Die Aufgaben der ersten 30 Jahre des Bundeswettbewerbs Mathematik (1970/71 - 2000)

zusammengestellt von Klaus-R. Loeffler

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgaben 1970/71

1.1 Erste Runde

1. An einer Tafel stehen die Zahlen 1, 2, 3, ..., 1970. Man darf irgend zwei Zahlen wegwischen und dafür ihre Differenz anschreiben. Wiederholt man diesen Vorgang genügend oft, so bleibt an der Tafel schließlich nur noch eine Zahl stehen. Es ist nachzuweisen, dass diese Zahl ungerade ist.

2. Gegeben ist ein Stück Papier. Es wird in acht oder zwölf beliebige Stücke zerschnitten. Jedes der entstandenen Stücke darf man wieder in acht oder zwölf Stücke zerschneiden oder unzerschnitten lassen, usw. Kann man auf diese Weise 60 Stück bekommen?

   Zeige, dass man jede beliebige Zahl, die größer als 60 ist, erhalten kann.

3. Von beliebigen fünf Strecken wird lediglich vorausgesetzt, dass man jeweils drei von ihnen zu Seiten eines Dreiecks machen kann. Es ist nachzuweisen, dass mindestens eines der Dreiecke spitzwinklig ist.

4. Es sei P das links liegende, Q das rechts liegende von zwei benachbarten Feldern eines Schachbretts aus n mal n Feldern. Auf dem linken Feld P steht ein Spielstein. Er soll über das Schachbrett bewegt werden. Als Bewegungen sind zugelassen:

1) Versetzung auf das oben liegende Nachbarfeld,
2) Versetzung auf das rechts liegende Nachbarfeld,
3) Versetzung auf das links unten anstoßende Feld.

Beweise: Für keine Zahl n kann der Stein alle Felder je einmal besuchen und seine Wanderung in Q beenden.

1.2 Zweite Runde

1. Beweise:

   Sind a, b, c, d positive ganze Zahlen, die der Bedingung $ab = cd$ genügen, so ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ keine Primzahl.

   Formuliere und beweise auch eine Verallgemeinerung dieses Satzes.

2. Die Bewohner eines Planeten haben eine Sprache, die nur die Buchstaben A und 0 besitzt. Zur Vermeidung von Fehlern unterscheiden sich irgend zwei Wörter gleicher Buchstabenanzahl an mindestens drei Stellen (z.B. unterscheiden sich AAOAO und AOAAA an der zweiten, dritten und fünften Stelle). Zeige, dass es nicht mehr als $\frac{2^n}{n+1}$ Wörter mit n Buchstaben gibt.

3. In einem Land gibt es nur Einbahnstraßen. Zwischen irgend zwei Städten besteht eine und nur eine direkte Straßenverbindung. Zeige, dass es eine Stadt gibt, die von jeder anderen Stadt aus direkt oder über höchstens eine zweite Stadt erreicht werden kann.

4. Im Innern eines Quadrats mit der Seite 1 liegt ein sich nicht überschneidender Streckenzug, dessen Länge größer als 1000 ist. Beweise, dass es zu jedem solchen Streckenzug eine Parallele zu einer der Quadratseiten gibt, weiche den Streckenzug in mindestens 501 Punkten schneidet.

2 Aufgaben 1971/72

2.1 Erste Runde

1. Auf jedem Feld eines Schachbretts von n mal n Feldern steht eine Zahl. Die Summe der Zahlen in einem *Kreuz* ist $\geq a$; ein Kreuz ist die Vereinigung einer beliebigen Zeile mit einer beliebigen Spalte. Welches ist die kleinstmögliche Summe aller Zahlen auf dem Schachbrett? Das Ergebnis ist zu begründen.

2. In einer Ebene liegen gleichgroße kreisrunde Bierfilze $B_1, B_2, \ldots, B_n (n \geq 3)$. B_i berührt B_{i+1} für jedes $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$; dabei soll $B_{n+i} = B_1$ sein. Die Bierfilze liegen so, dass ein weiterer gleichgroßer Bierfilz B beim Abrollen außen an der geschlossenen Kette der Bierfilze der Reihe nach jeden Bierfilz berührt. Wie viele Umdrehungen macht B bis zur Rückkehr in die Ausgangslage?

3. In einer Menge mit n Elementen sind 2^{n-1} Teilmengen derart ausgewählt, dass jeweils drei dieser Teilmengen ein gemeinsames Element haben. Zeige, dass dann alle ausgewählten Teilmengen ein gemeinsames Element haben.

4. Beweise: Durchläuft n die Folge der natürlichen Zahlen, so durchläuft $[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}]$ die Folge der natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Quadratzahlen.

2.2 Zweite Runde

1. Auf einem Feld eines nach allen Seiten unendlichen „Schachbretts" steht ein Springer. Auf dem Brett steht sonst keine Schachfigur. Auf wieviel verschiedenen Feldern kann der Springer nach n Zügen stehen? Das Ergebnis ist herzuleiten.

2. Beweise: Unter 79 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens stets eine, deren Quersumme durch 13 teilbar ist. Zeige durch ein Gegenbeispiel, dass sich hierbei die Zahl 79 nicht durch die Zahl 78 ersetzen Lässt.

3. Das arithmetische Mittel zweier verschiedener natürlicher Zahlen x und y ist eine zweistellige Zahl. Sie geht in das geometrische Mittel von x und y über, wenn man ihre Ziffern vertauscht.
   a) Bestimme x und y.
   b) Weise nach, dass die Aufgabe a) bis auf die Reihenfolge von x und y genau ein Lösungspaar hat, wenn die Basis g des benutzen Stellenwertsystems 10 ist, dass es dagegen für $g = 12$ keine Lösung gibt.
   c) Gib weitere Grundzahlen g an, für die die Aufgabe a) lösbar ist, und solche, für die sie unlösbar ist.

4. An einem Schachturnier nehmen p Personen teil ($p > 2$), bei dem jeder Spieler mit jedem anderen Spieler nur einmal zu spielen hat. Nachdem n Spiele gespielt sind, ist folgende Situation eingetreten: Kein Spiet ist im Gang, und in jeder Teilmenge von drei Spielern können mindestens einmal zwei Spieler gefunden werden, die noch nicht miteinander gespielt haben. Zeige: $n \leq \frac{p^2}{4}$.

3 Aufgaben 1972/73

3.1 Erste Runde

1. Eine natürliche Zahl besitzt eine tausendstellige Darstellung im Dezimalsystem, bei der höchstens eine Ziffer von 5 verschieden ist. Man zeige, dass sie keine Quadratzahl ist.

2. Von den Punkten A und B eines ebenen Sees kann man in geradliniger Fahrt jeden Punkt des Sees erreichen. Es ist zu zeigen, dass man von jedem Punkt der Strecke AB aus ebenfalls jeden Punkt des Sees geradlinig erreichen kann.

3. Gegeben sind n Ziffern a_1 bis a_n in vorgesehener Reihenfolge. Gibt es eine natürliche Zahl, bei der die Dezimalbruchentwicklung ihrer Quadratwurzel hinter dem Komma gerade mit diesen Ziffern in der vorgeschriebenen Reihenfolge beginnt? Das Ergebnis ist zu begründen.

4. Um einen runden Tisch sitzen n Personen, die Anzahl derjenigen Personen, die das gleiche Geschlecht haben wie die Person zu ihrer Rechten, ist gleich der Anzahl der Personen, für die das nicht gilt. Man beweise, dass n durch 4 teilbar ist.

3.2 Zweite Runde

1. In einem Quadrat mit der Seite 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Innern eines Kreises mit Radius 1 liegen.

2. Mit einer im Zehnersystem geschriebenen positiven ganzen Zahl darf man folgende Operationen vornehmen:
   a) am Ende der Zahl 4 anhängen,

b) am Ende der Zahl 0 anhängen,

c) die Zahl durch 2 teilen, wenn sie gerade ist.

Man zeige, dass man, ausgehend von 4, jede positive ganze Zahl erreichen kann durch eine Folge der Operationen a, b, c.

3. Zum Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formats 2 mal 2 und solche des Formats 4 mal 1 verwendet worden. Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.

4. Man beweise: Für jede positive ganze Zahl n gibt es eine im Dezimalsystem n-stellige Zahl aus den Ziffern 1 und 2, die durch 2^n teilbar ist.

   Gilt dieser Satz auch in einem Stellenwertsystem der Basis 4 bzw. 6?

4 Aufgaben 1973/74

4.1 Erste Runde

1. Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen befinden sich unter allen konvexen Formen eines Gelenkvierecks auch Trapeze?

2. Im Innern eines Quadrats mit der Seitenlänge 2 liegen 7 Vielecke vom Flächeninhalt 1. Man zeige, dass es darunter 2 Vielecke gibt, die sich in einer Fläche von mindestens dem Inhalt $\frac{1}{7}$ überschneiden.

3. M sei eine Menge mit n Elementen, P sei die Menge aller echten und unechten Teilmengen von M. Wie groß ist die Anzahl der Paare (A, B), wenn $A \in P$ und $B \in P$ und A echte oder unechte Teilmenge von B ist?

4. In einem konvexen Vieleck sind alle Diagonalen gezogen. Man beweise: Jede Seite und jede Diagonale können so mit einem Pfeil versehen werden, dass in Pfeilrichtung kein geschlossener Weg aus Seiten und Diagonalen möglich ist.

4.2 Zweite Runde

1. In einer Ebene sind 25 Punkte so gegeben, dass von irgend drei dieser Punkte stets zwei ausgewählt werden können, deren Entfernung kleiner als 1 ist. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten 13 gibt, die man durch eine Kreisscheibe vom Radius 1 überdecken kann.

   Man beweise auch eine Verallgemeinerung dieses Satzes.

2. Von 30 gleich aussehenden Kugeln haben 15 das Gewicht a und 15 das Gewicht $b (b \neq a)$. Sie sollen nach unterschiedlichem Gewicht sortiert werden. Ein damit beauftragter Sortierer legt zwei Haufen von je 15 Kugeln vor und behauptet, die leichteren von den schwereren Kugeln getrennt zu haben.

   Wie kann man mit möglichst wenigen Wägungen auf einer zweischaligen Waage überprüfen, ob die Sortierung richtig ist?

3. In einem Halbkreis H vom Radius 1 über dem Durchmesser AB ist der Kreis K_1 vom Radius $\frac{1}{2}$ einbeschrieben. Eine Folge verschiedener Kreise $K_1, K_2, \ldots$ mit den Radien $r_1, r_2, \ldots$ ist dadurch definiert, dass für jede positive ganze Zahl n der Kreis K_{n+1} den Halbkreis H, die Strecke AB und den Kreis K_n berührt.

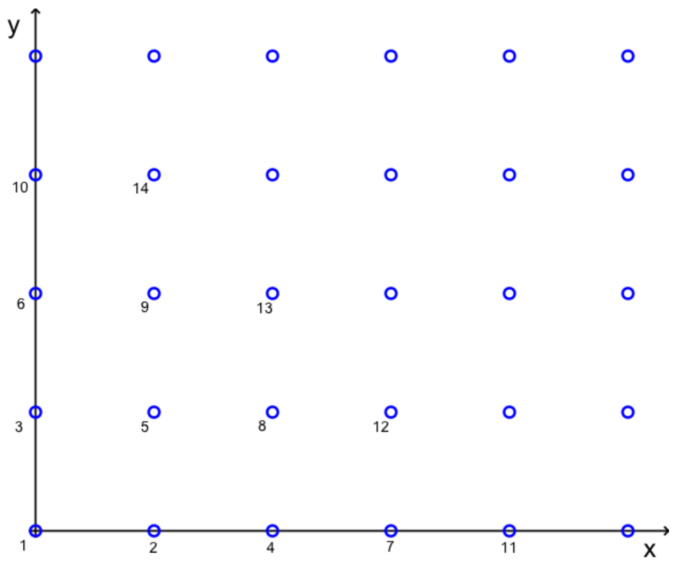
   Man beweise, dass $a_n = \frac{1}{r_n}$ für $n = 1, 2, \ldots$ ganzzahlig ist, und zwar eine Quadratzahl, wenn n gerade, und das Doppelte einer Quadratzahl, wenn n ungerade ist.

4. Peter und Paul spielen um Geld. Sie bestimmen der Reihe nach bei jeder positiven ganzen Zahl deren größten ungeraden Teiler. Liegt dieser um 1 über einem ganzzahligen Vielfachen von 4, dann zahlt Peter an Paul eine DM, andernfalls Paul an Peter eine DM. Nach einiger Zeit brechen sie ab und machen Bilanz. Es ist nachzuweisen, dass Paul gewonnen hat.

5 Aufgaben 1975

5.1 Erste Runde

1. In einem ebenen Koordinatensystem werden die Punkte mit nicht-negativen ganzzahligen Koordinaten gemäß der Figur nummeriert. Z.B. hat der Punkt $(3|1)$ die Nummer 12.



   Welche Nummer hat der Punkt $(x|y)$?

2. Man zeige, dass jedes konvexe Vielflach mindestens zwei Flächen mit gleicher Anzahl der Kanten besitzt.

3. Welche Vierecke mit aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen besitzen zugleich einen Inkreis und einen Umkreis?

4. In Sikinien, wo es nur endlich viele Städte gibt, gehen von jeder Stadt drei Straßen aus, von denen jede wieder in eine sikinische Stadt führt; andere Straßen gibt es dort nicht. Ein Tourist startet in der Stadt A und fährt nach folgender Regel: Er wählt in der nächsten Stadt die linke Straße der Gabelung, in der übernächsten die rechte Straße, dann wieder die linke und so weiter, immer abwechselnd. Man zeige, dass er schließlich nach A zurückkommt.

5.2 Zweite Runde

1. a, b, c, d seien verschiedene positive reelle Zahlen. Man beweise: Liegt zwischen a und b mindestens eine der Zahlen c und d oder zwischen c und d mindestens eine der Zahlen a und b, so ist

$$(*) \quad \sqrt{(a+b)(c+d)} > \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

   Andernfalls können die vier Zahlen so gewählt werden, dass $(*)$ falsch ist.

2. Man zeige, dass keine der Zahlen der Folge $10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$ eine Primzahl ist.

3. Es sei $a_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ das arithmetische, $g_n = \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_n}$ das geometrische Mittel der positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

   Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet: Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl so ist $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

   Man beweise S_2 und widerlege S_n mindestens für alle geraden $n > 2$.

4. Zwei Brüder haben n Goldstücke vom Gesamtgewicht $2n$ geerbt. Die Gewichte der Stücke sind ganzzahlig, und das schwerste Stück ist nicht schwerer als alle übrigen Stücke zusammen. Man zeige, dass die Brüder ihr Erbe in zwei gleichschwere Teilmengen aufteilen können, falls n gerade ist.

6 Aufgaben 1976

6.1 Erste Runde

1. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten heißen Gitterpunkte. Im Raum sind neun Gitterpunkte $P_1, P_2, \ldots P_9$ beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Strecken P_iP_j $(1 \leq i < j \leq 9)$ ebenfalls ein Gitterpunkt ist.

2. Jede von zwei Gegenseiten eines konvexen Vierecks ist in sieben gleiche Teile geteilt. Die Verbindungsstrecken entsprechender Teilungspunkte teilen das Viereck in sieben Vierecke. Man beweise, dass der Flächeninhalt von mindestens einem dieser Vierecke $= \frac{1}{7}$ des Flächeninhalts des ganzen Vierecks ist.

3. Eine Menge S von positiven rationalen Zahlen ist durch ein Baumdiagramm so geordnet, dass jedes Element $\frac{a}{b}$ (a und b tellerfremde natürliche Zahlen) genau die beiden Nachfolger $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{b}{a+b}$ erhält. Wie müssen a und b für das Anfangselement gewählt werden, damit S die Menge aller rationalen Zahlen r mit $0 < r < 1$ ist? Man gebe ein Verfahren zur Bestimmung der Schritte vom Anfangselement bis zu dem Element $\frac{p}{q}$ an.

4. In einer Ebene sind n verschiedene Punkte $(n > 2)$ gegeben. Jeder dieser Punkte ist mit mindestens einem der anderen durch eine Strecke verbunden, und keine dieser Verbindungsstrecken überschneidet eine andere.

   Man beweise, dass es höchstens $3n - 6$ derartige Verbindungsstrecken gibt.

6.2 Zweite Runde

1. Man beweise, dass $1^n + 2^n + \ldots + n^n$ durch n^2 teilbar ist, wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist.

2. In einer Ebene liegen zwei kongruente Quadrate Q und Q'. Sie sollen so in Teilstücke $T_1, T_2 \ldots T_n$ bzw. $T'_1, T'_2, \ldots T'_n$ zerschnitten werden dass T_i durch eine Parallelverschiebung V_i in T'_i übergeführt werden kann für $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Eine Kreisfläche ist in $2n$ gleiche Bögen geteilt, und $P_1, P_2, \ldots, P_{2n}$ ist irgendeine Permutation der Teilpunkte. Man beweise, dass der geschlossene Streckenzug $P_1P_2 \ldots P_{2n}P_1$ mindestens ein Paar paralleler Strecken besitzt.

4. Jeder Punkt des dreidimensionalen euklidischen Raums wird entweder rot oder blau eingefärbt. Man weise nach, dass es unter den in diesem Raum möglichen Quadraten mit der Seitenlänge 1 wenigstens eines mit drei roten Eckpunkten oder wenigstens eines mit vier blauen Eckpunkten gibt.

7 Aufgaben 1977

7.1 Erste Runde

1. Unter 2000 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen befinden sich je zur Hälfte gerade und ungerade Zahlen. Die Summe aller Zahlen ist kleiner als 3 000 000.

   Man zeige, dass mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar ist.

2. Ein Käfer krabbelt auf den Kanten einer n-seitigen Pyramide. Sein Weg beginnt und endet im Mittelpunkt A einer Grundkante. Unterwegs durchläuft er jeden Punkt höchstens einmal. Wie viele verschiedene Wege stehen ihm zur Verfügung? (Zwei Wege gelten hierbei als gleich, wenn sie aus denselben Punkten bestehen.)

   Man zeige, dass die Summe der Eckenanzahlen aller dieser Wege $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ ist.

3. Die Zahl 50 sei als Summe nicht unbedingt verschiedener positiver ganzer Zahlen dargestellt. Das Produkt dieser Zahlen ist durch 100 teilbar. Wie groß kann das Produkt höchstens sein?

4. In einem Sehnenviereck sind von den Seitenmitten die Lote auf die Gegenseiten gefällt. Man zeige, dass diese Lote durch einen Punkt gehen.

7.2 Zweite Runde

1. Gibt es zwei unendliche, aus nicht-negativen Zahlen bestehende Mengen A und B, so dass jede nicht-negative ganze Zahl auf genau eine Weise als Summe einer zu A gehö- rigen und einer zu B gehörigen Zahl geschrieben werden kann?

2. In einer Ebene sind drei nicht kollineare Punkte A, B, C gegeben. Mit Hilfe einer gegebenen beweglichen Kreisscheibe, mit der man die drei Punkte zugleich bedecken kann und deren Durchmesser vom Durchmesser des Kreises durch A, B, C verschieden ist, soll die vierte Ecke des Parallelogramms $ABCD$ konstruiert werden. (Die Kreisscheibe wird als Kurvenlineal benutzt, indem man sie an zwei Punkte anlegt. Punkte sind entweder gegeben oder entstehen als Schnittpunkte von mit dem Kurvenlineal gezeichneten Kreisen).

3. Man zeige, dass es unendlich viele positive ganze natürliche Zahlen a gibt, die man nicht in der Form $a = a_1^6 + a_2^6 + \ldots + a_7^6$ darstellen kann, wobei $a_1, a_2, \ldots a_7$ positive ganze Zahlen sind.

   Man beweise auch eine Verallgemeinerung.

4. Die Funktion f ist auf der Menge D aller von 0 und 1 verschiedenen rationalen Zahlen definiert und erfüllt für jedes $x \in D$ die Gleichung $f(x) + f(1 - \frac{1}{x}) = x$. Man bestimme f.

8 Aufgaben 1978

8.1 Erste Runde

1. Die Gangart eines Springers beim Schachspiel wird so geändert, dass er statt der üblichen Bewegung um 1 und 2 Felder in zueinander senkrechten Richtungen eine solche um p und q Felder ausführt. Das Schachbrett sei dabei nach allen Seiten unbegrenzt. Nach n Zügen steht der Springer wieder auf dem Ausgangsfeld. Man beweise, dass n stets eine gerade Zahl ist.

2. Ein Satz von n^2 Spielmarken besteht aus je n Stück mit den Aufschriften "1", "2", "3", ..., "n". Kann man sie alle so in gerader Linie aufreihen, dass immer zwischen einer Marke mit der Aufschrift "x" und der nächsten Marke mit der Aufschrift "x" genau x Marken mit von "x" verschiedener Aufschrift liegen und das für alle $x \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$?

3. Unter der Restsumme $r(n)$ einer positiven ganzen Zahl n versteht man die Summe aller Reste, die bei Division von n durch die natürlichen Zahlen von 1 bis n entstehen.

   Man zeige: Ist von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen die größere eine Zweierpotenz, so haben beide Zahlen die gleiche Restsumme.

4. Im Dreieck ABC wird A an B nach A_1, B an C nach B_1 und C an A nach C_1 gespiegelt. Man konstruiere das Dreieck ABC, falls nur die Punkte A_1, B_1, C_1 gegeben sind.

8.2 Zweite Runde

1. a, b und c seien die Seitenlängen eines Dreiecks. Weiter sei $R = a^2 + b^2 + c^2$ und $S = (a + b + c)^2$. Man beweise, dass stets gilt $\frac{1}{3} \leq \frac{R}{S} < \frac{1}{2}$ und dass sich dabei die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht durch eine kleinere ersetzen lässt.

2. Im Innern eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 1 sind sieben beliebige Punkte gewählt. Zusammen mit den Ecken des Quadrats bilden sie eine Menge M von elf Punkten. Betrachtet werden nun alle Dreiecke, deren Ecken zu M gehören.

   a) Man beweise: Mindestens eines dieser Dreiecke hat einen Flächeninhalt, der höchstens $\frac{1}{16}$ beträgt.

   b) Man gebe ein Beispiel, bei dem die sieben Punkte so gewählt sind, dass keine vier von ihnen auf einer Geraden liegen und der Flächeninhalt eines jeden der betrachteten Dreiecke mindestens $\frac{1}{16}$ beträgt.

3. Sünn und Tacks benutzen zu einem Spiel, das über mehrere Runden geht, folgende Wörter: Bad, Binse, Käfig, Kosewort, Maitag, Name, Pol, Parade, Wolf. Zwei Wörter gelten als verträglich miteinander, wenn sie genau einen Konsonanten gemeinsam haben. In der ersten Runde bestimmt Sünn für sich und für Tacks je eines der neun Wör- ter als Startwort. In jeder weiteren Runde nennt zuerst Sünn ein Wort, das mit seinem Wort aus der vorhergehenden Runde verträglich ist, darauf nennt Tacks seinerseits ein mit seinem Wort aus der vorhergehenden Runde verträgliches Wort. Tacks hat gewonnen, wenn in der Folge der abwechselnd von Sünn und Tacks genannten Wörter zwei unmittelbar benachbarte Wörter gleich sind.

   a) Man zeige, dass Tacks bei geschicktem Spiel immer gewinnt. Wie viele Runden sind dazu höchstens nötig?

   b) Auf Wunsch von Sünn wird das Wort "Käfig"durch das Wort "Feige" ersetzt. Man zeige, dass nun Tacks nicht mehr gewinnen kann, falls Sünn die Startwörter geeignet wählt und geschickt spielt.

4. Die Darstellung einer Primzahl im Zehnersystem habe die Eigenschaft, dass jede Permutation der Ziffern wieder die Dezimaldarstellung einer Primzahl ergibt.

   Man zeige, dass bei jeder möglichen Anzahl der Stellen höchstens drei verschiedene Ziffern in der Dezimaldarstellung vorkommen.

   Man beweise auch eine Verschärfung dieses Satzes.

9 Aufgaben 1979

9.1 Erste Runde

1. Einer Fußball-Liga gehören n Vereine an. Eine Spielrunde umfasst die Gesamtheit aller Spiele, bei denen jeder Verein genau einmal gegen jeden anderen spielt. Wie viele Spielwochen sind für die

Durchführung der Spielrunde mindestens erforderlich, wenn jeder Verein wöchentlich höchstens ein Spiel gegen einen der anderen Vereine austrägt?

Man gebe ein Verfahren zur Aufstellung eines Spielplans an.

2. Die Ecken zweier verschiedener Quadrate sind gegen den Uhrzeigersinn mit A_1, B_1, C_1, D_1 bzw. A_2, B_2, C_2, D_2 bezeichnet. Dabei ist $A_1 = A_2$.

   Man beweise, dass die Geraden $(B_1B_2), (C_1C_2)$ und (D_1D_2) einen Punkt gemeinsam haben.

3. Im Dezimalsystem gibt es zweistellige Zahlen, die sich so in zwei natürliche Faktoren zerlegen lassen, dass die beiden Faktoren und die beiden Ziffern der Zahl eine Menge aus vier aufeinanderfotgenden ganzen Zahlen bilden. (Beispiel: $12 = 3 \cdot 4$).

   Man bestimme alle derartigen Zahlen in allen Stellenwertsystemen.

4. Es sei a eine ganze Zahl, die nicht durch 5 teilbar ist.

   Man beweise, dass das Polynom $f(x) = x^5 - x + a$ nicht als Produkt zweier Polynome positiven Grades mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden kann.

9.2 Zweite Runde

1. Jeder Punkt der Ebene sei rot oder blau gefärbt. Man beweise, dass es dann ein Rechteck mit Eckpunkten gleicher Farbe gibt.

   Man beweise auch eine Verallgemeinerung.

2. Ein Kreis k mit Radius r und Mittelpunkt M sei fest vorgegeben. Welche Figur bilden die Inkreismittelpunkte aller stumpfwinkligen Dreiecke mit dem Umkreis k ?

3. Zu einem Turnier treten n Teilnehmer an, durchnummeriert von 0 bis $n-1$. Nach Abschluss des Wettkampfs stellt jeder Teilnehmer für seine Nummer s und seine Punktanzahl t fest: Genau t Teilnehmer haben s Punkte erreicht.

   Man gebe zu allen möglichen Lösungen für jeden Teilnehmer die Anzahl der erzielten Punkte an.

4. $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sei eine unendliche Folge natürlicher Zahlen in Dezimaldarstellung. Für jeden Index i gelte: Die letzte Ziffer von p_{i+1} - also die Einerziffer - ist von 9 verschieden; streicht man sie, so erhalt man p_i.

   Man zeige, dass die Folge unendlich viele zusammengesetzte Zahlen enthält.

10 Aufgaben 1980

10.1 Erste Runde

1. Eine Tafel besteht aus sechs nebeneinanderliegenden Feldern. Zwei Spieler A und B tragen abwechselnd so lange je eine der Ziffern $0, 1, 2, \ldots 9$ in ein beliebiges noch freies Feld ein, bis alle Felder besetzt sind; dabei dürfen verschiedene Felder mit derselben Ziffer belegt werden. A fängt an. Nachdem B eine Ziffer in das letzte freie Feld eingetragen hat, werden die sechs aneinandergereihten Ziffern als Dezimaldarstellung einer ganzen Zahl z gedeutet. B hat gewonnen, wenn z durch eine vorher vereinbarte natürliche Zahl n teilbar ist. Für welche natürlichen Zahlen n zwischen 1 und 20 kann B durch geschicktes Spiel den Gewinn erzwingen, für welche nicht ?

2. Im Dreieck ABC schneiden die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei A und B die jeweils gegenüberliegenden Dreieckseiten in D bzw. E. P liege auf der Verbindungsgeraden von D und E. Man beweise, dass der Abstand des Punktes P von der Geraden (AB) gleich der Summe oder Differenz seiner Abstände von (BC) und von (CA) ist.

3. In der Ebene sind $2n + 3$ $(n \in \mathbb{N})$ Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Man zeige, dass es einen Kreis durch drei der Punkte gibt, so dass von den übrigen $2n$ Punkten n innerhalb und n außerhalb dieses Kreises liegen.

4. Gegeben sei die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_n = \frac{1}{n(n1+1)}$ für alle Indizes n. Auf wie viele verschiedene Weisen lässt sich der Bruch $\frac{1}{1980}$ als Summe endlich vieler aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge darstellen?

10.2 Zweite Runde

1. Man beweise: Ist nicht jede der beiden natürlichen Zahlen a und b eine Kubikzahl, so ist $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ irrational.

2. P sei eine Menge von n Primzahlen. M sei eine Menge von mehr als n natürlichen Zahlen, die alle keine Quadratzahlen sind und von denen keine einen Primfaktor hat, der nicht in P enthalten ist. Man beweise, dass es stets eine nicht-leere Teilmenge T von M gibt, bei der das Produkt aller ihrer Elemente eine Quadratzahl ist.

3. Im Dreieck ABC sei P ein Punkt auf der Seite AB, Q ein Punkt auf der Seite BC und R ein Punkt auf der Seite AC. P, Q und R seien nicht Ecken des Dreiecks. Betrachtet werden die Kreise durch A, P und R, durch B, P und Q und durch Q, C und R.

   Man beweise, dass die Mittelpunkte dieser drei Kreise die Ecken eines zum Dreieck ABC ähnlichen Dreiecks sind.

4. Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ist definiert durch

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & \text{falls } a_n - a_{n+1} \text{ gerade,} \\ a_{n+1} - a_n, & \text{falls } a_n - a_{n+1} \text{ ungerade.} \end{cases}$$

   Man beweise:

   a) Die Folge enthält unendlich viele positive und unendlich viele negative Glieder.

   b) Kein Glied der Folge ist gleich null.

   c) Ist $n = 2^k - 1$ $(k \in \{2, 3, 4, \ldots\})$, so ist a_n durch 7 teilbar.

11 Aufgaben 1981

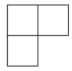
11.1 Erste Runde

1. Es seien a und n natürliche Zahlen und $s = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$.

   Man beweise: In der Dezimaldarstellung hat s dann und nur dann die Einerziffer 1, wenn auch a und n in ihrer Dezimaldarstellung beide die Einerziffer 1 haben.

2. Man beweise: Gilt für die Seitenlängen a, b, c eines nicht gleichseitigen Dreiecks die Beziehung $a + b = 2c$, dann ist die Verbindungsstrecke von Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt parallel zu einer Seite des Dreiecks.

3. Eine quadratische Flache der Seitenlänge 2^n ist schachbrettartig in Einheitsquadrate unterteilt. Eines dieser Einheitsquadrate wird entfernt. Man zeige, dass die verbleibende Fläche stets durch Platten der skizzierten Form, bestehend aus drei Einheitsquadraten, lückenlos und überschneidungsfrei bedeckt werden kann.



4. Man beweise: Wenn p eine Primzahl ist, dann lässt sich $2^p + 3^p$ nicht in der Form n^k mit natürlichen Zahlen n und k $(k > 1)$ darstellen.

11.2 Zweite Runde

1. Eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ hat folgende Eigenschaft: a_1 ist eine natürliche Zahl, und es gilt $a_{n+1} = [1,5a_n] + 1$ für alle Indizes n. Kann man a_1 so wählen, dass die ersten 100 000 Glieder der Folge alle gerade sind und das 100 001-te Glied ungerade ist ?

2. Durch eine bijektive Abbildung der Ebene auf sich werde jeder Kreis in einen Kreis übergeführt.

   Man beweise, dass eine solche Abbildung jede Gerade in eine Gerade überführt.

3. Es sei k eine positive ganze Zahl und $n = 2^{k-1}$. Man beweise: Aus $2n-1$ natürlichen Zahlen lassen sich stets n Zahlen so auswählen, dass deren Summe durch n teilbar ist.

4. M sei eine nicht-leere Menge positiver ganzer Zahlen, die mit jedem Element x auch $4x$ und $[\sqrt{x}]$ enthält. Man beweise, dass jede positive ganze Zahl zu M gehört.

12 Aufgaben 1982

12.1 Erste Runde

1. S sei die Summe der größten ungeraden Teiler der 2^n natürlichen Zahlen von 1 bis 2^n.

   Man beweise: $3 \cdot S = 4^n + 2$.

2. In einem konvexen Viereck $ABCD$ seien die Seiten AB und DC je in m gleiche Teile geteilt. Die Teilungspunkte auf AB seien von A aus der Reihe nach mit $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$ bezeichnet, die auf DC von D aus mit $T_1, T_2, \ldots T_{m-1}$.

   Ebenso seien die Gegenseiten BC und AD von B und A aus durch die Punkte $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ bzw. $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ je in n gleiche Teile unterteilt.

   Man beweise: Jede der Strecken S_iT_i $(1 \le i \le m-1)$ wird von den Strecken $U_jV_j (1 \le j \le n-1)$ in gleichlange Teilstrecken unterteilt.

3. In der Ebene ist ein konvexes 1982-Eck gegeben. Es werden alle Dreiecke betrachtet, deren Ecken zugleich Eckpunkte dieses Vielecks sind. Ein Punkt P der Ebene liege auf keiner der Seiten dieser Dreiecke.

   Man beweise, dass die Anzahl der betrachteten Dreiecke, die P im Innern enthalten, gerade ist.

4. Eine Menge reeller Zahlen heißt *summenfrei*, wenn sie keine Elemente x, y, z mit der Eigenschaft $x + y = z$ enthält.

   Eine summenfreie Teilmenge von $\{1, 2, 3, ..., 2n + 1\}$ enthalte k Elemente. Man bestimme den maximalen Wert für k.

12.2 Zweite Runde

1. Ein Schüler dividiert die natürliche Zahl p durch die natürliche Zahl q ($q \leq 100$). Irgendwo in der Dezimalentwicklung hinter dem Komma treten die Ziffern 1, 9, 8, 2 hintereinander auf.

   Man zeige, dass der Schüler sich verrechnet hat.

2. Kann man jedes beliebige Dreieck ABC durch senkrechte Projektion auf eine Ebene in ein gleichseitiges Dreieck $A'B'C'$ überführen ?

3. Für die nicht negativen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ gelte $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 1$. Man beweise, dass dann der Term

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \ldots + a_n} + \ldots + \frac{a_n}{1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}$$

   ein Minimum besitzt, und berechne es.

4. Für die positive ganze Zahl n sei $4^n + 2^n + 1$ eine Primzahl.

   Man beweise, dass n eine Dreierpotenz ist.

13 Aufgaben 1983

13.1 Erste Runde

1. Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weißen Sechsecken zusammen. An die Seiten eines jeden Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, während an die Seiten eines jeden Sechsecks abwechselnd Fünfecke und Sechsecke grenzen. Man bestimme aus diesen Angaben über den Fußball die Anzahl seiner Fünfecke und seiner Sechsecke.

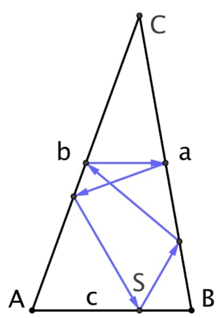
2. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.

3. Eine reelle Zahl heißt *dreisam*, wenn sie eine Dezimaldarstellung besitzt, in der keine von 0 und 3 verschiedene Ziffer vorkommt. Man beweise, dass sich jede positive reelle Zahl als Summe von neun dreisamen Zahlen darstellen lässt.

4. Es sei g eine Gerade und n eine vorgegebene positive ganze Zahl. Man beweise, dass sich stets n verschiedene Punkte auf g sowie ein nicht auf g liegender Punkt derart wählen lassen, dass die Entfernung je zweier dieser $n + 1$ Punkte ganzzahlig ist.

13.2 Zweite Runde

1. Die Figur zeigt einen dreieckigen Billardtisch mit den Seiten a, b und c. Im Punkt S auf c befindet sich eine - als punktförmig anzunehmende - Kugel.



Nach Anstoß durchläuft sie, wie in der Figur angedeutet, infolge Reflexion an a, b, a, b und c (in S) immer wieder dieselbe Bahn. Die Reflexion erfolgt nach dem Reflexionsgesetz.

Man charakterisiere die Gesamtheit aller Dreiecke ABC, die eine solche Bahn zulassen, und bestimme die Lage von S.

2. Zwei Personen A und B machen folgendes Spiel: Sie nehmen aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 1024\}$ abwechselnd 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 Zahlen weg, wobei A zuerst 512 Zahlen wegnimmt, B dann 256 usw. Es bleiben zwei Zahlen a, b stehen ($a < b$). B zahlt an A den Betrag $b - a$. A möchte möglichst viel gewinnen, B möglichst wenig verlieren. Welchen Gewinn erzielt A, wenn jeder Spieler seiner Zielsetzung entsprechend optimal spielt? Das Ergebnis ist zu begründen.

3. Im Innern eines Fünfecks liegen k Punkte. Sie bilden zusammen mit den Eckpunkten des Fünfecks eine $(k + 5)$-elementige Menge M. Die Fläche des Fünfecks sei durch Verbindungslinien zwischen den Punkten von M derart in Teilflachen zerlegt, dass keine Teilflache in ihrem Innern einen Punkt von M enthält und auf dem Rand jeder Teilfläche genau drei Punkte von M liegen. Keine der Verbindungslinien hat mit einer anderen Verbindungslinie oder Fünfeckseite einen Punkt gemeinsam, der nicht zu M gehört.

   Kann bei einer solchen Zerlegung des Fünfecks von jedem Punkt von M eine gerade Anzahl von Verbindungslinien (hierzu zählen auch die Fünfeckseiten) ausgehen? Die Antwort ist zu begründen.

4. Für eine Folge $f(0), f(1), f(2), \ldots$ gilt: $f(0) = 0$ und $f(n) = n - f(f(n-1))$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

   Man gebe eine Formel an, mit deren Hilfe man für jede natürliche Zahl n den Wert $f(n)$ unmittelbar aus n und ohne Berechnung vorangegangener Folgenglieder bestimmen kann.

14 Aufgaben 1984

14.1 Erste Runde

1. Es sei n eine positive ganze Zahl und $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zwei Personen A und B spielen in folgender Weise: A schreibt eine Ziffer aus M auf, B hängt eine Ziffer aus M an, und so wird abwechselnd je eine Ziffer aus M angehängt, bis die $2n$-stellige Dezimaldarstellung einer Zahl entstanden ist. Ist diese Zahl durch 9 teilbar, gewinnt B, andernfalls gewinnt A.

   Für welche n kann A, für welche n kann B den Gewinn erzwingen?

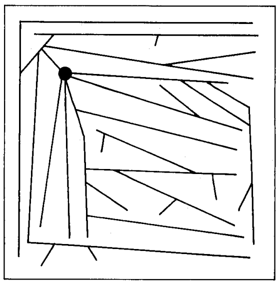
2. Gegeben sei ein regelmäßiges n-Eck mit dem Umkreisradius 1. L sei die Menge der (verschiedenen) Längen aller Verbindungsstrecken seiner Endpunkte.

   Wie groß ist die Summe der Quadrate der Elemente von L?

3. Es seien a und b positive ganze Zahlen. Man zeige: Ist $a \cdot b$ gerade, dann gibt es positive ganze Zahlen c und d mit $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$; ist dagegen $a \cdot b$ ungerade, so gibt es keine solchen positiven ganzen Zahlen c und d.

4. In einem quadratischen Feld der Seitenlänge 12 befindet sich eine Quelle, die ein System von geradlinigen Bewässerungsgräben speist. Dieses ist so angelegt, dass für jeden Punkt des Feldes der Abstand zum nächsten Graben höchstens 1 beträgt. Dabei ist die Quelle als Punkt und sind die Gräben als Strecken anzusehen.

   Es ist nachzuweisen, dass die Gesamtlänge der Bewässerungsgräben größer als 70 ist.



Die Skizze zeigt ein Beispiel für ein Grabensystem der angegebenen Art.

14.2 Zweite Runde

1. Die natürlichen Zahlen n und z seien teilerfremd und größer als 1. Für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ sei $s(k) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^k$. Man beweise:
   a) Mindestens eine der Zahlen $s(k)$ ist durch n teilbar.
   b) Sind auch n und $z - 1$ teilerfremd, so ist schon eine der Zahlen $s(k)$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ durch n teilbar.

2. Man bestimme alte beschränkten abgeschlossenen Teilmengen F der Ebene mit folgender Eigenschaft: F besteht aus mindestens zwei Punkten und enthält mit je zwei Punkten A, B stets auch mindestens einen der beiden Halbkreisbögen über der Strecke AB. Erläuterung: Eine Teilmenge der F der Ebene heißt abgeschlossen, wenn gilt: Zu jedem Punkt P der Ebene, der nicht Element von F ist, gibt es eine (nicht ausgeartete) Kreisscheibe mit Mittelpunkt P, die keine Elemente von F enthält.

3. Die Folgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ genügen für alle positiven ganzen Zahlen n der folgenden Rekursion:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - b_n \text{ und } b_{n+1} = 2b_n, \text{ falls } a_n \geq b_n, \\ a_{n+1} &= 2a_n \text{ und } b_{n+1} = b_n - a_n, \text{ falls } a_n < b_n. \end{aligned}$$

   Für welche Paare (a_1, b_1) von positiven reellen Anfangsgliedern gibt es einen Index k mit $a_k = 0$?

4. Eine Kugel wird von allen vier Seiten eines räumlichen Vierecks berührt.

   Man beweise, dass alle vier Berührpunkte in ein und derselben Ebene liegen.

15 Aufgaben 1985

15.1 Erste Runde

1. Vierundsechzig Spielwürfel gleicher Größe mit den Augenzahlen "Eins" bis "Sechs" werden auf einen Tisch geschüttet und zu einem Quadrat mit acht waagerechten und acht senkrechten Würfelreihen zusammengeschoben. Durch Drehen der Würfel, unter Beibehaltung ihres Platzes, soll erreicht werden, dass schließlich bei alten vierundsechzig Würfeln die "Eins" nach oben zeigt. Die Würfel dürfen jedoch nicht einzeln gedreht werden, sondern es ist nur erlaubt, jeweils alle acht Würfel einer waagerechten oder senkrechten Reihe gemeinsam um 90° um die Längsachse dieser Reihe zu drehen. Man beweise, dass es stets möglich ist, die Würfel durch mehrfaches Anwenden der erlaubten Drehungsart in die geforderte Endlage zu bringen.

2. Man beweise, dass in jedem Dreieck für jede seiner Höhen gilt: Projiziert man den Fußpunkt der Höhe senkrecht auf die beiden anderen Höhen und die zugehörigen Seiten, so liegen die vier Bildpunkte auf einer Geraden.

3. Ausgehend von der Folge $F_1 = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ der positiven ganzen Zahlen werden weitere Folgen $F_2, F_3, F_4, \ldots$ nach folgender Vorschrift gebildet: F_{n+i} entsteht aus F_n, indem unter Beibehaltung der Reihenfolge zu den durch n teilbaren Gliedern von F_n jeweils 1 addiert wird, während die übrigen Glieder unverändert übernommen werden.

   So erhält man z.B.: $F_2 = (2, 3, 4, 5, \ldots)$ und $F_3 = (3, 3, 5, 5, \ldots)$. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass genau die ersten $n-1$ Glieder von F_n den Wert n haben.

4. Jeder Punkt des dreidimensionalen Raumes wird mit genau einer der Farben Rot, Grün, Blau gefärbt. Die Mengen R bzw. G bzw. B bestehen aus den Längen derjenigen Strecken im Raum, deren Endpunkte gleichfarbig rot bzw. grün bzw. blau gefärbt sind.

   Man zeige, dass mindestens eine dieser drei Mengen alle nicht-negativen reellen Zahlen enthält.

15.2 Zweite Runde

1. Man beweise, dass keine der binär geschriebenen Zahlen $11, 111, 1111, \ldots$ eine Quadratzahl, Kubikzahl oder höhere Potenz einer natürlichen Zahl ist.

2. Die Inkugel eines beliebigen Tetraeders habe den Radius r. An diese Inkugel werden die vier Tangentialebenen parallel zu den Seitenflächen des Tetraeders gelegt. Sie schneiden vom Tetraeder vier kleinere Tetraeder ab, deren Inkugelradien r_1, r_2, r_3 und r_4 seien.

   Man beweise: $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2r$.

3. Von einem Punkt im Raum gehen n Strahlen aus, wobei der Winkel zwischen je zwei dieser Strahlen mindestens 30° beträgt.

   Man beweise, dass n kleiner als 59 ist.

4. Bei einer Versammlung treffen sich 512 Personen. Unter je sechs dieser Personen gibt es immer mindestens zwei, die sich gegenseitig kennen.

   Man beweise, dass es auf dieser Versammlung sicher sechs Personen gibt, die sich alle gegenseitig kennen.

16 Aufgaben 1986

16.1 Erste Runde

1. Auf einem Kreis liegen n Punkte, $(n > 1)$. Sie sollen so mit $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ bezeichnet werden, dass der Streckenzug $P_1P_2P_3 \ldots P_n$ überschneidungsfrei ist. Auf wie viele Arten ist das möglich ?

2. Es sei a eine gegebene natürliche Zahl und $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Folge mit $x_n = \frac{n}{n+a}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Man beweise, dass sich für jedes n aus $\mathbb{N}^*$ das Folgenglied x_n als Produkt zweier Glieder dieser Folge darstellen lässt, und bestimme die Anzahl der Darstellungen in Abhängigkeit von n und a.

3. Die Punkte S auf der Seite AB, T auf der Seite BC und U auf der Seite CA eines Dreiecks liegen so, dass folgendes gilt: $\overline{AS} : \overline{SB} = 1 : 2$, $\overline{BT} : \overline{TC} = 2 : 3$ und $\overline{CU} : \overline{UA} = 3 : 1$.

   Man konstruiere das Dreieck ABC, wenn lediglich die Punkte S, T und U gegeben sind.

4. Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ist definiert durch

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})\ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Man bestimme und beweise eine Formel, mit der man zu jeder natürlichen Zahl n das Folgenglied a_n unmittelbar berechnen kann, ohne vorausgehende Folgenglieder bestimmen zu müssen.

16.2 Zweite Runde

1. Die Kanten eines Würfels werden von 1 bis 12 durchnummeriert; dann wird für jede Ecke die Summe der Nummern der von ihr ausgehenden Kanten bestimmt.
   a) Man zeige, dass diese Summen nicht alle gleich sein können.
   b) Können sich acht gleiche Summen ergeben, nachdem eine der Kantennummern durch die Zahl 13 ersetzt wurde ?

2. Ein Dreieck habe die Seiten a, b, c, den Inkreisradius r und die Ankreisradien r_a, r_b, r_c. Man beweise:
   a) Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt: $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$.
   b) Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt: $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

3. Es sei d_n die letzte von 0 verschiedene Ziffer der Dezimaldarstellung von $n!$.

   Man zeige, dass die Folge $d_1, d_2, d_3, \ldots$ nicht periodisch ist.

4. Gegeben seien die endliche Menge M mit m Elementen und 1986 weitere Mengen $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{1986}$, von denen jede mehr als $\frac{m}{2}$ Elemente aus M enthält.

   Man zeige, dass nicht mehr als zehn Elemente markiert werden müssen, damit jede Menge M_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, 1986$) mindestens ein markiertes Element enthält.

17 Aufgaben 1987

17.1 Erste Runde

1. Es sei p eine Primzahl größer als 3 und n eine natürliche Zahl; außerdem habe p^n in der Dezimalschreibweise 20 Stellen.

   Man zeige, dass hierin mindestens eine Ziffer mehr als zweimal vorkommt.

2. Es sei n eine positive ganze Zahl und $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Eine Teilmenge T von M heiße *fett*, wenn kein Element von T kleiner ist als die Anzahl der Elemente von T. Die Anzahl der fetten Teilmengen von M werde mit $f(n)$ bezeichnet.

   Man entwickle ein Verfahren, mit dem sich $f(n)$ für jedes n bestimmen lässt, und berechne damit $f(32)$.

3. Gegeben sei ein konvexes Vieleck mit mindestens drei Ecken. Durch je drei aufeinanderfolgende Ecken wird jeweils ein Kreis gelegt. Man beweise, dass mindestens eine der dadurch entstandenen Kreisscheiben das Vieleck ganz überdeckt.

4. Vorgegeben seien n^3 Einheitswürfel ($n > 1$), die von 1 bis n^3 durchnummeriert sind. Alle diese Einheitswürfel werden zu einem Würfel der Kantenlänge n zusammengesetzt. In diesem Würfel heißen zwei Einheitswürfel benachbart, wenn sie mindestens eine Ecke gemeinsam haben. Als Abstand zweier benachbarter Würfel wird der Absolutbetrag der Differenz ihrer Nummern definiert.

Man denke sich für jede mögliche Zusammensetzung des großen Würfels den größten auftretenden Abstand benachbarter Würfel auf eine Tafel geschrieben. Was ist die kleinste Zahl, die auf dieser Tafel notiert wird ? (Beweis!)

17.2 Zweite Runde

1. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, für die gilt: $2^x + 3^y = z^2$.

2. Jede Kante eines konvexen VieIf lachs ist mit einer Richtung versehen und darf nur in dieser Richtung durchlaufen werden. Dabei gibt es zu jeder Ecke mindestens eine Kante, die zu ihr hinführt, und mindestens eine Kante, die von ihr wegführt.

   Man zeige, dass dann das Vielflach mindestens zwei Seitenflächen hat, die jeweils auf ihrem Rand umlaufen werden können.

3. Gegeben sind zwei Folgen natürlicher Zahlen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ und $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ mit

   $$a_{n+1} = n \cdot a_n \quad \text{und} \quad b_{n+1} = n \cdot b_n - 1 \quad \text{für jedes } n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

   Man zeige, dass es höchstens endlich viele Zahlen gibt, die beiden Folgen angehören.

4. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $1 < k \leq n$; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ seien k positive Zahlen, deren Summe gleich ihrem Produkt ist.

   a) Man zeige: $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_k^{n-1} \geq k \cdot n$.

   b) Welche zusätzlichen Bedingungen für k, n und $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ sind notwendig und hinreichend dafür, dass $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \ldots + x_k^{n-1} = k \cdot n$ gilt?

18 Aufgaben 1988

18.1 Erste Runde

1. Ein Quadrat sei schachbrettartig in n^4 Felder eingeteilt. Auf diese Felder werden n^3 Spielsteine gestellt, auf jedes höchstens einer. Dabei stehen in jeder Zeile gleich viele Steine. Außerdem ist die ganze Aufstellung symmetrisch zu einer der Diagonalen des Quadrats; diese Diagonale heiße d.

   Man beweise:

   a) Ist n ungerade, dann steht auf d mindestens ein Stein.

   b) Ist n gerade, dann gibt es eine Aufstellung der beschriebenen Art, bei der kein Stein auf d steht.

2. In einem Dreieck seien die Höhen mit h_a, h_b, h_c, der Inkreisradius mit r bezeichnet.

   Man beweise: Das Dreieck ist dann und nur dann gleichseitig ist, wenn $h_a + h_b + h_c = 9r$ ist.

3. Man beweise, dass jedes Achteck mit lauter rationalen Seitenlängen und lauter gleichen Innenwinkeln punktsymmetrisch ist.

4. Ausgehend von vier vorgegebenen ganzen Zahlen a_1, b_1, c_1, d_1 definiert man rekursiv für alle positiven ganzen Zahlen n:

   $$a_{n+1} := |a_n - b_n|, \quad b_{n+1} := |b_n - c_|, \quad c_{n+1} := |c_n - d_n|, \quad d_{n+1} := d_n - a_n|.$$

   Man beweise, dass es eine natürliche Zahl k gibt, für die alle Folgenglieder a_k, b_k, c_k, d_k den Wert null annehmen.

18.2 Zweite Runde

1. Für die natürlichen Zahlen x und y gelte $2x^2 + x = 3y^2 + y$.

   Man beweise, dass dann $x - y$, $2x + 2y + 1$ und $3x + 3y + 1$ Quadratzahlen sind.

2. Eine Kreislinie sei irgendwie durch $3k$ Punkte in je k Bögen der Längen 1, 2 und 3 aufgeteilt.

   Man beweise, dass stets zwei dieser Punkte sich diametral gegenüber liegen.

3. Man beweise: Alle spitzwinkligen Dreiecke mit gleicher Höhe h_c und gleich großem Winkel γ haben umfangsgleiche Höhenfußpunktdreiecke.

4. Gegeben ist die Gleichung $xyz = p^n \cdot (x + y + z)$, wobei p eine Primzahl größer als 3 und n eine positive ganze Zahl ist.

   Man zeige, dass diese Gleichung mindestens $3n + 3$ verschiedene Lösungen (x, y, z) mit positiven ganzen Zahlen x, y, z und $x < y < z$ besitzt.

19 Aufgaben 1989

19.1 Erste Runde

1. Es sei $f(x) = x^n$, wobei n eine positive ganze Zahl ist.

   Kann dann die Dezimalzahl $0, f(1)f(2)f(3)\dots$ rational sein? Die Antwort ist zu begründen.

   (Beispiel: Für $n = 2$ geht es um $0, 1\,4\,9\,16\,25\,\dots$, für $n = 3$ ist die betrachtete Zahl $0, 1\,8\,27\,64\,125\,\dots$)

2. Ein Trapez hat den Flächeninhalt 2m^2; seine Diagonalen sind zusammen 4m lang.

   Man bestimme die Höhe dieses Trapezes.

3. Man beweise: Wird ein ebenes konvexes Viereck in endlich viele überschneidungsfreie Vierecke zerschnitten, so ist mindestens eines dieser Vierecke konvex.

   Erläuterung: Eine ebene Figur heißt konvex, wenn sie mit je zwei ihrer Punkte stets auch deren gesamte Verbindungsstrecke enthält.

4. Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Man beweise:

   Die Gleichung $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ hat dann und nur dann eine Lösung (x, y) mit natürlichen Zahlen x, y, wenn n einen Teiler der Form $4k - 1$ besitzt ($k \in \mathbb{N}$).

   Hinweis: Die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen wird hier mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

19.2 Zweite Runde

1. Man gebe eine positive ganze Zahl k und ein Polynom $f(x)$ ($f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$, $a_k \neq 0$) mit folgenden Eigenschaften an:

   (1) Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ sind Elemente von $\{-1, 0, 1\}$.

   (2) Für jede positive ganze Zahl n ist $f(n)$ durch 30 teilbar.

   (3) Kein Polynom kleineren Grades hat ebenfalls beide Eigenschaften (1) und (2).

2. Man bestimme (mit Nachweis) alle Paare (a, b) reeller Zahlen, für welche die Ungleichung

$$\left|\sqrt{1 - x^2} - ax - b\right| \leq \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

   für alle $x \in [0; 1]$ gültig ist.

Erläuterung: $[0;1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

3. Auf jeder Seite eines Sehnenvierecks S wird nach außen ein Rechteck errichtet, wobei die eine Rechteckseite mit der Seite von S übereinstimmt und die andere Rechteckseite genau so lang wie die jeweilige Gegenseite im Sehnenviereck S ist.

   Man zeige, dass die Mittelpunkte dieser vier Rechtecke stets die Eckpunkte eines weiteren Rechtecks sind.

4. Jede Ecke eines regelmäßigen n-Ecks ($n \geq 3$) ist so mit einer natürlichen Zahl als *Eckenwert* versehen, dass jede dieser Zahlen ein Teiler der Summe seiner beiden Nachbarzahlen ist. Man betrachte zu je drei aufeinanderfolgenden Ecken mit den zugehörigen Eckenwerten a, b, c den Quotienten $\frac{a+b}{c}$.

   Es ist zu beweisen, dass der Mittelwert dieser n Quotienten nicht kleiner als 2, aber kleiner als 3 ist.

   Erläuterung: Unter den *Nachbarzahlen* werden dabei die Eckenwerte der beiden benachbarten Ecken verstanden.

20 Aufgaben 1990

20.1 Erste Runde

1. Es sei $f(x) = x^2 + 2bx + c$ mit ganzen Zahlen b und c. Man beweise:

   Gilt $f(n) \geq 0$ für alle ganzen Zahlen n, so gilt $f(x) \geq 0$ sogar für alle rationalen Zahlen x.

2. Von der Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ist bekannt:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}*\,.$$

   Es ist zu beweisen, dass alle Glieder dieser Folge Quadratzahlen sind.

3. Zwischen zwanzig Städten bestehen 172 direkte Flugverbindungen, die jeweils in beiden Richtungen benutzbar sind. Keine zwei von ihnen verbinden dieselben beiden Städte. Man weise nach, dass man von jeder Stadt in jede andere Stadt fliegen kann, ohne dabei mehr als einmal umzusteigen.

4. In einem Tetraeder sei jede Kante senkrecht zu ihrer Gegenkante. Man beweise, dass es eine Kugel gibt, auf der die Mittelpunkte aller sechs Kanten liegen.

   Erläuterung: Zwei Strecken AB und CD heißen senkrecht zueinander, wenn die durch A gezogene Parallele zu CD senkrecht auf AB steht.

20.2 Zweite Runde

1. Gesucht werden drei positive ganze Zahlen a, b, c, bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt. Man bestimme alle Lösungen.

2. Es bezeichne $A(n)$ die kleinste Anzahl verschiedener Punkte der Ebene mit folgender Eigenschaft: Für jedes $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ existiert mindestens eine Gerade, die genau k dieser Punkte enthält.

   Man beweise: $A(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+2}{2}\right]$.

3. Gegeben sind fünf nicht-negative Zahlen mit der Summe 1. Man beweise, dass man diese Zahlen so im Kreis anordnen kann, dass die Summe der fünf Produkte je zweier benachbarter Zahlen höchstens beträgt.

4. In der Ebene liegt ein Wurm der Länge 1. Man beweise, dass man ihn stets mit einer Halbkreisscheibe vom Durchmesser 1 zudecken kann.

21 Aufgaben 1991

21.1 Erste Runde

1. Gegeben sind 1991 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend zehn dieser Zahlen stets größer als 1 ist.

   Man beweise, dass das Produkt aller 1991 Zahlen ebenfalls größer als 1 ist.

2. Es sei g eine gerade positive ganze Zahl und $f(n) = g^n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

   Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl n gilt:

   a) $f(n)$ ist Teiler von jeder der Zahlen $f(3n), f(5n), f(7n), \ldots$,

   b) $f(n)$ ist tellerfremd zu jeder der Zahlen $f(2n), f(4n), f(6n), \ldots$.

3. In einer Ebene mit quadratischem Gitter, bei dem die Seitenlänge des Grundquadrats 1 ist, liegt ein rechtwinkliges Dreieck. Alle seine Eckpunkte sind Gitterpunkte und alle Seitenlängen sind ganzzahlig.

   Man beweise, dass auch der Inkreismittelpunkt ein Gitterpunkt ist.

4. Ein Streifen der Breite 1 soll durch rechteckige Platten mit der gemeinsamen Breite 1 und den Längen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ lückenlos gepflastert werden ($a_1 \neq 1$). Von der zweiten Platte an ist jede Platte ähnlich, aber nicht kongruent zu dem schon gepflasterten Teil des Streifens. Nach Auflegen der ersten n Platten habe der gepflasterte Teil des Streifens die Länge s_n.

   Gibt es - bei vorgegebenem a_1 - eine Zahl, die von keinem s_n übertroffen wird ? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

21.2 Zweite Runde

1. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $4^x + 4^y + 4^z = u^2$ mit ganzen Zahlen x, y, z, u.

2. Im Raum seien acht Punkte so gegeben, dass keine vier in einer Ebene liegen. Von allen Verbindungsstrecken dieser Punkte werden 17 blau gefärbt, die übrigen rot.

   Man beweise, dass hierbei stets mindestens vier blaue Dreiecke entstehen.

   Man beweise ferner, dass in obiger Behauptung "vier" nicht durch "fünf" ersetzt werden darf.

3. Eine Menge M von Punkten der Ebene heiße stumpf, wenn je drei Punkte aus M stets die Ecken eines stumpfwinkligen Dreiecks sind.

   a) Man beweise die Richtigkeit der Aussage: Zu jeder endlichen stumpfen Menge M gibt es einen Ebenenpunkt P mit folgender Eigenschaft: P ist kein Element von M, und $M \cup \{P\}$ ist ebenfalls stumpf.

   b) Man entscheide (mit Nachweis), ob die in a) formulierte Aussage richtig bleibt, wenn man dort "endlich" durch "unendlich" ersetzt.

4. Gegeben seien zwei nicht-negative ganze Zahlen a und b, von denen die eine gerade, die andere ungerade ist. Durch die Vorschrift

$$a_0 := a,\ a_1 := b,\ a_{n+1} := 2a_n - a_{n-1} + 2 \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$b_0 := b,\ b_1 := a,\ b_{n+1} := 2b_n - b_{n-1} + 2 \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

   werden zwei Folgen (a_n) und (b_n) definiert. Man beweise:

   Genau dann enthält keine der beiden Folgen ein negatives Glied, wenn $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq 1$ gilt.

22 Aufgaben 1992

22.1 Erste Runde

1. Auf dem Tisch stehen zwei Schalen; in der einen liegen p, in der anderen q Spielsteine ($p, q \in \mathbb{N}^*$). Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd, wobei A beginnt.

   Wer am Zug ist,

   - nimmt aus einer der Schalen einen Stein weg
   - oder nimmt aus beiden Schalen je einen Stein weg
   - oder legt einen Stein aus einer der Schalen in die andere.

   Gewonnen hat, wer den letzten Stein wegnimmt.

   Unter welchen Bedingungen kann A, unter welchen Bedingungen kann B den Gewinn erzwingen? Die Antwort ist zu begründen.

2. Eine positive ganze Zahl n heißt *gut*, wenn sie sich auf eine und nur eine Weise als Summe mindestens zweier positiver ganzer Zahlen darstellen lässt, deren Produkt ebenfalls den Wert n hat; hierbei werden Darstellungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Summanden unterscheiden, als gleich angesehen.

   Man bestimme alle guten positiven ganzen Zahlen.

3. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c. Drei Kugeln berühren sich paarweise und berühren außerdem die Ebene des Dreiecks in den Punkten A, B bzw. C.

   Man bestimme die Radien dieser Kugeln.

4. Eine endliche Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ positiver ganzer Zahlen mit $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_k$ heißt *alternierend*, wenn $i + a$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ gerade ist. Auch die leere Menge gelte als alternierend. Die Anzahl der alternierenden Teilmengen von $\{1, 2, 3, ..., n\}$ wird mit $A(n)$ bezeichnet.

   Man entwickle ein Verfahren, mit dem sich $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ bestimmen lässt, und berechne damit $A(33)$.

22.2 Zweite Runde

1. Unter der Standarddarstellung einer positiven ganzen Zahl n wird nachfolgend die Darstellung von n im Dezimalsystem verstanden, bei der die erste Ziffer verschieden von 0 ist. Jeder positiven ganzen Zahl n wird nun eine Zahl $f(n)$ zugeordnet, indem in der Standarddarstellung von n die letzte Ziffer vor die erste gestellt wird.

   Beispiele: $f(1992) = 2199$, $f(2000) = 200$.

   Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl n, für die $f(n) = 2n$ gilt.

2. Es werden alle n-stelligen Wörter aus dem Ziffern-Alphabet $\{0; 1\}$ betrachtet. Diese 2^n Wörter sollen so in einer Folge $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{2^n-1}$ angeordnet werden, dass w_m aus w_{m-1} durch Ändern einer einzigen Ziffer entsteht ($m = 1, 2, 3, \ldots, 2^n - 1$). Man weise nach, dass der folgende Algorithmus dies leistet:

   a) Starte mit $w_0 = 000 \ldots 00$.

   b) Es sei $w_{m-1} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ mit $a_i \in \{0; 1\}, i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

      Bestimme den Exponenten $e(m)$ der höchsten Zweierpotenz, die m teilt, und setze $j = e(m) + 1$. Ersetze in w_{m-1} die Ziffer a_j durch $1 - a_j$; so entsteht w_m.

3. Gegeben ist ein konvexes, gleichseitiges Fünfeck. über den Seiten dieses Fünfecks werden nach innen gleichseitige Dreiecke errichtet.

   Man beweise, dass mindestens eines dieser Dreiecke nicht über den Rand des Fünfecks hinausragt.

4. Für drei Zahlenfolgen $(x_n), (y_n), (z_n)$ mit positiven Anfangsgliedern x_1, y_1, z_1 gelte

$$x_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n}, \quad y_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n}, \quad z_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

   Man beweise:

   a) Keine der drei Folgen ist nach oben beschränkt.

   b) Mindestens eine der Zahlen $x_{200}, y_{200}, z_{200}$ ist größer als 20.

23 Aufgaben 1993

23.1 Erste Runde

1. Alle natürlichen Zahlen außer 1 und 2 können als Summe von paarweise verschiedenen Summanden dargestellt werden. Für jede natürliche Zahl $n (n \geq 3)$ wird bei allen derartigen Darstellungen von n die Anzahl der Summanden gezählt und die größte vorkommende Anzahl mit $A(n)$ bezeichnet.

   Man ermittle $A(n)$.

2. Von einer Menge M aus endlich vielen Punkten der Ebene sei bekannt: Für je zwei verschiedene Punkte A, B aus M gibt es stets einen Punkt C aus M, so dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

   Man bestimme die größtmögliche Anzahl von Punkten einer solchen Menge M.

3. Es gibt Paare von Quadratzahlen mit folgenden beiden Eigenschaften:

   (1) Ihre Dezimaldarstellungen haben die gleiche Ziffernanzahl, wobei die erste Ziffer jeweils von 0 verschieden ist.

   (2) Hängt man an die Dezimaldarstellung der ersten die der zweiten an, so entsteht die Dezimaldarstellung einer weiteren Quadratzahl.

   Beispiel: 16 und 81; $1681 = 41^2$.

   Man beweise, dass es unendlich viele Paare von Quadratzahlen mit diesen Eigenschaften gibt.

4. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a, b, c, (a = \overline{BC}, b = \overline{CA}, c = \overline{AB})$ und dem Flächeninhalt F. Die Seite AB wird über A hinaus um a und über B hinaus um b verlängert. Entsprechend wird BC über B bzw. C hinaus um b bzw. c verlängert. Schließlich wird CA über C bzw. A hinaus um c bzw. a verlängert. Die äußeren Endpunkte der Verlängerungsstrecken bilden die Eckpunkte eines Sechsecks mit dem Flächeninhalt G.

   Man beweise: $\frac{G}{F} > 13$.

23.2 Zweite Runde

1. In einem regulären Neuneck sei jede Ecke entweder rot oder grün gefärbt. Je drei Ecken des Neunecks bestimmen ein Dreieck. Ein solches Dreieck heiße *rot* bzw. *grün*, wenn seine Ecken alle rot bzw. alle grün sind.

   Man beweise, dass es bei jeder derartigen Färbung des Neunecks mindestens zwei verschiedene kongruente Dreiecke gleicher Farbe gibt.

2. Für die reelle Zahl a gelte, dass es genau ein Quadrat gibt, dessen Ecken alle auf der Kurve mit der Gleichung $y = x^3 + ax$ liegen.

   Man bestimme die Seitenlänge dieses Quadrats.

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Ferner sei A' der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α mit der Mittelsenkrechten $m(AB)$, B' der Schnittpunkt von w_β mit $m(BC)$, C' der Schnittpunkt von w_γ mit $m(CA)$.

   Man beweise:

   a) Das Dreieck ABC ist genau dann gleichseitig, wenn A' und B' zusammenfallen.

   b) Wenn die Punkte A', B', C' verschieden sind, gilt $|\angle B'A'C'| = 90° - \frac{1}{2} \cdot |\angle BAC|$

   Erläuterung: Mit w_α wird die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\angle BAC$ bezeichnet; analog sind w_β und w_γ erklärt. Für beliebige verschiedene Punkte X, Y bezeichnet $m(XY)$ die Mittelsenkrechte der Strecke XY.

4. Gibt es eine natürliche Zahl n, bei der die Dezimaldarstellung von $n!$ mit 1993 beginnt?

24 Aufgaben 1994

24.1 Erste Runde

1. Gegeben seien elf reelle Zahlen. Man beweise, dass immer mindestens zwei von ihnen Dezimaldarstellungen haben, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

   Beispiele von Dezimaldarstellungen:
   $$\frac{1}{4} = 0,250\ 000\ 000\ \ldots, \quad \frac{1}{3} = 0,333\ 333\ 333\ \ldots, \sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562\ \ldots\ .$$

2. Anna und Bernd spielen nach folgender Regel: Beide schreiben auf je einen Zettel eine natürliche Zahl und geben ihren Zettel gefaltet dem Schiedsrichter. Dieser schreibt auf eine für Anna und Bernd sichtbare Tafel zwei natürliche Zahlen, von denen die eine beliebig, die andere aber die Summe der Zahlen auf den Zetteln ist. Danach fragt der Schiedsrichter Anna, ob sie die Zahl von Bernd nennen kann. Wenn Anna verneint, richtet er an Bernd die entsprechende Frage. Wenn Bernd verneint, geht die Frage wieder an Anna, usw. Es wird vorausgesetzt, dass Anna und Bernd beide intelligent und ehrlich sind.

   Man beweise, dass nach endlich vielen Fragen die Antwort JA gegeben wird.

3. Gegeben sei das Dreieck $A_1A_2A_3$ und ein Punkt P in seinem Innern. Für $i = 1, 2, 3$ sei B_i ein beliebiger Punkt auf der Gegenseite von A_i; ferner seien C_i und D_i die Mittelpunkte der Strecken A_iB_i bzw. PB_i.

   Man beweise, dass die Dreiecke $C_1C_2C_3$ und $D_1D_2D_3$ den gleichen Flächeninhalt haben.

4. Mit den reellen Zahlen a und b ($b \neq 0$) wird die unendliche arithmetische Folge $a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$ gebildet.

   Man beweise, dass diese Folge dann und nur dann eine unendliche geometrische Teilfolge enthält, wenn $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl ist.

24.2 Zweite Runde

1. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft:

   Jede natürliche Zahl, deren Dezimaldarstellung aus n Ziffern besteht, und zwar genau einer Sieben und $n-1$ Einsen, ist eine Primzahl.

2. Es sei k eine beliebige ganze Zahl. Eine Zahlenfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wird definiert durch

$$a_0 := 0, \quad a_1 := k \quad \text{und} \quad a_{n+2} := k^2 \cdot a_{n+1} - a_n \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Man beweise: Für jedes n ist $a_{n+1} \cdot a_n + 1$ ein Teiler von $a_{n+1}^2 + a_n^2$.

3. Es seien A und B zwei verschieden große Kugeln, die sich von außen berühren. Sie befinden sich im Inneren eines Kegels K, wobei jede der Kugeln den Kegel in einem Kreis berührt. Im Inneren von K liegen m weitere, untereinander kongruente Kugeln ($m \geq 3$); sie sind ringförmig so angeordnet, dass jede von ihnen den Kegel K, die Kugeln A und B sowie ihre beiden Nachbarkugeln berührt.

   Man beweise, dass dies für höchstens drei Werte von m möglich ist.

4. Es sei M eine Menge von n Punkten im Raum ($n \geq 3$). Die Verbindungsstrecken dieser Punkte seien alle verschieden lang, und r dieser Strecken seien rot gefärbt. Weiter sei m die kleinste ganze Zahl, für die $m \geq 2 \cdot \frac{r}{n}$ gilt.

   Man beweise, dass es dann stets einen Streckenzug aus m roten Strecken gibt, die nach wachsender Länge angeordnet sind.

25 Aufgaben 1995

25.1 Erste Runde

1. Ein Spiel startet mit zwei Haufen von p bzw. q Steinen. Zwei Spieler A und B ziehen abwechselnd, wobei A beginnt. Wer am Zug ist, muss einen Haufen wegnehmen und den anderen in zwei Haufen zerlegen. Verloren hat, wer als erster keinen vollständigen Zug mehr ausführen kann.

   Bei weichen Werten von p und q kann A den Gewinn erzwingen, bei weichen nicht?

   Hinweis: Die Anzahl der Steine in jedem Haufen ist eine positive ganze Zahl; es gibt also keinen leeren Haufen.

2. In der Ebene liegen eine Gerade g und ein Punkt A außerhalb von g. Der Punkt P durchlaufe die Gerade g. Man bestimme die Menge aller Punkte X der Ebene, die zusammen mit A und P die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.

3. Eine natürliche Zahl n heiße *zerbrechlich*, wenn es positive ganze Zahlen a, b, x, y gibt, für die $a + b = n$ und $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ gilt. Man bestimme die Menge aller zerbrechlichen Zahlen.

4. In einem Quadrat mit der Seitenlänge 100 befinden sich Kreisscheiben vom Radius 1. Sie liegen so, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

   1. Keine zwei der Kreisscheiben haben gemeinsame innere Punkte.
   2. Jede Strecke der Länge 10, die ganz in dem Quadrat liegt, trifft mindestens eine Scheibe.

   Man beweise, dass dann in dem Quadrat mindestens 400 Scheiben liegen.

   Hinweis: *Eine Strecke trifft eine Kreisscheibe* bedeutet, dass Strecke und Kreisscheibe mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

25.2 Zweite Runde

1. Ein Spielstein steht zunächst auf dem Punkt $(1|1)$ der Koordinatenebene und kann nach folgenden Regeln auf den Punkten der Ebene bewegt werden:

   1) Steht der Stein auf $(a|b)$, darf er nach $(2a|b)$ oder nach $(a|2b)$ gehen.

   2) Steht der Stein auf $(a|b)$, darf er im Falle $a > b$ nach $(a-b|b)$ gehen und im Falle $a < b$ nach $(a|b-a)$ gehen.

   Welche Beziehung zwischen den Zahlen x und y ist notwendig und hinreichend dafür, dass der Stein irgendwann auf dem Punkt $(x|y)$ stehen kann?

2. Auf einer Strecke der Länge 1 sind endlich viele, paarweise disjunkte Teilstrecken gefärbt. Der Abstand zweier gefärbter Punkte beträgt nie genau $\frac{1}{10}$.

   Man beweise, dass die Gesamtlänge der gefärbten Teilstrecken nicht größer als $\frac{1}{2}$ ist.

3. Jede Diagonale eines konvexen Fünfecks sei parallel zu einer Seite.

   Man beweise, dass das Verhältnis einer Diagonale zur entsprechenden Seite in allen fünf Fällen den gleichen Wert hat, und berechne diesen Wert.

4. Man beweise, dass jede natürliche Zahl k $(k > 1)$ ein Vielfaches besitzt, das kleiner als k^4 ist und im Zehnersystem mit höchstens vier verschiedenen Ziffern geschrieben wird.

26 Aufgaben 1996

26.1 Erste Runde

1. Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken ? (Beweis!)

2. Auf einem $n \times n$-Schachbrett sind die Felder so nummeriert wie (für $n = 5$) in dem abgebildeten Beispiel.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

   Es werden n Felder derart ausgewählt, dass aus jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Feld kommt. Anschließend werden die Nummern dieser Felder addiert.

   Welche Werte für die Summe sind hierbei möglich ? (Beweis!)

3. In der Ebene liegen vier Geraden so, dass je drei von ihnen ein Dreieck bestimmen; eine dieser Geraden sei parallel zu einer der Seitenhalbierenden des von den drei anderen Geraden bestimmten Dreiecks.

   Man beweise, dass dann auch jede der drei anderen Geraden diese Eigenschaft hat.

4. Man bestimme die Menge aller positiven ganzen Zahlen n, für die $n \cdot 2^{n-1} + 1$ eine Quadratzahl ist.

26.2 Zweite Runde

1. Eine Menge von Punkten des Raumes wird schrittweise erweitert, indem man jeweils einen ihrer Punkte an einem anderen ihrer Punkte spiegelt und den erhaltenen Bildpunkt zur Menge hinzufügt.

   Kann man auf diese Weise, ausgehend von der Menge von sieben Eckpunkten eines Würfels, nach endlich vielen Schritten dieser Menge die achte Ecke des Würfels hinzufügen?

2. Die Folge $z_0, z_1, z_2, \ldots$ wird rekursiv definiert durch $z_0 := 0$ und

$$z_n := z_{n-1} + \frac{3^r - 1}{2}, \text{ wenn } n = 3^{r-1} \cdot (3k+1) \quad \text{für geeignete Zahlen } r, k,$$
$$z_n := z_{n-1} - \frac{3^r - 1}{2}, \text{ wenn } n = 3^{r-1} \cdot (3k+2) \quad \text{für geeignete Zahlen } r, k.$$

   Man beweise: In dieser Folge tritt jede ganze Zahl genau einmal auf.

3. Auf den Seiten eines Dreiecks ABC sind nach außen Rechtecke $ABB_1A_1, BCC_1B_2, CAA_2C_2$ errichtet.

   Man beweise, dass sich die Mittelsenkrechten der Strecken A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 in einem gemeinsamen Punkt P schneiden.

4. Es sei p eine ungerade Primzahl. Man bestimme diejenigen positiven ganzen Zahlen x, y $(x \leq y)$, für welche $\sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ nicht-negativ und möglichst klein ist.

27 Aufgaben 1997

27.1 Erste Runde

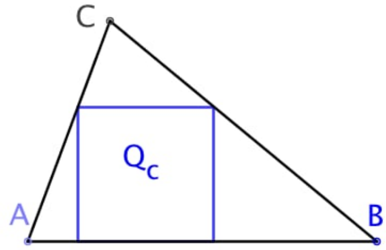
1. Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen stets 15 Zahlen derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist? Wie lautet die Antwort, wenn 15 durch 16 ersetzt wird? (Beweis!)

2. Man bestimme (mit Beweis) alle Primzahlen p, für die das Gleichungssystem

$$p + 1 = 2x^2$$
$$p^2 + 1 = 2y^2$$

   Lösungen mit ganzen Zahlen x, y besitzt.

3. Jedem spitzwinkligen Dreieck ABC lässt sich ein Quadrat Q_a so einbeschreiben, dass zwei seiner Ecken auf der Seite BC und die anderen Ecken auf den Seiten AC und AB liegen. Entsprechend kann man Quadrate Q_b und Q_c einbeschreiben.



Man bestimme (mit Beweis) alle Dreiecke ABC, für die Q_a, Q_b und Q_c gleiche Seitenlängen haben.

4. In einem Park wachsen 10000 Bäume in 100 Reihen mit je 100 Bäumen (im Quadratgitter angeordnet). Wie viele Bäume kann man höchstens schlagen, wenn folgende Bedingung erfüllt sein soll: Wenn man sich auf irgendeinen Baumstumpf setzt, so sieht man von ihm aus keinen weiteren Baumstumpf.

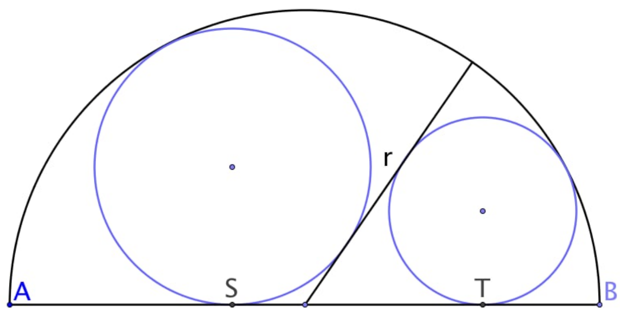
27.2 Zweite Runde

1. Ein regelmäßiges Tetraeder mit einer schwarzen und drei weißen Flächen steht mit seiner schwarzen Fläche auf einer Ebene. Es wird mehrmals über je eine seiner Kanten gekippt. Schließlich nimmt es wieder den ursprünglichen Platz in der Ebene ein.

   Kann es dann auf einer seiner weißen Flächen stehen ? (Beweis!)

2. Man beweise: Für jede rationale Zahl a hat die Gleichung $y = \sqrt{x^2 + a}$ unendlich viele Lösungen (x, y) mit rationalen Zahlen x und y.

3. Eine Halbkreisfläche mit dem Durchmesser AB ($\overline{AB} = 2r$) sei durch einen Radius in zwei Kreissektoren zerlegt; jedem dieser Sektoren sei ein Kreis einbeschrieben.



   Man beweise: Sind S und T die Berührpunkte dieser Kreise mit AB, so gilt $\overline{ST} \geq 2r \cdot (\sqrt{2} - 1)$.

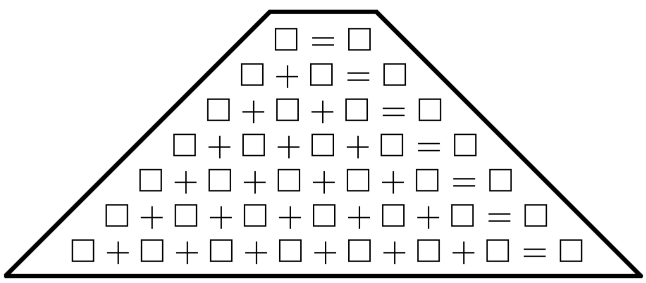
4. Es sei n eine natürliche Zahl.

   Man beweise: Sind $3n + 1$ und $4n + 1$ Quadratzahlen, dann ist n durch 56 teilbar.

28 Aufgaben 1998

28.1 Erste Runde

1. Ein Spielfeld hat die dargestellte Form.



Zwei Spieler A und B tragen abwechselnd in eines der jeweils noch freien Kästchen eine ganze Zahl ein, wobei A beginnt. Bei jeder Eintragung können Kästchen und Zahl beliebig gewählt werden.

Man beweise: Der Spieler A kann durch geschicktes Spiel stets erreichen, dass nach der Eintragung in das letzte noch freie Kästchen alle entstandenen Gleichungen erfüllt sind.

2. Man beweise, dass es eine unendliche Folge von Quadratzahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

   (1) Das arithmetische Mittel je zweier benachbarter Folgenglieder ist eine Quadratzahl.

   (2) Je zwei benachbarte Folgenglieder sind tellerfremd.

   (3) Die Folge wächst streng monoton.

3. Über den Seiten BC und CA eines beliebigen Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate errichtet. Der Mittelpunkt der Seite AB sei M, die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien P und Q.

   Man beweise, dass das Dreieck MPQ gleichschenklig-rechtwinklig ist.

4. Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Zahl $n + [(\sqrt{2}+1)^n]$ ungerade. Dabei bezeichnet $[x]$ für jede reelle Zahl x die größte ganze Zahl, die höchstens so groß ist wie x.

28.2 Zweite Runde

1. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die Lösungen der Gleichung $xy+yz+zx-xyz = 2$ sind.

2. Es sei $M = \{1, 2, 3, \ldots, 10\ 000\}$. Man beweise, dass man 16 Teilmengen von M mit folgender Eigenschaft finden kann:

   Für jede Zahl z aus M gibt es acht dieser Teilmengen, deren Schnittmenge $\{z\}$ ist.

3. Gegeben seien ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Seite AB mit folgenden Eigenschaften:

   (1) $\overline{BC} = \overline{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$

   (2) $\overline{AP} = 3 \cdot \overline{PB}$

   Man beweise: Der Winkel PAC ist doppelt so groß wie der Winkel CPA.

4. Im Inneren eines konvexen Polyeders P mit dem Rauminhalt 2^n seien $3 \cdot (2^n - 1)$ Punkte gewählt ($n \in \mathbb{N}$). Man beweise, dass P ein konvexes Polyeder mit dem Rauminhalt 1 enthält, in dessen Innerem keiner der gewählten Punkte liegt.

29 Aufgaben 1999

29.1 Erste Runde

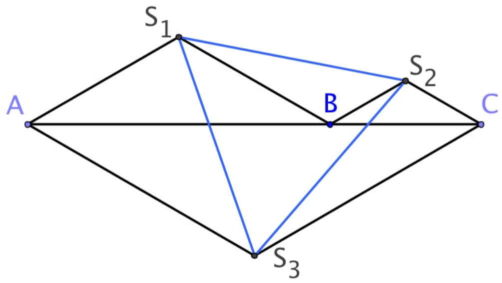
1. Auf 100 Affen werden 1600 Kokosnüsse verteilt, wobei einige Affen auch leer ausgehen können. Man beweise, dass es - ganz gleich, wie die Verteilung erfolgt - stets mindestens vier Affen mit derselben Anzahl von Kokosnüssen gibt.

2. Zwei Zahlenfolgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $b_1, b_2, b_3, \ldots$ werden definiert durch

   $$a_1 = b_1 = 1 \text{ und } a_{n+1} = a_n + b_n, \quad b_{n+1}i = a_n \cdot b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

   Man beweise, dass die Glieder der ersten Folge paarweise teilerfremd sind.

3. In einer Ebene werden auf dem geraden Streckenzug ABC über AB, BC und CA als Grundseiten die positiv orientierten gleichschenkligen Dreiecke ABS_1, BCS_2 und CAS_3 mit den Basiswinkeln $30°$ errichtet.



Man beweise: Das Dreieck $S_3S_2S_1$ ist gleichseitig.

4. Es gibt konvexe Polyeder mit mehr Seitenflächen als Ecken. Was ist die kleinste Anzahl von dreieckigen Seitenflächen, die ein solches Polyeder haben kann? (Beweis!)

29.2 Zweite Runde

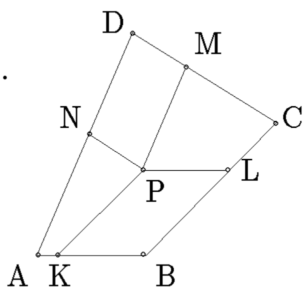
1. Die Eckpunkte eines regelmäßigen $2n$-Ecks ($n \in \mathbb{N}, n > 2$) sollen derart mit jeweils einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 2n$ beschriftet werden, dass die Summe der Zahlen an zwei benachbarten Eckpunkten jeweils gleich der Summe der Zahlen an den beiden diametral gegenüberliegenden Eckpunkten ist. Dabei sollen die Zahlen an den Ecken alle verschieden sein.

   Man beweise, dass dies dann und nur dann möglich ist, wenn n ungerade ist.

2. Für jede natürliche Zahl n werde die Quersumme ihrer Darstellung im Zehnersystem mit $Q(n)$ bezeichnet.

   Man beweise, dass für unendlich viele natürliche Zahlen k die Ungleichung $Q(3^k) \geq Q(3^{k+1})$ gilt.

3. Gegeben seien ein konvexes Viereck $ABCD$ und die Punkte K, L, M, N, P mit folgenden Eigenschaften:
   - K, L, M, N sind innere Punkte der Seiten AB bzw. BC bzw. CD bzw. DA.
   - P ist innerer Punkt des Vierecks $ABCD$.
   - Die Vierecke $PKBL$ und $PMDN$ sind Parallelogramme.



   Mit S, S_1, S_2 werden die Flächeninhalte der Vierecke $ABCD$ bzw. $PNAK$ bzw. $PLCM$ bezeichnet. Man beweise: $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

4. Eine natürliche Zahl heiße *bunt*, wenn sie sich als Summe einer positiven Quadratzahl und einer positiven Kubikzahl darstellen lässt. Es seien r und s zwei beliebig gegebene positive ganze Zahlen. Man beweise:

   a) Für unendlich viele natürliche Zahlen n sind die Zahlen $r + n$ und $s + n$ beide bunt.

   b) Für unendlich viele natürliche Zahten m sind die Zahten $r \cdot m$ und $s \cdot m$ beide bunt.

30 Aufgaben 2000

30.1 Erste Runde

1. Zwei natürliche Zahlen, von denen die eine durch Ziffernpermutation aus der anderen entsteht, haben die Summe $999\ldots9$ (lauter Neunen). Ist dies mögtich, wenn jede der Zahlen

   a) 1999 Stellen hat,

   b) 2000 Stellen hat?

   Erläuterung: Die Aussagen über Ziffern und Stellenzahl beziehen sich auf die Dezimaldarstellung der vorkommenden Zahlen.

2. Man betrachte fünf positive ganze Zahlen, bei denen die Summe von je drei dieser Zahlen durch die Summe der restlichen beiden Zahlen teilbar ist; dies ist z. B. der Fall bei den Zahlen $1, 1, 1, 1, 2$.

   Man entscheide, ob es fünf paarweise verschiedene Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt.

3. Dem Halbkreis über einer Strecke AB sei ein konvexes Viereck $ABCD$ einbeschrieben. Der Schnittpunkt von AC und BD sei S, der Fußpunkt des Lotes von S auf AB sei T.

   Man beweise, dass ST den Winket CTD halbiert.

4. Ein kreisförmiges Spielbrett sei in n Sektoren ($n \geq 3$) eingeteilt, von denen jeder entweder leer oder mit einem Spielstein besetzt ist. Die Verteilung der Spielsteine wird schrittweise verändert: Ein Schritt besteht daraus, dass man einen besetzten Sektor auswählt, seinen Spielstein entfernt und die beiden Nachbarsektoren "umpolt", d. h. einen besetzten Sektor leert und einen leeren Sektor mit einem Spielstein besetzt.

   Für welche Werte von n kann man in endlich vielen Schritten lauter leere Sektoren erzielen, wenn anfangs ein einziger Sektor besetzt ist?

30.2 Zweite Runde

1. Gegeben ist ein Satz von n Gewichtstücken ($n > 3$) mit den Massen $1, 2, 3, \ldots, n$ Gramm.

   Man bestimme alle Werte von n, für die eine Zerlegung in drei Haufen gleicher Masse möglich ist.

2. Man beweise: Für jede ganze Zahl n ($n \geq 2$) gibt es n verschiedene natürliche Zahlen mit der Eigenschaft, dass für irgend zwei dieser Zahlen a und b die Summe $a + b$ durch die Differenz $a - b$ teilbar ist.

3. Durch jede Ecke eines (nicht notwendigerweise regulären) Tetraeders und die Mittelpunkte der drei von dieser Ecke ausgehenden Kanten wird eine Kugel gelegt.

   Man beweise, dass es einen Punkt gibt, der auf allen vier Kugeln liegt.

4. Man betrachte Summen der Form $\sum_{k=1}^{n} e_k k^3$ mit $e_k \in \{-1; 1\}$.

   Gibt es eine solche Summe mit dem Wert 0, wenn a) $n = 2000$, b) $n = 2001$ ist?