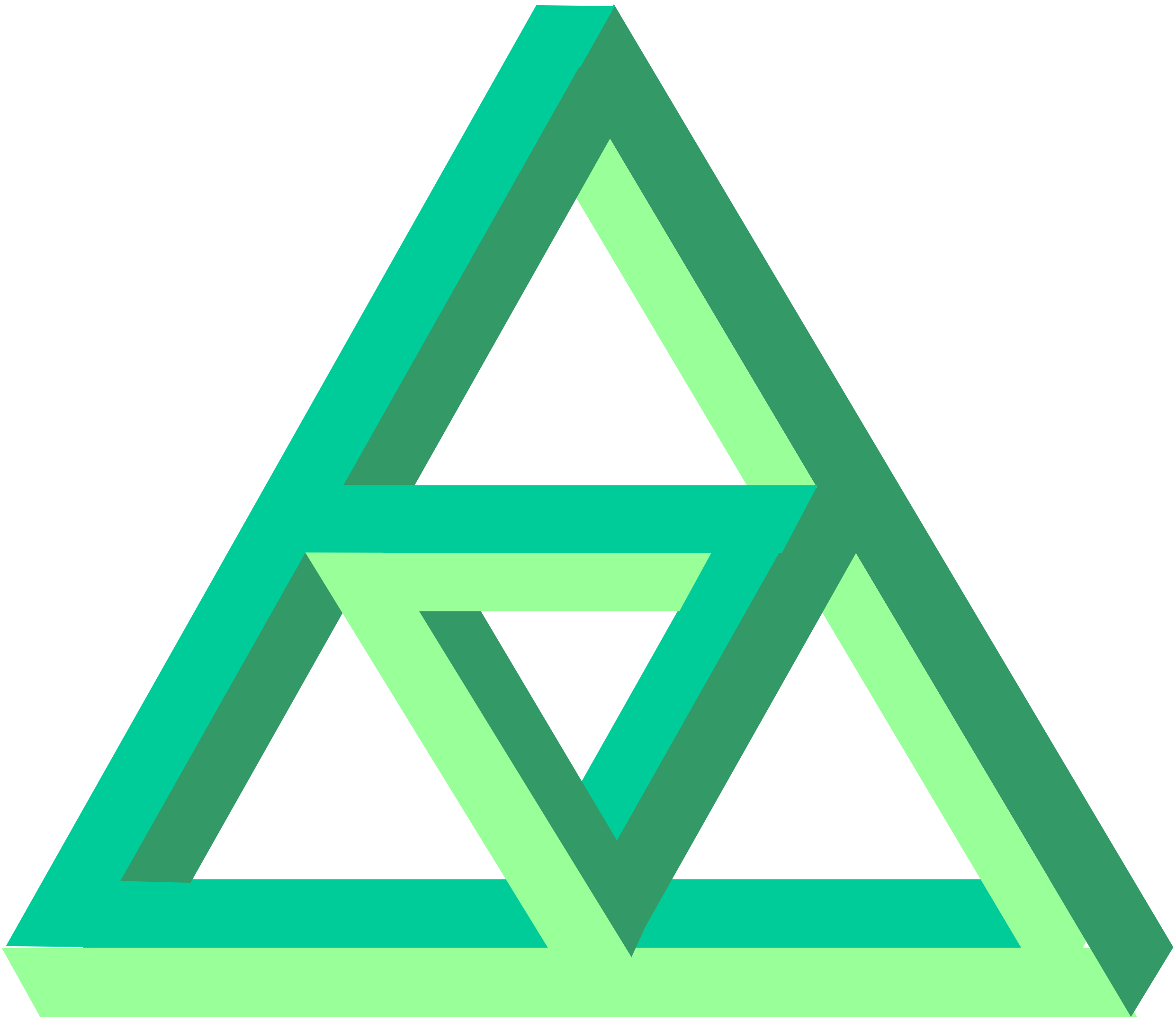
# Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 3/2024 (März 2024) 23. Jahrgang

## Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Um der Veröffentlichung der Aufgaben und Lösungen zur Landesrunde der 63. MO nicht vorzugreifen, diskutieren wir in Bezug auf die **Aufgabe 5A** der **4. KZM-Serie** das Rechnen mit Polynomen als **Thema 27**. Insbesondere untersuchen wir die Restpolynome bei Partialdivision, ohne dabei die Division vollständig ausführen zu müssen.

Im zweiten Beitrag werden Problemstellungen zum **Goldenen Schnitt** behandelt. Es werden verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für den Punkt gezeigt, der eine gegebene Strecke im Goldenen Schnitt teilen soll. Auf der Basis dieser Zusammenhänge lässt sich ein regelmäßiges Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Es gibt einige Ansätze, diese Konstruktion zu vereinfachen – aber nicht immer erzeugen sie tatsächlich regelmäßige Fünfecke. Im **historischen Rückblick** blättern wir dazu in einem Werk von Albrecht Dürer aus dem Jahre 1525, in dem er auch die Konstruktion regelmäßiger Figuren behandelt.

[1] www.mathematik-olympiaden.de

[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

## Thema 27 – Rechnen mit Polynomen

Ein (reellwertiges) Polynom ist eine Funktion der Form

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^k + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (\#)$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$, die für alle reellen Zahlen $x$ definiert ist. Polynome können addiert, subtrahiert und multipliziert werden[3], indem punktweise die Addition, Subtraktion oder Multiplikation ausgeführt wird:

$$(P \pm Q)(x) = P(x) \pm Q(x)\ ,\ (P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x).$$

Das Ergebnis ist stets wieder ein Polynom, da es offensichtlich wieder in der beschriebenen Form (#) zusammengefasst werden kann. Die Division eines Polynoms durch ein anderes führt dagegen im Allgemeinen nicht wieder zu einem Polynom.

**Aufgabe 27.01 – KZM 2023/24, 4-5A.** Es sei $P$ ein Polynom der Form (#) vom Grad $n$ ($n > 0$) mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$ gelten kann.
(b) Man zeige: Ist $x$ eine rationale Nullstelle von $P$ (also $P(x) = 0$) und gilt $a_n = 1$, so ist $x$ ganzzahlig.
(c) Man zeige: Ist sowohl $P(2019)$ als auch $P(2020)$ ungerade, so besitzt $P$ keine ganzzahlige Nullstelle.

*Lösungshinweise zu Teil* a): Angenommen, ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ habe die Funktionswerte $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$. Dann gilt $P(2019) - P(2015) = 2$. Für die Differenz zweier Funktionswerte finden wir aber allgemein

$$P(x) - P(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x^k - y^k)$$

Für $k = 0$ ist der entsprechende Summand gleich Null. Für $k = 1$ steht $a_1 \cdot (x - y)$. Für $k = 2$ finden wir $(x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (x + y)$ und auch für $k > 2$ können wir ebenfalls stets den Faktor $(x - y)$ ausklammern:

$$(x^k - y^k) = (x - y) \cdot (x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1})$$

Folglich können wir in jedem Summanden der Differenz zweier Polynome den Faktor $(x - y)$ ausklammern und wir erhalten mit geeignet gewählten Termen $C_k$:

$$P(x) - P(y) = (x - y) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot C_k.$$

[3] Wir können für Polynome auch kurz $P \pm Q$ oder $P \cdot Q$ schreiben.

Setzen wir nun $x = 2019$ und $y = 2015$, so steht auf der linken Seite dieser Gleichung die Zahl 2 und auf der rechten Seite ein ganzzahliges Vielfaches von $2019 - 2015 = 4$, was sich widerspricht. Folglich können die angegebenen Funktionswerte nicht richtig sein.

*Lösungshinweise zu Teil b):* Ist $x$ eine rationale Nullstelle von $P(x)$, dann existieren teilerfremde ganze Zahlen $r$ und $s$ $(s > 0)$ mit $x = \frac{r}{s}$. Eingesetzt in die Polynomgleichung finden wir

$$0 = \left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{r}{s} + a_0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $s^n$ und formen äquivalent um, so führt dies zu

$$r^n = -s \cdot (a_{n-1} \cdot r^{n-1} + a_{n-2} \cdot r^{n-2} \cdot s + \ldots + a_1 \cdot r \cdot s^{n-2} + a_0 \cdot s^{n-1}).$$

Damit ist $s$ ein Teiler von $r^n$ und somit sind entweder $r$ und $s$ nicht teilerfremd oder es gilt $s = 1$. Daraus folgt die Behauptung.

*Lösungshinweise zu Teil c):* Ist $P(x)$ für ein ganzzahliges Argument $x$ ungeradzahlig, so ist auch $P(y)$ mit $y = x + 2 \cdot m$ ($m$ ganzzahlig) ungeradzahlig, da nach (a) für zwei Zahlen $x$ und $y$ die Gleichung

$$P(x) - P(y) = (x - y) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot C_k$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k$ und ganzzahligen Termen $C_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ gilt. Da der Faktor $(x - y)$ geradzahlig ist, ist auch die Differenz $P(x) - P(y)$ geradzahlig.

Wäre nun $P(z) = 0$ für ein ganzzahliges $z$, so ist entweder die Differenz $(2020 - z)$ oder die Differenz $(2019 - z)$ durch 2 teilbar. Da der Wert 0 geradzahlig ist, müsste demnach entweder $P(2020)$ oder $P(2019)$ auch geradzahlig sein. Da dies in beiden Fällen laut Voraussetzung nicht der Fall ist, kann es keine derartige Zahl $z$ geben. ❑

**Aufgabe 27.02 – MO390945.** Gegeben sei für alle reellen Zahlen $x$ das Polynom der Form $P(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit ganzen Zahlen $a, b, c, d$. $p$ und $q$ seien zwei Primzahlen, zwischen denen keine weitere Primzahl liegt, und es sei bekannt, dass $P(p) = 1234$ und $P(q) = 4321$ gilt.

Stellen Sie fest, ob sich aus diesen Angaben $p$ und $q$ eindeutig bestimmen lassen und ermitteln Sie gegebenenfalls $p$ und $q$.

*Lösungshinweise:* Wie in der Argumentation zur obigen Teilaufgabe a) erkennen wir die Möglichkeit, die Differenz von $P(p)$ und $P(q)$ folgendermaßen darzustellen:

$$P(q) - P(p) = (q - p) \cdot R,$$

wobei $R$ abkürzend einen konstanten ganzzahligen Wert beschreibt. Also ist $q-p$ ein Teiler von $4321-1234=3087$. Da diese Differenz ungeradzahlig ist, muss auch der Teiler $p-q$ ungeradzahlig sein. Wären beide Primzahlen ungeradzahlig, wäre $q-p$ geradzahlig. Folglich kann nur $p=2$ und (weil keine weitere Primzahl dazwischen liegt) $q=3$ gelten. ❑

**Aufgabe 27.03.** Gesucht sind alle ganzzahligen Zahlenpaare $(p,q)$ mit $p,q \in \{1,2,3,\dots,100\}$, für die das Polynom $P(x)=x^5+px+q$ rationale Lösungen besitzt.

*Lösungshinweise*: Wie in der Argumentation zur obigen Teilaufgabe b) erkennen wir, dass die erwarteten Lösungen sogar ganzzahlig sind. Wir suchen also alle Paare $(p,q)$, für die es ganze Zahlen $a$ gibt, so dass $a\cdot(a^4+p)+q=0$ gilt. Wegen $p,q>0$ finden wir $a<0$.

Wir beginnen mit systematischem Probieren:

$$\begin{aligned}
a&=-1 &&\Rightarrow\quad -(1+p)+q=0 &&\Rightarrow\quad q=p+1,\\
a&=-2 &&\Rightarrow\quad -2\cdot(16+p)+q=0 &&\Rightarrow\quad q=2p+32,\\
a&=-3 &&\Rightarrow\quad -3\cdot(81+p)+q=0 &&\Rightarrow\quad q=3p+243>100.
\end{aligned}$$

Im Fall von $a=-3$ stellen wir fest, dass es kein Zahlenpaar aus dem vorgegebenen Bereich geben kann. Dies trifft auch für betragsmäßig größere Zahlen $a$ zu, denn für $a=-n$ mit $n\ge 4$ erhalten wir stets $q=n\cdot p+n^5>3^5=243>100$.

Folglich sind nur die Paare $(p,p+1)$ für $p=1,2,3,\dots,99$ und $(p,2p+32)$ für $p=1,2,3,\dots,34$ Lösungen der Aufgabe. ❑

Der Grad $grad(P)$ eines Polynoms $P(x)$ ist definiert als der höchste Exponent $n$ von $x$, dessen zugehöriger Koeffizient von Null verschieden ist, also $grad(P)=n$, falls $a_n\neq 0$ und $a_m=0$ für alle $m>n$. Der Grad des Nullpolynoms wird als $-\infty$ definiert.

**Satz.** Sind $P$ und $Q$ Polynome mit $grad(P)=n$ und $grad(Q)=m$, so gilt:

$$grad(P\pm Q)\le max\{n;m\}\ ,\ grad(P\cdot Q)=n+m.$$

*Bemerkung:* Der Grad des Nullpolynoms 0 ordnet sich sinnvoll in die Graddefinition ein, denn wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&grad(P)=grad(P\pm 0)\le max\{-\infty;n\}=n,\\
&grad(0)=grad(P\cdot 0)=\mathrm{n}+(-\infty)=-\infty.
\end{aligned}$$

**Satz.** Ein Polynom $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i\cdot x^i$ ist genau dann identisch Null, wenn alle seine Koeffizienten $a_0,a_1,\dots,a_n$ gleich Null sind.

*Bewei:* Wir betrachten zunächst ein Polynom des Grades 1 und behaupten, es gelte für alle $x$ die Gleichung $P(x)=a_1\cdot x+a_0=0$. Nehmen wir $a_1\neq 0$ an (andernfalls folgt sofort $a_0=0$ und alles wäre bewiesen), so können wir den Wert für die

Nullstelle ausrechnen ($x = \frac{-a_0}{a_1}$) und es ist ersichtlich, dass jeder andere Wert für $x$ der geforderten Gleichung widerspricht. Also muss $a_1 = 0$ und daraus folgend $a_0 = 0$ gelten. Jedoch ist dieser Weg nicht ohne Weiteres verallgemeinerungsfähig.

Wir finden einen allgemeineren Zugang, wenn wir die Ausgangsgleichung $P(x) = 0$ im Fall von $a_1 \neq 0$ zu $x + \frac{a_0}{a_1} = 0$ umformen. Setzen wir $C = \frac{a_0}{a_1}$, dann ist offensichtlich für $x > |C|$ wegen $x + C > 0$ ein Widerspruch zur Forderung "$P(x) = 0$ für alle $x$“ gefunden.

Wir verallgemeinern nun für ein Polynom mit Grad $n$, d.h. mit $a_n \neq 0$. Wir setzen $C = max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \dots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right\}$. Gilt $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = 0$, so gilt wegen $a_n \neq 0$ auch $x^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot x^k$, woraus $|x|^n \leq C \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k$ folgt. Für positive Zahlen $x > 1$ kennen wir die Summe der geometrischen Folge

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Es muss also die Ungleichung $x^{n+1} - x^n \leq C(x^n - 1)$ bzw. gleichbedeutend

$$x^{n+1} \leq x^n \cdot (C+1) - C < x^n \cdot (C+1) \quad \Rightarrow \quad x \leq C + 1$$

für alle $x > 1$ erfüllt sein. Diese Ungleichung ist jedoch für $x > C + 1$ nicht erfüllt. Somit kann $P(x)$ mit $a_n \neq 0$ nicht für alle reellen Zahlen $x$ den Wert 0 annehmen.

Ist dagegen $a_n = 0$, so wiederholen wir die Betrachtung für das Polynom mit Grad $n - 1$, also mit $a_{n-1} \neq 0$. Setzen wir dies fort, erhalten wir $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$. ❑

**Folgerung.** Zwei Polynome stimmen genau dann überein, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen (Methode des Koeffizientenvergleichs).

**Satz.** Für zwei nichttriviale Polynome $P$ und $Q$ gibt es Polynome $T$ und $R$, so dass die Gleichung $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen Zahlen $x$ gilt. Das (Rest-) Polynom $R$ kann so gewählt werden, dass $grad(R) < min\{grad(T), grad(Q)\}$ ist. In diesem Fall sind die Polynome $T$ und $R$ eindeutig bestimmt.

*Beweis:* Wir betrachten die Menge $M = \{P - T \cdot Q \mid T \ beliebige\ Polynome\}$. Enthält diese Menge das Nullpolynom, dann gilt der Satz offenbar, denn es gibt in diesem Fall ein Polynom $T$ mit $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ für alle reellen $x$, wobei $R(x) \equiv 0$ selbst das Nullpolynom ist. Wenn $M$ jedoch das Nullpolynom nicht enthält, dann gibt es in $M$ Polynome mit kleinstem Grad (da der Grad eines Polynoms eine nichtnegative Zahl ist). Davon wählen wir ein Polynom $R$ mit minimalem Grad (es sei $grad(R) = k$) aus, das mit einem geeigneten (Teiler-)Polynom $T$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$R(x) = P(x) - T(x) \cdot Q(x)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $grad(R) < grad(Q)$ gewählt werden kann. Um dies zu beweisen, nehmen wir indirekt an, dass $m = grad(Q) \leq grad(R) = k$ sei. Mittels der Koeffizienten bei den jeweils höchsten Exponenten von $Q$ und $R$ ($q_m$ bzw. $r_k$) bilden wir die Polynome

$$T^*(x) = T(x) + \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m} \ , \ R^*(x) = R(x) - \frac{r_k}{q_m} \cdot x^{k-m} \cdot Q(x)$$

Wir erkennen, dass $T^*$ und $R^*$ die Gleichung $P(x) = T^*(x) \cdot Q(x) + R^*(x)$ erfüllen. Außerdem ist $R^*$ so konstruiert, dass der Grad von $R^*$ mindestens um 1 geringer als der Grad von $R$ ist. Dies widerspricht aber der Auswahl von $R$ mit minimalem Grad. Folglich ist die behauptete Ungleichung $grad(R) < grad(Q)$ erfüllt.

Um die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe Polynome $T_1$, $T_2$, $R_1$ und $R_2$ mit $grad(R_1), grad(R_2) < grad(Q)$ und mit der Eigenschaft

$$P(x) = T_1(x) \cdot Q(x) + R_1(x) = T_2(x) \cdot Q(x) + R_2(x).$$

Durch einfache Umformung finden wir daraus die Beziehung

$$\big(T_1(x) - T_2(x)\big) \cdot Q(x) = R_2(x) - R_1(x).$$

Die rechte Seite ergibt ein Polynom, dessen Grad kleiner als $grad(Q)$ beträgt. Sind $T_1$ und $T_2$ voneinander verschieden, so wäre der Grad des Polynoms auf der linken Seite mindestens $grad(Q)$. Da dies zu einem Widerspruch führt, muss $T_1 = T_2$ und daraus folgend $R_1 = R_2$ gelten. ❑

**Folgerung** (Abspaltung von Linearfaktoren). Ist $x_0$ eine Nullstelle des Polynoms $P(x)$ mit reellwertigen Koeffizienten, so existiert ein Polynom $Q(x)$ mit reellwertigen Koeffizienten mit der Eigenschaft

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x).$$

*Lösungshinweise:* Wir wählen für eine Zerlegung von $P$ das Polynom $T(x) = x - x_0$. Dann können wir das (Rest-) Polynom $R(x)$ mit $grad(R) < grad(T) = 1$ wählen, also mit $grad(R) = 0$, gleichbedeutend zu $R(x) = c$ mit einer Konstanten $c$. Also gilt

$$P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + c.$$

Setzen wir nun $x_0$ ein, so finden wir

$$P(x_0) = 0 = 0 \cdot Q(x_0) + c \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Somit ist für alle reellen Zahlen $x$ die behauptete Darstellung bewiesen. ❑

**Aufgabe 27.04 – MO580924.** Man zeige, dass der Ausdruck $\frac{1}{20} \cdot x^5 - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x$ für jedes ganzzahlige $x$ ebenfalls ganzzahlig ist.

*Lösungshinweise:* Der Ausdruck lässt sich zu $A(x) = \frac{1}{20} \cdot x \cdot (x^4 - 5 \cdot x^2 + 4)$ umformen. Eine Zahl ist genau dann durch 20 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 5 teilbar ist. Aus $x^4 - 5 \cdot x^2 + 4$ ergibt sich durch Substitution $x^2 = y$ der Term $y^2 - 5 \cdot y + 4$. Dieser Term hat die Nullstellen $y_1 = 4$ und$y_2 = 1$ und lässt sich durch Linearfaktorzerlegung in der Form $(y-4) \cdot (y-1)$ schreiben. Setzen wir die Substitution zurück, erhalten wir $(x^2-1) \cdot (x^2-4)$ bzw. nach Anwenden der dritten binomischen Formel $(x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$.

Damit lässt sich A(x) in die Form $A(x) = \frac{1}{20} \cdot (x-2) \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+2)$ bringen. Da unter fünf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets eine durch 5 und mindestens eine durch 4 teilbar ist, sind $(x-2)(x-1) \cdot x \cdot (x+1)(x+2)$ stets durch 20 teilbar und somit der betrachtete Ausdruck ganzzahlig. ❑

*Hinweis:* Eine Herleitung der Darstellung in fünf Linearfaktoren ist nicht erforderlich, jedoch muss dann durch Ausmultiplizieren nachgewiesen werden, dass diese Darstellung korrekt ist.

**Aufgabe 27.05 – MO321043B[4].** Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen $a$ und $b$, für die sich bei Division des Polynoms $f(x) = x^4 + 2a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 2$ durch das Polynom $g(x) = x^2 + a \cdot x + b$ erweist, dass ohne Rest ein Polynom $h(x)$ entsteht (mit dem also für jede Zahl $x$, für die $g(x) \neq 0$ ist, die Gleichung $f(x) : g(x) = h(x)$ gilt).

*Lösungshinweise:* Wenn für ganze Zahlen $a$ und $b$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind, so hat dieses Polynom $h(x)$ mit Zahlen $p$ und $q$ die Gestalt $h(x) = x^2 + p \cdot x + q$ und es gilt:

$$(x^2 + p \cdot x + q) \cdot (x^2 + a \cdot x + b) = x^4 + 2a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 2.$$

Nach Ausmultiplizieren erhalten wir auf der linken Seite dieser Gleichung

$$x^4 + (p+a) \cdot x^3 + (ap + b + q) \cdot x^2 + (bp + aq) \cdot x + bq.$$

Wir vergleichen nun die Koeffizienten bei den Potenzen von $x$ auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned} &p + a = 2a && (1)\\ &ap + b + q = 2 && (2)\\ &bp + aq = 1 && (3)\\ &bq = -2 && (4) \end{aligned}$$

[4] In Aufgabe 3 konnte zwischen zwei Aufgaben A und B genau eine gewählt werden.

Aus der Gleichung (1) folgt unmittelbar $p = a$. Dann gilt nach (2) $b + q = 2 - a^2$ bzw. nach (3) $a \cdot (b + q) = 1$. Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir

$$a \cdot (2 - a^2) = 1$$

Da sowohl $a$ als auch $2 - a^2$ ganzzahlig sind, muss $a$ ein Teiler von 1 sein. Für $a = -1$ wäre $(-1) \cdot (2 - (-1)^2) - 1 \neq 1$, also widersprüchlich. Folglich muss $a = 1$ gelten. Damit verbleibt ein Gleichungssystem in $b$ und $q$:

$$b + q = 1$$
$$bq = -2$$

dessen Lösungen nach dem Satz von VIETA aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0$$

gefunden werden: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$. Wir erhalten $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$.

Also können die Bedingungen der Aufgabe nur durch

$$a = 1, p = 1, b = 2, q = -1$$

und

$$a = 1, p = 1, b = -1, q = 2$$

erfüllt werden, d.h. für die Paare $(a; b)$ sind die Lösungen $(1; 2)$ und $(1;\ -1)$ möglich.

Die Probe bestätigt das Ergebnis, denn es gilt:

$$(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x - 1) = x^4 + 2a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 2.$$

❑

**Aufgabe 27.06.** Welchen Rest lässt das Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{100} x^k = x^{100} + x^{99} + \ldots + x + 1$ bei Division durch $(x^2 + x + 1)$?

*Lösungshinweise:* Wir wissen, dass wir das Polynom $P$ in der Form $P = T \cdot Q + R$ darstellen können. Durch einfaches Zusammenfassen erkennen wir für das (Teiler-) Polynom $T(x) = (x^2 + x + 1)$ die Struktur

$$P(x) = x^{98} \cdot (x^2 + x + 1) + x^{95} \cdot (x^2 + x + 1) + \ldots + x^2 \cdot (x^2 + x + 1) + x + 1$$

Wir können folglich ablesen: $Q(x) = x^{98} + x^{95} + \cdots + x^2$ und $R(x) = x + 1$. ❑

**Aufgabe 27.07.** Welchen Rest lässt das Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{100} x^k = x^{100} + x^{99} + \ldots + x + 1$ bei Division durch $(x^2 - 1)$?

*Lösungshinweise:* Obwohl die Aufgabenstellung so ähnlich aussieht, erscheint hier die konstruktive Lösungssuche nach dem Polynom $Q$ aufwändig. Wir verwenden stattdessen die Darstellung $P(x) = (x^2 - 1) \cdot Q(x) + R(x)$.

Wegen $grad(T) = 2$ ist das Restpolynom $R$ höchstens linear ($grad(R) \leq 1$), also $R(x) = a \cdot x + b$. Setzen wir nacheinander für $x$ die Werte –1 und 1 in die Polynomgleichung ein, erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$P(-1) = 1 = 0 \cdot T(-1) + R(-1) = R(-1) = -a + b$$
$$P(1) = 101 = 0 \cdot T(1) + R(1) = R(1) = a + b$$

Daraus lassen sich die Koeffizienten $a, b$ ermitteln: $R(x) = 50x + 51$. ❑

Der Divisionsalgorithmus für Polynome (Partialdivision) wird als bekannt vorausgesetzt. Damit ist es keine Schwierigkeit, die Division von $x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ durch $x^2 + 2x + 1$ auszuführen:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) + x + 3.$$

*Hinweis:* Wie häufig bei solchen Aufgaben kann man die aufwändige Division durch geschicktes Zusammenfassen vereinfachen, denn es gilt

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = (x + 1)^3 + x + 3\ ,\ x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

woraus die obige Zerlegung unmittelbar folgt.

**Aufgabe 27.08.** Welchen Rest lässt das Polynom $(x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x)$ bei der Division durch $(x^3 - x)$?

*Lösungshinweis:* Da das Restpolynom höchstens vom Grad 2 ist, gibt es Koeffizienten $a, b, c$, so dass gilt:

$$x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x = T(x) \cdot (x^3 - x) + (ax^2 + bx + c).$$

Setzen wir nun für $x$ nacheinander die drei Nullstellen des Polynoms $(x^3 - x)$ ein, also $-1, 0$ und $1$, so finden wir ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen,

$$\begin{aligned}(-1)^{81} + (-1)^{49} + (-1)^{25} + (-1)^9 + (-1) = -5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ = a - b + c,\end{aligned}$$
$$0^{81} + 0^{49} + 0^{25} + 0^9 + 0 = 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c,$$
$$1^{81} + 1^{49} + 1^{25} + 1^9 + 1 = 5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c,$$

aus denen wir $a = 0, b = 5$ und $c = 0$ ermitteln. Damit lautet das Restpolynom $R(x) = 5 \cdot x$. ❑

**Aufgabe 27.09.** Ein Polynom $P$ lasse bei Division durch $(x - 1)$ den Rest 1, bei Division durch $(x - 2)$ den Rest 2 und bei Division durch $(x - 3)$ den Rest 3. Man zeige, dass $P$ bei Division durch $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$ den Rest $R(x) = x$ lässt.

*Lösungshinweis:* Es sei $P$ das Polynom, dessen Zerlegung $P(x) = T(x) \cdot Q(x) + R(x)$ gesucht wird. Laut Voraussetzung gilt:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q_1(x) + 1$$

$$P(x) = (x-2) \cdot Q_2(x) + 2$$
$$P(x) = (x-3) \cdot Q_3(x) + 3$$

Also finden wir $P(1) = 1, P(2) = 2$ und $P(3) = 3$. Betrachten wir nun

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \cdot Q(x) + R(x)$$

so können wir nacheinander für $x$ die Werte 1, 2 und 3 einsetzen. Außerdem ist $R(x)$ ein Polynom höchstens vom Grad 2, also $R(x) = ax^2 + bx + c$. Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem für die Unbekannten $a, b$ und $c$,

$$P(1) = 1 = a + b + c$$
$$P(2) = 2 = 4 \cdot a + 2 \cdot b + c$$
$$P(3) = 3 = 9 \cdot a + 3 \cdot b + c$$

dessen Lösung zu $a = 0$, $b = 1$ und $c = 0$ und somit zu $R(x) = x$ führt. ❑

**Aufgabe 27.10.** Man finde alle Polynome $P$, die für alle reellen Zahlen $x$ die Gleichung $x \cdot P(x-1) = (x-2) \cdot P(x)$ erfüllen.

*Lösungshinweise:* Setzen wir $x = 2$, so folgt unmittelbar $P(1) = 0$. Daraus lässt sich für $x = 1$ auch $P(0) = 0$ erkennen. Also sind 0 und 1 Nullstellen des Polynoms $P$ und wir können zwei Linearfaktoren abspalten, d.h. es gibt ein Polynom $Q$ mit

$$P(x) = x \cdot (x-1) \cdot Q(x)$$

Setzen wir diese Darstellung von $P$ in die Ausgangsgleichung ein, führt dies zu

$$x \cdot ((x-1) \cdot (x-2) \cdot Q(x-1)) = (x-2) \cdot (x \cdot (x-1) \cdot Q(x)).$$

Somit gilt für alle $x$ mit $x \neq 0,\ 1,\ 2$ die Gleichung $Q(x-1) = Q(x)$. Deshalb ist $Q(x) = c$ eine Konstante und wir erhalten $P(x) = c \cdot x \cdot (x-1)$. ❑

Abschließend noch eine historische Aussage von Christian Goldbach (1690 bis 1764) aus dem Jahr 1752:

**Satz**. Sei $P(x)$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann können nicht alle Glieder der Folge $|P(0)|, |P(1)|, |P(2)|, \ldots$ Primzahlen sein.

*Lösungshinweise:* Angenommen, es gäbe ein solches Polynom. Es kann in der Form $P(x) = P(0) + x \cdot Q(x)$ mit einem geeigneten Polynom $Q(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden. Ist $|P(0)|$ eine Primzahl $p$, so ist der Ausdruck $P(py) = P(0) + py \cdot Q(py)$ für alle positiven ganzen Zahlen $y$ durch $p$ teilbar. Wenn alle Funktionswerte Primzahlen sind, gilt somit $P(py) = p$ für alle diese $y$. Ein Polynom ist aber für ausreichend große Argumente stets monoton, so dass nicht an unendlich vielen ganzzahligen Argumenten der Wert $p$ auftreten kann. ❑

## Der Goldene Schnitt

LEONHARD EULER (1707 – 1783) formulierte den Goldenen Schnitt so: *Er entsteht, wenn man eine gegebene Strecke so schneidet, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.*

Mögen die Abschnitte der Strecke die Längen $a$ und $b$ haben. Es soll gelten:

$$b \cdot (a + b) = a^2$$

Somit gilt für das Verhältnis $a : b$

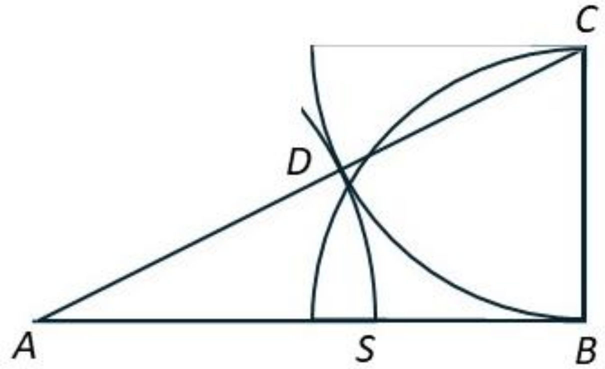
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

also

$$\Phi := \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(Die zweite Lösung $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ entfällt, da $\Phi$ positiv sein soll).

**Konstruktionsbeschreibung.** Eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ der Länge $c$ soll im Goldenen Schnitt geteilt werden.




1) Konstruiere den Kreis um $B$ mit Radius $c/2$. Er schneidet die Senkrechte auf $\overline{AB}$ mit Fußpunkt $B$ in einem Punkt, der $C$ genannt wird. (der zweite Schnittpunkt liefert dasselbe Ergebnis).
2) Konstruiere den Kreis um $C$ mit Radius $c/2$. Er schneidet die Strecke $\overline{AC}$ (zwischen $A$ und $C$) in einem Punkt, der $D$ genannt wird.
3) Konstruiere den Kreis um $A$ mit Radius $|\overline{AD}|$. Er schneidet die Strecke $\overline{AB}$ (zwischen $A$ und $B$) im gesuchten Punkt $S$.

*Beweis:* Laut Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck $\Delta ABC$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt $B$. Die Kathetenlängen betragen $|\overline{AB}| = c$ und $|\overline{BC}| = \frac{c}{2}$. Mithilfe des Satzes des PYTHAGORAS im rechtwinkligem Dreieck $\Delta ABC$ mit rechten Winkel im Punkt $B$ ermitteln wir daraus die Länge $|\overline{AC}| = c\frac{\sqrt{5}}{2}$. Nach dem dritten Konstruktionsschritt erhalten wir schließlich

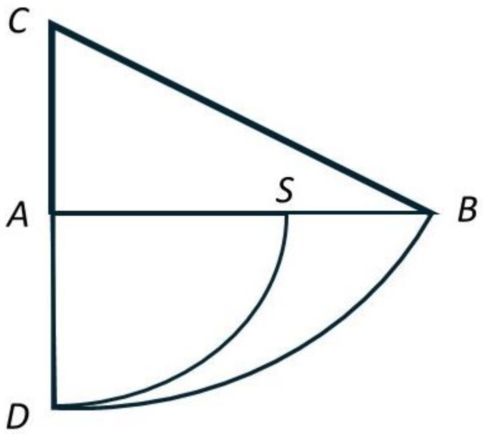
$$|\overline{AS}| = |\overline{AD}| = |\overline{AC} - \overline{DC}| = c \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right) = c \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Somit gilt

$$\frac{|\overline{SB}|}{|\overline{AS}|} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(3-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

d.h. $|\overline{AS}| : |\overline{AB}| = |\overline{SB}| : |\overline{AS}|$ und $S$ teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt. ❑

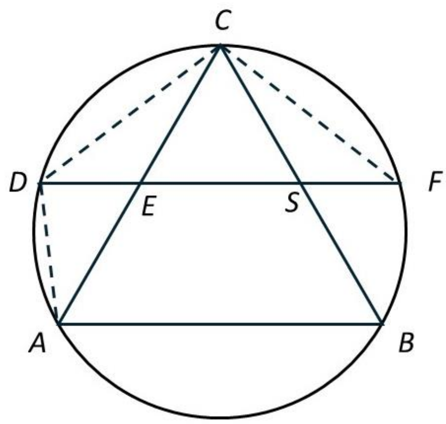
Diese Konstruktion des Goldenen Schnitts ist als innere Teilung nach HERON VON ALEXANDRIA (ca. 1. Jh. u.Z.) bekannt. Auf EUKLID VON ALEXANDRIA (ca. 3. Jh. v.u.Z.) geht folgende **Konstruktion** zurück:




1) Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$ der Länge $c$. Errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ im Punkt $A$ eine Senkrechte und markiere auf ihr den Punkt $C$ mit $|\overline{AC}| = \frac{c}{2}$.
2) Konstruiere den Kreis um $C$ mit dem Radius $|\overline{CB}|$. Er schneidet die Verlängerung von $AC$ über $A$ hinaus in einem Punkt, der $D$ genannt wird.
3) Konstruiere den Kreis um $A$ mit dem Radius $|\overline{AD}|$. Er schneidet die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt $S$, der die Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt.

*Beweis:* In Analogie zu oben finden wir (ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck $\Delta ABC$ mit dem rechten Winkel im Punkt $A$ und den Kathetenlängen $|\overline{AB}| = c$ und $|\overline{AC}| = \frac{c}{2}$) die Längen $|\overline{AD}| = c \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $|\overline{AS}| = c \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, woraus der Nachweis des Goldenen Schnitts wie oben zu vollenden werden kann. ❑

**Aufgabe 1.** Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck $\Delta ABC$ mit Umkreis. Die Gerade durch die Seitenmitten von $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ schneiden den Kreis und das Dreieck in den Punkten $D, E$ und $S$ und $F$ (von links nach rechts).



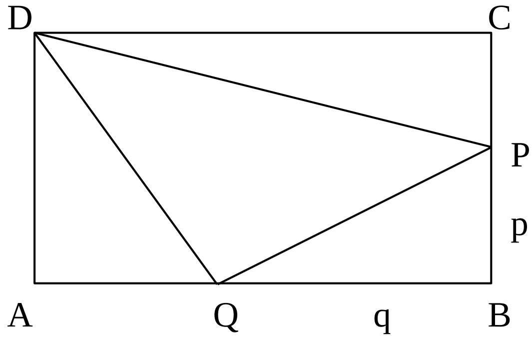

Man zeige: Der Punkt $S$ teilt die Strecke $\overline{EF}$ im Goldenen Schnitt.

*Beweis:* Über der Sehne $\overline{CD}$ sind die Peripheriewinkel $\angle DAC$ und $\angle DFC$ gleich groß. Folglich sind die Dreiecke $\Delta AED$ und $\Delta CEF$ ähnlich (www) und es gilt $|\overline{AE}| : |\overline{DE}| = |\overline{EF}| : |\overline{EC}|$. Wegen der Symmetrie der Konstruktion gilt $|\overline{SF}| = |\overline{DE}|$. Außerdem gilt im gleichseitigen Dreieck $|\overline{AE}| = |\overline{EC}| = |\overline{ES}|$. Somit erhalten wir daraus

$$|\overline{ES}| : |\overline{EF}| = |\overline{SF}| : |\overline{ES}|$$ ❑

*Hinweis:* Diese Konstruktionsmöglichkeit des Goldenen Schnitts stammt von GEORG PHILLIP ODOM (1941 bis 2010) aus dem Jahr 1982.

**Aufgabe 2.** Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|\overline{AB}| = a$ und $|\overline{BC}| = b$. Gesucht sind Punkte $P$ auf $\overline{BC}$ und $Q$ auf $\overline{AB}$ so, dass die Dreiecke $\Delta AQD$, $\Delta QBP$ und $\Delta PCD$ denselben Flächeninhalt haben.




*Lösungshinweise:* Wir bezeichnen die Längen $|\overline{QB}| = q$ und $|\overline{PB}| = p$ und vergleichen die Doppelten der Flächeninhalte der genannten drei Dreiecke:

$$(a - q) \cdot b = (b - p) \cdot a = p \cdot q$$

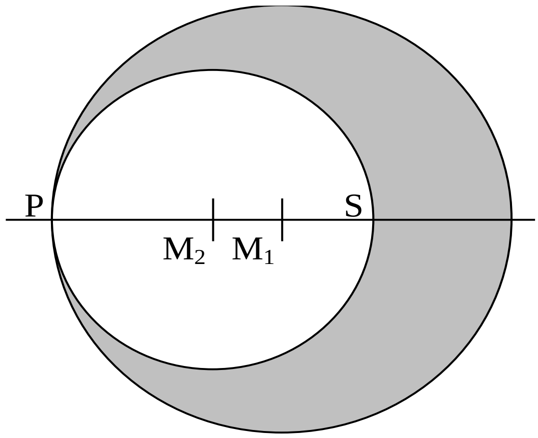
Durch einfaches Umformen finden wir

$$a(a - q) = q^2 \qquad \text{und} \qquad b(b - p) = p^2,$$

d.h. die Punkte $P$ und $Q$ teilen die entsprechenden Rechteckseiten im Goldenen Schnitt. ❑

**Aufgabe 3.** Gegeben sei ein Kreis $K_1$ mit dem Mittelpunkt $M_1$ und dem Peripheriepunkt $P$. Gesucht ist ein den Kreis $K_1$ von innen in $P$ berührender Kreis $K_2$ mit Mittelpunkt $M_2$ so, dass der Schwerpunkt $S$ des Halbmondes $K_1$ ohne $K_2$ (graue Fläche) genau der Schnittpunkt des Durchmessers durch $P$ mit $K_2$ ist.

*Lösungshinweise:* Wir betrachten die „Waage“ mit Drehpunkt $M_1$ und Armen $M_1M_2$ sowie $M_1S$. Auf die „Waagschalen“ kommen die Flächeninhalte des Kreises $K_2$ über $M_2$ bzw. des Halbmondes über $S$, d.h. es gilt (unter Vernachlässigung des Faktors $\pi$ auf beiden Seiten):




$$M_1M_2 \cdot r_2^2 = M_1S \cdot (r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $|\overline{M_1M_2}| = r_1 - r_2$ und $|\overline{M_1S}| = 2r_2 - r_1$ gilt $r_2^2 = (2r_2 - r_1) \cdot (r_1 + r_2)$. Die letzte Gleichung ist äquivalent zu $r_1^2 = r_2 \cdot (r_1 + r_2)$. Folglich verhalten sich $r_1, r_2$ und deren Summe nach dem Goldenen Schnitt. ❑

**Aufgabe 4.** Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$. Konstruiere den Punkt $C$ auf der Geraden $AB$, so dass $B$ die Strecke $\overline{AC}$ im Goldenen Schnitt teilt.

*Lösungshinweise:* Der gesuchte Punkt $C$ (auf der Geraden $AB$ rechts von $B$ gelegen) soll die Gleichung $|\overline{AB}| : |\overline{AC}| = |\overline{BC}| : |\overline{AB}|$ erfüllen. Wir konstruieren zunächst den Punkt C′, der die Strecke AB im Innern nach dem Goldenen Schnitt teilt, erhalten also

$$\left|\overline{AC'}\right| : \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BC'}\right| : \left|\overline{AC'}\right|$$

Wir strecken die Figur aus den Punkten A, C' und B aus A mit dem Faktor $f = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|}$. Dabei geht C' in B über. Den Bildpunkt von B nennen wir C.

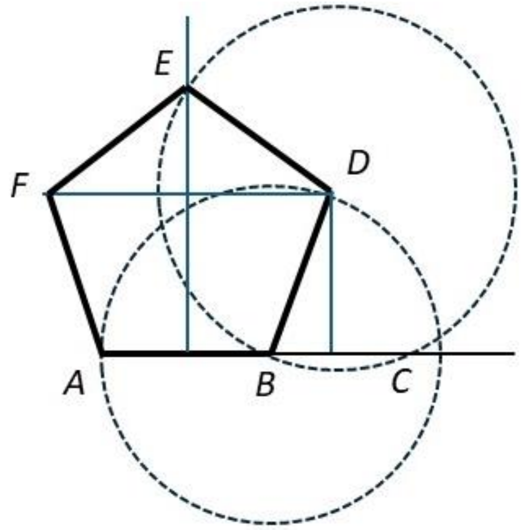
$$\left|\overline{AC'}\right| \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|} = |\overline{AB}| \quad ; \quad |\overline{AC}| = |\overline{AB}| \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|} \quad ; \quad |\overline{BC}| = \left|\overline{C'B}\right| \cdot \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC'}|}$$

Damit teilt B die Strecke AC im Goldenen Schnitt, denn es gilt

$$\frac{\left|\overline{AC'}\right|}{|\overline{AB}|} = \frac{\left|\overline{BC'}\right|}{\left|\overline{AC'}\right|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left|\overline{AC'}\right| \cdot f}{|\overline{AB}| \cdot f} = \frac{\left|\overline{BC'}\right| \cdot f}{\left|\overline{AC'}\right| \cdot f} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|},$$

d.h., dieser Punkt erfüllt die Forderung. ❑

Auf diesem Zusammenhang basiert eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks $ABCDE$ mit der Seitenlänge $\overline{|AB|} = c$. Die Seite des Fünfecks befindet sich im goldenen Verhältnis zu seinen Diagonalen, d.h. die Länge $d$ einer Diagonalen des Fünfecks beträgt $d = c \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) \approx 1.618 \cdot c$.




**Konstruktionsbeschreibung.**

(1) Konstruiere den Punkt $C$ auf der Geraden $AB$, so dass der Punkt $B$ die Strecke $\overline{AC}$ im Goldenen Schnitt teilt.

(2) Konstruiere die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$.

(3) Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und dem Kreisbogen des Kreises um $B$ mit dem Radius $|\overline{AB}| = c$ werde $D$ genannt.

(4) Konstruiere die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.

(5) Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und dem Kreisbogen des Kreises um $D$ mit dem Radius $|\overline{BD}|$, dessen Abstand zu $AB$ größer als der Abstand von $D$ zu $AB$ ist, werde $E$ genannt.

(6) Der Spiegelpunkt von $D$ an der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ werde $F$ genannt.

Das Fünfeck $ABDEF$ ist regelmäßig mit der Seitenlänge $c$.

*Beweis:* Wir berechnen die Länge $|\overline{HD}|$ der Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$. Da $B$ die Strecke $\overline{AC}$ im Goldenen Schnitt teilt, gilt $c^2 = |\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}| = |\overline{AC}| \cdot (|\overline{AC}| - c)$. Mit $|\overline{AC}| = x$ erhalten wir für $x$ die quadratische Gleichung $x^2 - c \cdot x - c^2 = 0$. Die positive Nullstelle lautet nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen $x = \frac{1}{2}c \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$. Somit finden wir $|\overline{BH}| = \frac{1}{2} \cdot (x - c) = \frac{1}{4}c \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Mit Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS im Dreieck $\Delta BHD$ mit dem rechten Winkel bei $H$ erhalten wir $|\overline{HD}| = \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}\right)} = \frac{c}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Damit können wir nun auch die Länge der Strecke $|\overline{AD}|$ berechnen, indem wir den Satz des PYTHAGORAS im Dreieck $\Delta AHD$ mit dem rechten Winkel bei $H$ anwenden.

$$|\overline{AD}| = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{c}{4} \cdot \sqrt{24+8\sqrt{5}} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

Wegen $6+2\sqrt{5} = \left(1+\sqrt{5}\right)^2$ erkennen wir $|\overline{AD}| = |\overline{AB}| \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$. ❑

Immer wieder in der Geschichte haben sich Künstler und Mathematiker herausgefordert gefühlt, das Konstruktionsverfahren regelmäßiger Fünfecke zu vereinfachen. Von LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) stammt folgender Vorschlag:

**Konstruktionsbeschreibung.**

(1) Konstruiere über der gegebenen Strecke $\overline{AB}$ ein gleichseitiges Dreieck $\Delta ABG$.
(2) Konstruiere den Fußpunkt des Lotes von $B$ auf die Seite $\overline{AG}$. Dieser Fußpunkt werde $H$ genannt.
(3) Der Kreis um $B$ mit dem Radius $|\overline{BH}|$ schneidet die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ im Punkt $M$.
(4) Konstruiere den Kreis um $M$ mit dem Radius $|\overline{MB}|$, den Umkreis des gesuchten Fünfecks.
(5) Konstruiere den Punkt $C \neq A$ auf diesem Umkreis mit $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$.
(6) Konstruiere den Punkt $D \neq B$ auf diesem Umkreis mit $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$.
(7) Konstruiere den Punkt $E \neq C$ auf diesem Umkreis mit $|\overline{CD}| = |\overline{DE}|$.

*Bemerkung:* Der Umkreisradius $r_u$ eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seitenlänge $a$ hat die Länge $r_u = a \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \approx 0.851 \cdot a$. Die Konstruktion von DA VINCI erzeugt jedoch einen Umkreisradius $r = a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.866 \cdot a$. Die Konstruktion ist also nicht korrekt. Auch die folgende zweite Konstruktion von ALBRECHT DÜRER ist nicht korrekt.

## In alten Mathe-Büchern geblättert

In der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) steht eine umfangreiche Sammlung digitalisierter Dokumente zur Verfügung. Darunter ist ein 178-seitiges Werk von ALBRECHT DÜRER (1471 BIS 1528), das er 1525 in Nürnberg drucken ließ:

https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/17139/1

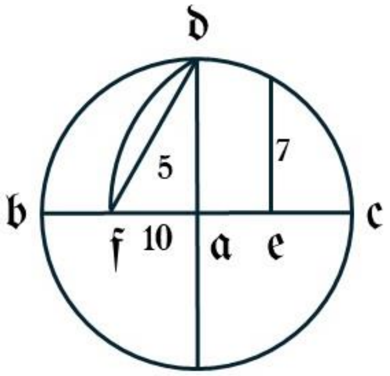
Während im ersten Teil der goldene Schnitt für die Konstruktion verwendet wird, erfolgt die zweite Konstruktion mit einem „rostigen“ Zirkel (d.h. mit unveränderter Zirkelspanne) – jedoch wird nicht gezeigt, dass das konstruierte Fünfeck regelmäßig ist. Für diesen Auszug wurde versucht, die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beizubehalten. In Anlehnung an den Schrifttyp des Originals wird der Schrifttyp Bertholdr Mainzer Fraktur verwendet. Die Grafiken wurden nachgezeichnet.

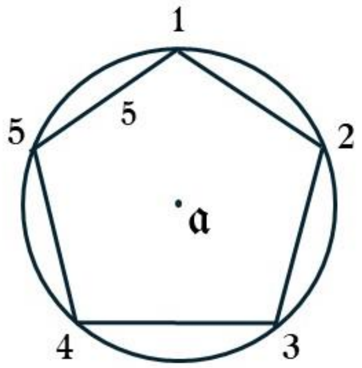
**Underweysung der messung / mit dem zirckel vn richt scheyt / in Linien ebnen vnnd gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zusamen getzoge / vnd zu nutz alle kunstlieb habenden mit zu gehörigen figuren / in truck gebracht / im jar M. D. X X v.**

[S. 57] Nun will ich anzeige wie man auf einer ebne gleych ecket figure / gerad od ungerad / als da sind / drey / fier / fünf / sechs ecket figuren rc. sol mache.

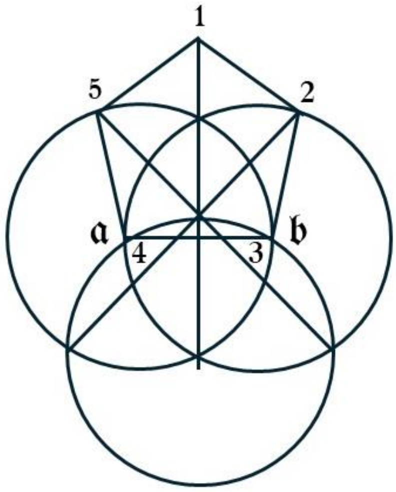
...

Nun ist von nötten ein fünfeck zumachen / in ein zirckelryß / dem thue also / Reiß auß eine Centrum.a. ein zirckelryß / und zeuch ein zwerchlini durch das Centru.a. und da sie zu beden seyten die zirckellini durch schneidet / da setz.b.c. Darnach zeuch durch de Centru.a. ein aufrechte lini zu gleyche wincklen / von wo sy eben die zirkellini durch schneydet / do setz ein.d. Darnach reiß ein gerade lini.e.d. vn nym ein zirckel / setz jn mit dem ein fuß in den punckte.e. den andern in das.d. vn reiß von dan herab aus die zwerchlini.b.c. wo sie die durchschneidt da setz ein,f, vn reiß.f.d. gerad zusame / dise lenge.f.d. ist ein seite eins fünfteyls /de ecket im zirckel herum dryt / so ist.f.a. ein seyte eins zehenecks / Darnach teyl.a.c.mit einem punckten.e.in zwey gleiche teyl / so du dan auß dem punckten.e.mit einer aufrechten lini vbersich ferst / biß an die zirckellini / so hast du ein sibenteil des zirckels Mechanice / wie ich das vnden hab aufgeryssen.



Aber ein Fünfeck auß vnuertuckten zirckel zu machenn / dem thue alſo / Reiß zwen zirckel durch einander / alſo das eins ytlichen runde / durch des andern Centrum gee / vnd die zwey Cetra a.b.zeuch mit einer geraden lini / zuſamen / daſ wirdet ein leng einer ſeyten deſ fünften eckeſ / wo aber die zirckellini an einander durchſchneiden / da ſetz oben ein.c.vnden ein.d.vn reiß ein gerade lini.c.d.Darnach nym den vnuerruckten zirckel vnd ſetz jn mit dem ein fuß in den punckten.d. vn mit dem andern reiß durch die zwen zirckelryß / vn jre bede Centro.a.b. vnd do die zwen runden ryß durch ſchnitten werden / da ſetz.e.f. Aber wo die aufrecht.c.d.duch ſchnitte wirdet / da ſetz ein.g. Darnach zeuch ein gerade lini.e.g.gar hynauß byß an den zirckellini / da ſetz ein.h. darnach zeuch ein andre gerade lini.f.g. biß an die zirckellini da ſetz ein.i. zeuch darnach.i.a. vn.h.b. gerad zuſamen / ſo werden drey ſeyten des fünfecks/ vnd von dan laß zwu gleich ſeyten leng vom.i.h. oben zuſam reichen / ſo wirdet ein fünfeck / wie ich das vnden hab aufgeryſſen.




## Termine

**Känguru der Mathematik** (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html
08.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

**6. Tag der Mathematik**[5] der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz mit Team-Wettbewerben für Schülerinnen und Schüler (Klassenstufen 8-9 und 10-12), zwei Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen, Lehrer und alle anderen Mathematik-Interessierte sowie einer Mitmach-Ausstellung.
23.03.2024, 09:30 bis 16:30 Uhr im Zentralen Hörsaal- und Seminargebäude in der Reichenhainer Straße 90, 09126 Chemnitz, ausführliche Information unter
www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2024/index.php
10.03.2024: Online-Anmeldeschluss.

**Landeswettbewerb „Jugend forscht/Schüler experimentieren“**
23.03.2024: Land Sachsen - BGH Edelstahlwerke GmbH, DAS Environmental Expert GmbH, GLOBALFOUNDRIES Management Services LLC & Co. KG
www.jugend-forscht-sachsen.de

**Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“**: „Nachtrag zur 3. Runde der 63. Mathematik-Olympiade“.
13.04.2024, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast bei ICM - Institut Chemnitzer Maschinen- und Anlagenbau e.V. (Otto-Schmerbach-Straße 19, Hochhaus 6, 09117 Chemnitz)
Formlose Anmeldung an bino@hrz.tu-chemnitz.de erforderlich.

[5] Siehe auch „Mathematische Kostproben“ Heft 2/2024

## Lösungshinweise zu Monatsaufgabe 1/2024

**Aufgabe.** Es sei $\alpha$ eine reelle Zahl. Bestimme alle Polynome $P$ mit reellen Koeffizienten, so dass folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen $x$ gilt

$$P(2x + \alpha) \leq (x^{20} + x^{19})\, P(x).$$

*Lösungshinweise:* Wir zeigen, dass nur das Nullpolynom $P(x) \equiv 0$ die geforderte Eigenschaft hat. Das Nullpolynom erfüllt offensichtlich die Aufgabe.

Nehmen wir an, dass das Polynom $P$ nicht das Nullpolynom ist. Es sei $n$ sein Grad mit einem Koeffizienten $a_n \neq 0$ bei $x^n$. Das Polynom

$$Q(x) = (x^{20} + x^{19}) \cdot P(x) - P(2x + \alpha)$$

hat den Grad $n + 20$. Der Koeffizient $x^{n+20}$ ist ebenfalls $a_n$. Erfüllt das Polynom $Q$ die geforderte Ungleichung, ist $Q(x)$ nicht-negativ für alle reellen Zahlen $x$. Daraus folgt, dass $n + 20$ (und auch $n$) eine gerade Zahl ist und $a_n > 0$ gilt.

Setzen wir in die Ungleichung $x = -1$ und $x = 0$ erhalten wir $P(-2 + \alpha) \leq 0$ bzw. $P(\alpha) \leq 0$. $P$ hat also reelle Nullstellen. Wir bezeichnen mit $m$ die minimale reelle Nullstelle und mit $M$ die maximale reelle Nullstelle. Wegen $a_n > 0$ sind die Werte $P(x)$ außerhalb des Intervalls $\langle m, M\rangle$ positiv. Also finden wir $\{-2 + \alpha, \alpha\} \subset \langle m, M\rangle$, d.h. das Intervall $\langle m, M\rangle$ ist nicht entartet und hat eine Länge von mindestens 2.

Für die Nullstelle $x = m$ finden wir $P(2m + \alpha) \leq 0$. Dies impliziert $m \leq 2m + \alpha$ (weil $m$ offenbar im Intervall $\langle m, M\rangle$ liegt) und somit $-\alpha \leq m$.

Analog dazu erhalten wir für die Nullstelle $x = M$ die Abschätzung $P(2M + \alpha) \leq 0$. Daraus ergibt sich (weil $M$ offenbar im Intervall $\langle m, M\rangle$ liegt) $2M + \alpha \leq M$ und somit $M \leq -\alpha$.

Es folgt insgesamt $-\alpha \leq m < M \leq -\alpha$, also $m = M = -\alpha$ im Widerspruch zur obigen Erkenntnis, dass dieses Intervall mindestens die Länge 2 besitzt. Damit kann es kein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom geben, dass die Ungleichung erfüllt. ❑

## Monatsaufgabe 3/2024[6]

Es seien *a*, *b*, *c* positive reelle Zahlen mit $a + b + c = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Man zeige, dass

$$2(a + b + c) \geq \sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2 + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1}$$

gilt. Man finde alle Tripel $(a, b, c)$, für die Gleichheit gilt.

[6] Lösungseinsendungen an bino@hrz.tu-chemnitz.de sind bis 30.04.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

## Inhalt



### Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

| Ausgabe[7] | Nr. | Thema | Aufgabe |
|---|---|---|---|
| 03/2024 (März) | Thema 27 | Rechnen mit Polynomen | KZM 4.2 |
| 02/2024 (Febr.) | Thema 12.6 | Zerlegung einer Trapezfläche | |
| 01/2014 (Jan.) | Thema 12.5 | Zerlegung einer Dreiecksfläche | MO630924 |
| 12/2023 (Dez.) | Thema 25.2 | Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken | MO631014 |
| 11/2023 (Nov.) | Thema 26 | Geometrischer Ort | MO631015 |
| 11/2023 (Nov.) | Thema 25.1 | Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken | MO631014 |
| 10/2023 (Okt.) | Thema 13.2 | Bewegungsaufgaben | MO621044, MO621022, MO620944, MO620922 |
| 8+9/2023 (Aug./Sep.) | Thema 24 | Kombinatorik | MO621042, MO620942 |
| 8+9/2023 (Aug./Sep.) | Thema 23 | Quersummen und Querprodukte | MO621041, MO620941 |

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[7] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.