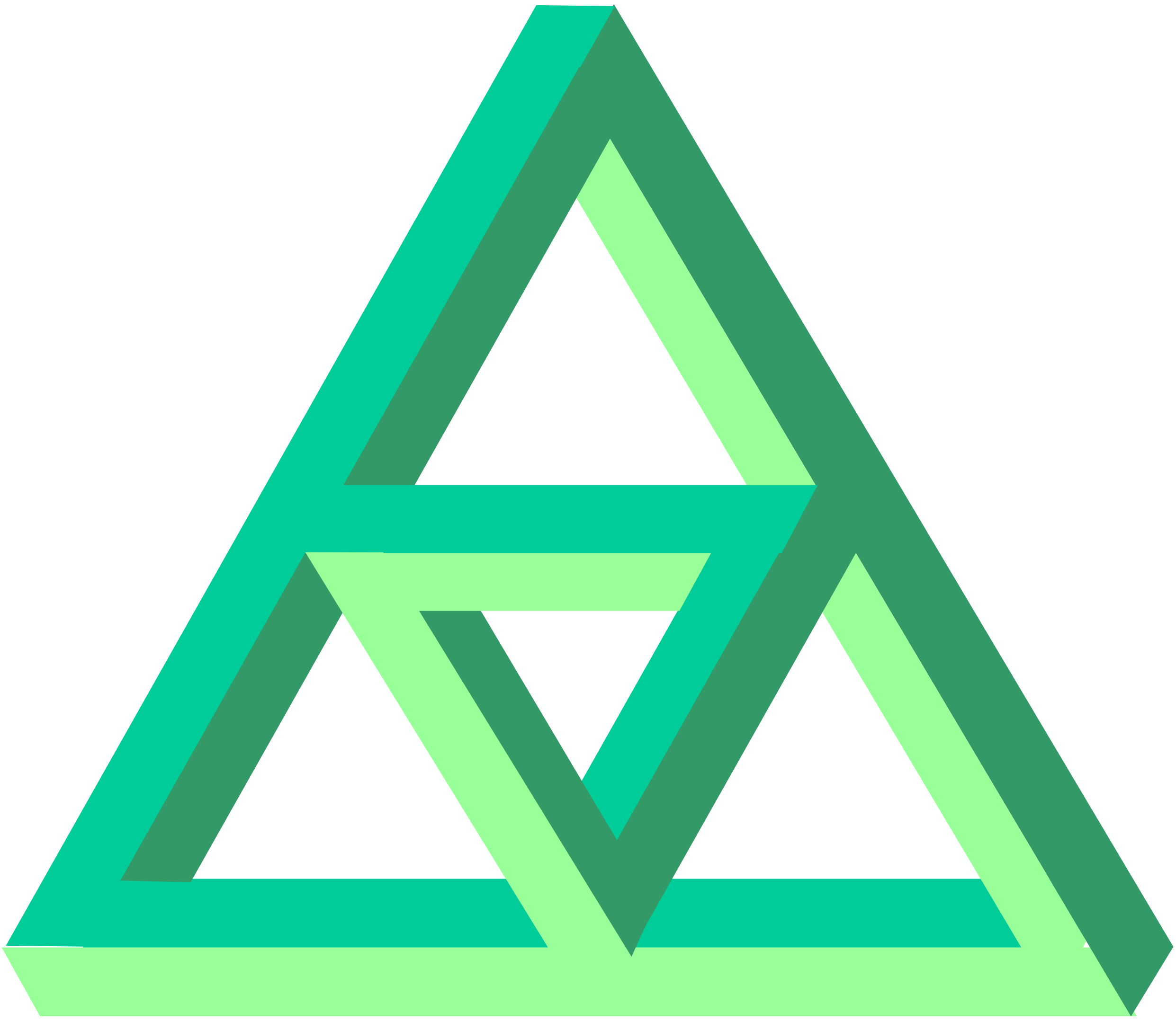
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 04/2024 (April 2024) 23. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Im ersten Rückblick auf die Aufgaben der diesjährigen Landesrunde der MO greifen wir die Aufgabe **MO630931** auf. Bereits mehrfach spielten Summen von Quadratzahlen in den letzten Jahrgängen eine Rolle, die wir im Thema 9 (s. Hefte 09/2021 und 11/2022) untersuchten. Nun setzen wir die Betrachtungen für Differenzen von Quadratzahlen fort. Dabei finden wir vergleichbare Lösungsansätze:

- Finden von konkreten Zahlenbeispielen,
- Nachweis der Existenz unendlich vieler Lösungen mittels konstruktiver Bildungsvorschriften,
- Beweis der Nicht-Existenz von Lösungen durch Untersuchungen zu Resten bei Division von Quadratzahlen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 9.3 – Differenzen und Summen von Quadratzahlen

Aufgabe 9.11 – MO630931. In dieser Aufgabe betrachten wir das Produkt von zwei (verschiedenen) Primzahlen.

a) Geben Sie zwei Beispiele an, bei denen das Produkt von zwei Primzahlen nicht die Differenz von zwei Quadratzahlen ist.
b) Für welche Paare von Primzahlen ist ihr Produkt die Differenz von zwei Quadratzahlen?

Hinweis: Als Quadratzahlen werden die Quadrate ganzer Zahlen bezeichnet.

Lösungshinweise zu Teil a): Es genügt, geeignete Beispiele durch systematisches Probieren zu finden, und dabei zu hoffen, dass es mit kleinen Werten von Primzahlen p und q bereits gelingt.

Primzahlenprodukte	3	5	7	11
2	6	10	14	22
3	x	$15 = 4^2 - 1^2$	$21 = 5^2 - 2^2$	$33 = 7^2 - 4^2$
5	x	x	$35 = 6^2 - 1^2$	$55 = 8^2 - 3^2$

Lassen sich Differenzen von Quadraten angeben, entfallen die zugehörigen Paare als Beispiele mit der geforderten Eigenschaft (Zeilen 3 und 4 der Tabelle). Finden wir jedoch spontan keine solchen Differenzen (Zeile 2 der Tabelle), müssen wir einen Nachweis führen, dass es tatsächlich keine solchen gibt. Insbesondere ist es erforderlich, zu erklären, dass u und v nicht beliebig groß werden können (dass also die Suche nach u und v nur in einem endlichen Bereich erfolgen muss).

Möglichkeit 1 (durch Probieren): Seien v und $u = v + x$ (mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl x) zwei Zahlen mit $pq = u^2 - v^2 = 2xv + x^2$. Weil daraus $x^2 < pq$ folgt, können wir die möglichen Werte für x ausprobieren und untersuchen, ob $\frac{pq - x^2}{2x}$ zu einer ganzen Zahl v führt:

Aus $p \cdot q = 6$ folgt $x < 3$.

Setzen wir $x = 1$ erhalten wir $6 - 1 = 2v$, also $v = \frac{5}{2}$.

Setzen wir $x = 2$ erhalten wir $6 - 4 = 4v$, also $v = \frac{1}{2}$.

Aus $p \cdot q = 10$ folgt $x < 4$.

Setzen wir $x = 1$ erhalten wir $10 - 1 = 2v$, also $v = \frac{9}{2}$

Setzen wir $x = 2$ erhalten wir $10 - 4 = 4v$, also $v = \frac{3}{2}$

Setzen wir $x = 3$ erhalten wir $10 - 9 = 6v$, also $v = \frac{1}{6}$

Damit haben wir für $(2;3)$ und $(2;5)$ gezeigt, dass die Produkte nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar sind. Auch für die anderen Produkte der 2. Zeile könnten wir so den Nachweis führen. Jedoch steigt der Aufwand schnell an und die Vorgehensweise kann wohl nicht verallgemeinert werden.

Möglichkeit 2 (mittels Primfaktorenzerlegung): Anhand der Tabelle vermuten wir, dass es für Primzahlen $2 = p < q$ keine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen u^2 und v^2 gibt. Gelte $2q = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$, so ist mindestens einer der Faktoren der rechten Seite geradzahlig. Sei dies $u - v$, so ist auch $u + v = (u-v) + 2v$ geradzahlig (bzw. wenn $u + v$ geradzahlig ist, so ist auch $u - v = u + v - 2v$ geradzahlig). Somit ist die Differenz beider Quadratzahlen stets durch 4 teilbar, während im Produkt $2q$ wegen der Primzahl $q > 2$ kein weiterer Faktor 2 möglich ist. Insbesondere sind die Beispiele in der 2. Zeile der Tabelle nicht als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar.

Möglichkeit 3 (Reste bei Division durch 4): Wir untersuchen für die Differenz zweier Quadratzahlen die Reste bei Division durch 4 in Abhängigkeit von der Paarigkeit der Quadratzahlen:

u	v	$u^2 - v^2$	Rest bei Division durch 4
$2x$	$2y$	$4(x^2 - y^2)$	0
$2x+1$	$2y$	$4(x^2 + x) - 4y^2 + 1$	1
$2x$	$2y+1$	$4x^2 - 4(y^2 + y) - 1$	$-1 \equiv 3$
$2x+1$	$2y+1$	$4(x^2 + x) - 4(y^2 + y)$	0

In keinem Fall tritt bei der Differenz zweier Quadratzahlen bei Division durch 4 der Rest 2 auf. Somit können alle Produkte $2q$ mit einer ungeraden Zahl $q > 2$ (und erst recht mit einer ungeraden Primzahl) nicht als eine solche Differenz dargestellt werden. Insbesondere sind die Produkte in der 2. Zeile der Tabelle geeignete Beispiele.

Lösungshinweise zu Teil b): Für jedes Paar $(p;q)$ ungerader Zahlen (und erst recht für Primzahlen größer als 2) sind sowohl $p + q$ als auch $q - p$ geradzahlig. Folglich ist der Ausdruck

$$\left(\frac{q+p}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-p}{2}\right)^2$$

eine Differenz zweier ganzzahliger Quadratzahlen.

Zusammen mit der Erkenntnis aus Teil a) können genau die Produkte zweier verschiedener ungerader Primzahlen als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden. ❑

Ergänzung. Zur ausführlichen Diskussion dieser Aufgabe wollen wir die Möglichkeiten untersuchen, Vielfache von 4 als Differenz zweier Quadratzahlen darzustellen.

Fall 1: Es sei $n = 4^k \cdot q$ mit einer ungeraden Zahl q. Wir wissen bereits, dass es für eine solche Zahl q Quadratzahlen u^2 und v^2 mit $q = u^2 - v^2$ gibt. Dann gilt aber auch

$$n = 4^k \cdot q = 4^k \cdot (u^2 - v^2) = (2^k \cdot u)^2 - (2^k \cdot v)^2$$

d.h., es gibt eine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen.

Fall 2: Es sei $n = 4^k \cdot 2 \cdot q$ mit einer ungeraden Zahl q und $k > 0$. Eine Argumentation, dass es keine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen geben kann, weil dies für $2q$ nicht möglich ist, wird durch das Beispiel $24 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 5^2 - 1^2$ widerlegt. Stattdessen betrachten wir die Differenz

$$4^k \cdot \left(\frac{q+2}{2}\right)^2 - 4^k \cdot \left(\frac{q-2}{2}\right)^2 = 4^k \cdot \frac{1}{4} \cdot (8q) = 4^k \cdot 2 \cdot q$$

wobei die Terme auf der linken Seite dieser Gleichung wegen $k > 0$ ganzzahlig sind. Also existiert auch in diesem Fall stets eine Darstellung als Differenz zweier Quadratzahlen.

Um die Nichtexistenz von solchen Darstellungen zu beweisen, können die Untersuchungen zu Resten bei Division von Quadratzahlen hilfreich sein.

Aufgabe 9.12 – MO370921. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Wenn eine Quadratzahl ungerade ist, dann lässt sie bei Division durch 8 den Rest 1.
b) Wenn eine Quadratzahl ungerade, aber nicht durch 3 teilbar ist, dann lässt sie bei Division durch 24 den Rest 1.

Lösungshinweise zu Teil a): Wenn eine Quadratzahl n^2 ungeradzahlig ist, dann ist auch n ungeradzahlig. Wir finden also eine ganze Zahl m mit $n = 2m + 1$. Mit dieser Darstellung erhalten wir für n^2

$$n^2 = (2m+1)^2 = 4 \cdot m \cdot (m+1) + 1$$

Da von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen m und $m + 1$ stets genau eine durch 2 teilbar ist, ist der Term $4 \cdot m \cdot (m + 1)$ stets durch 8 teilbar. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Lösungshinweise zu Teil b): Wenn eine Quadratzahl n^2 ungeradzahlig ist, dann ist auch n ungeradzahlig. Wenn eine Quadratzahl n^2 nicht durch 3 teilbar ist, dann ist auch n nicht durch 3 teilbar (weil sonst n^2 sogar durch 9 teilbar wäre). Wir finden also eine ganze Zahl m mit $n = 6m \pm 1$. Mit dieser Darstellung erhalten wir für n^2

$$n^2 = (6m \pm 1)^2 = 12 \cdot m \cdot (3m + 1) + 1$$

Da von zwei natürlichen Zahlen m und $3m + 1 = m + 1 + 2m$ stets genau eine durch 2 teilbar ist, ist der Term $12 \cdot m \cdot (3m + 1)$ stets durch 24 teilbar. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. ❑

Aufgabe 9.13 – MO050931. Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Lösungshinweise. Es sei n^2 eine nicht durch 9 teilbare Quadratzahl. Dann ist n nicht durch 3 teilbar (sonst wäre n^2 durch 9 teilbar). Die Zahl n lässt bei Division durch 3 also den Rest 1 oder 2 und wir können eine ganze Zahl m finden, so dass $n = 3m + 1$ oder $n = 3m + 2$ gilt. Dann erhalten wir aber

$$n^2 = (3m + 1)^2 = 9m^2 + 6m + 1 = 3(3m^2 + 2m) + 1$$

bzw.

$$n^2 = (3m + 2)^2 = 9m^2 + 12m + 4 = 3(3m^2 + 4m + 1) + 1$$

In beiden Fällen lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1. ❑

Aufgabe 9.14 – MO210935. Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Lösungshinweise: Wir überzeugen uns leicht durch Einsetzen der Zahlen ±5, ±4, ±3, ±2, ±1 und 0, dass Quadratzahlen bei der Teilung durch 11 nur die Reste 3, 5, 9, 4, 1 und 0 lassen. Damit die Summe zweier Quadratzahlen durch 11 teilbar ist, muss die Summe ihrer Reste durch 11 teilbar sein. Dies ist aber offenbar nur genau dann der Fall, wenn beide Quadratzahlen den Rest 0 lassen, also durch 11 teilbar sind. ❑

Aufgabe 9.15 – KZM 4-2. Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzten n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

Lösungshinweise: Durch Probieren (mit Zahlen, die auf 2 oder 8 enden) finden wir $2^2 = 4$, $12^2 = 144$ und $38^2 = 1444$. Somit gilt die Aussage mindestens für $n = 1, 2, 3$.

Angenommen, es gäbe eine Quadratzahl k^2, deren letzte vier Ziffern gleich 4 sind, also $k^2 = 10^4 \cdot a + 4444$ mit einer geeignet gewählten ganzen Zahl a. Weil 10^4 durch 16 teilbar ist und 4444 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt, lässt auch k^2 bei Division durch 16 den Rest 12. Somit ist k^2 durch 4, nicht aber durch 8 teilbar und k ist das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $k = 2 \cdot (2 \cdot b + 1)$. Daraus folgt

$$k^2 = (4 \cdot b + 2)^2 = 16 \cdot b^2 + 16 \cdot b + 4.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass k^2 bei Division durch 16 den Rest 12 lässt. Die Aussage gilt also nicht für $n = 4$ und somit auch nicht für alle $n \geq 4$. ❑

Ergänzung. Wir betrachten diese Aufgabenstellung für andere Ziffern außer 4. Untersuchen wir die Quadratzahlen der Ziffern von 0 bis 9, stehen nur die Einerziffern 0, 1, 4, 5, 6, 9 für Quadratzahlen zur Diskussion.

Fall 1: Endziffern 0. Offenbar gibt es für alle geraden Zahlen n Quadratzahlen, deren letzten n Ziffern sämtliche gleich 0 sind. Betrachten wir eine ungerade Zahl n, so können wir zunächst den Faktor $100^k = (10^k)^2$ abspalten, so dass es o.B.d.A. genügt, die Endziffern …10 zu untersuchen. Da aber eine Quadratzahl bei Division durch 4 nie den Rest 2 lässt (und die Teilbarkeit durch 4 durch die beiden letzten Ziffern der Dezimaldarstellung festgelegt ist), kann es keine Quadratzahl mit diesen Endziffern geben.

Fall 2: Endziffern von 0 verschieden. Für $n = 1$ existieren Quadratzahlen, die auf 1, 5, 6 oder 9 enden. Betrachten wir nun $n = 2$, so stellen wir fest, dass 11, 55, 66 und 99 bei Division durch 4 die Reste 2 oder 3 lassen – dies ist aber für Quadratzahlen nicht möglich. Die Aussage gilt also nicht für $n = 2$ und somit auch nicht für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 9.16 – MO220934. Jens behauptet, dass man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann. Dirk behauptet dagegen, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

Lösungshinweise: Das Quadrat einer geraden Zahl ist immer durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden lässt aber wegen

$$(2m+1)^2 = 4 \cdot (m^2 + m) + 1$$

bei der Teilung durch 4 immer den Rest 1. Also lässt die Summe zweier Quadratzahlen bei der Teilung durch 4 immer einen der Rest $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ oder $1 + 1 = 2$, nie aber den Rest 3, sodass alle unendlich vielen natürlichen Zahlen der Form $4k + 3$ (mit einer ganzen Zahl $k = 0, 1, 2, \ldots$) sich nicht als Summe zweiter Quadratzahlen darstellen lassen. Dirk hat also recht. ❑

Aufgabe 9.17 – MO100922. Jemand behauptet: Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!
b) Beweisen Sie diesen Satz!

Lösungshinweise zu Teil a): Da im Teil b) dieser Zusammenhang allgemein zu beweisen ist, können wir davon ausgehen, dass keine Einschränkungen an a und b zu stellen sind. So finden wir ohne Schwierigkeiten geeignete Zahlenbeispiele:

$$2 \cdot 5 = (1^2 + 1^2)(4^2 + 1^2) = 10 = 3^2 + 1^2$$
$$5 \cdot 25 = (4^2 + 1^2)(4^2 + 3^2) = 125 = 5^2 + 10^2$$

Lösungshinweise zu Teil b): Wir nehmen an, die Zahlen a und b haben die geforderte Eigenschaft. Dann gibt es geeignete natürliche Zahlen p, q, r und s mit $a = p^2 + q^2$ sowie $b = r^2 + s^2$. Wir formen nun das Produkt $a \cdot b$ um:

$$ab = (p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr)^2 + (ps)^2 + (qr)^2 + (qs)^2$$
$$= (pr)^2 - 2prqs + (qs)^2 + (ps)^2 + 2psqr + (qr)^2$$
$$= (pr - qs)^2 + (ps + qr)^2$$

Damit haben wir für das Produkt ab eine Darstellung als Summe zweier Quadratzahlen gefunden. ❑

Hinweis: Zählen wir die Null nicht zu den natürlichen Zahlen, so gilt die Aussage nicht mehr allgemein, falls a und b Zahlen derart sind, dass $pr = qs$ gilt. So lassen sich zwar die Zahlen $a = b = 2 = 1^2 + 1^2$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellen, für ihr Produkt $ab = 4$ gibt es aber nur die Summendarstellung $2^2 + 0^2$. Vermeiden Sie es, aufgrund eines solchen Widerspruchs die Bearbeitung der Aufgabe sofort mit der Aussage „Es gibt ein Gegenbeispiel, das den zu beweisenden Satz widerlegt“ zu beenden. Fällt der Widerspruch noch während der Zeit der Fragen an die Jury ein, zögern Sie nicht, nach der Rolle der Null bei den natürlichen Zahlen zu fragen.

Wird dagegen die Null zu den natürlichen Zahlen gezählt, dann wäre auch $a = b = 0 = 0^2 + 0^2$ ein korrektes Zahlenbeispiel bei dieser Aufgabenstellung. Sie sollten aber nicht die Lösungsdarstellung auf solch triviale Beispiele beschränken.

Auch wenn wir gleich mit der Bearbeitung von Teil b) beginnen, ist es nachträglich erforderlich, ein konkretes Zahlenbeispiel zur Beantwortung von Teil a) anzugeben.

Aufgabe 9.18 – MO361023. Beweisen Sie die folgende Aussage!

Für jede gerade natürliche Zahl n, von der vorausgesetzt wird, dass sie die Summe zweier Quadratzahlen ist, folgt: Auch $\frac{1}{2}n$ ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(Zwei Beispiele dafür, dass sowohl die Voraussetzung als auch die Behauptung erfüllt sein kann, sind etwa:

1. Beispiel: für $8 = 2^2 + 2^2$ gilt $4 = 2^2 + 0^2$;
2. Beispiel: für $34 = 5^2 + 3^2$ gilt $17 = 4^2 + 1^2$.

Natürlich ist mit solchen Beispielen die zu beweisende allgemeine Aussage nicht erbracht.)

Lösungshinweise: Wir nehmen an, für eine gerade Zahl n sei die Voraussetzung erfüllt, d.h. es gibt natürliche Zahlen a und b mit $a \geq b$ und $n = a^2 + b^2$. Da n geradzahlig ist, sind die Zahlen a und b entweder beide geradzahlig oder beide ungeradzahlig. In jedem Fall sind die Summe und die Differenz von a und b jeweils geradzahlig. So finden wir

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}n$$

Da die Basen der Quadrate auf der linken Seite dieser Gleichung natürliche Zahlen sind, ist eine geforderte Darstellung gefunden. ❑

Aufgabe 9.19 – MO150921. Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, dass das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, dass auch hier $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.

Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Lösungshinweise: Sind *a* und *b* die Basen der zwei Quadrate, so soll gelten

$$(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b) = a + b$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$(a+b)(a-b-1) = 0$$

Weil $a + b = 0$ wegen $a > b \geq 0$ entfällt, erhalten wir als notwendige Bedingung $a - b - 1 = 0$. Somit erfüllen alle Paare $(k+1; k)$ mit natürlichen Zahlen k die Bedingung, da stets $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 = (k+1) + k$ gilt. ❑

Aufgabe 9.20 – MO540944. Wir betrachten die Menge $Q = \{25, 49, 121, \dots\}$ der Quadrate aller derjenigen Primzahlen, die größer als 4 sind. Hieraus konstruieren wir die Menge D aller derjenigen positiven Zahlen, die sich als Differenz zweier Zahlen aus Q schreiben lassen.

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Menge D.

$Lösungshinweise$: Jede Primzahl $p \geq 5$ lässt sich in der Form $p = 6k \pm 1$ darstellen. Damit gilt stets

$$p^2 = (6k \pm 1)^2 = 36 \cdot k^2 \pm 12 \cdot k + 1 = 12 \cdot (3 \cdot k^2 \pm k) + 1$$

Nun ist $(3 \cdot k^2 \pm k)$ stets eine gerade Zahl, da $3 \cdot k^2$ und k entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Die Differenz je zweier Zahlen aus Q ist also stets durch 24 teilbar, und daher sind alle Elemente von D durch 24 teilbar.

Da sich jedoch auch die Differenz $7^2 - 5^2 = 24 \text{ in } D$ befindet, ist dies zugleich der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen in D. Also ist 24 der gesuchte größte gemeinsame Teiler. ❑

Wir untersuchen abschließend[3], welche natürliche Zahlen n sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen, d.h. für welche Zahlen n es natürliche Zahlen a, b, c und d gibt mit

$$n = a^2 + b^2 = d^2 - c^2$$

Wir wissen bereits, dass nicht jede natürliche Zahl diese Eigenschaft hat. Durch Probieren finden wir schnell, dass z.B. 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ($4^2 - 3^2$), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ($1^2 + 3^2$), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Im Zusammenhang mit der Aufgabe MO630931 haben wir bereits bewiesen:

Satz. Eine natürliche Zahl n lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

(a) ungerade und größer 1 ist oder
(b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

Weiterhin gilt allgemein:

Satz. Eine natürliche Zahl m lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

(a) $m = \prod_{j=1}^{k} {p_j}^{a_j}$ (wobei die Faktoren p_j Primzahlen der Form $4n + 1$ und die Exponenten a_j natürliche Zahlen sind)
(b) $m = 2 \cdot a^2$
(c) $m = n^{2r} \cdot (a^2 + b^2)$
(d) $m = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ (mit natürlichen Zahlen *n, r, a, b*)

Beweisskizze: Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist[4] und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$2 \cdot a^2 = a^2 + a^2$$
$$n^{2r} \cdot (a^2 + b^2) = (n^r \cdot a)^2 + (n^r \cdot b)^2$$

[3] Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173, siehe auch Heft 09/2021

[4] Diese Aussage ist als Zwei-Quadrate-Satz von FERMAT bekannt. Erstmalig wurde dieser Satz 1625 von ALBERT GIRARD (1595 - 1632) veröffentlicht und 1640 von PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665) erweitert. Ein erster Beweis wurde von LEONARD EULER (1707 – 1783) um 1755 veröffentlicht.

$2 \cdot (a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$ ❑

Unter Anwendung beider Aussagen finden wir durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 38 Möglichkeiten. Ordnen wir diese Tupel (a, b, c, d) nach der Größe der vierten Zahl d, so stellen wir fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit $d < 50$ erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätten wir das Suchverfahren bis $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 17^2 - 12^2 = 145$ führen müssen!

Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit $d < 50$ zu finden? Wegen $m = d^2 - c^2 = (d + c) \cdot (d - c)$ wird m in zwei Faktoren $d + c = t_1$, $d - c = t_2$, $t_1 \geq t_2$, zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit $(m; 1)$ und $\left(\sqrt{m}; \sqrt{m}\right)$ gegeben. Die Zahl d erhalten wir daraus als $d = \frac{t_1 + t_2}{2}$, d.h. es gilt: $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1+m}{2}$ bzw. $m \leq d^2$. Um also die Tabelle aller Tupel mit $d < 50$ vollständig zu finden, sind alle Zahlen m bis 2401 zu untersuchen.

Rückblick auf den 6. Tag der Mathematik[5]

Am Samstag, dem 23. März 2024, fand der 6. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Mehrere Hundert Gäste nutzten die Gelegenheit, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter knapp 220 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Mit 57 Mannschaften in den Klassenstufen 8-9 und 10-12 aus über 30 sächsischen Gymnasien und Gästen aus Tschechien, Polen und der Ukraine war die Neugierde auf die Aufgaben-Rallye wieder groß.

Die rund 30 begleitenden Lehrerinnen und Lehrer sowie weitere Mathe-Interessierte erhielten in der Wettbewerbszeit in Fortbildungsvorträgen praktische Einblicke: Anja Kluge, Kalkulatorin bei der CAC ENGINEERING GmbH[6], sprach über „Die Rolle der Mathematik im internationalen Anlagenbau“. Prof. Dr. Imma Valentina Curato, Inhaberin der Professur Statistik der TU Chemnitz, berichtete über die Mathematik

[5] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/12372 (Stand 26.03.2024)
[6] https://karriere.cac-chem.de/fileadmin/cac-karriere/documents/Interview_Anja_Kluge.pdf

des Deep-Learnings (eine Methode des maschinellen Lernens). Der Plenarvortrag „Wie viel Information steckt eigentlich in einem Bild?“ von Prof. Dr. SEBASTIAN NEUMAYER, Inhaber der Professur Inverse Probleme, zeigte den Weg von einem einfachen diskreten Modell für die Speicherung digitaler Abbilder (das jedoch einen erheblichen Speicherbedarf erfordert) zu effizienten Kodierungsansätzen, die schließlich zum JPEG 2000 Standard führten.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit. In der Klassenstufe 8-9 siegte ein Team des Kepler-Gymnasiums Chemnitz knapp vor der Konkurrenz aus dem Städtischen Gymnasium Mittweida, gefolgt von zwei Teams des Schmidt-Rottluff-Gymnasiums Chemnitz und des Teams aus dem Gymnasium Olbernhau.

In der Klassenstufe 10-12 behaupteten sich zwei Teams des Kepler-Gymnasiums Chemnitz an der Spitze. Auf den Plätzen folgten gemischte Teams aus dem Lessing-Gymnasium Kamenz, dem Evangelischem Kreuzgymnasium Dresden und dem Sächsisches Landesgymnasium Sankt Afra bzw. aus dem Sportcampus Klingenthal, dem Wieck-Gymnasium Zwickau und dem Gymnasium Dresden-Bühlau. Das Team der Landesschule Pforta schaffte es punktgleich auf Rang 5, so dass hier die benötigte Bearbeitungszeit über die Platzierung entscheiden musste.

Außerdem gewannen unter den internationalen Teams das Team aus dem Gymnasium „F. X. ŠALDY“ Liberec den Sonderpreis des Rektors der TU Chemnitz, Prof. Dr. GERD STROHMEIER, sowie das Team „UKR-Mathezirkel TUC“ den Sonderpreis des Dekans der Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. DANIEL POTTS.

Termine

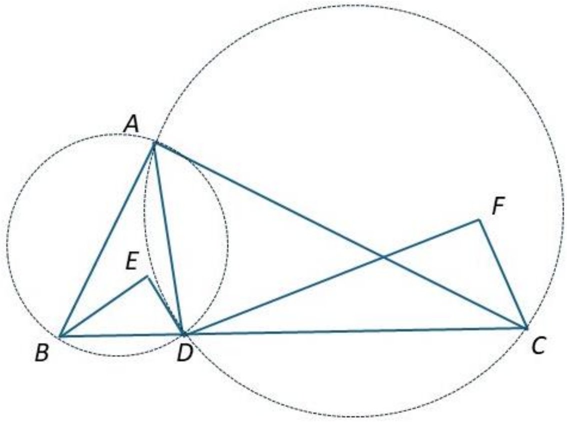
Känguru der Mathematik (Wettbewerb am 18.04.2024). Informationen unter www.mathe-kaenguru.de/wettbewerb/index.html

Spotlight Mathe: Lösungsupdate aus dem Bundeswettbewerb Mathematik.
Wettbewerbseinblicke im Livestream (Bildung & Begabung gGmbH Bonn), 24. April 2024, 17:30 - 18:30 Uhr.
Online-Anmeldung bis 24. April 12:00 Uhr unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/erwachsene/mathematiklehrkraefte-2024-1 erforderlich.

63. Mathematik-Olympiade, Bundesrunde. 6. bis 9. Juni 2024, Flensburg (Schleswig-Holstein). Informationen unter https://mo2024.de/.

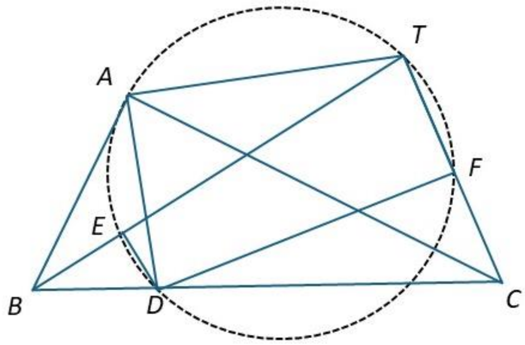
Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 2/2024

Aufgabe I-3 (15. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade (Zagreb, Kroatien, 2021). Seien ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Strecke $\overline{BC}$. Die Punkte E und F liegen derart in der von der Geraden BC bestimmten Halbebene, die A enthält, dass DE senkrecht auf BE steht und DE eine Tangente an den Umkreis von ΔACD ist, während DF senkrecht auf CF steht und DF eine Tangente an den Umkreis von ΔABD ist.



Skizze[7]

Man zeige, dass die Punkte A, D, E und F auf einem Kreis liegen.



Lösungshinweise: Wir bezeichnen mit T den Schnittpunkt von BE und CF. Da im Viereck $DFTE$ wegen $\angle DFT + \angle TED = 90° + 90° = 180°$ die Summen gegen-überliegender Winkel 180° betragen, ist $DFTE$ ein Sehnenviereck und die Punkte D, F, T, E liegen auf dessen Umkreis.

Weil DE eine Tangente am Umkreis des Dreiecks ΔACD ist, gilt nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz über der Sehne $\overline{AD}$ die Winkelgleichheit $\angle ADE = \angle ACD$. Weil DF eine Tangente am Umkreis des Dreiecks ΔABD ist, gilt ebenso nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz über der Sehne $\overline{AB}$ auch die Winkelgleichheit $\angle FDA = \angle DBA$. Damit finden wir die Gleichung $\angle FDE = \angle ACD + \angle DBA$. Weil D ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$ ist, gilt also auch $\angle FDE = \angle ACB + \angle CBA$ und nach Innenwinkel-summensatz im Dreieck ΔABC auch $\angle FDE = 180° - \angle ACB$.

Unter Berücksichtigung, dass E ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BT}$ ist, erhalten wir wegen $\angle ETF + \angle FDE = 180°$ im Sehnenviereck $DFTE$ die Gleichung

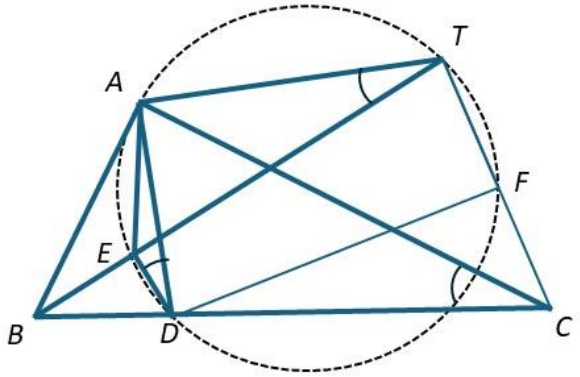
$$\angle BTC = \angle ETF = 180° - \angle FDE = 180° - (180° - \angle BAC) = \angle BAC$$

Folglich liegt nach Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes über der Seite $\overline{BC}$ der Punkt T auf dem Umkreis des Dreieckes ΔABC.

Weiterhin finden wir

[7] Bei geometrischen Aufgabenstellungen sind im Allgemeinen keine Skizzen enthalten. Es gehört zur vollständigen Lösungsdarstellung, die Zusammenhänge zu visualisieren und dabei die gegebenen Punkte und erforderlichen Hilfspunkte anzugeben.

$\angle ATE = \angle ATB$ (weil E ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BT}$ ist)
$= \angle ACB$ (nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AB}$ im Umkreis des Dreiecks ΔABC)
$= \angle ACD$ (weil D ein innerer Punkt der Strecke $\overline{BC}$ ist)
$= \angle ADE$ (nach Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AE}$ im Umkreis des Dreiecks ΔAED).



Damit liegt nach Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes über der Seite $\overline{AE}$ der Punkt T auch auf dem Umkreis des Dreieckes ΔAED.

Die Kreise durch D, F, T, E und durch A, E, D, T sind durch die drei Punkte D, E und T bereits eindeutig bestimmt und fallen somit zusammen, Insbesondere liegen auch A, E, F und D auf diesem Kreis. ❑

Monatsaufgabe 04/2024[8]

Bestimme sowohl den größtmöglichen als auch den kleinstmöglichen Wert, den der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\right)$$

für nichtnegative reelle Zahlen a, b und c mit $ab+bc+ca=1$ annehmen kann.

[8] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.05.2024 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe[9]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
04/2024 (April)	Thema 9.3	Differenzen von Quadraten	MO630931 KZM 4-2
03/2024 (März)	Thema 27	Rechnen mit Polynomen	KZM 4-5A
02/2024 (Febr.)	Thema 12.6	Zerlegung einer Trapezfläche	
01/2014 (Jan.)	Thema 12.5	Zerlegung einer Dreiecksfläche	MO630924
12/2023 (Dez.)	Thema 25.2	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
11/2023 (Nov.)	Thema 26	Geometrischer Ort	MO631015
11/2023 (Nov.)	Thema 25.1	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO631014
10/2023 (Okt.)	Thema 13.2	Bewegungsaufgaben	MO621044 MO621022 MO620944 MO620922
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep.)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041 MO620941

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[9] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.