2, die EF^2 = 2 ſeyn, welches unmöglich. Demnach iſt G eine Zahl, und es werden EF, G, von einer Zahl G gemeſſen, welches, weil EF, G, Primzahlen zu einander, unmöglich iſt.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 10/2023

Aufgabe 1-2 (Individualwettbewerb) der 14. Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade (online, 2020). Wir nennen eine positive ganze Zahl N infektiös, wenn es 1000 aufeinanderfolgende nichtnegative ganze Zahlen gibt, sodass die Summe aller ihrer Ziffern N ergibt.

Bestimme alle infektiösen positiven ganzen Zahlen.

Lösungshinweise: Alle ganzen Zahlen$\geq$ 13500 sind infektiös.

Betrachten wir 1000 beliebige nicht-negative aufeinanderfolgende ganze Zahlen, dann durchlaufen die drei letzten Ziffern die Menge $M = \{000, 001, \dots, 999\}$. Die Summe aller Ziffern dieser Menge beträgt $3 \cdot 100 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 13500$, weil jede Ziffer an jeder der 3 Dezimalstellen genau 100-mal auftritt. Deshalb kann eine infektiöse Zahl nicht kleiner als 13500 sein.

Nun betrachten wir eine nicht-negative ganze Zahl $N \geq 13501$. Wir können N als $N = d \cdot 1000 + r$ schreiben $(d \geq 0; r \in M)$. Wir konstruieren eine Zahl X über die Zifferndarstellung

$$X = \overline{\underbrace{111 \dots 11}_{d-mal} r_3 r_2 r_1}$$

mit den Ziffern r_3, r_2, r_1, so dass $r = 100 \cdot r_3 + 10 \cdot r_2 + r_1$ gilt. Vernachlässigen wir zunächst die letzten drei Ziffern, so haben die $(1000 - r)$ Zahlen $X, X + 1, X + (999 - r)$ jeweils die Ziffernsumme d und die r Zahlen $X + (1000 - r), \dots, X + 999$ jeweils die Ziffernsumme $d + 1$ (weil an der Tausenderstelle eine 2 anstatt einer 1 steht). Somit beträgt die Ziffernsumme aller 1000 Zahlen $X, X + 1, \dots, X + 999$

$$(1000 - r) \cdot d + r \cdot (d + 1) + 13500 = 1000 \cdot d + r + 13500 = N$$

Damit ist gezeigt, dass jede nicht-negative ganze Zahl $N \geq 13500$ infektiös ist. ❑

Monatsaufgabe 12/2023[8]

Bestimme alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^2 + ab + c = 0,$$
$$b^2 + bc + a = 0,$$
$$c^2 + ca + b = 0.$$

Termine

Start des Bundeswettbewerbs Mathematik
01.12.2023, Aufgaben unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/aufgaben.
(Einsendeschluss: 4. März 2024)

Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter https://www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html
Online-Anmeldung ab 03.01.2024 möglich, Anmeldeschluss: 08.03.2024

Weihnachtsvorlesung in Mathematik an der TU Chemnitz: Herr Prof. Dr. MARTIN STOLL (Professur für Wissenschaftliches Rechnen an der Fakultät für Mathematik) plaudert über „Komplexe Netzwerke und das Kleine-Welt-Phänomen“.
21.12.2023, 17:15 bis 18:45 Uhr, Veranstalter: Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz (Reichenhainer Str. 90, Zentrales Hörsaal- und Seminargebäude 114).
https://www.tu-chemnitz.de/tu/termine/detail.html?id=22928

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: „Vorbereitung für die 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“ (detailliertes Programm unter http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).
20.01.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. NORMAN BITTERLICH, zu Gast bei Wuttke-Ingenieure GmbH (Markt 5, 09111 Chemnitz).
Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

Jugend-forscht-Regionalwettbewerb – wir kommen! Tipps zur Vorbereitung: Tipps und Erfahrungen, wie sich Jungforschenden bestmöglich auf den Wettbewerbstag vorbereiten können: vom Poster bis zur Kleidung!
23.01.2024, 17:00 bis 18:00 Uhr, online bundesweit. Anmeldung bis zum 23.01.2024 unter: https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/regionalwettbewerb-wir-kommen-tipps-zur-vorbereitung.html

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.01.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Wissenschaft:LIVE! „Climate Engineering – ein Plan zur Kühlung der Erde?“ Dr. ULRIKE NIEMEIER vom Max-Planck-Institut für Meteorologie untersucht das Ausbringen von Sulfat-Aerosolen in die Stratosphäre mit unterschiedlichen Klimamodellen. Sie erklärt in ihrem Vortrag, was die Sulfat-Partikel in der Stratosphäre bewirken und zeigt Effekte, Chancen und Risiken der Methode auf.
30.01.2024, 15:30 bis 16:45 Uhr, online bundesweit. Anmeldung bis zum 30.01.2024 unter: https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-climate-engineering-ein-plan-zur-kuehlung-der-erde.html

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	Nr.	Thema	Aufgabe
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.