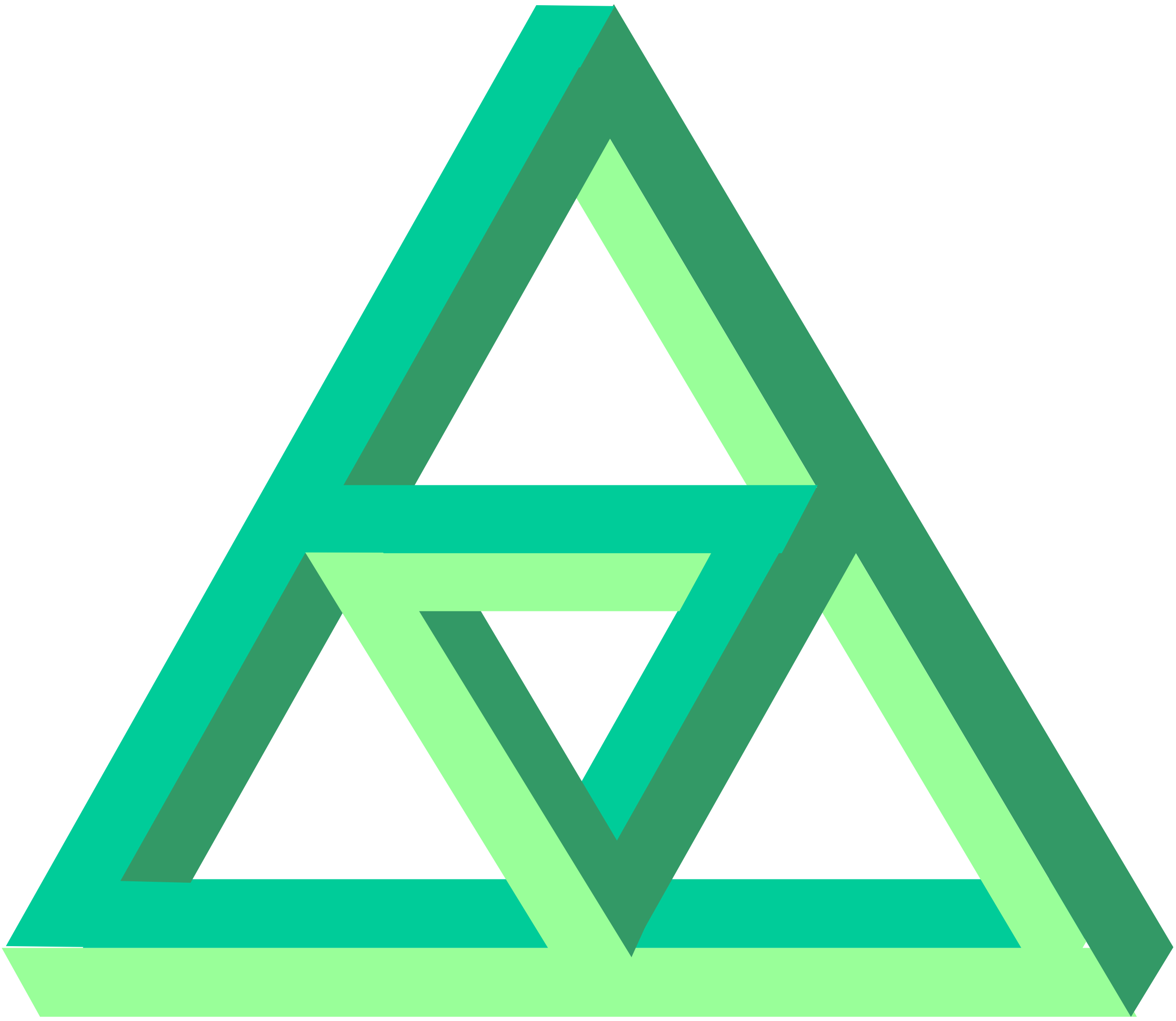
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 1/2024 (Januar 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Wir blicken auf die Aufgabe **MO630924** und diskutieren Flächenzerlegungen. Es ist Anliegen dieser MO-Vorbereitung, sich wiederholende Themen erneut aufzugreifen. Zuletzt waren Zerlegungen von Dreiecken und Quadraten im Heft 3/22 Gegenstand der Diskussion. In der Aufgabe **KZM 2-4** wird ebenfalls eine solche Fragestellung behandelt.

In der Mathematik-Geschichte spielten bereits vor unserer Zeitrechnung Flächenhalbierungen eine wichtige Rolle. Wir zeigen einige solche Aufgabenstellungen.

Wir setzen den Beitrag zu rationalen und irrationalen Zahlen fort und untersuchen, ob gegebene Ausdrücke rational sind. Es wird gezeigt, wie mit Abschätzungen für Wurzelausdrücke ohne Verwendung von Rechentechnik umzugehen ist.

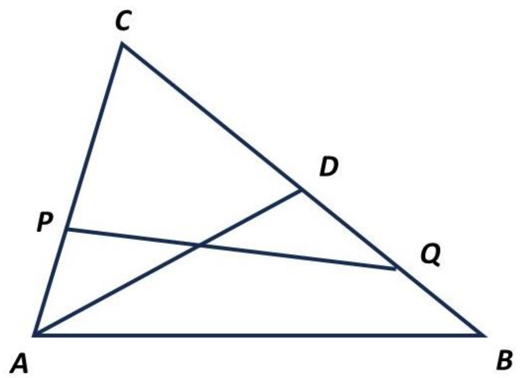
[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 12.5 – Zerlegung einer Dreiecksfläche

Aufgabe 12.16 – MO630924. In einem Dreieck ABC sei ein Punkt P auf der Seite $\overline{AC}$ gegeben, wobei P näher an A als an C liegt und nicht mit A übereinstimmt. Der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$ sei D. Weiter ist Q ein innerer Punkt der Strecke BD.

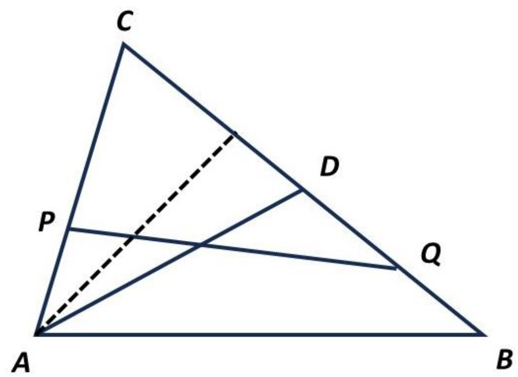
a) Weisen Sie nach: Haben die Dreiecke ADC und PQC gleiche Flächeninhalte, so teilt die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts.
b) Beschreiben Sie eine Konstruktion, mit der man für ein beliebig vorgegebenes Dreieck ABC und Punkte P und D wie oben einen Punkt Q auf der Strecke $\overline{BD}$ ohne das Abmessen konkreter Seitenlängen so konstruieren kann, dass die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt.
c) Begründen Sie, dass der nach Ihrer Konstruktion erzeugte Punkt Q im Inneren der Strecke $\overline{BD}$ liegt und die geforderte Eigenschaft besitzt, dass die Gerade $\overline{PQ}$ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt.

Hinweis: Wir beginnen die Lösungssuche immer mit einer Skizze und vermeiden dabei die Darstellung von Spezialfällen (soweit diese nicht im Aufgabentext gefordert werden), um nicht scheinbare Zusammenhänge fälschlicherweise zu verallgemeinern. Erst wenn kein Lösungsansatz gelingt, versuchen wir uns an Spezialfällen, z.B. am gleichseitigen Dreieck.



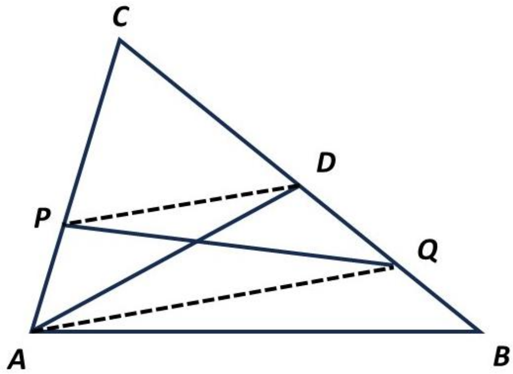
Lösungshinweise zu Teil a): Betrachten wir in den Dreiecken ADC und ABC den Abstand von A zu BC als gemeinsame Höhe, dann ist die Grundseite DC des Dreiecks ADC halb so lang wie die Grundseite BC des Dreiecks ABC, womit der Flächeninhalt des Dreiecks ADC (aufgrund der Flächenformel $F = \frac{1}{2}gh$ für die Grundseite g und die darauf stehende Höhe h) halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist.

Haben die Dreiecke ADC und PQC gleiche Flächeninhalte, so ist damit aber auch der Flächeninhalt des Dreiecks PQC halb so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, womit die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt.



Lösungshinweise zu Teil b): Wir konstruieren eine Parallele zu PD durch den Punkt A. Da die Gerade PD die Gerade BC in einem Punkt schneidet, gilt dies auch für diese Parallele. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden BC ist der gesuchte Punkt Q.

Lösungshinweise zu Teil c): Nach Konstruktion liegt Q auf derselben Seite von PD wie A (und B) und nach Voraussetzung gilt $|\overline{AP}| < |\overline{PC}|$. Daraus folgt nach dem 1. Strahlensatz (für die Geraden CA und CB mit deren Schnittpunkt C und den Parallelen PD und AQ) auch $|\overline{QD}| < |\overline{DC}| = |\overline{BD}|$. Da Q auf derselben Seite von PD liegt wie B und $|\overline{QD}| < |\overline{BD}|$ gilt, muss Q im Inneren der Strecke BD liegen.



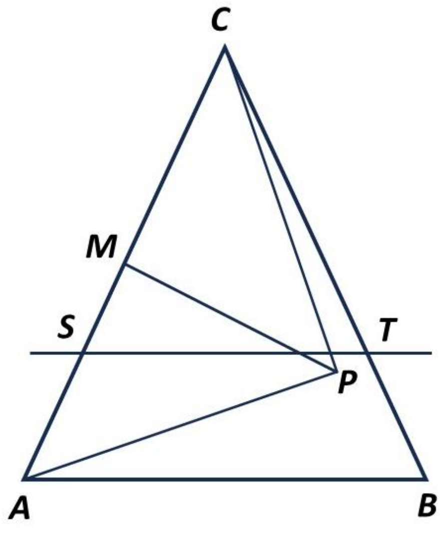
Da A und Q auf einer Parallelen zu PD liegen, haben in den beiden Dreiecken ADP und PQD die Höhen aus A bzw. Q auf die Gerade PD die gleiche Länge. Da die beiden Dreiecke ADP und PQD die Seite PD gemeinsam haben, haben sie auch gleichen Flächeninhalt. Fügen wir zu beiden Dreiecken das Dreieck PDC hinzu, so haben auch die beiden Dreiecke ADC und PQC gleiche Flächeninhalte. Mit dem Ergebnis aus Teil a) teilt dann die Gerade PQ das Dreieck ABC in zwei Teile gleichen Flächeninhalts.

❑

Aufgabe 12.17 – MO101032. Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$.

Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise:
Analyse. Sei *ST* die gesuchte Parallele zu *AB*. Die Dreiecke *STC* und *ABC* sind einander ähnlich, weil deren entsprechenden Innenwinkeln gleich groß sind. Damit der Flächeninhalt des Dreiecks *STC* halb so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*, muss das Dreieck *STC* durch eine Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ aus dem Dreieck *ABC* hervorgehen. Dieser Faktor kann geometrisch aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck konstruiert werden.



Konstruktionsbeschreibung:
1) Die Kreise um A durch C sowie um C durch A schneiden sich in zwei Punkten. Sie seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.
2) Die Gerade durch P_1 und P_2 schneidet die Gerade AC im Punkt M.
3) Der Kreis um M durch C schneidet die Gerade P_1P_2 in zwei Punkten. Einer davon werde mit P bezeichnet.
4) Der Kreis um C durch P schneide die Gerade AC im Punkt S.
5) Die Parallele zu AB durch S ist die gesuchte Gerade.

Begründung: Der mit den Schritten 1) und 2) konstruierte Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\ddot{A}C$ und die Gerade P_1P_2 ist ihre Mittelsenkrechte (in der Skizze hier nur als $\overline{MP}$ eingezeichnet). Der Punkt P liegt auf einem Kreis mit Durchmesser $\overline{AC}$, sodass das Dreieck ACP nach dem Satz des THALES rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P ist.

Weiterhin liegt P auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$, sodass $|\overline{AP}| = |\overline{CP}|$, also auch $\sphericalangle PAC = \sphericalangle ACP = 45°$ gilt (letzteres aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck *APC*). Dann ist auch $|\overline{CS}| = |\overline{CP}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |\overline{AC}|$.

Sei T der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch S mit BC. Dann geht das Dreieck STC also aus dem Dreieck ABC durch Streckung um den Faktor $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ mit Zentrum *C* hervor. Damit ist $F_{\Delta STC} = k^2 \cdot F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot F_{\Delta ABC}$, wie gewünscht. ❑

Bemerkung: Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC wurde nicht benutzt und kann demnach auch als Bedingung gestrichen werden.

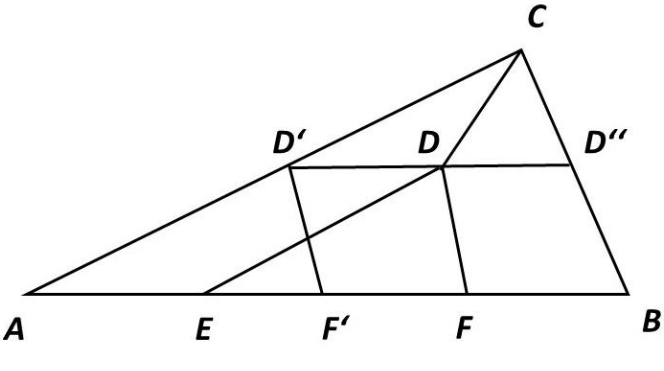
Bereits in der nächsten Runde dieser MO wurde die Thematik wieder aufgegriffen,

Aufgabe 12.18 – MO101046. Die Fläche eines Dreiecks *ABC* soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden:

Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf $\overline{AB}$ zwei Punkte E und F so, dass E zwischen A und *F* liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks ABC, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt. Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks EFD sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.

Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise: Unter der Annahme, dass in einem Dreieck *ABC* ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck *EFD* existiert, können wir folgende Aussagen machen:



(1) Dreieck *EFD* ist wegen der geforderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck *ABC*.
(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.
(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke $\overline{AE}$ in Richtung der Strecke $\overline{BA}$ entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.
(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt

$$\left|\overline{AD'}\right| : \left|\overline{AC}\right| = 1 : \sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}.$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $\overline{F'D'}$ und $\overline{FD}$ folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz

$$2 \cdot \left|\overline{FB}\right| = \left|\overline{F'B'}\right|, \text{ also } \left|\overline{FB}\right| = \left|\overline{F'F}\right|.$$

Konstruktionsbeschreibung: Wir teilen die Strecke $\overline{AC}$ im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3} \cdot AC$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3} \cdot AC$. Die zweite Kathete ist dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot AC$.

Durch den Teilpunkt D' wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D'' und F'.

Der Mittelpunkt von $D'D''$ ist d, der von $F'B$ ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

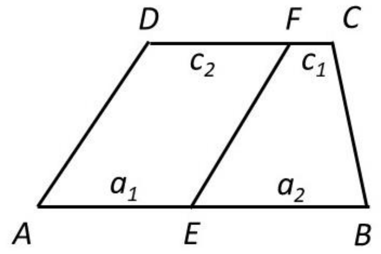
Begründung: Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets der Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Zusammenhänge:

Wegen $\left|\overline{AD'}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \left|\overline{AC}\right|$ und $F'D' \parallel BC$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AF'D'$ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AF'D'$ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu. Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke $D'D''$ und F die Strecke $F'B$ halbiert und $F'D'$ gleich FD ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes $F'BCD'$, also gleich dem des Dreiecks EFD. Damit muss auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muss. ❑

Aufgabe 12.18 – MO291023. Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $AB > CD$.

Man zeige, dass sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, wenn $|\overline{AB}| < 3 \cdot |\overline{CD}|$ gilt.

Lösungshinweise: Die Aufgabenstellung „genau dann…, wenn“ erfordert zwei Beweise.



Teil 1: Wenn sich das Trapez durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, dann gilt $|\overline{AB}| < 3 \cdot |\overline{CD}|$.

O.B.d.A. nehmen wir an, es gibt eine Gerade EF parallel zu AD mit der geforderten Eigenschaft $A_{AEFD} = A_{EBCF}$. Mit den Bezeichnungen $|\overline{AE}| = a_1$, $|\overline{EB}| = a_2$ sowie $|\overline{DF}| = c_1$, $|\overline{FC}| = c_2$ gilt laut Voraussetzung $a_1 + a_2 > c_1 + c_2$.

Laut Konstruktion ist $AEFD$ ein Parallelogramm und mithin gilt $a_1 = c_1$. Der Flächeninhalt ist also für die Höhe h durch $A_{AEFD} = h \cdot a_1$ festgelegt. Der Flächeninhalt des Trapezes $EBCF$ lautet: $A_{EBCF} = h \cdot \frac{1}{2} \cdot (a_2 + c_2)$. Nach Gleichsetzen beider Flächeninhalte finden wir:

$$
\begin{aligned}
h \cdot a_1 &= h \cdot \frac{a_2 + c_2}{2} && I \cdot 2 \\
2 \cdot a_1 &= a_2 + c_2 && I + a_1 \\
3 \cdot a_1 &= a_1 + a_2 + c_2 && I - c_2 \\
a_1 + a_2 &= 3 \cdot a_1 - c_2
\end{aligned}
$$

Weil im Parallelogramm $a_1 = c_1$ gilt, können wir in der Gleichung a_1 durch c_1 ersetzen. Dann gilt weiterhin:

$$
\begin{aligned}
&a_1 + a_2 = 3 \cdot c_1 - c_2 \\
&|\overline{AB}| = a_1 + a_2 = 3 \cdot c_1 + 3 \cdot c_2 - 4 \cdot c_2 < 3 \cdot (c_1 + c_2) = 3 \cdot |\overline{CD}|
\end{aligned}
$$

❑

Teil 2: Wenn $|\overline{AB}| < 3 \cdot |\overline{CD}|$ gilt, dann lässt sich das Trapez durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen.

Beweis: Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die Flächengleichheit erreicht werden kann, wann also die Gleichung $h \cdot a_1 = h \cdot \frac{a_2+c_2}{2}$ erfüllt werden kann. Die einfache Umformung zu $2 \cdot a_1 = a_2 + c_2$ können wir wie folgt fortsetzen:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot c_1 &= a_1 + a_2 + c - c_1 \\
a + c &= 4 \cdot c_1
\end{aligned}
$$

Setzen wir $x = \frac{c_1}{c}$ (wobei $0 \leq x \leq 1$ gilt), und dividieren wir die letzte Gleichung durch c, erhalten wir:

$$\frac{a}{c} + 1 = 4x$$

also

$$a = (4x - 1) \cdot c$$

Die erhaltene Funktion für die Variable x ist linear. Betrachten wir die Werte an den Grenzen des Bereiches für x, so ergibt sich für $x \geq 0$ die Ungleichung $a \geq -c$. Jedoch wurde $a > c$ vorausgesetzt, so dass dies für alle $x > 1$ erfüllt ist. Für $x \leq 1$ erhalten wir $a \leq 3c$. Dies wiederum ist durch die Voraussetzung im Teil 2 erfüllt. Das heißt: Es existiert eine Parallele zu AD so, dass sie das Trapez in zwei Vierecke teilt und die Flächeninhalte der entstehenden Vierecke gleich groß sind. ❑

Rationale und irrationale Zahlen[3]

Aufgabe – MO031043. Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$. Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

Lösungshinweise: Wir vermuten $Z_1 < Z_2$. Da beide Seiten der Ungleichung positiv sind, kann quadriert werden und wir erhalten

$$7 + 2\sqrt{70} + 10 < 3 + 2\sqrt{57} + 19$$
$$2\sqrt{70} < 5 + 2\sqrt{57}$$

Nach erneutem Quadrieren finden wir

$$280 < 253 + 20\sqrt{57}$$

Da $\sqrt{57}$ größer als 2 ist, gilt diese Aussage und wegen der Umkehrbarkeit aller Schlüsse die Behauptung. ❑

Hinweis: Die Lösungsdarstellung ausgehend von der letzten Ungleichung wäre eleganter, jedoch erfordert dieser Ansatz sicherlich erst die gezeigten Umformungen.

Ein Ergebnisvergleich mittels Taschenrechner (5,809 < 6,090) ist wegen der Aufgabenstellung trotz der eindeutigen Aussage als Beweis nicht zulässig. Er sollte auch vermieden werden, weil dies für geringe Abstände nicht verallgemeinerungsfähig ist, zumindest aber eine Diskussion der Auswirkungen von möglichen Rundungsfehlern erfordert. Eine solche Diskussion kann in dieser Aufgabe wie in folgender Abschätzung geführt werden, die tatsächlich ohne technische Hilfsmittel ausgeführt werden kann:

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{7{,}29} + \sqrt{10{,}24} = 2{,}7 + 3{,}2 = 5{,}9$$
$$6{,}0 = 1{,}7 + 4{,}3 = \sqrt{2{,}89} + \sqrt{18{,}43} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$$

Aufgabe – MO251011

a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, dass $\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7}$ gilt!

[3] Fortsetzung zum Beitrag im Heft 12/2023.

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

Lösungshinweise zu Teil a): Aus den Angaben im Tafelwerk[4] ergibt sich, dass für die Wurzeln folgende Ungleichungen gelten

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24 \quad (1), \quad 2{,}82 < \sqrt{8} < 2{,}83 \quad (2)$$
$$2{,}44 < \sqrt{6} < 2{,}45 \quad (3), \quad 2{,}64 < \sqrt{7} < 2{,}65 \quad (4)$$

Aus (1) und (2) bzw. (3) und (4) folgt

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < 2{,}24 + 2{,}83 = 5{,}07 < 5{,}08 = 2{,}44 + 2{,}64 < \sqrt{6} + \sqrt{7}$$

Lösungshinweise zu Teil b): Es gilt $\sqrt{40} < \sqrt{42}$. Daraus folgt

$$2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} < 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7}$$

Wegen $5 + 8 = 6 + 7$ erhalten wir

$$5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} + 8 < 6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} + 7$$
$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{8}\right)^2 < \left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)^2$$

Da beide Ausdrücke in den Klammern positiv sind, folgt unmittelbar die behauptete Ungleichung. ❑

Die Aufgabenstellung lässt vermuten, dass die Zahlenkonstellation verallgemeinert werden kann.

Aufgabe. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 0$ die folgende Ungleichung gilt

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+3} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}.$$

Lösungshinweise: Die Lösungsidee kann aus der vorhergehenden Aufgabe übernommen werden. Es gilt

$$\sqrt{n \cdot (n+3)} = \sqrt{n^2 + 3n} < \sqrt{n^2 + 3n + 2} = \sqrt{(n+1)(n+2)}$$

Daraus folgt

$$2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3} < 2 \cdot \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2}$$

Wegen $n + n + 3 = n + 1 + n + 2$ erhalten wir schließlich

$$n + 2 \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+3} + n + 3 < n + 1 + 2 \cdot \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+2} + n + 2$$

[4] Eine schriftliche Berechnung der Wurzelabschätzungen auf dem Konzeptpapier wäre ebenfalls zulässig (aber aufwändig).

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right)^2 < \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)^2$$

❑

Die bereits diskutierte Aufgabe der 25. MO verallgemeinert den Zahlenvergleich auf andere Weise. Für beliebige natürliche Zahlen $a > 0$ haben wir mit $b = 1$ den Beweis für folgende Aufgabe bereits erbracht.

Aufgabe - MO251022[5]. Man zeige, dass für beliebige positive reelle Zahlen a und b die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{a}+\sqrt{a+3b} < \sqrt{a+b}+\sqrt{a+2b}.$$

Wir finden auch für die Aufgabe **MO031043** eine Verallgemeinerung. Für $n = 3$ wurde der Beweis bereits erbracht.

Aufgabe. Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 1$ die folgende Ungleichung gilt

$$\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1} < \sqrt{n}+\sqrt{6n+1}.$$

Lösungshinweise: Es gilt

$$\sqrt{(2n+1)\cdot(3n+1)} = \sqrt{6n^2+5n+1} < \sqrt{6n^2+6n+1} = \sqrt{n\cdot(6n+1)}$$

Daraus folgt

$$2\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{3n+1} < 2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{6n+1}$$

Wegen $2n+1+3n+1 < n+6n+1$ für $n > 1$ erhalten wir schließlich

$$2n+1+2\cdot\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{3n+1}+3n+1 < n+2\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{6n+1}+6n+1$$
$$\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{3n+1}\right)^2 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{6n+1}\right)^2$$

❑

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

Hinweis: Nutzen wir zur Kontrolle einen Taschenrechner, so finden wir für die linke Seite 0,1451... und für die rechte Seite 0,1823..., so dass an der Gültigkeit der Ungleichung keine Zweifel bestehen. Trotz des großen Unterschiedes beider Seiten ist diese Erkenntnis jedoch kein Beweis (zumal in der Aufgabenstellung das Ausrechnen ausdrücklich untersagt wurde).

Lösungshinweise: Da beide Seiten positiv sind, können wir die behauptete Ungleichung mit Exponent 3 potenzieren:

---

[5] s. Heft 12/2023

$$4-3\cdot\sqrt[3]{4^2\cdot 3}+3\cdot\sqrt[3]{4\cdot 3^2}-3<3-3\cdot\sqrt[3]{3^2\cdot 2}+3\cdot\sqrt[3]{3\cdot 2^2}-2$$

Fassen wir zusammen, erhalten wir

$$\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}<\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{36}$$

Die Anzahl der Wurzeln hat sich nicht verringert und das Zwischenergebnis vereinfacht auf den ersten Blick nicht den Beweis.

Wir versuchen deshalb einen indirekten Beweis, d.h. wir nehmen an, es gelte $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\geq\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. Da beide Seiten positiv sind, können wir mit Exponent 3 potenzieren:

$$4-3\cdot\sqrt[3]{4^2\cdot 3}+3\cdot\sqrt[3]{4\cdot 3^2}-3\geq 3-3\cdot\sqrt[3]{3^2\cdot 2}+3\cdot\sqrt[3]{3\cdot 2^2}-2$$

Wir fassen zusammen und erhalten

$$\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{36}\leq\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}$$

Nach Division durch $\sqrt[3]{12}$ führt dies zu

$$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\leq\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$$

Weil aber $\sqrt[3]{2}$ größer als 1 ist, lässt sich die rechte Seite der letzten Ungleichung weiter nach oben abschätzen und es ergibt sich die Aussage: Aus $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\geq\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ folgt $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Also muss die Annahme falsch sein und es gilt die Behauptung. ❑

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=2$.

Hinweis: Hier verbietet sich prinzipiell ein Rechnereinsatz für einen Beweis, da die Gleichheit mit gerundeten Werten nicht gezeigt werden kann, auch wenn auf dem TR-Display eine „2.000" angezeigt wird. Bei Gleichungen mit Quadratwurzeln lässt sich die Wurzelanzahl durch Quadrieren im Allgemeinen verringern (sofern das Quadrieren als äquivalente Umformung erlaubt ist).

Lösungshinweise: Offenbar gilt $\sqrt{8}=2\sqrt{2}<2\cdot 1.5=3$. Damit sind die Wurzeln definiert. Außerdem ist auch $0<\sqrt{3-\sqrt{8}}<\sqrt{3+\sqrt{8}}$, so dass die linke Seite der behaupteten Gleichung positiv ist. Wir können also mittels Quadrierens äquivalent umformen und erhalten:

$$\left(3+\sqrt{8}\right)-2\cdot\sqrt{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{8}}+\left(3-\sqrt{8}\right)=6-2\cdot\sqrt{3^2-\sqrt{8}^2}=4.$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. ❑

Die Gleichheit lässt sich aber auch einfacher beweisen, wenn wir die Aussage $3 \pm \sqrt{8} = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^2$ erkennen, denn dann gilt

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left|\sqrt{2}+1\right| - \left|\sqrt{2}-1\right|$$

Da aber beide Terme in den Betragsstrichen positiv sind, wir die Betragsstriche als weglassen können, finden wir sofort die Behauptung.

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2$.

Lösungshinweise: Die Ähnlichkeit zu vorheriger Aufgabe erscheint groß, zumal $5\sqrt{2} \pm 7 = \left(\sqrt{2} \pm 1\right)^3$ gilt. Wollen wir aber die Aufgabe durch wiederholtes Potenzieren mit dem Exponent 3 lösen, erkennen wir, dass wir damit die Anzahl der Wurzeln im Allgemeinen nicht reduzieren können und somit nicht zu einem Ergebnis finden. Setzen wir aber die linke Seite gleich a, so gilt offensichtlich

$$a^3 = \left(5\sqrt{2}+7\right) - 3\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)} \cdot \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)$$
$$= -\left(5\sqrt{2}-7\right) = 14 - 3a$$

Folglich ist der gesuchte Wert gleich der Lösung der Gleichung $a^3 + 3a – 14 = 0$. Durch Probieren bestätigen wir, dass $a = 2$ eine Lösung ist. Weiter gilt

$$0 = a^3 + 3a - 14 = (a-2) \cdot (a^2 + 2a + 7).$$

Wir erkennen, dass es keine weiteren reellwertigen Lösungen geben kann, weil für alle reellen Zahlen a stets $a^2 + 2a + 7 = (a+1)^2 + 6 \geq 6 > 0$ gilt. Also wird $a = 2$ bestätigt. ❑

Aufgabe – MO380932. Jemand bildet aus zwei beliebigen rationalen Zahlen x, y mit $x \neq -y$ zunächst die Zahl $z = \frac{xy}{x+y}$ und dann die Zahl $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Man beweise, dass jede so entstehende Zahl w eine rationale Zahl sein muss.

Lösungshinweise: Wir suchen einen Ausdruck für w^2:

$$w^2 = x^2 + y^2 + \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 = (x+y)^2 - 2xy + \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2$$

Dies können wir weiter so umformen, dass wir ein vollständiges Quadrat erhalten:

$$w^2 = (x+y)^2 - 2 \cdot (x+y) \cdot \frac{xy}{x+y} + \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 = \left(x + y - \frac{xy}{x+y}\right)^2.$$

Da w aufgrund der Bildungsvorschrift eine positive Zahl ist, gilt also

$$w = \left|x + y - \frac{xy}{x+y}\right|$$

und w ist offenbar als Produkt, Quotient und Summe bzw. Differenz von rationalen Zahlen selbst eine rationale Zahl. ❑

Aufgabe – MO481042. Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(1) $x^3 + y^3 = 1$,
(2) $\sqrt[3]{|x+y|}$ ist rational,
(3) $\sqrt[3]{|(1-x)(1-y)|}$ ist rational.

Lösungshinweise: Wir schreiben $x + y = a^3$ und $(1-x)(1-y) = b^3$ mit rationalen Zahlen a und b (um die Bedingungen (2) und (3) zu erfüllen). Es ist $a \neq 0$, denn $a = 0$ führt zu $x = -y$ und damit zu $x^3 + y^3 = 0$ im Widerspruch zur Bedingung (1).

Wegen $b^3 = (1-x)(1-y) = 1 - x - y + xy$ erhalten wir

$$xy = b^3 + x + y + 1 = a^3 + b^3 - 1$$

Wir werten nun die Bedingung (1) aus:

$$1 = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3 \cdot xy \cdot (x+y) = a^9 - 3 \cdot a^3 \cdot (a^3 + b^3 - 1)$$

Diese Gleichung können wir umformen und erhalten

$$3 \cdot a^3 \cdot b^3 = a^9 - 3 \cdot a^6 + 3 \cdot a^3 - 1 = (a^3 - 1)^3,$$

also (falls auch $b \neq 0$ gilt)

$$\sqrt[3]{3} = \frac{a^3 - 1}{ab}.$$

Nun ist aber $\sqrt[3]{3}$ irrational im Widerspruch zur rechten Seite dieser Gleichung. Also muss $b = 0$ gelten. Daraus folgt aber $a = 1$ und $xy = 1^3 + 0^3 - 1 = 0$. Somit finden wir $x = 0$ oder $y = 0$, so dass wegen der Bedingung (1) nur die Paare $(0; 1)$ oder $(1; 0)$ alle Bedingungen erfüllen können.

Mit der Probe bestätigen wir, dass beide Paare tatsächlich Lösungen sind (aus Symmetriegründen genügt die Probe für eines dieser Paare):

(1) $x^3 + y^3 = 1^3 + 0^3 = 1,$
(2) $\sqrt[3]{|x+y|} = \sqrt[3]{|1+0|} = 1,$ also rational,
(3) $\sqrt[3]{|(1-x)(1-y)|} = \sqrt[3]{|0 \cdot 1|} = 0,$ also rational. ❑

In alten Mathe-Büchern geblättert

Dietmar Herrmann

Mathematik im Vorderen Orient
Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotamien

Springer-Verlag GmbH Berlin, 2019.

Kapitel 3 – Mathematik in Mesopotamien
Abschnitt 3.4.4 – Die Flächenhalbierende eines Vierecks (Seite 245f)

Die Babylonier und Ägypter verwandten vor unserer Zeitrechnung für die Flächenberechnung bei Vierecken die

Landvermesser-Formel: Bezeichnen a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Seitenlängen eines Vierecks, so gilt

$$F \approx \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Für diese Formel gilt die Gleichheit jedoch nur für Rechtecke. Dennoch war sie weit verbreitet. Im Papyrus BM 10520 (im Besitz des Britischen Museums) wird eine solche Berechnung gezeigt:

> *„Gegeben ein Stück Land, sein Plan [Viereck mit den Seiten 10, 12, 10, 10]. Addiere Süden und Norden, Resultat 20, die Hälfte 10. Addiere Osten und Westen, Resultat 24., die Hälfte 12. Rechne 10 mal 12, ergibt 120.“*

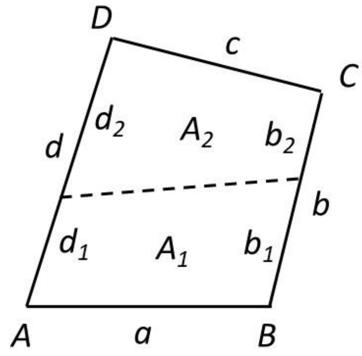
Mit dieser Formel wurden zum Beispiel in der Regierungszeit von PTOLEMAIOS X. (107 – 88 v. Chr.) die Flächen von etwa 150 Feldern berechnet und die Ergebnisse mit Hieroglyphen in eine Inschrift eingemeißelt.

Von besonderem Interesse waren in den alten Schriften die Beschreibung der Flächenhalbierenden. Ist ein beliebiges konvexes Viereck gegeben, so wurde die Länge der Transversale, die die Figur in zwei flächengleiche Teile zerlegt, mittels Landvermesser-Formel berechnet. Mit Verwendung der in der Skizze angegebenen Bezeichnungen finden wir aus den Forderungen $A_1 = A_2$ und $A_1 + A_2 = A$ die Gleichungen:

$$(x+c)(b_2+d_2) = (a+x)(b_1+d_1)$$
$$(x+c)(b_2+d_2) + (a+x)(b_1+d_1) = (a+c)(b_1+b_2+d_1+d_2)$$

Nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen können wir die zweite Gleichung umformen zu

$$(x-c)(b_1+d_1)=(a-x)(b_2+d_2)$$



Multiplizieren wir nun diese mit der ersten Gleichung, erhalten wir:

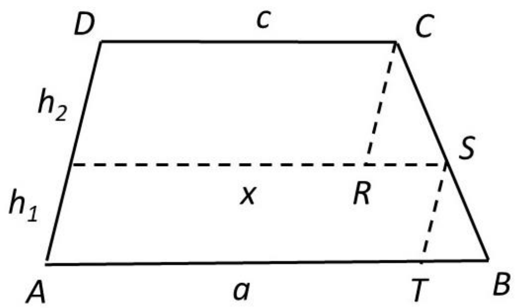
$$(x+c)(b_2+d_2)(x-c)(b_1+d_1)=$$
$$=(a-x)(b_2+d_2)(a+x)(b_1+d_1)$$

Nach Umformung und Vereinfachung führt dies zu

$$x^2-c^2=a^2-x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$

Das Ergebnis erscheint überraschend, da b und d und die Lage der Transversale keinen Einfluss hat. Es wird offensichtlich nur eine bestimmte Transversale berechnet. Wenden wir das Verfahren auf ein Trapez an, finden wir eine exakte Berechnung für die Transversale, die parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes verläuft.

Es wird deshalb ein Trapez betrachtet, bei dem die Flächenhalbierende parallel zu den parallelen Trapezseiten verläuft. Aus der geforderten Flächenteilung gilt einerseits



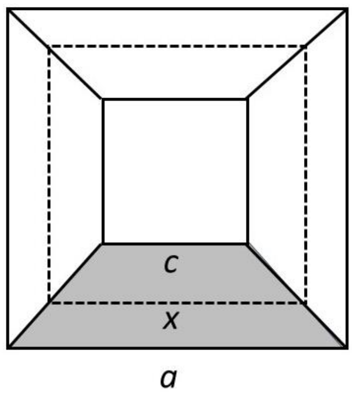
$$(a+x)\cdot h_1=(x+c)\cdot h_2$$
$$\Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2}=\frac{x+c}{a+x}$$

Andererseits erhalten wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke STB und CRS die Verhältnisgleichung

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{a-x}{x-c}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt $x^2-c^2=a^2-x^2$, also $x=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$. Die Herleitung ist in diesem Fall tatsächlich korrekt, denn die Flächeninhalte werden über die Höhen berechnet. Aber auch bei Anwendung der unkorrekten Landvermesser-Formel würden wir das gleiche exakte Ergebnis erhalten!

Die Historiker diskutieren, ob zur damaligen Zeit der Zusammenhang in dieser Weise rein algebraisch erschlossen werden konnte. Aber es gibt eine geometrische Interpretation, die besser zum Stand der Mathematik zu passen scheint.

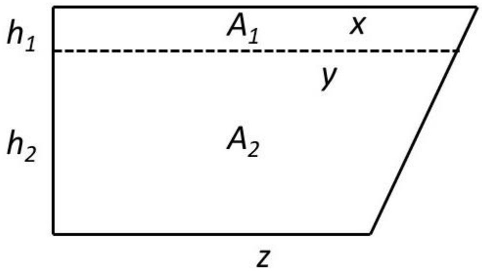


Über den Parallelseiten a und c des Trapezes werden Quadrate gezeichnet. (Der Einfachheit halber wird es hier mit einem symmetrischen Trapez dargestellt.) Verbinden wir die jeweils nahe beieinander liegenden Quadratecken, so sind vier kongruente Trapeze zu sehen.

Der Quadrat-„ring“ hat den Flächeninhalt $(a^2 - c^2)$ und beträgt das Vierfache des Flächeninhaltes des Trapezes. Für die untere Hälfte des Trapezes beträgt der Flächeninhalt $\frac{1}{4} \cdot (a^2 - x^2)$. Weil das Trapez durch x flächengleich geteilt wird, erhalten wir

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (a^2 - x^2) = \frac{1}{4} \cdot (a^2 - c^2) \quad \Rightarrow \quad a^2 + c^2 = 2 \cdot x^2$$

Auch in den Tafeln der **Yale Babylonian Collection**[6] finden wir unter 4608 #1 eine ähnliche Aufgabe zu Flächenteilung: „Gegeben ist ein rechtwinkliges Trapez, das durch eine Parallele zur Grundlinie geteilt wird. Die Länge der Grundlinie ist 52.5, die Flächen der Teiltrapeze betragen $A_1 = 843.75$ und $A_2 = 2531.25$. Die zugehörigen Abschnitte des senkrechten Schenkels verhalten sich wie 1 : 5. Gesucht sind Längen des senkrechten Schenkels.“



Für die Trapezflächen gilt

$$(x + y) \cdot h_1 = 2 \cdot A_1, (y + z) \cdot h_2 = 2 \cdot A_2$$
$$(x + z) \cdot (h_1 + h_2) = 2 \cdot (A_1 + A_2)$$

Wir setzen probeweise $h_1^* = 1$, $h_2^* = 5$ und finden

$$x^* + y^* = 1687.5 \;\; ; \;\; y^* + z^* = 1012.5 \;\; ; \;\; x^* + z^* = 1125$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist einfach lösbar, wir erhalten das Lösungstripel $x^* = 900;\ y^* = 787.5; z^* = 225$. Damit ergibt sich der Skalierungsfaktor f für die Höhen

$$f = \frac{h^*}{h_1} = \frac{y^*}{y} = \frac{787.5}{52.5} = 15 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 1 \cdot 15 = 15;\ h_2 = 5 \cdot h_1 = 75$$

Da bei konstantem Flächeninhalt die Seiten indirekt proportional zu den Höhen sind, beträgt der Skalierungsfaktor für die Seiten $^1/_f$:

$$x = \frac{1}{15} \cdot x^* = 60; y = \frac{1}{15} \cdot y^* = 52.5; z = \frac{1}{15} \cdot z^* = 15$$

[6] Die **Yale Babylonian Collection** ist eine umfassende Sammlung von Keilschrifttafeln (die an der Yale University aufbewahrt werden). aus dem Zeitraum zwischen 3000 v. Chr. und ca. 500 n. Chr.

In den altbabylonischen **Tafeln aus Susa**[7] steht folgende Aufgabe: „Gegeben ist ein (allgemeines) Viereck mit den Seiten $s_1 = 1.20$, $s_2 = 0.80$, $u_1 = 1.42$ und $u_2 = 0.58$." Mit der Landvermesser-Formel finden wir für den Flächeninhalt 1.00. (Aufgrund des normierten Flächeninhaltes vermutet man, dass dies eine Übungsaufgabe ist und keine reale Sachaufgabe darstellt.)

Man ermittle für das Viereck mit den gegenüberliegenden Seiten $(s_1; s_2)$ die Transversale d, die dieses Viereck flächenmäßig halbiert. Die beiden Teilvierecke mit den gegenüberliegenden Seiten $(s_1; d)$ bzw. $(d; s_2)$ haben die Transversalen zur Flächenhalbierung d_1 bzw. d_2. Man untersuche, ob d auch die Flächenhalbierende des Vierecks mit den gegenüberliegenden Seiten $(s_1; s_2)$ ist.

Geometrisch ist die Aussage anschaulich zu bejahen. Wir können aber auch zunächst die Länge von d als quadratisches Mittel von s_1 und s_2 berechnen, also

$$d = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.75^2 + 0.25^2}{2}} = 1.25$$

Nun können wir mit gleicher Methode die Transversalen der Teilvierecke berechnen

$$d_1 = \sqrt{\frac{s_1^2 + d^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.75^2 + 1.25^2}{2}} = 1.52,\ d_2 = \sqrt{\frac{d^2 + s_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.25^2 + 0.25^2}{2}} = 0.90$$

Letztlich wenden wir das quadratische Mittel noch einmal an:

$$\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1.52^2 + 0.90^2}{2}} = 1.25 = d$$

Unter gleicher Quelle steht unter 4675 eine Aufgabe mit folgenden Zahlenwerten: Seitenlängen eines Vierecks $a = 17$, $b = 4\frac{5}{6}$, $c = 7$, $d = 5\frac{1}{6}$. Nach Landvermesser-Formel beträgt der Flächeninhalt

$$\frac{17 + 7}{2} \cdot \frac{4\frac{5}{6} + 5\frac{1}{6}}{2} = 12 \cdot 5 = 60.$$

Wie damals üblich wird die Länge der flächenhalbierenden Transversale berechnet:

$$\sqrt{\frac{7^2 + 17^2}{2}} = \sqrt{169} = 13.$$

Versuchen wir aber, das Viereck zu zeichnen, so sehen wir $4\frac{5}{6} + 7 + 5\frac{1}{6} = 17$, d.h., das Viereck entartet zu einer Linie!

---

[7] Funde aus Susa (Persien) aus der Zeit um 3000 v. Chr.

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 11/23.

Aufgabe. Gesucht ist derjenige geometrische Ort aller Punkte P einer Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu zwei fest vorgegebenen Punkten A und B einen konstanten Wert $|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 = e^2 = const$ annimmt.

Lösungshinweise: Für einen Punkt P der Ebene sei die Bedingung $|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = e^2$ erfüllt. Wir ziehen durch die Punkte A und B die Gerade und fällen darauf das Lot von P mit dem Fußpunkt Q.

Wir nehmen zunächst an, Q liege außerhalb der Strecke $\overline{AB}$ mit $|\overline{AQ}| > |\overline{BQ}|$. Dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck AQP mit den Abkürzungen $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{BQ}| = x$ und $|\overline{PQ}| = y$

$$|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = e^2 = (c+x)^2 + y^2 + x^2 + y^2$$
$$\frac{e^2}{2} = x^2 + cx + \frac{c^2}{2} + y^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}$$
$$\frac{e^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + y^2$$

Mit O als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und dem Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2e^2 - c^2}$ folgt aus der letzten Gleichung nach Umkehrung des Satzes des PYTHAGORAS, dass das Dreieck OQP stets ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Q und mit den Katheten $|\overline{OQ}| = x + \frac{c}{2}$ und $|\overline{PQ}| = y$ (einschließlich $y = 0$) sowie der Hypotenuse $\overline{OP}$ ist.

Wir nehmen nun an, Q liege innerhalb der Strecke $\overline{AB}$ mit $|\overline{AQ}| \geq |\overline{BQ}|$. Dann gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck AQP mit den Abkürzungen $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{BQ}| = x$ und $|\overline{PQ}| = y$

$$|\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 = e^2 = (c-x)^2 + y^2 + x^2 + y^2$$
$$\frac{e^2}{2} = x^2 - cx + \frac{c^2}{2} + y^2 = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{c^2}{4}$$
$$\frac{e^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2$$

Mit O als Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und dem Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2e^2 - c^2}$ folgt auch in diesem Fall aus der letzten Gleichung nach Umkehrung des Satzes des Pythagoras, dass das Dreieck OQP stets ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei Q mit den Katheten $|\overline{OQ}| = x - \frac{c}{2}$ und $|\overline{PQ}| = y$ sowie der Hypotenuse $\overline{OP}$ ist.

Da in beiden Fällen O und r unabhängig von der konkreten Lage des Punktes P sind, ist der gesuchte geometrische Ort die Kreislinie um O mit dem Radius $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2e^2 - c^2}$. Die Punktmenge ist leer, falls $2 \cdot e^2 < c^2$ (d.h. $e < \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot c$) gilt.❑

Monatsaufgabe 1/2024[8]

Aufgabe. Es sei α eine reelle Zahl. Bestimme alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, sodass folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen *x* gilt

$$P(2x + \alpha) \leq (x^{20} + x^{19})\, P(x).$$

Termine

Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter https://www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html
Online-Anmeldeschluss: 08.03.2024.

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: „Vorbereitung für die 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“ (detailliertes Programm unter http://www.kzm-sachsen.de/html/seminare.html).
20.01.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast bei Wuttke-Ingenieure GmbH (Markt 5, 09111 Chemnitz).
Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

Wissenschaft:LIVE! „Climate Engineering – ein Plan zur Kühlung der Erde?“ Dr. Ulrike Niemeier vom Max-Planck-Institut für Meteorologie untersucht das Ausbringen von Sulfat-Aerosolen in die Stratosphäre mit unterschiedlichen Klimamodellen. Sie erklärt in ihrem Vortrag, was die Sulfat-Partikel in der Stratosphäre bewirken und zeigt Effekte, Chancen und Risiken der Methode auf.
30.01.2024, 15:30 bis 16:45 Uhr, online bundesweit. Anmeldung bis zum 30.01.2024 unter: https://www.jugend-forscht.de/netzwerk/informationen-fuer-projektbetreuende/qualifizierungsangebote-und-veranstaltungen/detail/wissenschaft-live-forschung-aus-erster-hand-fuer-projektbetreuung-climate-engineering-ein-plan-zur-kuehlung-der-erde.html

6. Tag der Mathematik der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz mit Team-Wettbewerben für Schülerinnen und Schüler (Klassenstufen 8-9 und 10-12), zwei Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen, Lehrer und alle anderen Mathematik-Interessierte sowie einer Mitmach-Ausstellung.
23.03.2024, 09:00 bis 16:30 Uhr im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude ("Orangerie") in der Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz, ausführliche Information unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2024/index.php

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 29.02.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	Nr.	Thema	Aufgabe
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044, MO621022, MO620944, MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.