

Barth · Federle · Haller

Algebra

7



Ehrenwirth

Algebra

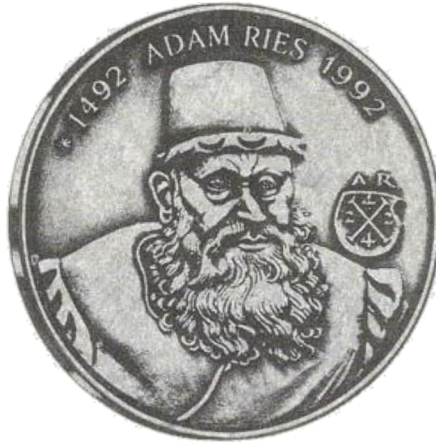
7

Friedrich Barth · Reinhold Federle
Rudolf Haller

Ehrenwirth

Viel lernen und nachher viel wissen,
das ist keine Kunst.

NESTROY



Adam-Ries-Preis 1993

Autoren und Verlag wurden für die Lehrbücher
Algebra 7 bis *Algebra 10*
mit dem Adam-Ries-Preis 1993 ausgezeichnet,
der vom Adam-Ries-Bund e.V.
Annaberg-Buchholz verliehen wird.

5., verbesserte Auflage 1996

ISBN 3-431-02644-3
Alle Rechte bei Ehrenwirth Verlag GmbH, München
Zeichnungen: Eduard Böhm
Umschlag: Gert Krumbacher
Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau
Printed in Germany 1996d

Inhalt

Vorwort	7
1 Grundbegriffe der Algebra	9
** 1.1 Woher kommt und was ist Algebra?	10
1.2 Variablen	12
** Zur Geschichte der Variablen	15
Aufgaben	17
1.3 Terme	21
Aufgaben	25
1.4 Definitionsmenge eines Terms	27
Aufgaben	29
** Zur Geschichte unserer Fachausdrücke	30
2 Die rationalen Zahlen und ihre Rechengesetze	35
2.1 Die Zahlenmenge $\mathbb{B}$ reicht nicht aus!	36
Aufgaben	38
2.2 Einführung der negativen Zahlen	38
** Zur Geschichte der Fachwörter <i>positiv</i> und <i>negativ</i>	40
Aufgaben	41
2.3 Zahl und Gegenzahl, absoluter Betrag	41
Aufgaben	45
2.4 Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen	45
2.4.1 Definition der Addition	45
2.4.2 Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Q}$	50
Aufgaben	53
2.4.3 Die Subtraktion in $\mathbb{Q}$	54
Aufgaben	58
2.5 Anordnung der rationalen Zahlen	60
2.5.1 Definition der Anordnung in $\mathbb{Q}$	60
2.5.2 Monotoniegesetz der Addition	61
Aufgaben	62
2.6 Multiplikation und Division von rationalen Zahlen	63
2.6.1 Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$	63
2.6.2 Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{Q}$	67
Aufgaben	69
2.6.3 Division in $\mathbb{Q}$	71
Aufgaben	74
2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten	75
Aufgaben	78

4	Inhalt	
2.7	Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen	78
2.7.1	Das Distributivgesetz	78
	Aufgaben	80
2.7.2	Die Monotoniegesetze der Multiplikation	80
	Aufgaben	82
2.7.3	Zusammenstellung der Rechengesetze	83
	Aufgaben	84
**	Zur Geschichte der negativen Zahlen	85
3	Einfache Termumformungen	87
3.1	Äquivalente Terme	88
	Aufgaben	94
3.2	Potenzen	95
	Aufgaben	99
3.3	Umgang mit Klammern	101
3.3.1	Rechenzeichen und Vorzeichen	102
	Aufgaben	103
3.3.2	Plusklammern	103
	Aufgaben	104
3.3.3	Minusklammern	105
	Aufgaben	107
3.3.4	Faktor bei der Klammer	107
	Aufgaben	108
3.3.5	Schachtelklammern	110
	Aufgaben	111
4	Gleichungen	113
4.1	Aussagen und Aussageformen	114
4.1.1	Definitionen	114
	Aufgaben	116
4.1.2	Existenzaussagen und Allaussagen	117
	Aufgaben	118
4.2	Lösen von Gleichungen	119
4.2.1	Gleichung als Information über eine unbekannte Zahl	119
4.2.1.1	Ein historisches Beispiel	119
4.2.1.2	Die Unbekannte	120
	Aufgaben	122
4.2.1.3	Die Gleichung als Aussageform	122
4.2.1.4	Die Probe	123
	Aufgaben	123
4.2.1.5	Was kann eine Information leisten?	124
	Aufgaben	125

4.2.2	Äquivalenzumformungen von Gleichungen	125
4.2.2.1	Äquivalenz von Gleichungen	125
	Aufgaben	126
4.2.2.2	Äquivalenzumformung durch Termersetzung	126
	Aufgaben	128
4.2.2.3	Äquivalenzumformung durch Addition von Termen	128
	Aufgaben	130
4.2.2.4	Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit Termen	131
	Aufgaben	132
4.2.2.5	Mehrfache Äquivalenzumformungen	133
	Aufgaben	134
**4.2.2.6	Die Äquivalenzumformungen des AL-CHARIZMI oder was bedeutet Algebra?	138
4.2.3	Produkte mit dem Wert null	139
	**Zur Geschichte der Null	140
	Aufgaben	141
5	Ungleichungen	143
5.1	Was ist eine Ungleichung?	144
5.2	Äquivalenzumformungen von Ungleichungen	145
5.3	Lösen von Ungleichungen	148
5.3.1	Intervalle	148
	Aufgaben	150
5.3.2	Kleiner- und Größer-Ungleichungen	151
	Aufgaben	152
5.3.3	Höchstens- und Mindestens-Ungleichungen	152
	Aufgaben	153
5.3.4	Doppelungleichungen	154
	Aufgaben	156
5.3.5	Ungleichungen mit Absolutbeträgen	156
	Aufgaben	158
6	Textaufgaben	159
6.1	Wie löst man Textaufgaben?	160
	Aufgaben	164
6.2	Wichtige Typen von Textaufgaben	166
6.2.1	Bestimmung von Zahlen	167
	Aufgaben	167
6.2.2	Bestimmung des Alters	168
	Aufgaben	169
6.2.3	Prozentaufgaben	170
	**Zur Geschichte des Prozentbegriffs	171

6.2.4	Mischungsaufgaben	173
6.2.5	Leistungsaufgaben	176
6.2.6	Aufgaben aus der Geometrie	178
7	Schwierigere Termumformungen	181
7.1	Multiplikation von Aggregaten	182
	Aufgaben	184
7.2	Binomische Formeln	187
	Aufgaben	188
7.3	Quadrate von Aggregaten	193
	Aufgaben	194
**7.4	Höhere Potenzen von Binomen	195
	Aufgaben	197
7.5	Die Kunst des Faktorisierens	198
7.5.1	Einfaches Ausklammern	198
	Aufgaben	199
7.5.2	Mehrfaches Ausklammern	200
	Aufgaben	201
7.5.3	Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln	202
	Aufgaben	203
7.5.4	Faktorisieren durch Probieren	204
	Aufgaben	205
	Register	206
	Bildnachweis	208

Bildnisse von Mathematikern

Al-Charizmi 10.1 – Boethius 33.2 – Cardano 171.1 – Descartes 121.1 – Euler 102.1 – Hamilton 90.1 – Hankel 86.2 – Leibniz 33.1 – Peacock 86.1 – Stevin 186.2 – Tartaglia 186.1 – Viète 16.1 – Wallis 149.1 – Weierstraß 43.1 – Wolff 40.1

Vorwort

Die Algebra ist das unbedingt nötige Handwerkszeug für nahezu den gesamten Bereich der Mathematik. Aus diesem Grund ist eine sorgfältige und intensive Beschäftigung mit der Algebra für jeden unerlässlich, der sich in der Mathematik betätigen will. Im vorliegenden Buch wird versucht, den Algebra-Stoff der 7. Jahrgangsstufe sowohl schülergerecht als auch sachgerecht darzustellen. Wir wollen die Mathematik nicht zu einer Rezeptsammlung verkommen lassen. Also muß das Buch vielfach recht ausführlich und manchmal auch anspruchsvoll sein. Vorgeführte Beispiele sollen die Sätze und Definitionen bekömmlicher machen. Die vielfältigen geschichtlichen Exkursionen zeigen die Entwicklung der Ideen und Begriffe in einem weiteren Rahmen und interessieren vielleicht auch Schüler, die der reinen Mathematik nicht so wohlgesonnen sind.

Nach einer kurzen ersten Einführung der fundamentalen Begriffe *Variable* und *Term* erweitern wir zuerst den aus der 6. Klasse bekannten Zahlenbereich der positiven Brüche zur Menge der rationalen Zahlen, damit die dann folgenden Termumformungen ohne Einschränkung behandelt werden können. Wir legen Wert darauf, daß auch Bruchzahlen in den Beispielen und Aufgaben auftreten, damit die Schüler das Arbeiten mit ihnen nicht wieder verlernen. Der Umgang mit absoluten Beträgen und Potenzen wird geübt, weil er für später große Bedeutung hat. Das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen auch im Zusammenhang mit Textaufgaben soll dann zeigen, daß die Algebra recht nützlich sein kann, wenn es gilt, verwickeltere Probleme zu untersuchen. Die in Kleindruck gesetzten Abschnitte sind als Ergänzung und Vertiefung gedacht und können bei Zeitnot weggelassen werden.

Die ungewöhnlich große Anzahl der Übungsaufgaben bietet dem Lehrer Auswahlmöglichkeiten und dem Schüler zusätzliche Übungsmöglichkeiten. Algebra lernt man nur durch viel eigenes Üben!

Wir haben uns bemüht, nicht nur triviale, sondern auch schwierigere Aufgaben anzubieten, die zum Teil auch mehr Mühe machen werden. Nur so schärft sich der Geist mit der Zeit, und nur so erreicht der Schüler die Sicherheit, die er später braucht. Die Aufgaben sind dem Schwierigkeitsgrad nach gekennzeichnet, außerdem wird eine kleine Auswahl als Pflichtstoff herausgestellt.

Grundlage des vorliegenden Buchs ist die Algebra 1 von SEEBACH-FEDERLE, die von der Konzeption her Pate gestanden hat und aus der viele bewährte Aufgaben übernommen wurden.

München, im September 1985

Die Verfasser

Kennzeichnung der in Bayern nicht allgemein verbindlichen Stoffgebiete

Fakultative Abschnitte sind durch zwei vorangestellte Sterne (**) gekennzeichnet.

Kennzeichnung der Aufgaben

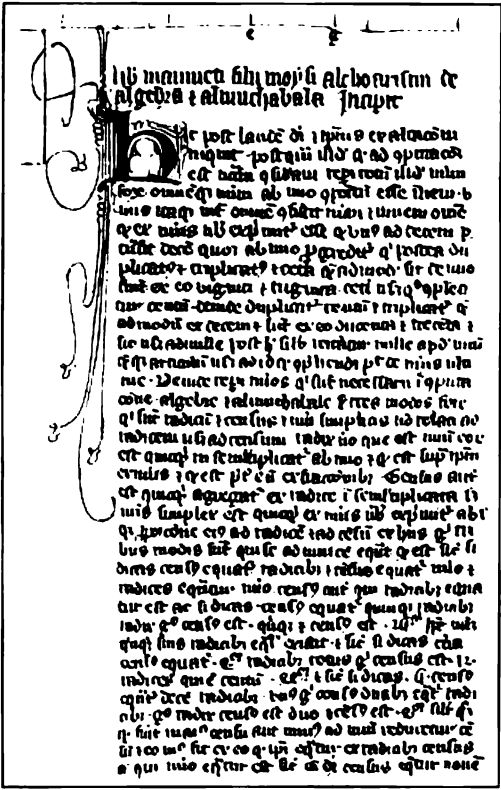
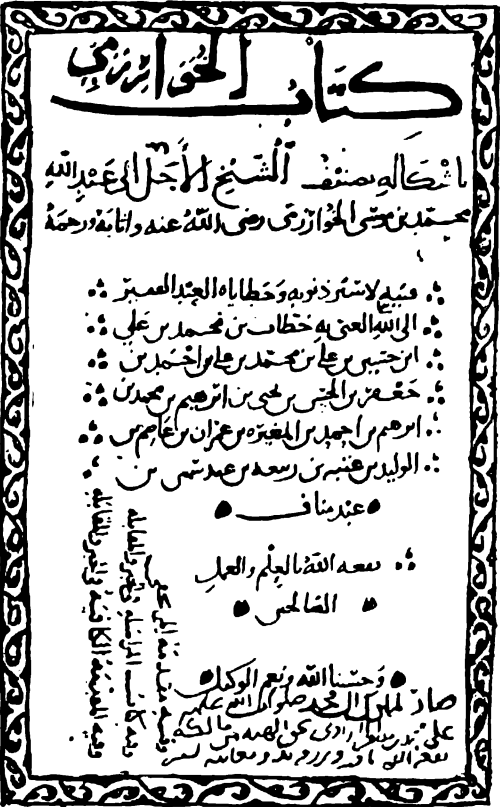
Rote Zahlen bezeichnen Aufgaben, die auf alle Fälle bearbeitet werden sollen. ● bzw. ⚡ usw. bezeichnen Aufgaben, die etwas mehr Ausdauer erfordern, weil sie entweder schwieriger oder zeitraubender oder beides sind. Je mehr Punkte, desto mehr Mühe! Zitiert werden die Aufgaben unter Angabe der Seite und der Nummer. So bedeutet 18/10 die Aufgabe 10 auf Seite 18.

Numerierung von Definitionen, Sätzen, Abbildungen und Tabellen

Die Zahl vor dem Punkt gibt die Seite an, die Zahl nach dem Punkt numeriert auf jeder Seite. Abb. 14.3 bedeutet beispielsweise die 3. Abbildung auf Seite 14.

1 Grundbegriffe der Algebra

وفيه يليه ندرسه في الحساب ثم كتاب المقدمة كما مر وأيضاً للمرحوم الله أبو
نوح كتاب المراسلة في الحساب القامد



Titelblatt der ältesten erhaltenen arabischen Handschrift von *al-Kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-l-muqabala* des ABU ABDALLAH MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) von 743 anno Hegirae = 1342 anno Domini, aufbewahrt in Oxford

Liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala. Übersetzung des arabischen Textes ins Lateinische durch GERHARD VON CREMONA (1114–1187), um 1360 in Frankreich geschrieben, aufbewahrt in der Universitätsbibliothek von Cambridge (Mm. 2.18, folium 65r)

1 Grundbegriffe der Algebra

** 1.1 Woher kommt und was ist Algebra?

ABU ABDALLAH MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHARIZMI*, zu deutsch »MUHAMMAD, Vater des ABDALLAH, Sohn des MOSES, aus Choresmien stammend«, war Astronom und Mathematiker. Unter dem Kalifen** AL-MA'MUN, der von 813 bis 833 in Bagdad regierte, wurde AL-CHARIZMI – so wollen wir diesen Mann immer nennen – Mitglied des »Hauses der Weisheit«, an dem viele Gelehrte arbeiteten. Man nimmt daher an, daß AL-CHARIZMI um 780 geboren wurde. Und wenn die Geschichte wahr ist, daß AL-CHARIZMI einer der Astronomen war, die, 847 ans Krankenbett des Kalifen AL-WATIQ gerufen, diesem auf Grund seines Horoskops noch weitere 50 Lebensjahre voraussagten – der Kalif starb nichtsdestotrotz 10 Tage später –, dann wissen wir, daß AL-CHARIZMI erst nach 847 gestorben ist.

Mehr aber wissen wir nicht über das Leben dieses Mannes, der uns mehrere Bücher hinterlassen hat, darunter eines, das von vielen Menschen immer wieder studiert wurde. Wie heißt dieses Buch? Und was steht in diesem Buch geschrieben? AL-CHARIZMI selbst gibt uns im Vorwort seines Buches die Antwort:

»Jene Liebe zur Wissenschaft, mit der GOTT den Imam AL-MA'MUN, Beherrscher der Gläubigen, ausgezeichnet hat, [...] jene Güte und gönnerehafte Herablassung, die er den Lernenden erweist, jene Bereitwilligkeit, mit der er sie beschützt und unterstützt, wenn sie Licht in die dunklen Dinge bringen und Schwieriges bewältigen – all dies hat mich ermutigt,***

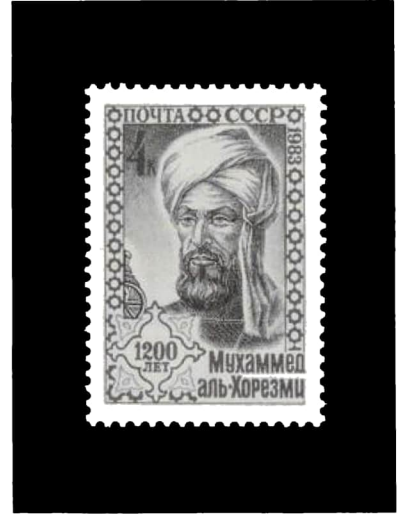


Abb. 10.1 4-Kopeken-Marke der Post der UdSSR (1983) zum 1200. Jahrestag der Geburt AL-CHARIZMIS

AL-KITAB AL-MUCHTASAR FI HISAB AL-DSCHABR WA-'L-MUQABALA

ein kurzgefaßtes Buch über das Rechnen durch Wiederherstellen und Ausgleichen

zu schreiben, dabei mich aber zu beschränken auf das Anmutige und Hochgeschätzte des Rechenverfahrens für das, was die Leute fortwährend notwendig brauchen bei ihren Erbschaften und ihren Vermächtnissen, bei ihren Teilungen, ihren Prozeßbescheiden, ihren Handelsgeschäften und bei allem, womit sie sich gegenseitig befassen, aber auch handelnd von der Ausmessung der Ländereien, der Herstellung von

* Sprich das z wie ein stimmhaftes s, das a betont und dunkel fast wie ein o. – ABDALLAH bedeutet Knecht Gottes.

** Kalif (von *chálifa* = *Stellvertreter*) ist die arabische Bezeichnung für den Nachfolger des Propheten MOHAMMED als weltlichem Oberhaupt der muslimischen Gemeinschaft; das geistliche Oberhaupt trägt den Titel Imam, zu deutsch Vorbild. Den Kalifentitel führten zuletzt die türkischen Sultane. Seit dem 3. März 1924 gibt es keinen Kalifen mehr.

*** Betone kitáb, muchtásar, hisáb, muqábala. – Das q ist ein tief in der Kehle gesprochenes k. Mit dieser Beschreibung wurde das Buch von späteren Gelehrten zitiert, da ihm AL-CHARIZMI selbst keinen Titel gegeben hat.

Kanälen, der Geometrie und dergleichen anderm nach seinen Gesichtspunkten und Arten.

Im Vertrauen auf die gute Absicht, die diesem Buch zugrunde liegt, hoffe ich, daß diejenigen, die nun bewandert in dieser Rechenkunst geworden sind, mich belohnen werden, indem sie durch ihre Gebete mich der göttlichen Gnade teilhaftig werden lassen.«

Wir wissen nicht, ob AL-CHARIZMI der erste war, der den Wörtern *al-dschabr* und *al-muqabala* einen mathematischen Sinn gab. Was bedeuten sie überhaupt? Darüber streiten bis heute die Gelehrten! Einig ist man sich wenigstens darüber, daß das Substantiv *al-muqabala* vom Verbum *qabala* kommt, das »einander gegenüberstellen« bedeutet. Bei *al-dschabr* gehen die Meinungen aber weit auseinander. Viele Gelehrte vertreten die Ansicht, daß ihm das Verbum *dschabr* zugrunde liege in seiner Bedeutung von »ein ausgerenktes oder gebrochenes Glied wieder einrichten«. Wir werden später sehen, welchen mathematischen Sinn diese beiden Ausdrücke bei AL-CHARIZMI haben (Seite 138). Andere Gelehrte weisen darauf hin, daß *dschabr* auch die allgemeinere Bedeutung von »zwingen« hat. Deswegen erklärt der Mathematiker AL-KARADSCHI († 1019/29)*, *al-dschabr* sei die Kunst, eine unbekannte Zahl immer näher in das Reich des Bekannten zu zwingen.

Einige Gelehrte vertreten eine ganz andere Ansicht. Sie sagen, bei den alten Assyrrern (um 1600 v. Chr.) habe es in der Mathematik bereits ein Wort *gabru* gegeben, das die Bedeutung von »gleich sein, einander gegenüberstellen« gehabt habe. Auf verschlungenen Wegen sei die Kenntnis von dieser Rechenkunst schließlich zu den Arabern gekommen und diese hätten *gabru* wie *dschabr* ausgesprochen und mit *muqabala* übersetzt. Dann sei die ursprüngliche Bedeutung von *al-dschabr* vergessen worden und man habe die oben angegebene Erklärung vom »Einrichten gebrochener Knochen« erfunden. Wenn das alles stimmt, dann war es die Absicht des AL-CHARIZMI,

ein kurzgefaßtes Buch über das Rechnen mittels Gleichungen

zu verfassen.

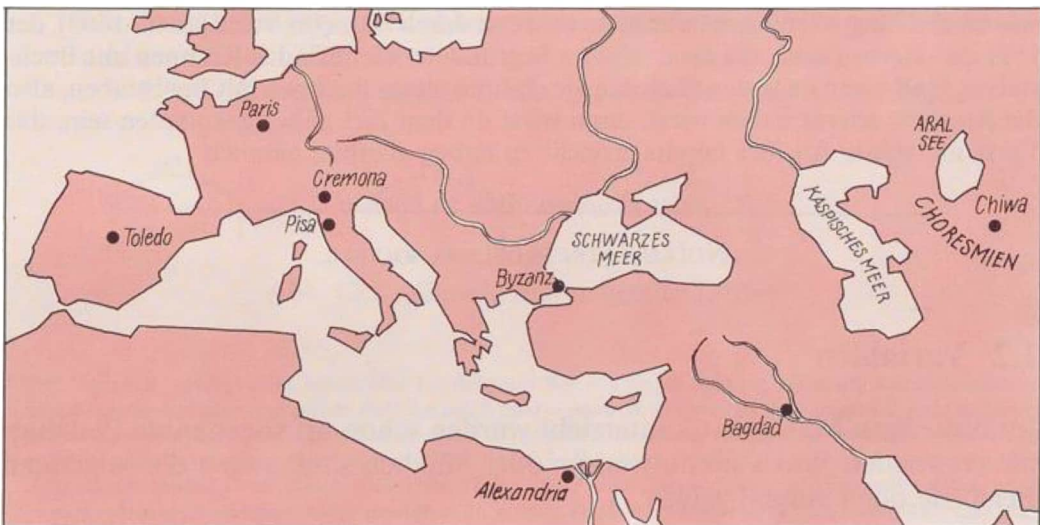


Abb. 11.1 Die Welt der Algebra bis zur Neuzeit

* Sein eigentlicher Name ist ABU BAKR MUHAMMAD IBN AL-HASAN AL-HASIB AL-KARADSCHI. Auch er lebte und wirkte in Bagdad.

Natürlich ist uns das Original nicht erhalten geblieben. Die älteste arabische Abschrift davon, die wir kennen, stammt aus dem Jahre 743 der Hedschra, d. h. aus dem Jahre 1342 unserer Zeitrechnung. Und wie ist dieses Buch zu uns nach Europa gekommen? Du weißt vielleicht schon, daß im Jahre 711 die Araber fast ganz Spanien eroberten und in Córdoba ein prächtiges Kalifat gründeten. Muslime, Christen und Juden lebten dort in Eintracht zusammen und widmeten sich auch den Wissenschaften. So soll die Bibliothek des Kalifen von Córdoba an die 600 000 Handschriften besessen haben! Die Kunde von der Gelehrsamkeit der Araber drang, von den Teilnehmern an den Kreuzzügen bestätigt, ins christliche Europa, in dem um die Mitte des 11. Jh.s ein Aufschwung wissenschaftlichen Denkens einsetzte. Man interessierte sich wieder für die Werke der alten griechischen Philosophen und Wissenschaftler und mußte feststellen, daß sie vielfach nur mehr in arabischer Übersetzung erhalten waren. Deshalb richtete der Erzbischof RAIMUND (zwischen 1130 und 1150) in Toledo, das König Alfons VI. von Kastilien und León den Arabern 1085 entrissen hatte, eine große Übersetzerschule ein, um die arabischen Texte ins vertraute Latein übertragen zu lassen. In dieses Toledo zog es auch den 1114 in Cremona geborenen GERHARD. Und die Stadt des Wissens und der Bücher ließ ihn nicht mehr los; 1187 verstarb er dort. Über 90 Werke aus der Philosophie, der Astronomie, der Mathematik, der Alchimie und der Medizin hat er aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Darunter auch das in der arabischen Welt berühmt gewordene Rechenbuch des AL-CHARIZMI. GERHARD VON CREMONA nannte es

liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala.

Natürlich besitzen wir auch von der Übersetzung nicht das Original, sondern nur eine Abschrift aus dem 14. Jh. GERHARD VON CREMONA schrieb für das arabische *al-dschabr* einfach *algebra*, weil man damals ein so geschriebenes Wort wie »aldschebra« aussprach*. *Algebra et almuchabala* wurden durch GERHARD in Europa zum Namen einer mathematischen Wissenschaft, die man in Italien später auch *Ars magna* – Die große Kunst – nannte.

Im 14. Jh. verschwand das *et almuchabala* immer mehr, und 1577 erschien es zum letzten Mal im Titel eines Buchs. Von da an hieß diese Kunst nur mehr *Algebra*. Zu einer wahrlich großen Kunst wurde sie aber erst durch François VIÈTE (1540–1603), der 1591 die *Algebra nova*, die *neue Algebra* begründete, nämlich das Rechnen mit Buchstaben. Und wenn du in den nächsten vier Jahren dieses Rechnen mit Buchstaben, also die Algebra, erlernt haben wirst, dann wirst du dem Ziel näher gekommen sein, das VIÈTE mit seiner Algebra bereits erreicht zu haben glaubte, nämlich

jedes Problem lösen zu können

NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.

1.2 Variablen

Im bisherigen Mathematikunterricht wurden schon oft sogenannte Platzhalter verwendet. Wozu sie notwendig oder nützlich sind, sollen die folgenden Beispiele noch einmal zeigen.

* Ins Spanische und Portugiesische ging dieses *algebra* in der alten Bedeutung des Einrichtens von Knochen ein; denn der Wundarzt heißt in diesen Sprachen *algebrista*.

Beispiel 1:

Auf die Frage des Lehrers »Wie berechnet man den Rauminhalt eines Quaders?« antwortet Hans: »Wenn die Kantenlängen z. B. 5 cm, 6 cm und 7 cm sind, muß man $5 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 210 \text{ cm}^3$ rechnen.«

Uli beantwortet dieselbe Frage so: »Man muß das Produkt aus Länge, Breite und Höhe des Quaders bilden, um das Volumen zu erhalten.«

Hans hat nichts Falsches gesagt, aber Ulis Antwort ist sicher besser! Denn während Hans nur an einem *Beispiel* die Volumenberechnung vorführt, gibt Uli die *allgemeine Regel* an, nach welcher diese Aufgabe für jeden Quader gelöst werden kann.

Um diese allgemeine Regel übersichtlich anschreiben zu können, benützt man für die verschiedenen Größen abkürzende Bezeichnungen, z. B. l für die Länge, b für die Breite, h für die Höhe und V für das Volumen.

Dann lautet die Regel:

$$V = l \cdot b \cdot h.$$

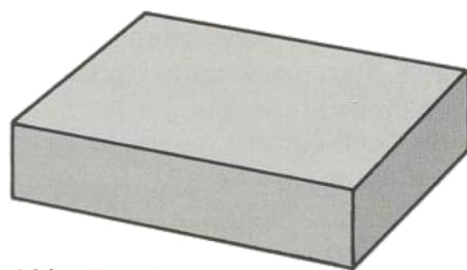


Abb.13.1 Quader

Beispiel 2:

Die Zahlen 2, 4, 6, 8, ..., also die Vielfachen von 2, nennt man bekanntlich *gerade Zahlen**. Außerdem wird wegen $0 = 0 \cdot 2$ auch null als gerade Zahl aufgefaßt. Das läßt sich kurz so zusammenfassen:

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $z = 2 \cdot n$ eine gerade Zahl.

Man nennt die Angabe » $z = 2 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}_0$ « das *Bildungsgesetz* für die geraden Zahlen.

Da man alle ungeraden Zahlen erhält, wenn man zu jeder geraden Zahl 1 addiert (Abb. 13.2), gilt:

$z = 2 \cdot n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, ist das Bildungsgesetz der ungeraden Zahlen.

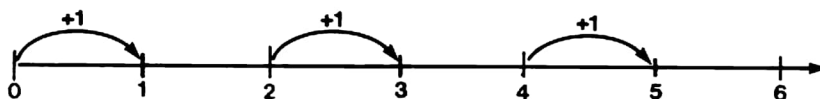


Abb. 13.2 Gerade und ungerade Zahlen

* Die Griechen belegte zum ersten Mal bei dem um 500 v. Chr. in Syrakus lebenden Komödiendichter EPICARMOS – nannten eine **gerade Zahl** ἄρτιος (ártios) = *passend, angemessen*, eine **ungerade Zahl** περισός (perissós) = *über das Gewöhnliche hinausgehend, übrigbleibend*, was man vielleicht so verstehen kann, wie es EUKLID im Buch VII seiner *Elemente* ausdrückt, nämlich, daß die ungerade Zahl sich um 1 von der geraden Zahl unterscheidet. Diese griechischen Ausdrücke finden ihre Entsprechung im Englischen durch *even* = *ausgeglichen, gerecht*, und *odd* = *sonderbar, überzählig*. Die Römer sagten seit CICERO (106–43 v. Chr.) *par* und *impar*, was im Französischen als *pair* und *impair* weiterlebt und 1461 in einer Münchener Handschrift mit *gleich* und *ungleich* wörtlich übersetzt wurde. Vielleicht rührt diese Bezeichnung davon her, daß sich eine gerade Zahl in zwei *gleiche* Teile zerlegen läßt. Diese Ausdrücke hielten sich bis ins 18. Jh. Unsere Bezeichnungen *gerade* und *ungerade* tauchen im 15. Jh. auf und finden sich 1489 im Rechenbuch des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500).

Beispiel 3:

Der Wert einer Summe ändert sich bekanntlich nicht, wenn man die beiden Summanden vertauscht. So gilt z. B. $3 + 5 = 5 + 3$. Aber einzelne Zahlenbeispiele, und seien es noch so viele, können diesen Sachverhalt nicht allgemeingültig zum Ausdruck bringen. Bezeichnet man aber den einen Summanden mit a , den anderen mit b , so gilt in jedem Fall $a + b = b + a$. Das heißt: Setzt man für a und für b beliebig je eine Zahl ein, so ist die erhaltene Gleichung immer richtig.

Die vorausgehenden Beispiele zeigen, wie man einen mathematischen Sachverhalt durch Verwendung von sog. Platzhaltern klar und einfach beschreiben kann. Statt des umgangssprachlichen Wortes »Platzhalter« verwendet man in der mathematischen Fachsprache den Begriff »Variable«*. Die Festlegung von Fachwörtern geschieht in der Mathematik durch Definitionen**. Wir merken uns

Definition 14.1: Ein Zeichen, das man als Platzhalter für Zahlen verwendet, nennt man **Variable**.

Als Variablen werden in der Regel Buchstaben benützt. Diese Buchstaben selbst sind natürlich keine Zahlen. Wenn wir trotzdem von einer »Zahl x « sprechen, so ist das ein kurzer Ausdruck für »die Zahl, die wir uns für die Variable x eingesetzt denken«. Ebenso ist die »Summe aus den Zahlen a und b « eine Kurzform für »die Summe aus den für a und b eingesetzten Zahlen«. Auf Grund dieser Vereinbarung kann man also mit Buchstaben wie mit Zahlen rechnen.

Rechenausdrücke, in denen Variablen vorkommen, erhalten erst dann die Bedeutung von Zahlen, wenn man *alle* Variablen durch Zahlen ersetzt. Dabei ist es wichtig zu wissen, welche Zahlen für eine bestimmte Variable eingesetzt werden dürfen. Man nennt die Gesamtheit dieser Zahlen die **Grundmenge** für diese Variable.

Im Beispiel 3 kann man sowohl für a als auch für b jede beliebige Zahl einsetzen, also jeweils $\mathbb{B}$ als Grundmenge benützen.*** Dagegen ist für die Variable n des Beispiels 2 nur die Grundmenge $\mathbb{N}_0$ sinnvoll.

In vielen Fällen können wir uns die Angabe der Grundmenge ersparen durch die

Vereinbarung 14.1: Wenn nichts anderes angegeben ist, soll immer die Menge aller uns bekannten Zahlen als Grundmenge verwendet werden, zunächst also die Menge $\mathbb{B}$.

* variabilis (lat.) = veränderlich

** definire (lat.) = abgrenzen, näher bestimmen, festsetzen

*** $\mathbb{B}$ ist die Menge aller Zahlen, die als Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ darstellbar sind.

Kommt in einem Rechenausdruck oder einer Gleichung bzw. Ungleichung dieselbe Variable mehrmals vor, so muß man beim Einsetzen diese Variable an jeder Stelle durch *die gleiche Zahl* ersetzen. So hat man etwa bei der im Beispiel 3 angegebenen Gleichung für die Variable a auf beiden Seiten dieselbe Zahl einzusetzen; das Entsprechende gilt auch für b . Selbstverständlich kann man aber für verschiedene Variablen auch die gleiche Zahl einsetzen.

Regel 15.1: Innerhalb desselben Rechenausdrucks bzw. derselben Gleichung oder Ungleichung muß man beim Einsetzen gleiche Variablen durch gleiche Zahlen ersetzen.

Man könnte als Variablen an Stelle von Buchstaben noch sinnfälliger verschiedene geometrische Figuren verwenden. Eine bestimmte geometrische Figur würde dann die Stellen bezeichnen, welche mit derselben Zahl besetzt werden müssen; man spricht deshalb auch von **Leerstellen**. Zum Beispiel ließe sich die Gleichung $a + b = b + a$ auch durch Abbildung 15.1 zum Ausdruck bringen:

$$\bigcirc + \diamond = \diamond + \bigcirc$$

Abb. 15.1 Kommutativgesetz der Addition

Man kann in die Kreise irgendeine Zahl einsetzen und ebenso in die Quadrate; es ergibt sich stets eine richtige Gleichung. Ein Beispiel dazu zeigt Abbildung 15.2:

$$\bigcirc + \diamondsuit_4 = \diamondsuit + \bigcirc_7$$

Abb. 15.2 Beispiel zum Kommutativgesetz der Addition

Das Zeichnen solcher geometrischer Figuren erfordert einige Sorgfalt. Daher benützt man als Variablen im allgemeinen doch lieber Buchstaben. Welche Buchstaben man jeweils wählt, ist an sich völlig gleichgültig. Es ist jedoch üblich, für »unbekannte Zahlen«, d. h. solche, die erst aus Gleichungen oder Ungleichungen bestimmt werden sollen, die Endbuchstaben x, y, z des Alphabets zu verwenden.

** Zur Geschichte der Variablen

Wir haben gesehen, daß es nützlich und bequem ist, an Stelle von Zahlen Buchstaben zu verwenden, wenn man allgemeingültige Zusammenhänge, also Gesetze ausdrücken will oder wenn man einen Rechengang allgemein beschreiben will. Es ist aber gar nicht so lange her, daß die Mathematiker das so machen. Früher hat man ein Beispiel mit bekannten Zahlen vorgerechnet und dann gesagt, daß man es genauso machen könne, wenn andere Zahlen gegeben sind. Ein solches Vorgehen kann natürlich gefährlich sein. Denn woher soll man wissen, ob die einmal vorgeführte Rechnung immer so geht?

So findet z. B. jemand, daß man $\frac{16}{64}$ kürzen kann, indem man im Zähler und im Nenner die gleiche Ziffer 6 wegläßt: $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. Auch bei $\frac{10}{20}$ stimmt die Regel: Weglassen der 0 ergibt $\frac{1}{2}$. Aber leider stimmt diese schöne Regel schon nicht bei $\frac{15}{34}$.

Noch ein Beispiel: Jemand findet, daß $2^4 = 4^2$ ist. Das Austauschen der Zahlen funktioniert aber schon nicht mehr bei 2^3 ; denn 2^3 ist 8 und damit von $3^2 = 9$ verschieden. Einer der ersten, der einen allgemeinen Zusammenhang durch Buchstaben ausdrückte, war EUKLID (um 300 v. Chr.), der in seinem berühmten Geometriebuch *Elemente* Punkte und Strecken mit Buchstaben bezeichnete.

Im 9. Jahrhundert n. Chr. schrieb in Byzanz der Philosoph und Mathematiker LEON einen Kommentar zu diesem Geometriebuch, und da wimmelt es schon von Buchstaben; siehe Aufgabe 20/28, in der er ein allgemeines Rechengesetz der Algebra ausdrücken will.

Durchgesetzt hat sich diese Idee aber nicht. Einige hundert Jahre später lernt der aus Pisa stammende Kaufmann LEONARDO, genannt auch FIBONACCI* (um 1170–nach 1240) auf seinen Reisen die arabische Mathematik kennen, die ihn so fasziniert, daß er selbst Bücher über Mathematik schreibt. Und dabei verwendet er gelegentlich Buchstaben, um Rechengesetze zu beschreiben (Aufgabe 20/29).



François Viète

Abb. 16.1 François VIÈTE, latinisiert zu Franciscus VIETA (1540 Fontenay-le-Comte/Vendée – 13.[?] 2.[?] 1603 Paris)

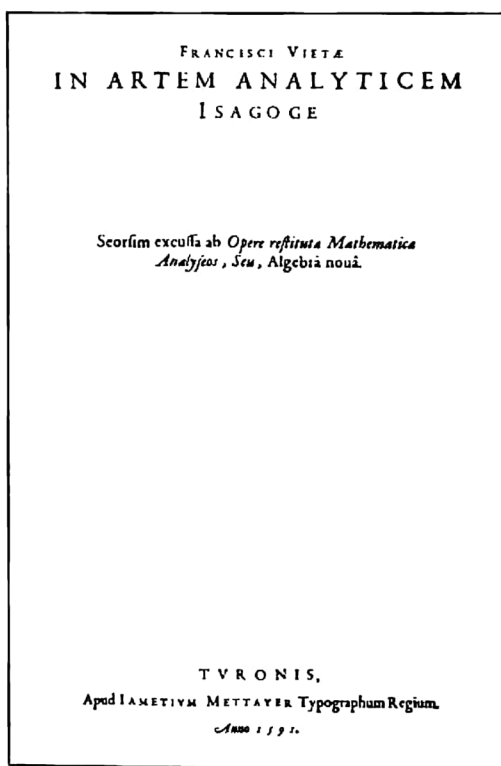


Abb. 16.2 Titelblatt von FRANCISCUS VIETAS EINFÜHRUNG IN DIE ANALYTISCHE KUNST, eigens herausgenommen aus dem *Gesamtwerk der wiederhergestellten Mathematischen Analysis, nämlich, der neuen Algebra*. TOURS, bei IAMETIVS METTAYER Königlichem Drucker, im Jahre 1591.

* LEONARDO nennt sich in seinen Schriften *filius Bonacci* (Sohn des Bonatius), woraus *Fibonacci* wurde. Manchmal nennt er sich auch Leonardo bigollo, Leonard der Tölpel. – LEONARDO verkehrte auch am Hofe Kaiser Friedrichs II.

Von da an tauchen immer häufiger Buchstaben als Zeichen für Zahlen auf. Eine mathematische Sprache, d. h. eine Rechenkunst mit Buchstaben, schuf aber erst François VIÈTE (1540–1603), dessen Name in latinisierter Form mit VIETA wiedergegeben wird. Er verwendete erstmals systematisch sowohl Buchstaben an Stelle von Zahlen als auch Zeichen für die verschiedenen Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation usw. Damit konnte er für die Summe aus A und B kurz $A + B$ schreiben.

VIÈTE war Jurist und mußte ab 1564 als Sekretär des Hauses SOUBISE auch die damals 11jährige Tochter Catherine de PARTHENAY unterrichten. Diese interessierte sich so sehr für Astronomie und Mathematik, daß auch VIÈTE sich mit diesen Wissenschaften beschäftigen mußte. Und die Mathematik ließ ihn nicht mehr los! Als Ergebnis dieser Beschäftigung veröffentlichte er 1591, als er längst Rat am Hofe des französischen Königs war, ein Buch unter dem Titel *In artem analyticam Isagoge*, zu deutsch *Einführung in die analytische Kunst*. In diesem Buch zeigt VIÈTE, wie man mit Buchstaben an Stelle von Zahlen und unter Benützung von Rechenzeichen rechnen muß, um allgemeine Erkenntnisse in der Mathematik zu finden. Die moderne Algebra war geboren! Zu Recht nannte VIÈTE seine Rechenkunst *Algebra nova*, die neue Algebra.

François VIÈTE verwendete nur große Buchstaben, was sicherlich nicht sehr bequem ist. Thomas HARRIOT (1560–1621) lernte in der um 1594 verfaßten und erst 1839 gedruckten *Ars logistica* John NAPIERS* (1550–1617) die Verwendung von kleinen Buchstaben kennen. Im Druck erschienen sie dann in seiner erst 1631 postum** herausgegebenen *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas*; dort führte man auch ein, Formelbuchstaben vom gewöhnlichen Text durch Kursivschrift zu unterscheiden, wie auch wir es machen.

Aufgaben

1. Wie lautet die Berechnungsregel für den Flächeninhalt A eines Rechtecks? Schreibe sie mit Variablen an.***
2. Wie heißt die Formel (= Berechnungsregel) für den Rauminhalt V eines Würfels mit der Kantenlänge a ?
3. a) Wie kann man allgemein aus der Kantenlänge a eines Würfels seine Oberfläche S berechnen? Fertige eine Skizze an.****
 b) Was ergibt sich, wenn man für a die Werte 1 cm bzw. 2 cm bzw. 4 cm bzw. 8 cm in diese Oberflächenformel einsetzt? Wie ändert sich demnach S beim Verdoppeln der Kantenlänge?
4. a) Nach welcher Formel wird die Oberfläche S eines Quaders mit den Kantenlängen a , b , c berechnet? Zeichne einen Quader.
 b) Berechnen S für die Quader mit den Kanten
 1) 2 cm, 3 cm und 5 cm; 2) 4 dm, 6 dm und 10 dm;
 3) 2,5 dm, 1,25 cm und 4 m.

* gesprochen 'næpiə

** Betont auf dem u, seit dem 18. Jh. im Deutschen verwendet. Das lateinische *postumus* bedeutet zunächst *der letzte*, dann *das nach dem Tode des Vaters geborene Kind*. Im übertragenen Sinne wird *postum* z. B. bei Büchern verwendet, wenn sie erst nach dem Tode des Autors erschienen sind. – Für *postum* findet man auch die fälschliche Schreibung *posthum*, die aus *post* = *nachher* und *humare* = *beerdigen* entstanden sein dürfte.

*** Der Flächeninhalt einer Figur wird häufig mit A bezeichnet; *area* (lat. und engl.) = *Fläche*

**** Die Oberfläche eines Körpers wird häufig mit S bezeichnet; *superficies* (lat.) = *surface* (engl., franz.) = *Oberfläche*

- 5. Wie verhalten sich
- die Oberflächen,
 - die Rauminhalte
- zweier Quader Q und Q' , wenn entsprechende Kantenlängen sich wie 1 zu 2 verhalten, also $a' = 2 \cdot a$, $b' = 2 \cdot b$, $c' = 2 \cdot c$ gilt?
6. a) Wie lang muß ein Holzstab mindestens sein, damit man von ihm die für das Kantenmodell eines Würfels notwendigen Stücke abschneiden kann, wenn a die Kantenlänge ist?
- b) Berechne die Gesamtlänge der Kanten für jeden der in Aufgabe 4.b) angegebenen Quader. Stelle dafür zunächst eine Formel auf.
7. Welches Rechengesetz wird durch
»Für alle $\square \in \mathbb{B}$ und alle $\triangle \in \mathbb{B}$ gilt: $\square \cdot \triangle = \triangle \cdot \square$ « ausgedrückt?
8. Schreibe mit geometrischen Figuren als Variablen
- das Assoziativgesetz der Addition,
 - das Distributivgesetz.
9. a) Hans behauptet, daß es gleichgültig ist, ob man $a \cdot 2$ oder a^2 schreibt. Dazu rechnet er Uli vor, daß sowohl für $a = 0$ als auch für $a = 2$ jeweils $a \cdot 2$ und a^2 denselben Wert haben. Stimmt seine Rechnung?
- b) Uli beweist Hans, daß die Gleichung $a \cdot 2 = a^2$ trotzdem nicht allgemein gültig ist. Wie macht er das wohl?
10. a) Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie, indem du für die angegebenen Werte von a und b sowohl $(a + b) \cdot (a - b)$ als auch $a^2 - b^2$ berechnest.

a	b	$(a + b) \cdot (a - b)$	$a^2 - b^2$
5	2		
14,5	5,7		
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$		
1000	900		

- b) Ist es nach den Ergebnissen von a) möglich, daß für alle $a \in \mathbb{B}$ und $b \in \mathbb{B}$ die Gleichung $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ gilt? Folgt aus a) bereits, daß diese Gleichung allgemein gelten muß?
11. Drücke folgende Sätze durch eine Gleichung aus:
- Die Zahl x ist 9mal ($\frac{3}{4}$ mal; 4,5mal) so groß wie die Zahl a .
 - Die Zahl y ist um 15 größer als die Zahl u .
 - Die Zahl z ist um 12,3 kleiner als die Zahl v .
 - Die Zahl s ist ebenso groß wie die Summe der Zahlen u und v .
 - Die Zahl d ist gleich der Differenz der Zahlen u und v .
 - Man erhält die Zahl x , indem man vom Produkt der Zahlen p und q die kleinste zweistellige Zahl abzieht.
 - Das Fünffache der Summe aus a und b ergibt die Zahl c .
 - Die Hälfte der Zahl u ist um 3 größer als $\frac{4}{5}$ der Zahl v .

12. Drücke folgende Gleichungen durch einen Satz aus:
- a) $x + 12 = 2 \cdot y$ b) $5 \cdot a = b : 3$
c) $z = u \cdot v - 1$ d) $(p + q) \cdot (p - q) = 1$
13. Ein Kilogramm einer Ware kostet 5 DM. Welchen Preis y DM muß man für x kg dieser Ware zahlen?
14. Ein Dutzend Eier kostet 3 DM. Welchen Betrag z DM muß man dann für n Eier entrichten?
15. Ein Auto, das mit gleichbleibender Geschwindigkeit fährt, legt in der Stunde a km zurück. Der in b Std. zurückgelegte Weg sei c km. Drücke c durch a und b aus.
16. In der Prozentrechnung hast du folgende Zinsformel kennengelernt:
- $$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000}$$
- a) Welche Bedeutung haben hier die einzelnen Variablen?
b) Berechne den Zins, den ein Kapital von 24 500 DM bei einem Zinssatz von 6% in 8 Monaten einbringt.
17. a) Welche Werte nimmt $z = 2 \cdot n - 1$ an, wenn man für n nacheinander die natürlichen Zahlen einsetzt?
b) Welche Grundmenge muß man für die Variable n wählen, damit man aus $z = 2 \cdot n - 7$ alle ungeraden Zahlen erhält?
18. Schreibe die durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen in allgemeiner Form an.
19. Wie kann man mit Hilfe einer Variablen alle
a) durch 4, b) durch 7, c) durch 12
teilbaren natürlichen Zahlen darstellen? Welche Grundmenge muß man für die Variable wählen?
20. Setze in $x = 5 \cdot n$ der Reihe nach die geraden Zahlen 2, 4, 6, ... ein. Welche gemeinsamen Teiler haben alle so erhaltenen Zahlen?
- 21. Warum sind, wenn $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt, alle Zahlen der Form
a) $10 \cdot m + 2 \cdot n$, b) $n \cdot (n + 1)$
durch 2 teilbar?
22. Wie kann man diejenigen Zahlen allgemein beschreiben, die
a) bei Division durch 4 den Rest 1 lassen;
b) bei Division durch 7 den Rest 5 lassen;
• c) bei Division durch 2 den Rest 1 und zugleich bei Division durch 5 den Rest 2 lassen?
23. n sei eine Ziffer. Welchen Wert hat die zweistellige Zahl, deren erste Ziffer, von links her, n ist, während die zweite 3 (0; 8) heißt?

24. Gib den Wert derjenigen dreistelligen Zahl y an, deren erste Stelle n ist, während an zweiter Stelle 5 und an dritter Stelle m steht.
Welche Zahlen kommen für n bzw. für m in Frage?
25. Wenn man in $n \cdot (n - 1) + 5$ für n die natürlichen Zahlen 1 bis 4 einsetzt, erhält man stets eine Primzahl*. Prüfe diese Behauptung nach.
Kann man daraus folgern, daß sich für jede natürliche Zahl n eine Primzahl ergibt?
26. Weise nach, daß sich aus $n \cdot (n + 1) + 11$ für $n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ stets eine Primzahl ergibt. Erhält man vielleicht für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Primzahl?
27. Fasse die folgenden Angaben in Worte und entscheide jeweils, ob etwas Wahres oder etwas Falsches gesagt ist:
- a) $\frac{2}{3} \in \mathbb{B}$ b) $0,5 \notin \mathbb{B}$ c) $1 \in \mathbb{B}$
d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{B}$ e) $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{B} = \mathbb{N}_0$ f) $\mathbb{N} \cup \mathbb{B} = \mathbb{N}$
- 28. LEON VON BYZANZ (9. Jh. n. Chr.) hat folgendes Gesetz gefunden:
Gegeben seien die Zahlen a, b, c . Das Produkt aus a, b sei d , das Produkt aus b, c sei e , das Produkt aus a, c sei f , das Produkt aus a, e sei g , das aus b, f sei h , das aus c, d sei i . Ich behaupte, daß die Zahlen g, h, i gleich sind.**
Schreibe die Behauptung LEONS nur mit den Buchstaben a, b und c unter Verwendung von Klammern und Malpunkten, die LEON ja noch nicht kannte.
- 29. LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) schreibt:
Die Zahl a sei in zwei Teile [= Summanden] b, g geteilt. Man teile a durch b , das Ergebnis sei e ; und man teile a durch g , das Ergebnis sei d . Ich behaupte, daß das Produkt von d und e gleich der Summe von d und e ist.
- a) Schreibe die Behauptung LEONARDOS mit modernen Rechenzeichen nur unter Verwendung der Buchstaben b und g .
- b) Zerlege die Zahl $a = 5$ in zwei natürliche Summanden und überprüfe für alle möglichen Zerlegungen die in a) gefundene Formel. Berechne dazu jeweils die linke Seite und die rechte Seite getrennt.
- c) Stimmt die Formel noch, wenn man 5 als $1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3}$ schreibt?

* SPEUSIPPOS (um 350 v. Chr.), der Nachfolger PLATONS (428–348 v. Chr.) in der Leitung der Akademie bezeichnet eine Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, als *ἀριθμὸς πρῶτος καὶ ἀσύνθετος* (arithmós prōtos kai asynthetos) = *erste oder auch unzusammengesetzte Zahl*, eine Zahl, die mehr als 2 Teiler hat, als *ἀριθμὸς δεύτερος καὶ σύνθετος* (arithmós deúteros kai synthetos) = *zweite oder auch zusammengesetzte Zahl*. (Wir würden statt *erste Zahl* heute *Zahl erster Art* sagen.) EUKLID (um 300 v. Chr.) verkürzte im Buch VII seiner *Elemente* zu *πρῶτος ἀριθμὸς* bzw. *σύνθετος ἀριθμὸς*, was ins Lateinische wörtlich als *numerus primus* bzw. *numerus compositus* übersetzt wurde – so belegt bei BOETHIUS (um 480–524/525). Johann SCHEYBL (1494–1570) versuchte in seiner Euklid-Übersetzung die Eindeutschung *erste Zahl* und *ungeteilte Zahl*, was sich aber nicht einbürgerte. Es entstand schließlich das Lehnwort **Primzahl** und die Übersetzung *zusammengesetzte Zahl*.

** Natürlich hat LEON griechische Buchstaben verwendet.

1.3 Terme

Wie der vorausgehende Abschnitt gezeigt hat, arbeitet man in der Algebra nicht nur mit *Zahlen*, sondern auch mit *Variablen*. Meistens sind Zahlen und Variablen mit Hilfe der verschiedenen Rechenarten zu *Rechenausdrücken* zusammengesetzt.

Beispiele: $2 + x$, $3 \cdot (y - z : 5)$, $\frac{a + b}{4 \cdot c}$.

Gleichungen und Ungleichungen sind ihrerseits wieder aus solchen Rechenausdrücken aufgebaut. Man kann somit sagen, daß Zahlen, Variablen und daraus gebildete Rechenausdrücke das Grundmaterial für die Algebra darstellen. Daher ist es sinnvoll, für diese verschiedenen »Bausteine« eine einheitliche Bezeichnung zu verwenden; man nennt sie **Terme***.

Beispiele:

- 1) Die Gleichung $5 = 2 + 3$ enthält den Term 5 und den Term $2 + 3$.
- 2) Die Gleichung $x = y : 0,7$ enthält die Terme x und $y : 0,7$.
- 3) Die Ungleichung $2 \cdot n + 1 < 2 \cdot (n + 1)$ enthält die Terme $2 \cdot n + 1$ und $2 \cdot (n + 1)$.

Die Verwendung der Bezeichnung »Term« regeln wir durch folgende

Definition 21.1: 1. Jede Zahl ist ein Term.
 2. Jede Variable ist ein Term.
 3. Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier Terme sind ebenfalls wieder Terme.

Teil 3 der Definition besagt (zusammen mit 1 und 2), daß jeder mit Hilfe der vier Grundrechenarten aus Zahlen und Variablen gebildete Rechenausdruck ein Term ist.

Nach unserer Definition sind die in den obigen Beispielen für Gleichungen und Ungleichungen auftretenden Ausdrücke tatsächlich Terme: 5 ist eine Zahl, also ein Term (Regel 1); da 2 und 3 Zahlen, also Terme sind, ist nach Regel 3 auch $2 + 3$ ein Term. x ist eine Variable, also ein Term (Regel 2); da sowohl die Variable y als auch die Zahl 0,7 Terme sind, ist nach Regel 3 auch $y : 0,7$ ein Term. Usw.

Durch wiederholte Anwendung der 3. Termbildungsregel lassen sich aus gegebenen Termen neue Terme aufbauen.

* Näheres zum Wort *Term* findest du auf Seite 180.

Beispiel:

Gegeben seien die Terme $T_1 = 17$, $T_2 = a$, $T_3 = b$, $T_4 = 25$.

Daraus lassen sich z. B. folgende neue Terme bilden:

$$\begin{aligned} T_5 &= T_1 \cdot T_2 = 17 \cdot a & T_6 &= \frac{T_5}{T_3} = \frac{17 \cdot a}{b} \\ T_7 &= T_2 \cdot T_3 = a \cdot b & T_8 &= T_4 + T_2 = 25 + a \\ T_9 &= \frac{T_8}{T_7} = \frac{25 + a}{a \cdot b} & T_{10} &= T_6 - T_9 = \frac{17 \cdot a}{b} - \frac{25 + a}{a \cdot b} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Für die Schreibweise mehrfach zusammengesetzter Terme gelten natürlich die bekannten Vereinbarungen, an die wir erinnern in

Vereinbarung 22.1: »Klammern haben absoluten Vorrang.«
 »Punkt geht vor Strich.«
 »Bruchstrich ersetzt Klammern um Zähler und Nenner.«

Beispiele:

- 1) $(42 - 2) \cdot 3 = 40 \cdot 3 = 120$,
- 2) $42 - 2 \cdot 3 = 42 - 6 = 36$,
- 3) $\frac{a - 3}{b + 5} = (a - 3) : (b + 5)$.

Beachte: Bei gemischten Zahlen werden ein Pluszeichen und Klammern weglassen. So bedeutet $5\frac{1}{2} \cdot 3$ ausführlich $(5 + \frac{1}{2}) \cdot 3$.

Im obigen Beispiel 2 gibt uns die »Punkt vor Strich«-Regel die richtige Reihenfolge der beiden Rechenschritte an. Wie muß man aber vorgehen, wenn zwei »Punktrechnungen« aufeinanderfolgen, also z. B. $42 : 2 \cdot 3$ oder $42 \cdot 2 : 3$ usw.? Hängt bei solchen Termen das Ergebnis von der Reihenfolge ab, in der man die beiden Rechenschritte ausführt, oder ist diese ohne Bedeutung? Letzteres trifft sicher im Fall $a \cdot b \cdot c$ zu; denn nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation gilt ja $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, so daß es also gleichgültig ist, ob man die erste oder die zweite Multiplikation zuerst ausführt. Um auch die anderen Fälle zu prüfen, nehmen wir wie oben $a = 42$, $b = 2$ und $c = 3$:

Beispiele:

- 1) $(42 \cdot 2) : 3 = 84 : 3 = 28$
 $42 \cdot (2 : 3) = 42 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14 \cdot 2}{1} = 28$
- 2) $(42 : 2) \cdot 3 = 21 \cdot 3 = 63$ }
 $42 : (2 \cdot 3) = 42 : 6 = 7$ } !
- 3) $(42 : 2) : 3 = 21 : 3 = 7$ }
 $42 : (2 : 3) = 42 : \frac{2}{3} = 42 \cdot \frac{3}{2} = \frac{21 \cdot 3}{1} = 63$ } !

Die Reihenfolge der beiden Rechenschritte kann also für das Ergebnis von wesentlicher Bedeutung sein! Das gilt natürlich erst recht, wenn mehr als zwei Punktrechnungen aufeinanderfolgen. Damit solche Terme eindeutig definiert sind, treffen wir die folgende

Vereinbarung 23.1: Sind aufeinanderfolgende Punktrechnungen nicht nur Multiplikationen, dann muß der Reihe nach gerechnet werden, es sei denn, daß durch Klammern die Reihenfolge der Rechenschritte anders festgelegt ist.

Beachte, daß also Schreibweisen wie $42 : 2 \cdot 3$ oder $42 \cdot 2 : 3$ oder auch $(a + b) : c : d$ usw. zulässig sind und die Berechnung von links nach rechts ausgeführt werden muß. Bei $42 : (2 \cdot 3)$ ist hingegen zuerst das Produkt $2 \cdot 3$ zu berechnen, und dann erst 42 durch 6 zu teilen.

Für Produkte verwenden die Mathematiker oft eine vereinfachte Schreibweise, bei welcher der Malpunkt weggelassen wird. Das ist jedoch nicht immer möglich. Es gilt folgende

Vereinbarung 23.2: Bei einem Produkt darf *vor* einer Variablen oder *vor* einer Klammer der Malpunkt weggelassen werden.

Beispiele:

$$2 \cdot a = 2a, \quad a \cdot b = ab, \quad 3 \cdot (a + b) = 3(a + b),$$

$$(a + b) \cdot c \cdot d = (a + b)cd, \quad a : (b \cdot c) = a : (bc).$$

Beachte: 1) Vor einem *Zahlzeichen* darf der Malpunkt *nicht* entfallen; vgl. etwa $3 \cdot 5$ im Gegensatz zu 35, oder $2 \cdot \frac{1}{2}$ im Gegensatz zu $2\frac{1}{2}$.

2) $5\frac{1}{2}x = (5 + \frac{1}{2}) \cdot x$.

In der Algebra ist es wichtig, einen umfangreicheren Term richtig »lesen« zu können, d. h., seinen Aufbau aus einfacheren Termen im Sinne der 3. Termbildungsregel rasch zu überblicken.

Beispiel 1:

$$(17 + x) \cdot 3 - y : 11$$

Dieser Term ist eine Differenz mit dem Minuenden $(17 + x) \cdot 3$ und dem Subtrahenden $y : 11$. Der Minuend ist ein Produkt aus einer Summe als erstem und 3 als zweitem Faktor. Die Summe besteht aus den Summanden 17 und x . Der Subtrahend ist ein Quotient mit y als Dividend und 11 als Divisor.

Eine übersichtliche Darstellung des Termaufbaus, den **Termgliederungsbaum**, zeigt Abbildung 24.1.

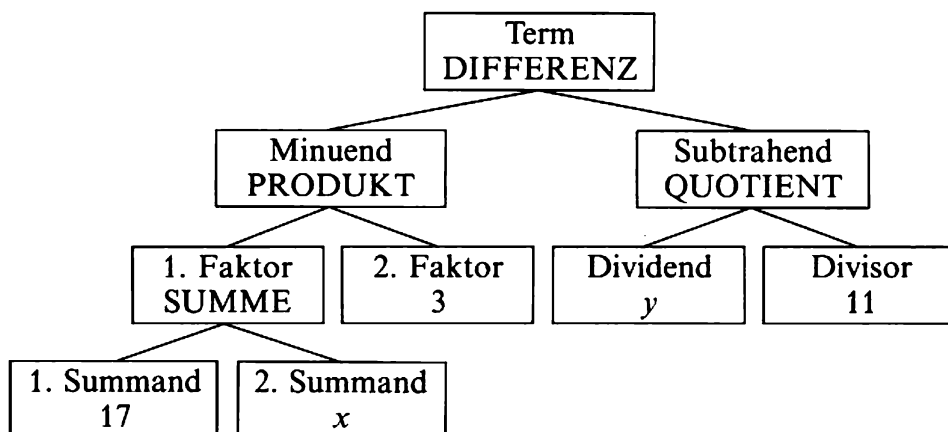


Abb. 24.1 Termgliederungsbaum zu Beispiel 1

Beispiel 2:

$$[a : 9 - 3(b : 7)] \cdot 5$$

Der Term ist ein Produkt mit der in eckigen Klammern stehenden Differenz als erstem und 5 als zweitem Faktor. Der Minuend ist der Quotient aus a als Dividend und 9 als Divisor. Der Subtrahend ist das Produkt aus 3 und dem in runden Klammern stehenden Quotienten aus b und 7.

Bei solchen Beschreibungen kommt es darauf an, den Aufbau des Terms aus den einzelnen Bausteinen, also den Zahlen und Variablen, genau und lückenlos anzugeben. Es muß möglich sein, aus der Beschreibung den Term zu rekonstruieren. Diese umgekehrte Aufgabe, nämlich einen gegebenen Text in einen Term umzusetzen, tritt ebenfalls sehr häufig auf und muß ebenso gut beherrscht werden.

Beispiel 3:

In einer Summe ist der erste Summand ein Bruch, dessen Zähler die Summe der Variablen u und v darstellt; sein Nenner ist die Differenz mit u als Minuend und v als Subtrahend. Der zweite Summand ist die Differenz aus 9 und dem Fünffachen von c .

Auch hier ist es nützlich, sich zunächst einen Termgliederungsbaum aufzuzeichnen. Der Term lautet:

$$\frac{u + v}{u - v} + (9 - 5c)$$

Beispiel 4:

Der Dividend eines Quotienten ist das Produkt aus der Zahl $\frac{6}{7}$ und der Variablen x ; der Divisor ist der Quotient aus $\frac{3}{7}$ und x . Der Term lautet:

$$(\frac{6}{7} \cdot x) : (\frac{3}{7} : x)$$

Aufgaben

1. Begründe anhand der drei Termbildungsregeln, daß es sich bei den folgenden Beispielen um Terme handelt:

a) $3 \cdot 5 - 10 \cdot 10$ b) $24 : (6 : 2)$ c) $(24 : 6) : 2$
 d) $\frac{6 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 12 + 6 \cdot 6}$ e) $(s + t) \cdot (s - t)$ f) $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}\right) \cdot (2a - 3c)$

2. Welche der folgenden »Schreibfiguren« sind keine Terme?

Begründe jeweils deine Antwort.

a) $5 - 3$ b) $3 - 5$ c) $\frac{2 -}{x - 1}$ d) $(5 + (\cdot 3])$ e) $(2 - 7) : (n - n)$
 f) $z(x + y)$ g) $z \cdot (x +)y$ h) $\frac{4w}{3 : t} \pm \frac{s}{t : 3}$ i) $24 : 6 : 2$

3. Gegeben sind die Terme $T_1 = x + 2$ und $T_2 = 3 - y$.

Schreibe die folgenden Terme an und überlege bei Produkten, ob der Malpunkt geschrieben werden muß:

a) $T_1 + T_2$ b) $T_2 - T_1$ c) $T_1 \cdot T_2$ d) $\frac{T_1}{T_2}$ e) $2 \cdot T_1$
 f) $1 : T_2$ g) $2 - T_1 \cdot T_2$ h) $T_1 : (T_2 : T_1)$ i) $T_1 : T_2 : T_1$
 j) $T_2 : (T_1 : T_2)$ k) $T_1 - (T_2 - T_1)$ l) $1 : T_1 + 1 : T_2$

4. Vereinfache die Schreibweise der folgenden Terme, indem du unnötige Klammern und Malpunkte vermeidest.

a) $2 + (a \cdot b)$ b) $2 : (a \cdot b)$ c) $2 \cdot (a \cdot b)$
 d) $7 \cdot 5 \cdot (x + 3)$ e) $7 \cdot x \cdot (x + 3)$ f) $(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot 7$
 g) $\left(\frac{10 - x \cdot 5}{3 \cdot y}\right) : 1\frac{1}{2}$ h) $\left[5y - \left(\frac{9}{x - 1}\right)\right] \cdot (5 \cdot \frac{1}{2})$
 i) $(a \cdot c) : b + \left(a : \frac{b}{2 \cdot c}\right)$ k) $[u : (5 : v)] + 1$ l) $u : [(5 : v) + 1]$

5. Ändere die Schreibweise der folgenden Terme so ab, daß kein Bruchstrich mehr vorkommt.

a) $\frac{5x + 1}{3}$ b) $\frac{5,7}{u - v}$ c) $\frac{4x - 7}{3y}$ d) $\frac{5x}{3y}$
 e) $\frac{2x - 10}{3 + y}$ f) $\frac{2a}{b} + \frac{b}{3}$ g) $\frac{5c + 1}{8d} - \frac{2c}{d}$

6. Berechne und vergleiche:

a) $100 : 50 \cdot 10 \cdot 5$ b) $100 : (50 \cdot 10) \cdot 5$ c) $100 : (50 \cdot 10 \cdot 5)$

7. Berechne und vergleiche:

a) $12 : 6 : (4 \cdot 3)$ b) $12 : (6 : 4) \cdot 3$ c) $12 : (6 : 4 \cdot 3)$

8. Berechne und vergleiche:

a) $16 : 8 : 4 : 2$ b) $16 : 8 : (4 : 2)$ c) $16 : (8 : 4) : 2$ d) $16 : (8 : 4 : 2)$

9. Zeichne jeweils den Termgliederungsbaum und beschreibe den Aufbau des Terms in Worten:

a) $(x + y) \cdot 5 - 3$ b) $(x + y) \cdot (5 - 3)$ c) $x + (y \cdot 5 - 3)$

d) $x + y \cdot (5 - 3)$ e) $(x + y \cdot 5) - 3$ f) $(u - v) - w$

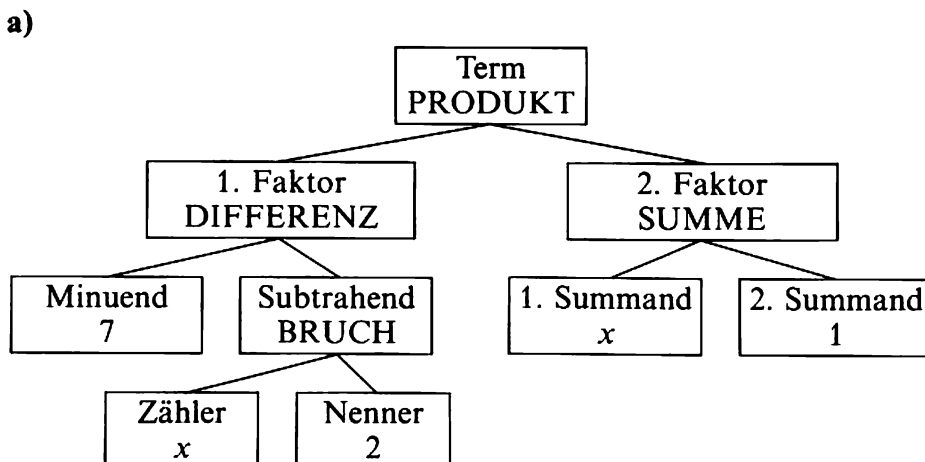
g) $u - (v - w)$ h) $1 : [a \cdot (b : c)]$ i) $(1 : a) \cdot (b : c)$

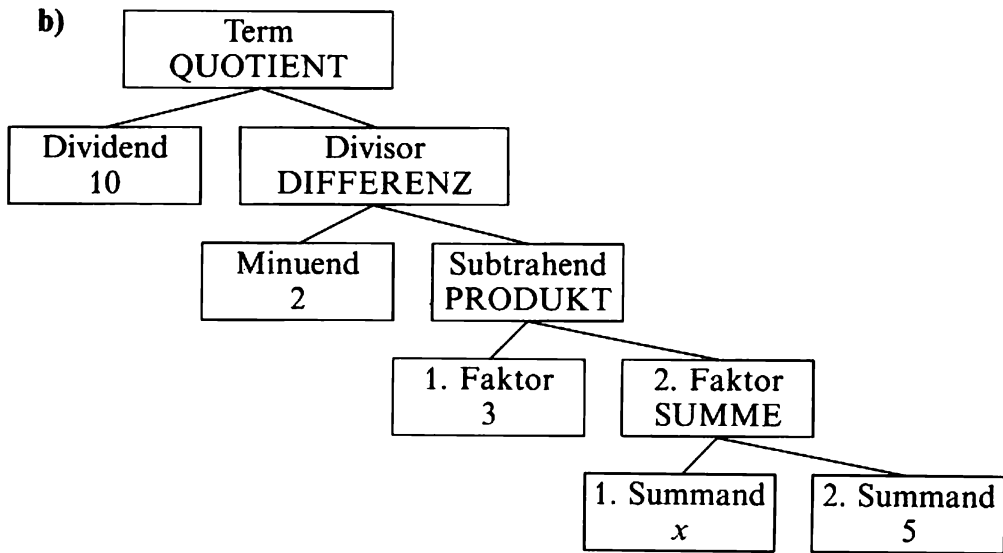
j) $[1 : (a \cdot b)] : c$ k) $\frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ l) $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right) \cdot 1$

10. Schreibe die folgenden Terme an:

- die Summe aus der Variablen z und dem Produkt von 7 und der Variablen y ;
- die Differenz mit dem Produkt der Variablen u und v als Minuenden und der Summe dieser Variablen als Subtrahenden;
- den Bruch mit dem Zähler $\frac{3}{7}$ und der Summe aus dem Fünffachen von p und dem dritten Teil von q als Nenner;
- das Produkt aus der Differenz von 15 und t als erstem Faktor und dem Quotienten aus z und 5 als zweitem Faktor;
- den Quotienten, dessen Divisor die Summe der Variablen x und y ist, während der Dividend das Produkt derselben Variablen ist;
- den Quotienten mit der Variablen b als Dividenten und folgender Summe als Divisor: der erste Summand ist das Produkt aus 7 und der Differenz von 12 und dem Dreifachen der Variablen a ; der zweite Summand heißt 1.

11. Welcher Term wird durch folgenden »Baum« dargestellt?





1.4 Definitionsmenge eines Terms

Die einfachsten Terme sind solche, die keine Variablen enthalten. Bei einem derartigen Term wird es oft möglich sein, *alle* verlangten Rechenschritte auszuführen; in diesem Fall ist der Term selbst eine Schreibweise für eine bestimmte Zahl aus $\mathbb{B}$.

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Definition 27.1: Jeder Term, der eine Zahl aus $\mathbb{B}$ darstellt, heißt **Zahlenterm**.

Beispiele:

- 1) $\frac{5-2}{3 \cdot 4}$ ist eine Schreibweise für die Zahl $\frac{1}{4}$, also ein Zahlenterm.
- 2) $(\frac{5}{8} : 2 - \frac{3}{16}) \cdot 32 - 4$ stellt die Zahl 0 dar, ist also ein Zahlenterm.
- 3) $(3,75 - \frac{13}{4}) : (3,25 - 2 \cdot 1\frac{5}{8})$ ist kein Zahlenterm, da Division durch 0 nicht möglich ist.
- 4) $[(51 \cdot 49 + 1) - 50 \cdot 10] : 10$ ist eine Schreibweise für die Zahl 200, also ein Zahlenterm.
- 5) $(15 - 25) + 8$ ist kein Zahlenterm; die verlangte Subtraktion ist nicht ausführbar.
- 6) $0 \cdot (1 - 2)$ ist kein Zahlenterm, da die verlangte Subtraktion nicht ausführbar ist.

Ein Term, der eine Variable enthält, kann zu einem Zahlenterm werden, wenn man für die Variable eine Zahl einsetzt.

Beispiele:

- 1) Aus dem Term $(2x - 7) \cdot x$ entsteht bei Ersetzung von x durch die Zahl 5 der Zahlenterm $(2 \cdot 5 - 7) \cdot 5$; er hat den Wert 15. Dagegen ergibt die Einsetzung $x = 3$ den Term $(2 \cdot 3 - 7) \cdot 3$, der *kein* Zahlenterm ist.
- 2) Aus $\frac{x-5}{x-6}$ entsteht bei der Einsetzung $x = 7$ ein Zahlenterm; dagegen liefert z. B. $x = 6$ oder $x = 4$ keinen Zahlenterm. Begründung?

Für einen Term T , der die Variable x enthält, verwendet man häufig die Bezeichnung $T(x)$, gesprochen » T von x «. Der Term, der aus $T(x)$ z. B. beim Einsetzen von 3 für x , kurz: für $x = 3$, entsteht, heißt $T(3)$, gesprochen » T von 3«.

Beispiele:

$$1) T(x) = \frac{x}{x+1}.$$

$$\text{Dann gilt: } T(1) = \frac{1}{1+1}; \quad T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1}; \quad T(0) = \frac{0}{0+1}.$$

$$2) T(z) = (2z - 15)\left(\frac{z}{2} + 3\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } T(2) &= (2 \cdot 2 - 15)\left(\frac{2}{2} + 3\right); \\ T(5) &= (2 \cdot 5 - 15)\left(\frac{5}{2} + 3\right); \\ T\left(\frac{53}{7}\right) &= \left(2 \cdot \frac{53}{7} - 15\right)\left(\frac{53}{7} : 2 + 3\right). \end{aligned}$$

Welche der in den letzten beiden Beispielen angegebenen Terme sind Zahlenterme? Welche Zahlen aus $\mathbb{B}$ darf man in $T(x)$ bzw. in $T(z)$ einsetzen, wenn man einen Zahlenterm erhalten will?

Die Einsetzungen in die Variable eines Terms werden stets aus einer **Grundmenge** G genommen, welche eine echte oder unechte Teilmenge von $\mathbb{B}$ ist. Dabei interessiert man sich besonders für diejenigen Einsetzungen, die auf einen *Zahlenterm* führen.

Definition 28.1: Gegeben sei ein Term $T(x)$ und eine Grundmenge G . Die Menge D aller Zahlen a aus G , für die $T(a)$ ein Zahlenterm ist, heißt **Definitionsmenge** von $T(x)$ bezüglich der Grundmenge G . Kürzer:
 $D = \{a | a \in G \text{ und } T(a) \text{ ist Zahlenterm}\}$

Beispiele:

Begründe jeweils die Angabe über D .

- 1) $T(x) = (5 - x)(x + 5)$, $G = \mathbb{N}$; dann ist $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 2) $T(y) = (y - 3)(4 - y)$, $G = \mathbb{B}$;
dann ist $D = \{y | y \in \mathbb{B} \text{ und } 3 \leq y \leq 4\}$.

- 3) $T(u) = \frac{2u}{u+1}$, $G = \mathbb{B}$; dann ist $D = G = \mathbb{B}$.
- 4) $T(s) = \frac{s-2}{1-s}$, $G = \mathbb{B}$; dann ist $D = \{ \}$.
- 5) $T(n) = (n-20)(20-n)$, $G = \mathbb{N}_0$; dann ist $D = \{20\}$.
- 6) $T(k) = k \cdot \frac{1}{k-3}$, $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; dann ist $D = \{4, 5, 6\}$.

Enthält ein Term mehrere Variablen, z.B. x und y , so schreibt man dafür $T(x; y)$. Um daraus einen Term ohne Variablen zu machen, muß man eine Zahl für x und eine Zahl für y einsetzen.

Beispiele:

- 1) $T(x; y) = x + (2y - 3)$, $x \in \mathbb{B}$, $y \in \mathbb{B}$;
 $x = 2$ und $y = 5$ ergibt $T(2; 5) = 9$;
 $x = 0,6$ und $y = 3,05$ ergibt $T(0,6; 3,05) = 3,7$;
 $x = 0$ und $y = 1$ ergibt keinen Zahlenterm.
- 2) $T(a; b; c) = [a(b+c) + b(a+c)] - c(a+b)$, $a \in \mathbb{B}$, $b \in \mathbb{B}$, $c \in \mathbb{B}$;
 $a = 0$, $b = 10$ und $c = 5$ ergibt $T(0; 10; 5) = 0$;
 $a = 1$, $b = 2,5$ und $c = 3,14$ ergibt $T(1; 2,5; 3,14) = 5$.

Aufgaben

1. Entscheide, welche der folgenden Terme Zahlenterme sind, und ermittle gegebenenfalls eine möglichst einfache Schreibweise für diese Zahlen.
- a) $2 \cdot 17 + (26 + 5) \cdot 13$ b) $(7 \cdot 18 - 8 \cdot 17) : 5$
c) $(5 \cdot 25) : (17 : 5 - 3,4)$ d) $(7 \cdot 19 - 399 : 3) : (\frac{22}{7} - 3,14)$
e) $\frac{2^5 - 5^2}{5 \cdot 2} : \frac{3^3 + 2^3 + 1^3}{3 \cdot 4}$ f) $\frac{(2-5) \cdot 7}{(2-5) \cdot 3}$
2. Gegeben ist der Term $T(x) = (2x - 5) : (16 - 2x)$. Setze für die Variable x die angegebenen Zahlen ein und entscheide jeweils, ob ein Zahlenterm entsteht. Gib dann die Zahl in möglichst einfacher Form an.
- a) 5 b) $\frac{8}{3}$ c) 1,5 d) $6\frac{1}{7}$ e) 8 f) 7,99 g) 100
3. Bearbeite wie bei Aufgabe 2 die folgenden Beispiele:
- a) $T(y) = 10 \cdot y - 10 : y$; Einsetzungen für y : 0; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 10
b) $T(z) = (3z - 2) \cdot (5z - 3)$; Einsetzungen für z : 1; 2; 3; 4; 5
c) $T(n) = \frac{n \cdot (n-1)}{n - (n-2)}$; Einsetzungen für n : 0; 1; 2; 3; 4

4. Bestimme bezüglich der Grundmenge $\mathbb{N}_0$ die Definitionsmengen der folgenden Terme:

a) $T(x) = x$ b) $T(x) = \frac{1}{x}$ c) $T(x) = x + 3$

d) $T(x) = x - 3$ e) $T(x) = 3 - x$ f) $T(x) = \frac{1}{3 - x}$

g) $T(x) = 2x + 5$ h) $T(x) = 2x - 5$ i) $T(x) = 5 - 2x$

5. Wie lauten die Definitionsmengen der Terme von Aufgabe 4, wenn man $\mathbb{B}$ als Grundmenge wählt?

6. Grundmenge sei $\mathbb{B}$. Ermittle auf dieser Grundmenge die Definitionsmengen folgender Terme:

a) $T(y) = (y + 1) \cdot (y + 3)$ b) $T(y) = (y - 1) \cdot (y + 3)$

c) $T(y) = (y + 1) \cdot (y - 3)$ d) $T(y) = (y - 1) \cdot (y - 3)$

e) $T(y) = (1 - y) \cdot (y + 3)$ f) $T(y) = (1 - y) \cdot (y - 3)$

g) $T(y) = (1 - y) \cdot (3 - y)$ h) $T(y) = (y - 1) \cdot (3 - y)$

7. Welche Definitionsmenge haben bezüglich der Grundmenge $\mathbb{B}$ die folgenden Terme?

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2}$ b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2}$

c) $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{2 - x}$ d) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{4 - x}$

8. Gegeben ist der Term $T(x; y) = (2x + 5) - 3y$.

Welche der folgenden Terme sind Zahlenterme? Gib die entsprechenden Zahlen in möglichst einfacher Form an.

a) $T(3; 2)$ b) $T(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ c) $T(6; 6)$ d) $T(5; 5)$ e) $T(2,3; 3,2)$

9. $T(a; b) = (a + b) \cdot (4a - b) - 3ab$. Berechne, falls möglich,

a) $T(3; 1)$ b) $T(1; 3)$ c) $T(\frac{1}{6}; \frac{1}{3})$ d) $T(\frac{1}{16}; 2)$ e) $T(\frac{1}{13}; 2)$.

- 10. $T(x; y) = (2x + 3y) - 8$.

a) Welche Definitionsmenge D_x hat $T(x; 2)$?

b) Welche Definitionsmenge D_y hat $T(3; y)$?

**Zur Geschichte unserer Fachausdrücke

Fast alle mathematischen Fachwörter stammen aus dem Lateinischen, einige auch aus dem Griechischen. Natürlich können wir oft nicht sagen, wer als erster ein Fachwort wirklich erfunden und benutzt hat; denn viele Handschriften sind durch Kriege und durch Verfolgungen vernichtet worden, andere wurden einfach nicht mehr abgeschrieben, weil es inzwischen modernere Abhandlungen über dasselbe Thema gab. Wir können daher oft nur angeben, in welchen uns zufällig erhalten gebliebenen Schriften wir

welche Fachwörter zum erstenmal finden. Wir können damit also nur feststellen, ab welchem Zeitpunkt ein solches Fachwort vorhanden ist, wir können aber nicht behaupten, daß es dieses Wort nicht schon früher gegeben hat. Anders ist es dann mit der Neuzeit, d. h. mit den letzten 500 Jahren. Da wissen wir fast immer, wer als erster einen neuen Begriff und ein neues Zeichen erfunden hat. Für dich ist es eine Selbstverständlichkeit, daß es Rechenzeichen gibt wie das Plus- und das Minuszeichen oder das Gleichheitszeichen. Wenn du aber aufmerksam die Geschichte der Mathematik betrachtest, dann wirst du verwundert feststellen, daß all diese Zeichen und die Kunst des Buchstabenrechnens, die du jetzt erlernen sollst, erst knapp 500 Jahre alt sind.

Welch kurze Zeitspanne ist dies im Vergleich zu der langen Zeit, die der Mensch schon auf Erden existiert!

Im Folgenden stellen wir die Fachwörter zusammen und berichten dir dann noch von den Männern, von denen diese Fachwörter stammen.

Addition

Addition und *addieren* gehen auf das lateinische *addere* = *hinzugeben* zurück. Als Fachwörter kommen sowohl *additio* wie auch *addere* bei BOETHIUS (um 480–524) vor.

Das Wort **Summe** hat eine interessante Geschichte. Das lateinische Substantiv *summa* bedeutet *das Oberste, das Höchste*. Da es schon bei den Griechen und dann bei den Römern Brauch war, das Ergebnis einer Rechnung in die oberste Zeile zu schreiben, hieß jedes Ergebnis *summa*, gleichgültig, ob es beim Addieren oder Multiplizieren entstanden war. In diesem Sinne verwendet bereits Marcus Tullius CICERO (106–43 v. Chr.) das Wort *summa*. Die Einengung auf Summe als Ergebnis einer Addition beginnt im 15. Jh. Umgangssprachlich bedeutet *Summe* einen Geldbetrag. In diesem Sinne verwendet bereits LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) das Wort *summa*. *Summieren* findet man 1489 bei Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500), *Summand* erst 1713 bei Christian VON WOLFF (1679–1754) in seinen *Elementa mathematicae universae*.

Seit dem Mittelalter nennt man, abgeleitet vom lateinischen *resultare* = *zurückspringen*, das Ergebnis einer beliebigen Rechenaufgabe **Resultat**, d. h. das, was einer Aufgabe entspringt.

Subtraktion

Das zugrundeliegende *subtrahere* = *heimlich fortziehen* erhält bereits bei Sextus Iulius FRONTINUS (um 30–nach 100) die mathematische Bedeutung des Abziehens. Es findet sich genauso wie das zugehörige Substantiv *subtractio* auch bei BOETHIUS. In der Mitte des 15. Jh.s wird *subtrahieren* so wie auch *addieren* ein deutsches Fremdwort.

Unser Wort **Minuend** geht zurück auf den *numerus minuendus* = *die zu verkleinernde Zahl* des JOHANNES HISPALENSIS (wirkte um 1135–1153), unser **Subtrahend** auf den *numerus subtrahendus* = *die abzuziehende Zahl* des JOHANNES DE SACRO BOSCO (1200(?)–1256(?)). Das lateinische *differentia* = *Unterschied* nimmt erst bei LEONARDO VON PISA die Bedeutung an, die wir heute mit dem Fremdwort **Differenz** verbinden.

Multiplikation

Das lateinische *multiplicare* bedeutet eigentlich *viele Falten machen, mehrmals zusammenfalten* und geht in seiner mathematischen Bedeutung vielleicht auf die ägyptische Art der Berechnung eines Produkts zurück:

26 · 75
 / 13 · 150
 6 · 300
 / 3 · 600
 / 1 · 1200, also 26 · 75 = 1200 + 600 + 150 = 1950.

Nachzuweisen sind *multiplicare* und *multiplicatio* bei VITRUVIUS (1. Jh. v. Chr.) und bei COLUMELLA (1. Jh. n. Chr.), der das Ergebnis der Multiplikation *summa ex multiplicacione* nennt. Erst bei JOHANNES DE SACRO BOSCO findet man dafür *productum* = *Hervorgebrachtes*, woraus 1489 bei Johannes WIDMANN VON EGER unser Wort **Produkt** wurde. Bei JOHANNES DE SACRO BOSCO findet man auch *numerus multiplicandus* = *zu vervielfachende Zahl*, was Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Deutschen Arithmetica* 1545 als *Multiplikand* eindeutscht, wogegen *multiplicator* = *Vervielfacher* auf BOETHIUS zurückgeht. Im 16. Jh. bürgerte sich ein, beide Zahlen durch den Ausdruck **Faktor** zu bezeichnen, hergeleitet vom lateinischen *facere* = *machen*, das bei den römischen Feldmessern im Sinne von multiplizieren verwendet worden war.

Division

Allen Begriffen liegt das lateinische *dividere* = *teilen, einteilen* zugrunde. Erst bei GERBERT von Aurillac (um 945–1003), Lehrer Kaiser Ottos III., als Papst Sylvester II., finden wir es als Fachwort ebenso wie *divisio* = *Teilung*, *divisor* = *Teiler* und *dividendus* = *zu Teilendes*. Bei GERNARDUS (1. H. 13. Jh.) heißt das Ergebnis der Teilung *numerus denotans quotiens* = *Zahl, die angibt wie oft*; im 15. Jh. deklinierte man *numerus quotientis*, obwohl *quotiens* ein Adverb ist. Im *Bamberger Rechenbuch* von 1483 erscheint das deutsche Wort **Quotient**.

Unsere Rechenzeichen

Im 15. Jh. wurde das lateinische *et* = *und* durch ein kopfstehendes t, also durch **†** abgekürzt. Das lateinische Wort *minus* = *weniger* kürzte man oft durch **wig** ab. Durch Weglassen der Buchstaben entstand vielleicht unser Minuszeichen, und aus dem **†** wohl das **+**. Zum ersten Mal erschienen jedenfalls **+** und **–** gedruckt im Rechenbuch des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) im Jahre 1489. (Abbildung 32.1)

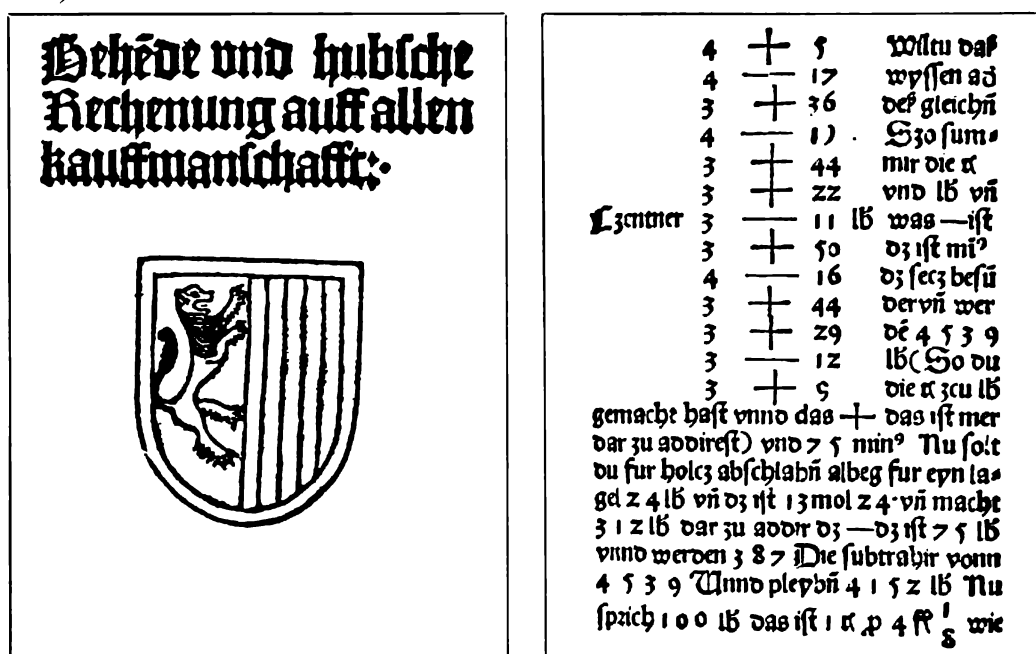


Abb. 32.1 Titelblatt der *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* (1489) des Johannes WIDMANN VON EGER und daraus folium 88r mit den ältesten gedruckten Plus- und Minuszeichen, die folgendermaßen erklärt werden: was – ist das ist minus [Zeile 7f.] vñnd das + das ist mer [Zeile 14].

Der heute übliche Malpunkt wurde von dem großen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) erfunden, und zwar im Brief vom 29. Juli 1698 an den Schweizer Mathematiker Johann BERNOULLI (1667–1748)*. Auf LEIBNIZ geht übrigens auch der Doppelpunkt als Divisionszeichen zurück, erfunden um 1678/79. Der Brauch, ein Multiplikationszeichen zwischen Buchstaben wegzulassen, stammt von Thomas HARRIOT (1560(?)–1621). René DESCARTES (1596–1650) (Abbildung 121.1) ließ dieses dann auch zwischen Zahlen und Buchstaben weg.

Das älteste unserer Rechenzeichen ist der waagrechte Bruchstrich. Bereits bei den Indern steht der Zähler über dem Nenner. Westarabische Mathematiker trennen beide durch einen waagrechten Strich. LEONARDO VON PISA bürgert diese Sitte dann im Abendland ein. Verbreitung findet der Bruchstrich hauptsächlich durch die Werke von VIÈTE.

Der schrägstehende Bruchstrich / scheint neueren Datums und aus drucktechnischen Gründen erfunden worden zu sein.

Biographische Notizen

BOETHIUS**, Anicius Manlius Severinus (um 480–524(?)), stammt aus einer vornehmen römischen Familie. Er stellt sich dem Ostgotenkönig Theoderich d. Gr. (regierte 474 bis 526) zur Verfügung und wird dessen Ratgeber und auch hoher Verwaltungsbeamter. Als er sich für einen des Hochverrats angeklagten Freund einsetzt, wird er selbst angeklagt, nach langer Kerkerhaft ungehört verurteilt und in Pavia vermutlich 524, und zwar am 23. 10., enthauptet. Im Kerker schrieb er sein berühmtes Buch *De consolazione phi-*

* Zwar hat der fränkische Mathematiker Johannes MÜLLER (1436–1476), der sich REGIOMONTANUS nannte, den Malpunkt einmal in einem Brief verwendet; ebenso taucht er in einer Prager Handschrift um 1500 auf. Bekannt wurde er aber erst, als LEIBNIZ ihn erfunden hatte.

** Auch BOETHIUS, gesprochen bo-ezius.



1703

Leibniz

Abb. 33.1 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1.7.1646 Leipzig–14.11.1716 Hannover)

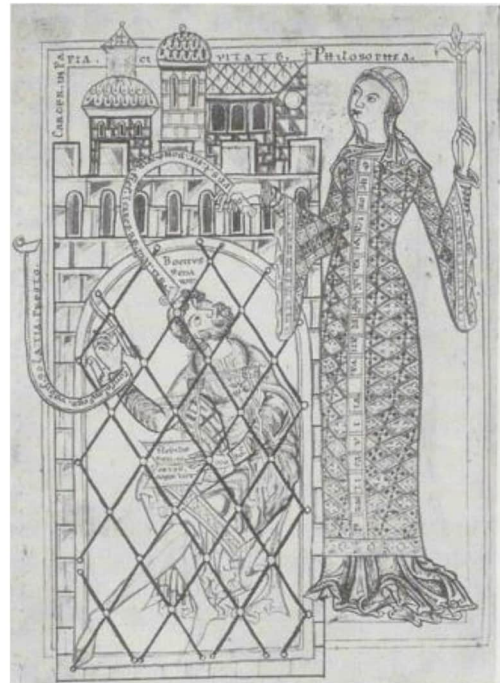


Abb. 33.2 Die Philosophie tröstet BOETHIUS im Kerker. Buchmalerei Anfang des 13. Jh.s – Cod. lat. mon. 2599

losophiae – Vom Trost der Philosophie. Für uns ist interessant, daß BOETHIUS als Wissenschaftler die »mathematischen« Disziplinen der Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik zu einer Einheit, dem Quadrivium, zusammenfaßte und dafür Lehrbücher schrieb. Seine beiden Bücher *institutio arithmetica* sind das einzige erhaltene Werk der römischen Zeit über dieses Fach.

COLUMELLA, Lucius Iunius Moderatus, lebte im 1. Jh. n. Chr. und stammt aus Gades, dem heutigen Cádiz/Spanien. In Italien hat er später seine Güter bewirtschaftet und ein die gesamte Landwirtschaft umfassendes 12bändiges Handbuch mit dem Titel *De re rustica* geschrieben.

FRONTINUS, Sextus Iulius (um 30–nach 100), von 74 bis 78 Statthalter der Römer in Britannien, nahm vermutlich 83 am Krieg gegen die Germanen teil, ab 97 für die Wasserversorgung Roms verantwortlich. Er verfaßte mehrere Lehrbücher, u. a. über die Wasserversorgung Roms, über Kriegslisten und über das Kriegswesen; das uns am meisten interessierende Buch handelt von der römischen Feldmeßkunst.

JOHANNES HISPALENSIS, auch JOHANNES VON SEVILLA genannt, ein in Spanien geborener Jude, wirkte um 1135 bis 1153 in Toledo. Er übersetzte aus dem Arabischen ins Lateinische, u. a. ein arithmetisches Werk von AL-CHARIZMI.

JOHANNES DE SACRO BOSCO (1200–1256), stammt vermutlich aus Halifax/England. In Paris lehrte er Mathematik und Astronomie und schrieb für den Unterricht im Quadrivium bedeutende Lehrbücher über Arithmetik, Kalenderrechnung und Astronomie.

VITRUVIUS POLLIO, Marcus, lebte im 1. Jh. v. Chr. Militärtechniker unter Cäsar und Augustus, dem er seine 10 Bücher *De architectura* (geschrieben vor 31 v. Chr.) widmete. Sie behandeln Städteplanung, Baustoffkunde, Tempelordnungen, Wasserleitungsbau, vielerlei Maschinen und sind geprägt von umfassenden Kenntnissen in Philosophie, Mathematik, Physik, Musik, Klimatologie und Astronomie.

Zu Seite 35:

TYPUS ARITHMETICAE – DIE DAME ARITHMETICA

Unter ihrer Aufsicht treten PYTHAGORAS und BOETHIUS, die im Mittelalter fälschlicherweise für die Erfinder des Abakus-Rechnens bzw. der arabischen Ziffern gehalten wurden, zu einem Wettstreit an. PYTHAGORAS hat die Zahlen 1241 und 82 gelegt; der Sinn der Ziffernrechnung des BOETHIUS ist leider unklar. Die besorgte Miene des PYTHAGORAS und das Lächeln des BOETHIUS sagen uns aber, daß letzterer der Sieger ist. – Auf dem Gewand der ARITHMETICA, die eine der Sieben Freien Künste ist, erkennt man die Vierzahlgruppen 1, 3, 9, 27 und 1, 2, 4, 8, die in der Zahlenmystik der Pythagoreer eine große Rolle spielten. – Holzschnitt aus der *Margarita philosophica* – »Philosophische Perle« – des Kartäuserpriors Gregor REISCH (um 1470–1525) von 1503, in der u. a. die Rechenregeln für beide Rechenverfahren ausführlich behandelt werden.

2 Die rationalen Zahlen und ihre Rechengesetze



TYPUS ARITHMETICAE – DIE DAME ARITHMETICA

2 Die rationalen Zahlen und ihre Rechengesetze

2.1 Die Zahlenmenge $\mathbb{B}$ reicht nicht aus!

Die Menge $\mathbb{B}$ der Bruchzahlen hat, abgesehen von der grundsätzlich unmöglichen Division durch null, für das Rechnen einen wesentlichen Mangel: die Subtraktion zweier Zahlen aus $\mathbb{B}$ ist nicht immer ausführbar. Dieser Mangel ist nicht nur ein Schönheitsfehler innerhalb der mathematischen Theorie, er macht sich auch in der Praxis störend bemerkbar.

Beispiele:

- 1) An einem Dezembertag zeigt mittags das Thermometer die Temperatur 4°C (= 4 Grad Celsius) an. Bis zum Abend nimmt sie um 3 Grad ab. Daraus können wir den neuen Thermometerstand berechnen: $4 \text{ Grad} - 3 \text{ Grad} = 1 \text{ Grad}$; die Abendtemperatur beträgt also 1°C . Bis Mitternacht sinkt nun die Temperatur noch einmal um 4 Grad. Wie kann man jetzt die neue Temperaturanzeige ermitteln? Die Rechnung »1 Grad minus 4 Grad« ist ja nicht ausführbar! Bekanntlich hilft man sich hier so, daß man z. B. sagt, die Temperatur sei auf »3 Grad unter 0« gesunken oder die Temperatur sei »minus 3 Grad«, wofür man kurz » -3°C « schreibt (Abbildung 36.1).

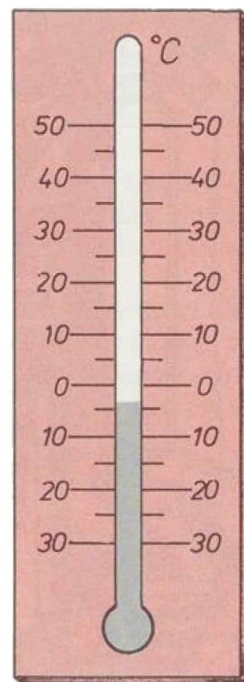


Abb. 36.1 Thermometer

- 2) Herr Knapp hat auf seinem Bankkonto 530,60 DM. Für dringende Anschaffungen benötigt er 700 DM, die er von seinem Konto abhebt. Auf seinem nächsten Kontoauszug dürfte Herr Knapp als Kontostand » $-169,40 \text{ DM}$ « oder auch »169,40 DM Soll« lesen. Das bedeutet, daß er der Bank 169,40 DM schuldet (Abbildung 37.1).
- 3) In Ägypten liegt westlich von Kairo die Kattara-Senke, für die man im Atlas die Höhenangabe » -134 « findet. Damit wird bekanntlich ausgedrückt, daß der so gekennzeichnete Ort »134 m unter dem Meeresspiegel«, genauer: 134 m tiefer als der Nullpunkt der für solche Höhenangaben verwendeten Skala liegt.* (Abbildung 37.2)

* Dieser Nullpunkt, genannt Normalnull (NN), ist nach dem Amsterdamer Pegel festgelegt und gibt ungefähr die mittlere Meereshöhe an.

KONTONUMMER 1234567890	ALTER KONTOSTAND	
	VOM 14.01.85	DM 530,60 HA
ABHEBUNG	AM 17.01.85	DM 700,00 SO
BUCHUNGSDATUM	NEUER KONTOSTAND	
	18.01.85	DM 169,40 SO

Abb. 37.1 Kontoauszug

Wie diese Beispiele zeigen, kommt es vor, daß man beim Rückwärtszählen den Nullpunkt einer Skala, also eines Zahlenstrahls, überschreiten muß. Man gelangt zu Ergebnissen »unter Null«, zu deren Beschreibung man Zahlen benutzt, vor die ein Minuszeichen gesetzt wird.

Sicher wäre es auch aus mathematischer Sicht günstig, wenn es Zahlen »unter Null« gäbe, mit denen man z. B. Rechnungen wie »1 – 4« ausführen könnte. Das Rechnen würde sich sehr vereinfachen, wenn auch die Subtraktion immer ausführbar wäre. Man müßte dann beim Auftreten von Differenzen nicht jedesmal überlegen, ob sie definiert sind bzw., falls Variablen vorkommen, für welche Werte der Variablen das der Fall ist.

Eine ähnliche Situation gab es schon früher beim Rechnen mit den natürlichen Zahlen*. Dort war die *Division* nicht unbeschränkt ausführbar; man konnte z. B. 12 nicht in 5 gleiche Teile zerlegen. Diese Schwierigkeit ließ sich dadurch

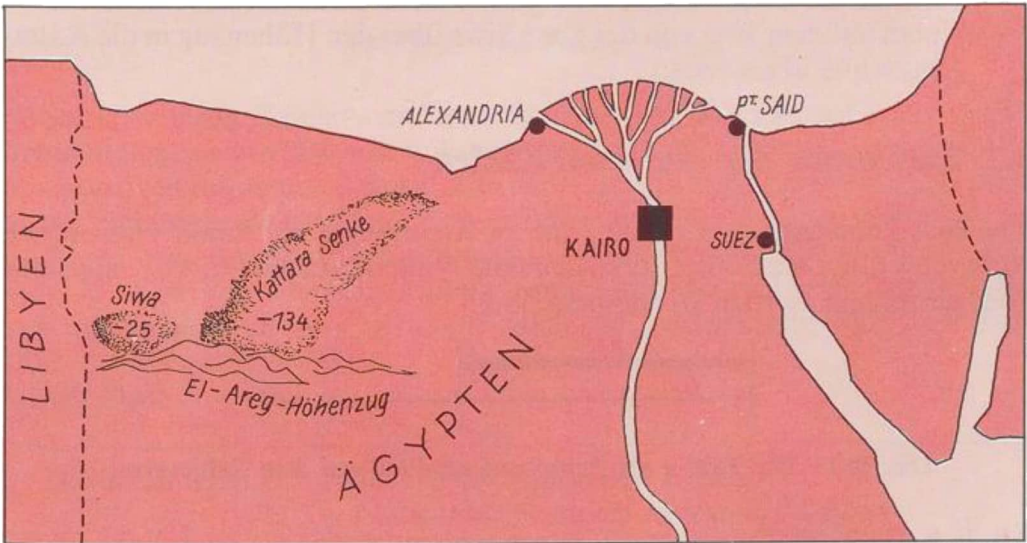


Abb. 37.2 Die Kattára-Senke in Ägypten

* Die Zahlen der Folge 1, 2, 3, ... nannte bereits NIKOMACHOS von Gerasa (um 100 n. Chr.) φυσικός ἀριθμός (physikós arithmós), was BOETHIUS (um 480–524/525) mit *numerus naturalis* ins Lateinische übersetzte und das im Deutschen zu **natürliche Zahl** wurde.

beseitigen, daß man die Menge $\mathbb{N}_0$ durch Einführung der Brüche erweiterte. In dem größeren Zahlenbereich $\mathbb{B}$ ist die Division immer ausführbar, falls der Divisor von 0 verschieden ist; z. B. gilt $12 : 5 = 2\frac{2}{5}$.

Dieses Beispiel legt den Versuch nahe, die Menge $\mathbb{B}$ noch einmal durch neue Zahlen so zu erweitern, daß auch die Subtraktion immer ausführbar wird. Natürlich ist eine solche Erweiterung nur dann sinnvoll, wenn man im vergrößerten Zahlenbereich wieder »vernünftig« rechnen kann! Das soll heißen: In der erweiterten Zahlenmenge sollen die gleichen Rechengesetze wie bisher gelten. Diesen Grundsatz, von dem man sich in solchen Fällen stets leiten läßt, bezeichnet man als **Permanenzprinzip**, genauer »Prinzip der Permanenz der Rechengesetze*«. Ob sich dieses Anliegen verwirklichen läßt, ist natürlich nicht von vornherein sicher.

Aufgaben

1. Was zeigt ein Thermometer an, wenn die Temperatur von -3°C aus
a) um 4 Grad sinkt, b) um 2,5 Grad steigt, c) um 11 Grad steigt?
2. Nachdem der Kontostand des Herrn Knapp auf $-169,40$ DM gesunken war, erhielt er vom Finanzamt eine Steuerrückzahlung von $340,00$ DM. Welches Guthaben stand dann auf seinem nächsten Kontoauszug?
3. Westlich der Kattara-Senke mit der Höhenangabe -134 liegt die Oase Siwa, für deren tiefsten Punkt im Atlas die Angabe -25 zu finden ist.
a) Welche der beiden Senken liegt tiefer und wie groß ist der Unterschied?
b) Zwischen den beiden Senken liegt ein Höhenzug, für dessen höchsten Punkt die Höhenangabe 70 gilt. Welche Höhenunterschiede müßte man auf dem Weg von der Oase Siwa über den Höhenzug in die Kattara-Senke überwinden?

2.2 Einführung der negativen Zahlen

Auf dem Zahlenstrahl ist jeder Zahl $x \in \mathbb{B}$ eindeutig ein Punkt zugeordnet. Außerdem kann die Zahl x durch den vom Nullpunkt zum Punkt x zeigenden Pfeil dargestellt werden (Abbildung 38.1).

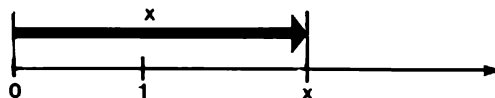


Abb. 38.1 Die Zahl x als Punkt und als Pfeil auf dem Zahlenstrahl

Ähnlich wie beim Thermometer setzen wir nun die Skala nach links über 0 hinaus fort. Indem wir eine, zwei, drei, ... Längeneinheiten nach links abtra-

* *permanere* (lat.) = fortdauern, erhalten bleiben. Der Ausdruck *Permanenzprinzip* wurde von dem englischen Mathematiker und Professor der Astronomie George PEACOCK (1791–1858) in seinem 1830 erschienenen Werk *A treatise of algebra* geprägt. – Siehe Abbildung 86.1.

gen, erhalten wir Punkte, die wir mit $-1, -2, -3, \dots$ bezeichnen. Allgemein erhalten wir zu jeder Zahl $x > 0$, also $x \in \mathbb{B}$, den links von 0 liegenden Punkt $-x$, indem wir den zu x gehörigen Pfeil um den Nullpunkt nach links umklappen. Das heißt, wir zeichnen von 0 aus einen nach **links** gerichteten Pfeil der Länge x . Seine Spitze liefert einen Punkt, den wir mit $-x$ beschriften. Den Pfeil selbst bezeichnen wir ebenfalls mit $-x$ (Abbildung 39.1).

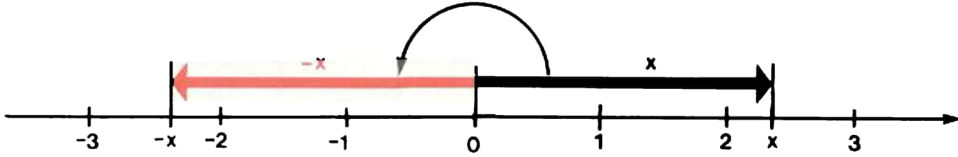


Abb. 39.1 Erweiterung des Zahlenstrahls

Natürlich wollen wir nun diese Punkte bzw. Pfeile $-1, -2, -3, \dots$, allgemein $-x$, als Veranschaulichungen neuer Zahlen deuten! Diese ebenfalls mit $-1, -2, -3, \dots, -x, \dots$ bezeichneten Zahlen nennen wir **negative Zahlen**. In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß es sich bei ihnen um die »Gegenstücke« zu den schon bekannten positiven Zahlen, also den Zahlen der Menge $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ ($= \mathbb{B}$ ohne die Zahl 0), handelt. Der erweiterte Zahlenstrahl heißt **Zahlengerade** (Abbildung 39.2).

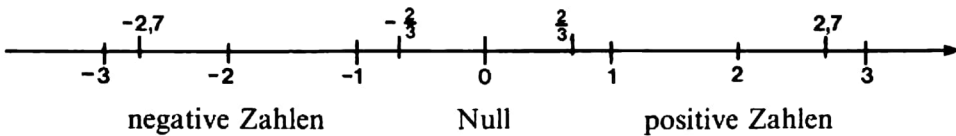


Abb. 39.2 Die Zahlengerade

Unser erweiterter Zahlenvorrat besteht nunmehr also aus den schon bisher bekannten positiven rationalen Zahlen und der Null sowie den neu eingeführten negativen rationalen Zahlen. Alle diese Zahlen zusammen bilden die **Menge der rationalen Zahlen***, die man mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Für die Teilmenge der positiven bzw. der negativen rationalen Zahlen verwendet man die Bezeichnung $\mathbb{Q}^+$ bzw. $\mathbb{Q}^-$. Die bisher häufig benutzte Zahlenmenge $\mathbb{B}$ (Brüche!) läßt sich nun in der Form $\mathbb{B} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ darstellen; man schreibt dafür auch kurz $\mathbb{Q}_0^+$.

Es gilt also:

Definition 39.1: $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen
 $\mathbb{Q}^+$ = Menge der positiven rationalen Zahlen
 $\mathbb{Q}^-$ = Menge der negativen rationalen Zahlen
 $\mathbb{Q}_0^+$ = Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen

* *rationalis* bedeutet seit dem 2. Jh. zu den Rechnungen gehörend und hängt mit *ratio* = Rechnung, Verhältnis, Vernunft zusammen. Die mathematische Bedeutung können wir dir aber erst im Band *Algebra 3* erklären.

**Zur Geschichte der Fachwörter *positiv* und *negativ*

An der Entstehung des heutigen Gegensatzpaares *positiv*–*negativ* kann man sehr gut verfolgen, wie bei der Herausbildung einer Fachsprache die ursprüngliche Bedeutung der Wörter meist verlorengeht.

Das seit dem 4. Jh. belegte lateinische Wort **positivus** = *gesetzt, gegeben* hatte als Gegensatz das Wort **privativus** = *abgesondert, hinweggenommen*, das in späterer Zeit auch noch den Sinn von *verneinend* annahm. Das alte Wort für *verneinend* war aber **negativus** (2. Jh.), zu dem das Gegensatzwort **affirmativus** = *bejahend* gehörte (nachgewiesen 5./6. Jh.). In der vor 1486 geschriebenen *kleinen Lateinischen Algebra* des *Dresdener Codex C 80*, eines Sammelbands verschiedener mathematischer Handschriften, finden wir säuberlich getrennt die beiden Gegensatzpaare *positiv*–*privativ* und *affirmativ*–*negativ*. Bald jedoch werden diese Paare vermischt, und das Wort *privativ* verschwindet immer mehr und wird durch *negativ* ersetzt. So verwendet François VIÈTE (1540–1603) den Gegensatz *affirmativus*–*negatus* (1591). Der deutsche Philosoph und Mathematiker Christian von WOLFF (1679–1754) verfaßt 1716 ein *Mathematisches Lexicon*, in dem das Gegensatzpaar *positiv*–*negativ* zu Fachwörtern wird. Und dabei ist es dann geblieben!



Christian Wolff

Abb. 40.1 Christian, Freiherr von (seit 1745) WOLFF, auch WOLF, (24.1.1679 Breslau – 9.4.1754 Halle/Saale)

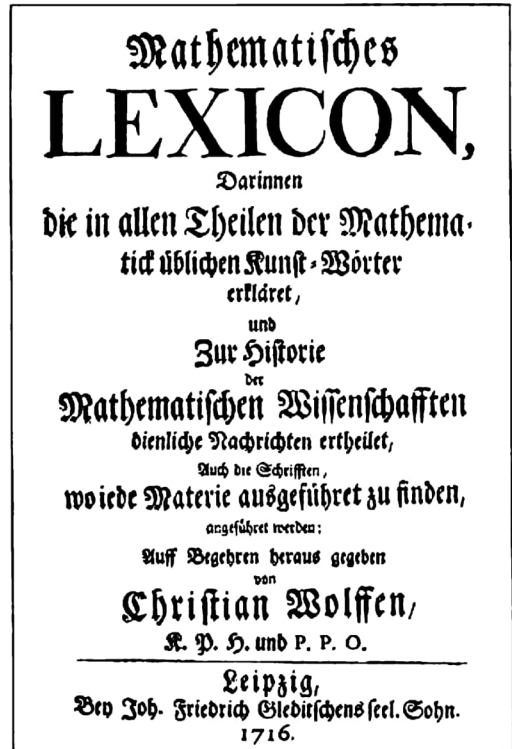


Abb. 40.2 Titelblatt der 1. Auflage

Aufgaben

1. Trage auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 1 cm die zu folgenden Zahlen gehörenden Punkte ein:
 a) 4,6 b) -4 c) 0 d) $-1,5$ e) 2,2 f) $-3\frac{1}{2}$
2. Gib auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 2 cm die den folgenden Zahlen entsprechenden Punkte an:
 $u = 2,1$; $v = -2,1$; $w = -1,25$; $x = \frac{3}{4}$; $y = -1\frac{2}{5}$; $z = -\frac{7}{10}$.
3. Zeichne von einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 6 cm den Abschnitt von -1 bis $0,5$ und markiere darauf die Punkte für folgende Zahlen:
 a) $x_1 = \frac{1}{3}$ b) $x_2 = -\frac{2}{3}$ c) $x_3 = -\frac{5}{6}$ d) $x_4 = \frac{5}{12}$ e) $x_5 = -\frac{1}{12}$
 f) $y_1 = 0,2$ g) $y_2 = -0,3$ h) $y_3 = -0,90$ i) $y_4 = -0,05$
4. Zeichne für eine Zahlengerade mit der Längeneinheit 1 cm den Abschnitt von -5 bis 5 . Trage darauf folgende Punkte ein und gib die zugehörigen rationalen Zahlen an:
 a) A liegt 3,5 cm links vom Punkt 2.
 b) B liegt 2,8 cm rechts vom Punkt -5 .
 c) C liegt $2\frac{3}{4}$ cm links vom Punkt 0.
 d) D liegt 3 cm links vom Punkt $\frac{17}{5}$.
 e) E liegt 1,4 cm rechts vom Punkt $-1\frac{4}{5}$.
 f) F liegt 4,5 cm rechts vom Punkt $-4\frac{1}{2}$.
5. Bestimme folgende Zahlenmengen. (Beschreibe die sich ergebenden Mengen zuerst in Worten und dann mit Mengensymbolen.)
 a) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^-$ b) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ c) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$ d) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{N}_0$
 e) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{N}_0$ f) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^-$ g) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^+$ h) $\mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-)$

2.3 Zahl und Gegenzahl, absoluter Betrag

Jede Zahl $a \in \mathbb{Q}$ läßt sich auf der Zahlengeraden durch den von 0 zum Punkt a zeigenden Pfeil darstellen. Zu dem gleich langen, aber entgegengesetzt gerichteten Pfeil gehört wieder eine rationale Zahl, die wir die Gegenzahl von a nennen und mit $-a$ bezeichnen.

Definition 41.1: Zwei Zahlen, zu denen auf der Zahlengeraden gleich lange, aber entgegengesetzt gerichtete Pfeile gehören, heißen (ein Paar von) **Gegenzahlen**.
 Die Gegenzahl von a wird mit $-a$ bezeichnet.

Die schon auf Seite 39 eingeführte Schreibweise für die negativen Zahlen steht im Einklang mit der in dieser Definition vereinbarten Bedeutung von $-a$: negative Zahlen wie -1 ; $-3,7$; $-\frac{2}{3}$; ... sind ja gerade die Gegenzahlen der entsprechenden positiven Zahlen 1 ; $3,7$; $\frac{2}{3}$; ... Beachte aber, daß Definition 41.1 für beliebige, also auch für negative Zahlen gilt! (Abbildung 42.1)

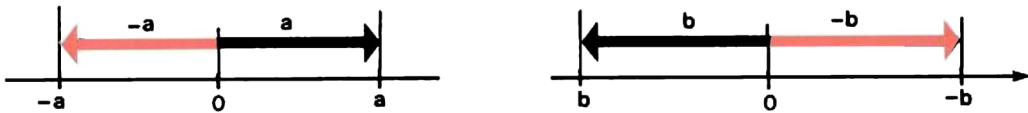


Abb. 42.1 Zahl und Gegenzahl

Beispiele:

Die Gegenzahl von 5,2 ist $-5,2$.

Die Gegenzahl von 0 ist $-0 = 0$.

Die Gegenzahl von -3 heißt $-(-3)$; ihr Pfeil ergibt sich aus dem Pfeil für -3 durch Umklappen und somit aus dem Pfeil 3 durch zweimaliges Umklappen. Also gilt: $-(-3) = 3$.

Die im letzten Beispiel durchgeführte Überlegung läßt sich auf jede Zahl anwenden. Daher gilt:

Satz 42.1: Für $a \in \mathbb{Q}$ gilt: $-(-a) = a$.

Die Gegenzahlen der natürlichen Zahlen, also $-1, -2, -3, \dots$ werden als **negative ganze Zahlen** bezeichnet. Sie bilden zusammen mit 0 und den natürlichen Zahlen die Menge der ganzen Zahlen, für welche das Zeichen $\mathbb{Z}$ verwendet wird:

Definition 42.1: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ heißt Menge der **ganzen Zahlen**.*

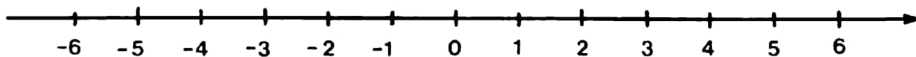


Abb. 42.2 Die ganzen Zahlen

In Beispielen wie -3 , $-\frac{2}{3}$, $-a$, $-(x+5)$, ... ist das Minuszeichen kein Rechenzeichen, es wird ja keine Subtraktion verlangt. Das vorangestellte Minuszeichen bedeutet hier jeweils die Aufforderung »Bilde die Gegenzahl von«.

* Der Ausdruck **ganze Zahl** ist die deutsche Übersetzung des lateinischen *numerus integer*, mit dem LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) den ἀριθμός ὁλόκληρος (arithmós holóκληρος) des DIOPHANT (um 250 n. Chr.) ins Lateinische übertragen hatte. Sowohl das lateinische wie auch das griechische Adjektiv bedeuten *unversehrt, vollständig, noch ganz*.

Derartige Minuszeichen nennt man **Vorzeichen**. In entsprechender Weise wird oft auch das Pluszeichen als Vorzeichen verwendet, wofür man festsetzt: $+a = a$, ($a \in \mathbb{Q}$). Obwohl man demnach auf das Vorzeichen »+« verzichten könnte, erweist sich, wie sich noch zeigen wird, seine Verwendung gelegentlich doch als nützlich und sinnvoll.

Besonders wichtig ist es, sich klarzumachen, daß das Vorzeichen »-« keineswegs immer auf eine negative Zahl hinweist! Es gilt ja:

Satz 43.1: $-a$ ist $\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}$ genau dann, wenn a $\begin{matrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{matrix}$ ist.

Eine Zahl und ihre Gegenzahl werden durch Pfeile gleicher Länge dargestellt; die entsprechenden Punkte auf der Zahlengeraden haben vom Nullpunkt gleiche Entfernung.

Definition 43.1: Die Entfernung des Punktes a vom Nullpunkt, also die Länge des Pfeiles a , heißt **absoluter Betrag der Zahl a** ; er wird mit $|a|$ bezeichnet.
Die beiden senkrechten Striche nennt man »Betragsstriche«.

Der Fachausdruck *absoluter Betrag* und die beiden senkrechten Striche dafür wurden von Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (1815–1897) eingeführt. Im Druck erschien *absoluter Betrag* 1856, die Absolutstriche aber erst 1876. WEIERSTRASS war von 1842 bis 1855 Lehrer an einem Gymnasium, wurde dann als Professor ans Gewerbeinstitut nach Berlin und 1864 an die Universität berufen. Er ist einer der bedeutendsten Mathematiker des 19. Jh.s.

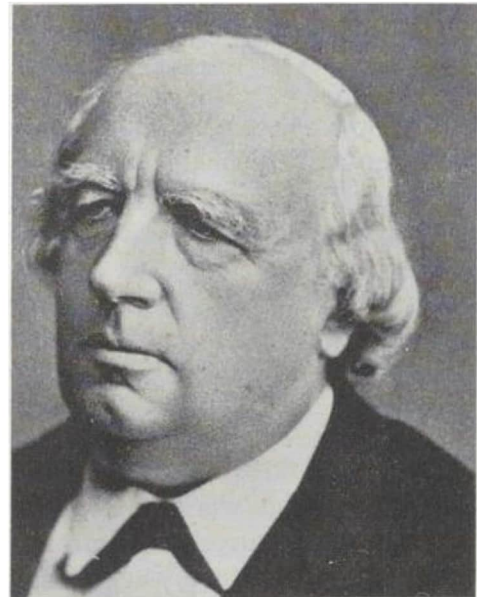


Abb. 43.1 Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (31.10.1815 Ostenfelde/Landkreis Warendorf – 19.2.1897 Berlin)

Weierstrass

Eine Zahl und ihre Gegenzahl haben denselben Absolutbetrag; denn die entsprechenden Pfeile sind gleich lang.

Beispiele:

- 1) $|3| = |-3| = 3$;
- 2) $|-1,7| = |1,7| = 1,7$;
- 3) $|\frac{3}{7}| = |-\frac{3}{7}| = \frac{3}{7}$.

Da der Nullpfeil die Länge 0 hat, gilt $|0| = 0$. Jede von 0 verschiedene Zahl hat einen positiven Absolutbetrag.

Wir fassen zusammen:

Satz 44.1: 1) Der Betrag einer Zahl ist nicht negativ.
Es gilt also: $|a| \geq 0$ für jedes $a \in \mathbb{Q}$.
2) Nur die Zahl 0 hat den Betrag 0.
Kurz*: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
3) Zahl und Gegenzahl haben gleichen Betrag.
Also: $|-a| = |a|$.

Bei positiven Zahlen und bei 0 stimmt der absolute Betrag mit der Zahl selbst überein. Bei negativen Zahlen unterscheidet sich jedoch der Betrag von der Zahl selbst:

Beispiele:

- 1) $|-2| = 2$, 2) $|-5,17| = 5,17$, 3) $|\frac{5}{9}| = \frac{5}{9}$.

Die Beispiele lassen erkennen, daß der Betrag einer negativen Zahl a mit der positiven (!) Gegenzahl $-a$ übereinstimmt. Es gilt ja:

$$|-2| = 2 = -(-2), \quad |-5,17| = 5,17 = -(-5,17) \text{ usw.}$$

Diese Überlegungen führen zu

Satz 44.2: $|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \text{ positiv ist;} \\ 0, & \text{wenn } a = 0; \\ -a, & \text{wenn } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$

Dieser Satz zeigt, wie man den Betrag einer Zahl auch ohne Verwendung von Betragsstrichen angeben kann: Bei 0 und den positiven Zahlen darf man die Betragsstriche einfach weglassen; bei negativen Zahlen muß man als Betrag die Gegenzahl nehmen.

* Das Zeichen $\Leftrightarrow$ hat die Bedeutung »genau dann, wenn«.

Aufgaben

1. Wie heißt die Gegenzahl von
 a) 167 b) $-3,14$ c) $2\frac{10}{11}$ d) $-0,001$?
2. Vereinfache die Schreibweise der folgenden Zahlen:
 a) $-(-2)$ b) $-(-0,34)$ c) $-(-(-1))$ d) $-(-(-(-0,6)))$
 e) $+49$ f) $-(+7,3)$ g) $-(+(-4))$ h) $+(-(+5))$
3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Berichtige die falschen Aussagen.
 a) Die Gegenzahl einer positiven Zahl ist nicht positiv.
 b) Die Gegenzahl einer rationalen Zahl ist negativ.
 c) Die Gegenzahl einer nichtnegativen Zahl ist negativ.
 d) Die Gegenzahl einer natürlichen Zahl ist eine ganze Zahl.
 e) Wenn man zu den Elementen von $\mathbb{N}$ alle ihre Gegenzahlen hinzufügt, erhält man die Menge $\mathbb{Z}$.
4. Bestimme $|x|$ für $x \in \{-1000; -111; -0,1; 0; 0,12; 63; 10^6\}$.
5. Bestimme alle Zahlen mit folgender Eigenschaft:
 a) Der absolute Betrag ist 7,5.
 b) Die Zahl ist negativ und hat den Betrag 2,8.
 c) Die Zahl ist positiv und hat denselben Betrag wie -99 .
 d) Weder die Zahl selbst noch ihr absoluter Betrag sind positiv.
 e) Die Zahl ist von ihrem Betrag verschieden, und dieser hat den Wert 7.
6. Berechne:
 a) $|7,9| + |-5|$ b) $|7,9| - |-5|$
 c) $|-81| + |-19|$ d) $|-81| - |19|$
 e) $|- \frac{17}{20}| - |-0,85|$ f) $|-1| - |\frac{1}{2}| - |-\frac{1}{4}|$.
7. Bestimme die Lösungsmengen:
 a) $|x| = 0,5$ b) $|x| = 7$ c) $|x| = 0$
 d) $|x| = -1$ e) $|x| \geq 0$ f) $|x| > 0$.
8. Welche Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ erfüllen folgende Bedingung?
 a) $|z| \leq 0$ b) $|z| < 1$ c) $|z| \leq 3$
 d) $|z| > 0$ e) $|z| \geq 2$ f) $1 < |z| < 4$.

2.4 Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen**2.4.1 Definition der Addition**

Ob die neu eingeführten negativen Zahlen zu Recht als Zahlen bezeichnet werden, entscheidet sich an der Frage, ob man mit ihnen in gewohnter Weise rechnen kann. Wir wollen dies zunächst für die Addition untersuchen. Dazu betrachten wir einige Beispiele von Summen aus rationalen Zahlen:

Beispiele:

- | | | |
|--------------------------|----------------------|-----------------|
| 1) $2 + 3,7$ | 2) $5 + 0$ | 3) $5,2 + (-3)$ |
| 4) $(-4) + 1\frac{3}{4}$ | 5) $(-2,4) + (-3,7)$ | 6) $0 + (-1)$ |

Beachte: Beim Anschreiben solcher Summen ist es wichtig, zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen genau zu unterscheiden. Das Vorzeichen ist ein Bestandteil der betreffenden Zahl! Dies wird, wie die Beispiele 3 bis 6 zeigen, durch Klammern zum Ausdruck gebracht.

Die Summen in den Beispielen 1 und 2 sind von bekannter Art. Dagegen stellen uns die übrigen Beispiele vor neue Situationen: Wir wissen ja noch nicht, wie Summen mit negativen Summanden zu berechnen sind! Man muß erst einmal definieren, welche Bedeutung solche Summen haben sollen. Natürlich soll diese *Definition der Addition rationaler Zahlen* so beschaffen sein, daß sie für nicht-negative Summanden (Beispiele 1 und 2) mit der altbekannten Addition übereinstimmt.

Bei der Suche nach einer geeigneten Definition erinnern wir uns an die graphische Darstellung der Addition bei positiven Zahlen (Abbildung 46.1):

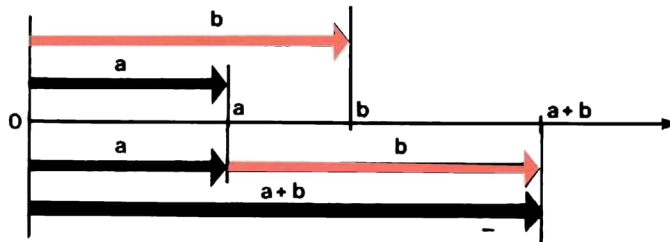


Abb. 46.1 Veranschaulichung der Addition in $\mathbb{Q}^+$

Man erhält, wie Abbildung 46.1 zeigt, den Pfeil für die Summe $a + b$, indem man an die Spitze des Pfeils a den Pfeil b ansetzt. Der Summenpfeil läuft dann vom Anfangspunkt des ersten zur Spitze des zweiten Summandenpfeils. Wir wollen dieses geometrische Verfahren im folgenden kurz als **Pfeiladdition** bezeichnen.

Es liegt nun nahe, diese Pfeiladdition versuchsweise auch auf Summen mit negativen Summanden zu übertragen. Für die obigen Beispiele 3, 4 und 5 ergeben sich dabei folgende Abbildungen:

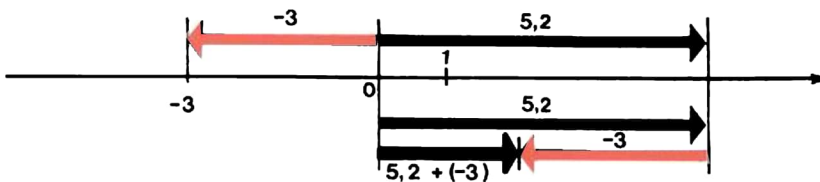
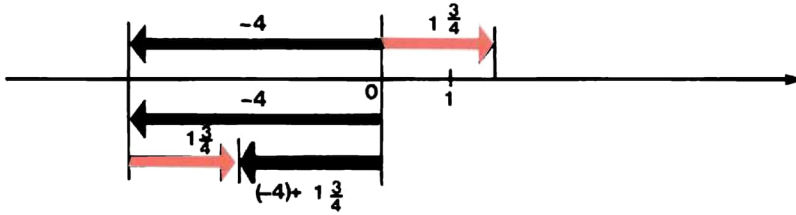
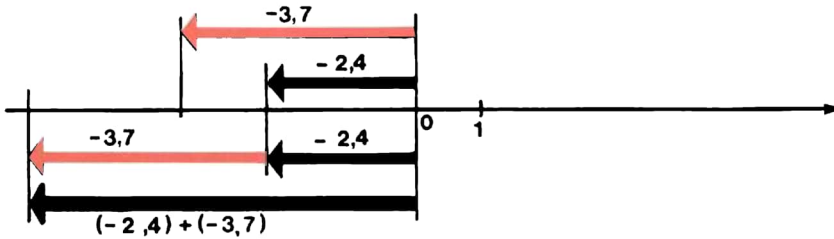


Abb. 46.2 $5,2 + (-3)$

Abb. 47.1 $(-4) + 1\frac{3}{4}$ Abb. 47.2 $(-2,4) + (-3,7)$

Aus der jeweils leicht errechenbaren Länge und der Richtung des Summenpfeils erkennt man, daß dieses Additionsverfahren folgende Ergebnisse liefert: $5,2 + (-3) = 2,2$; $(-4) + 1\frac{3}{4} = -2\frac{1}{4}$; $(-2,4) + (-3,7) = -6,1$.

Deutet man z. B. positive Zahlen als Guthaben, negative als Schulden, so erkennt man, daß diese Ergebnisse durchaus sinnvoll sind. Wir wollen daher das in diesen Beispielen angewandte Verfahren zur Definition der Addition beliebiger rationaler Zahlen verwenden.

Definition 47.1: Unter der Summe $a + b$ zweier rationaler Zahlen a und b verstehen wir diejenige Zahl, deren Pfeil sich durch Anwendung der Pfeiladdition auf die Pfeile a und b ergibt.

Mit dieser Definition ist es uns tatsächlich möglich, zwei beliebige Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zu addieren. Wie man an den vorausgehenden Beispielen erkennt, sind dabei jeweils zwei Überlegungen notwendig, nämlich:

1. Welche Richtung hat der Summenpfeil (falls seine Länge nicht 0 ist)?
2. Wie lang ist der Summenpfeil?

Die Antwort auf die erste Frage liefert das Vorzeichen der zu bestimmenden Summe, die Antwort auf die zweite ihren Absolutbetrag. Wie man vorgehen muß, um jeweils die richtigen Antworten zu finden, hängt von Betrag und Vorzeichen der beiden Summanden ab.

Wir untersuchen dazu verschiedene typische Fälle:

Fall 1: Die beiden Summanden a und b sind positiv.

Für diesen längst bekannten Fall gilt (vgl. Abbildung 46.1):

$a + b$ ist positiv und $|a + b| = |a| + |b|$,

also $a + b = |a| + |b|$.

Fall 2: Die beiden Summanden a und b sind negativ.

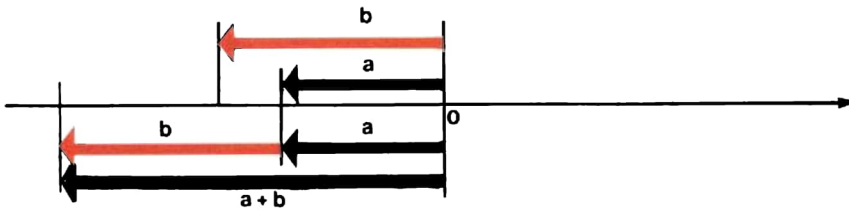


Abb. 48.1

Aus Abbildung 48.1 erkennt man leicht, daß nunmehr gilt:
 $a + b$ ist negativ und $|a + b| = |a| + |b|$,
 also $a + b = -(|a| + |b|)$.

Fall 3: a ist positiv, b negativ und $|a| > |b|$.

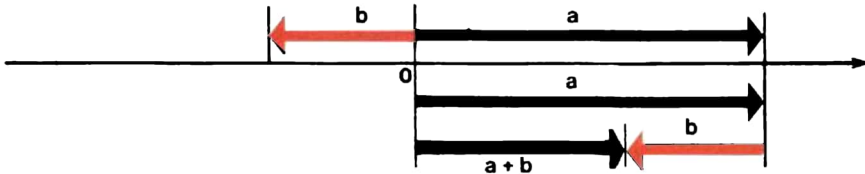


Abb. 48.2

Nach Abbildung 48.2 gilt:
 $a + b$ ist positiv und $|a + b| = |a| - |b|$,
 also $a + b = |a| - |b|$.

Fall 4: a ist positiv, b negativ und $|a| < |b|$.

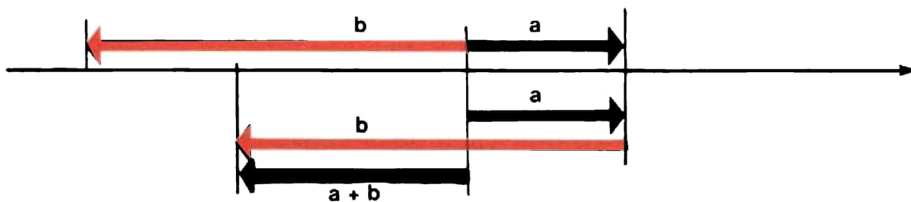


Abb. 48.3

Abbildung 48.3 zeigt:
 $a + b$ ist negativ und $|a + b| = |b| - |a|$,
 also $a + b = -(|b| - |a|)$.

Ganz entsprechend wie die Fälle 3 und 4 lassen sich die Fälle » a negativ, b positiv und $|a| > |b|$ « bzw. » a negativ, b positiv und $|a| < |b|$ « behandeln. Zeige dies z. B. anhand der Aufgaben 1.b) und 1.e) auf Seite 53.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich so beschreiben:

Satz 49.1: Zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** werden addiert, indem man ihre Beträge addiert und dieser Summe das Vorzeichen der beiden Summanden gibt.

Zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** werden addiert, indem man vom größeren Betrag den kleineren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag gibt.

Beispiele:

1) $(-3) + (-7,5) = ?$

Beide Summanden sind negativ, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden addiert. Somit gilt:

$$(-3) + (-7,5) = -(|-3| + |-7,5|) = -(3 + 7,5) = -10,5.$$

2) $5,8 + (-8,3) = ?$

Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag, also $-8,3$, ist negativ; daher wird auch die Summe negativ. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:

$$5,8 + (-8,3) = -(|-8,3| - |5,8|) = -(8,3 - 5,8) = -2,5.$$

3) $(-3\frac{1}{3}) + 4\frac{1}{6} = ?$

Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag ist positiv, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:

$$(-3\frac{1}{3}) + 4\frac{1}{6} = +(|4\frac{1}{6}| - |-3\frac{1}{3}|) = +(4\frac{1}{6} - 3\frac{1}{3}) = +\frac{5}{6}.$$

Von besonderem Interesse sind noch die zwei folgenden Fälle:

Fall 5: $|a| = |b|$ und a und b haben verschiedene Vorzeichen. In diesem Fall ist b die Gegenzahl von a , also $b = -a$.

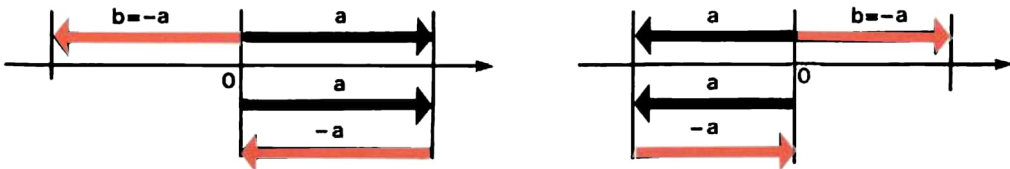


Abb. 49.1

Aus Abbildung 49.1 erkennt man: $a + (-a) = 0$.

Satz 49.2: Die Summe aus einer Zahl und ihrer Gegenzahl ist 0.

$$a + (-a) = 0 \text{ für jedes } a \in \mathbb{Q}$$

Fall 6: Ein Summand ist 0.

Da der Pfeil für die Zahl 0 die Länge 0 hat, ergibt sich unmittelbar aus Definition 47.1:

Satz 50.1: Für jede rationale Zahl a gilt

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Dieser Satz besagt, daß die Zahl 0 auch in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ das *neutrale Element der Addition* ist.

2.4.2 Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Q}$

Von der im Abschnitt 2.4.1 eingeführten Addition rationaler Zahlen wissen wir noch nicht, ob sie wirklich alle erwünschten Eigenschaften besitzt. Es geht hier vor allem um die Frage, ob für sie die Rechengesetze gültig bleiben, die uns von der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$ her schon bekannt sind. Zur Wiederholung wollen wir diese Rechengesetze hier zusammenstellen:

Rechengesetze der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E) $a + b$ ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}_0^+$	eindeutige Existenz der Summe
(K) $a + b = b + a$	Kommutativgesetz* der Addition
(A) $(a + b) + c = a + (b + c)$	Assoziativgesetz** der Addition
(N) $a + 0 = a$	0 ist neutrales Element der Addition

Wir müssen nun prüfen, ob die in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ eingeführte Addition ebenfalls diesen Rechengesetzen genügt.

1) Existenz der Summe: Nach dem in Definition 47.1 festgelegten Verfahren kann man zwei rationale Zahlen stets addieren; die Summe ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

* *commutare* (lat.) = verändern, vertauschen. – Der Ausdruck *kommutativ* wurde 1814 von François Joseph SERVOIS (1767–1847) in seinem *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel* in die Mathematik eingeführt.

** *associare* (lat.) = vereinigen, anschließen, verbinden. – Der Ausdruck *assoziativ* wurde 1843 von dem berühmten irischen Mathematiker und Astronomen William Rowan HAMILTON (1805–1865) bei der Erfindung ganz besonderer »Zahlen«, der sog. Quaternionen, in die Mathematik eingeführt. – Abb. 90.1

- 2) **Kommutativgesetz der Addition:** Wir konstruieren und vergleichen die Pfeilsummen $a + b$ und $b + a$ für die verschiedenen Vorzeichenzusammenstellungen:

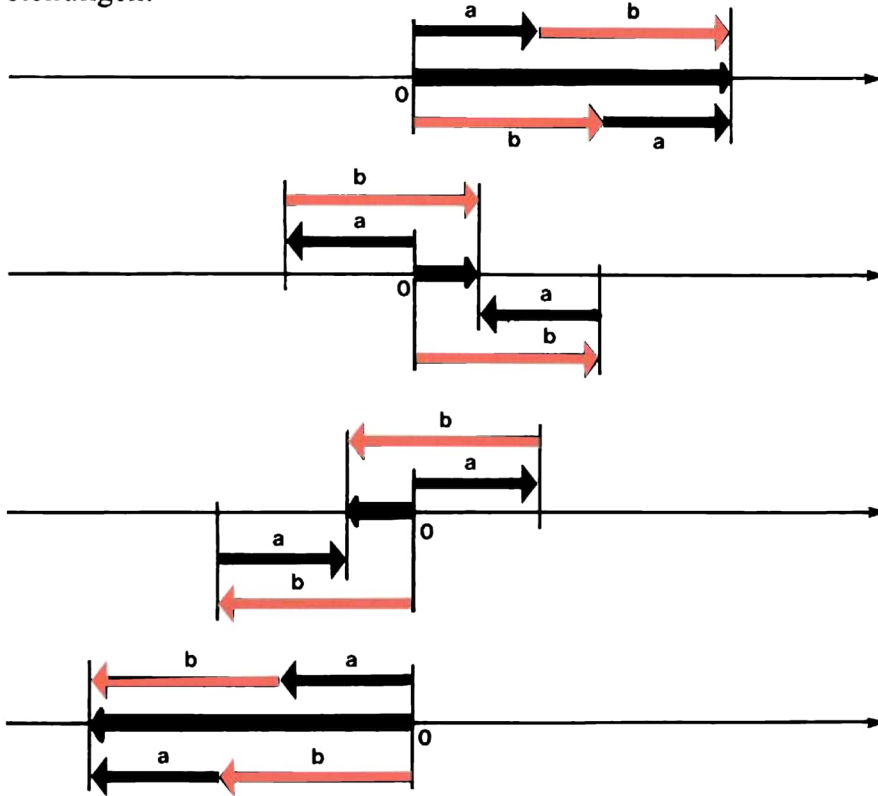


Abb. 51.1 Zum Nachweis des Kommutativgesetzes

Abbildung 51.1 zeigt, daß in allen diesen Fällen $a + b = b + a$ gilt. Wenn ein Summand 0 ist, gilt nach Satz 50.1 ebenfalls $a + 0 = 0 + a$. Also bleibt (K) in $\mathbb{Q}$ gültig.

- 3) **Assoziativgesetz der Addition:** Anstatt hier für alle typischen Fälle Pfeilsummen zu konstruieren, überlegen wir: Wenn man aus drei Pfeilen a, b, c die Summen $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$ bildet, läuft das in beiden Fällen darauf hinaus, daß man die Pfeile einfach der Reihe nach aneinandersetzt. Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob a und b oder b und c zu einer Zwischensumme zusammengefaßt werden. Damit gilt wieder $(a + b) + c = a + (b + c)$, d. h., (A) bleibt auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ gültig.

Ein Beispiel zeigt Abbildung 52.1. In den ersten beiden Zeichnungen wird jeweils oberhalb der Zahlengeraden die Zwischensumme $a + b$ bzw. $b + c$ konstruiert, die dann darunter zur Ermittlung der ganzen Summe $(a + b) + c$ bzw. $a + (b + c)$ verwendet wird. Der letzte Teil der Abbildung zeigt zum Vergleich die drei der Reihe nach aneinandergesetzten Pfeile.

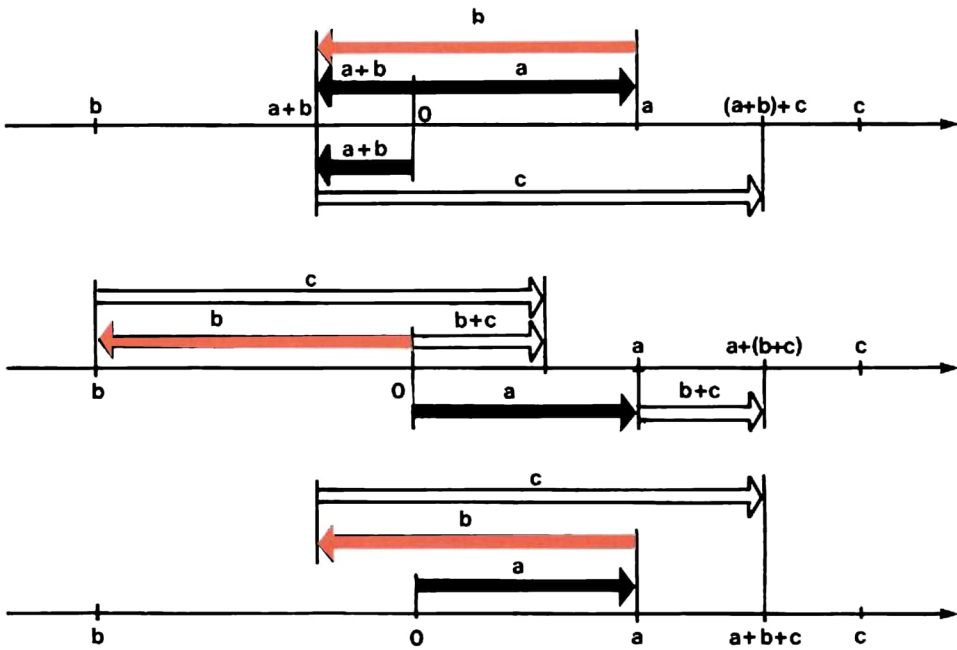


Abb. 52.1 Zum Assoziativgesetz der Addition

- 4) Neutrales Element der Addition:** Der schon bewiesene Satz 50.1 besagt, daß 0 auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ neutrales Element ist, so daß auch (N) gültig bleibt.

Damit gilt

Satz 52.1: Für die Addition in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 50 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Für die Rechenpraxis sind insbesondere die Gesetze (A) und (K) von großer Bedeutung. Aus (A) folgt bekanntlich, daß man bei dreigliedrigen Summen darauf verzichten kann, die Reihenfolge der beiden Additionen durch Klammern festzulegen. Da es nach dem Assoziativgesetz gleichgültig ist, ob man $(a + b) + c$ oder $a + (b + c)$ berechnet, genügt es auch, einfach $a + b + c$ zu schreiben. Nimmt man noch das Kommutativgesetz hinzu, so zeigt sich, daß auch die Reihenfolge der Summanden beliebig verändert werden kann. Dasselbe gilt, wie man zeigen kann, auch für Summen mit mehr als drei Summanden.

Beispiel 1:

Behauptung: $a + b + c = c + b + a$

Beweis: Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden das bei einer Umformung angewandte Rechengesetz über das Gleichheitszeichen. Zum Beispiel hat $\overset{\text{A}}{=}$ die Bedeutung »ist wegen Rechengesetz (A) gleich«.

$$a + b + c \overset{\text{A}}{=} (a + b) + c \overset{\text{K}}{=} c + (a + b) \overset{\text{K}}{=} c + (b + a) \overset{\text{A}}{=} c + b + a.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12,5 + (-23,91) + 7,5 &\overset{\text{A}}{=} (12,5 + (-23,91)) + 7,5 = \\ &\overset{\text{K}}{=} 7,5 + (12,5 + (-23,91)) = \\ &\overset{\text{A}}{=} (7,5 + 12,5) + (-23,91) = \\ &= 20 + (-23,91) = -3,91. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Summanden und der Rechenschritte die Durchführung einer Rechnung oft vereinfachen kann. Achte stets auf solche **Rechenvorteile**!

Aufgaben

- Bestimme die folgenden Summen durch eine Pfeilkonstruktion. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der jeweils angegebenen Längeneinheit (LE).

a) $(-3,2) + (-1,5)$, LE 1 cm;	b) $(-2,6) + 8$, LE 1 cm;
c) $64 + (-97)$, LE 1 mm;	d) $0,75 + (-0,48)$, LE 1 dm;
e) $(-1,1) + 0,8$, LE 5 cm;	f) $(-\frac{3}{4}) + (-\frac{7}{12})$, LE 6 cm.
- Berechne die folgenden Summen. Überlege jeweils zuerst, welches Vorzeichen das Ergebnis erhält und wie man seinen Betrag berechnet.

a) $(-10) + 12$	b) $10 + (-12)$	c) $(-9,1) + (-1,9)$
d) $1,5 + 4\frac{1}{3}$	e) $(-7,45) + 7\frac{1}{4}$	f) $0,865 + (-1,39)$
g) $(-\frac{7}{9}) + (-\frac{11}{15})$	h) $\frac{16}{7} + (-2\frac{3}{14})$	i) $(-0,196) + \frac{49}{250}$
- Konstruiere für die folgenden Zahlenbeispiele zur Überprüfung des Assoziativgesetzes der Addition die Pfeilsummen $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$. Kennzeichne dabei die zuerst gebildeten Zwischensummen durch zweifarbig Pfeile (vgl. Abbildung 52.1).

a) $a = 4$; $b = -3$; $c = -3,5$; LE 1 cm
b) $a = -2,4$; $b = 7,3$; $c = -3,2$; LE 1 cm
c) $a = -0,6$; $b = -\frac{3}{4}$; $c = \frac{7}{8}$; LE 4 cm
- Berechne die folgenden Summen. Achte dabei auf eventuelle Rechenvorteile.

a) $15 + 27 + (-32)$	b) $(-243) + (-102) + 45$
c) $1010 + (-2000) + 990$	d) $(-123) + (-68) + (-132)$
e) $(-0,93) + 1,13 + (-0,63)$	f) $(-2,25) + (-4,75) + 7,25$
g) $2\frac{3}{4} + (-1\frac{2}{3}) + (1\frac{1}{12})$	h) $15,8 + (-20\frac{1}{3}) + 4\frac{1}{2}$

5. Berechne:

- a) $(27 + (-15)) + (-8) + (-9)$ b) $(-109) + (85 + 13 + (-45))$
 c) $((-3,14) + 2,38) + (-0,167) + 1,427$
 d) $(4\frac{1}{7} + (-10,5)) + (8\frac{2}{3} + (-2\frac{3}{4}))$

6. Berechne:

- a) $(-7) + |-7|$ b) $|-2,5| + |2,5|$ c) $3,2 + |-3,2|$
 d) $|3 + (-4)|$ e) $|3| + |-4|$ f) $|(-3) + 4|$
 g) $|(-1,16) + (-2,39)|$ h) $|-1,16| + |-2,39|$ i) $|(-5\frac{1}{6}) + |-2\frac{1}{9}||$

7. Ist x positiv, null oder negativ, wenn folgende Gleichung gilt? (Hinweis: Beachte Satz 49.1.)

- a) $|7 + x| = 7 + |x|$ b) $|(-7) + x| = 7 + |x|$
 c) $|x + 2| = 2 - |x|$ d) $|x + 2| = |x| - 2$
 e) Welche Angabe über $|x|$ läßt sich im Fall c) bzw. im Fall d) machen?

8. Was kann man über die Vorzeichen von $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sagen, wenn gilt

- a) $|x + y| = |x| + |y|$ b) $|x + y| = |x| - |y|$
 c) $|x + (-y)| = |x| + |y|$ d) $|(-x) + (-y)| = |x| - |y|$?

2.4.3 Die Subtraktion in $\mathbb{Q}$

Beim Addieren besteht die Aufgabe darin, aus den gegebenen Summanden die Summe zu berechnen. Oft kommt es aber auch vor, daß von einer Summe der Wert schon bekannt ist und einer der Summanden gesucht wird. Um diesen zu berechnen, muß man bekanntlich eine **Subtraktion** ausführen. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Subtraktion als **Umkehrung der Addition**.

Beispiel:

Auf einer Straßenkarte ist die Entfernung München–Nürnberg mit 162 km und die Teilstrecke München–Ingolstadt mit 73 km angegeben. Wie lang ist dann die Strecke von Ingolstadt nach Nürnberg?

Bezeichnet man sie mit x km, so ist x die Lösung der Gleichung $73 + x = 162$, also $x = 162 - 73 = 89$.

Die Strecke Ingolstadt–Nürnberg ist somit 89 km lang.

Das Beispiel zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen der Differenz $162 - 73$ und der Gleichung $73 + x = 162$: die *Differenz* ist die *Lösung der Gleichung*. Ganz allgemein legt man fest:

Definition 54.1: Unter der Differenz $b - a$ versteht man die Lösung der Gleichung $a + x = b$.

$b - a$ ist also diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten.

Nach dieser Definition hat eine Differenz $b - a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung besitzt. In der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ war dies nur unter der Voraussetzung $a \leq b$ der Fall. Für $a > b$ war die Gleichung unlösbar, somit die Subtraktion $b - a$ nicht ausführbar. Hat sich daran durch die Einführung der negativen Zahlen etwas geändert? Ist in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Subtraktion immer durchführbar? Um diese wichtige Frage zu klären, betrachten wir als Beispiel zunächst eine Gleichung, die in $\mathbb{Q}_0^+$ keine Lösung hat:

Beispiel:

$$7 + x = 3$$

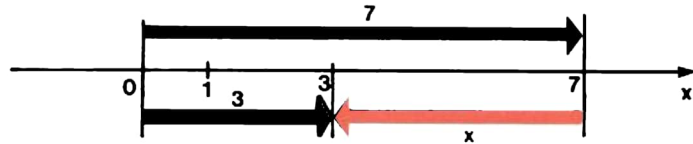


Abb. 55.1 Zur Gleichung $7 + x = 3$

Die Pfeildarstellung zeigt, daß es genau eine Zahl x gibt, die man zu 7 addieren muß, um 3 zu erhalten. Sie wird durch den von 7 nach 3 zeigenden Pfeil dargestellt. Man erkennt leicht, daß es die Zahl -4 ist.

Es gilt also: $7 + x = 3$ hat die Lösung $x = 3 - 7 = -4$.

Das in diesem Beispiel angewandte Verfahren läßt sich auf jede Gleichung der Form $a + x = b$ übertragen: Man stellt a und b durch vom Nullpunkt der Zahlengeraden ausgehende Pfeile dar. Dann gibt es genau einen Pfeil x , der von der Spitze des Pfeils a zur Spitze des Pfeils b führt; er stellt die einzige Lösung der Gleichung dar. Die Abbildung 55.2 zeigt einige typische Fälle.

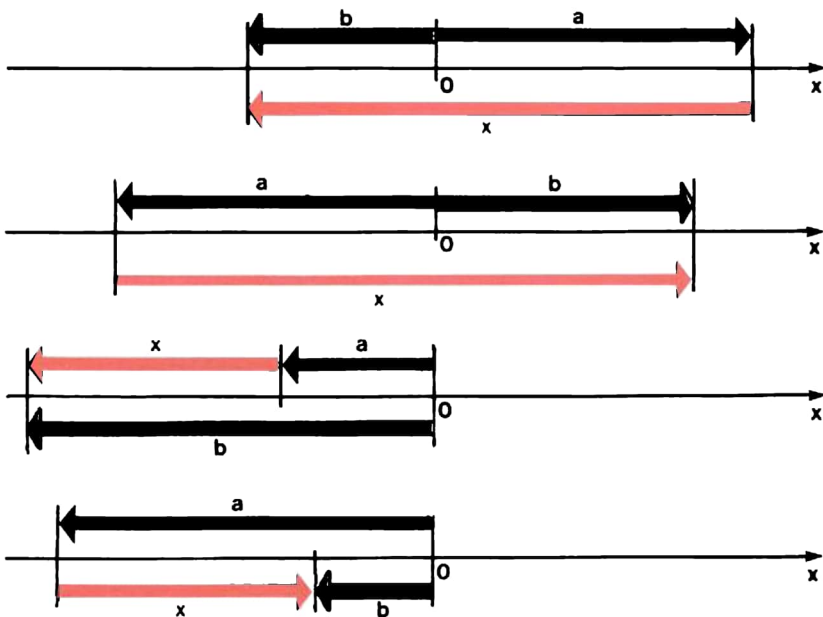


Abb. 55.2 Zur Gleichung $a + x = b$

Damit gilt folgender

Satz 56.1: Die Gleichung $a + x = b$ hat in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Da man die Lösung der Gleichung $a + x = b$ durch die Differenz $b - a$ ausdrückt (siehe Definition 54.1) und diese also für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ definiert ist, gilt weiter der wichtige

Satz 56.2: In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Subtraktion unbeschränkt ausführbar.

Durch die Einführung der negativen Zahlen ist es uns also gelungen, die früher bei der Subtraktion notwendigen Beschränkungen aufzuheben!

Ein wichtiger **Sonderfall** der Gleichung $a + x = b$ ergibt sich für $b = 0$. In diesem Fall, also für die Gleichung $a + x = 0$, lautet die Lösung: $x = 0 - a$. Bei dieser Differenz handelt es sich aber, wie Abbildung 56.1 zeigt, um die uns schon bekannte Gegenzahl von a , also $x = -a$.



Abb. 56.1 Die Gleichung $a + x = 0$

Damit gilt

Satz 56.3: Die Differenz $0 - a$ ist die Gegenzahl von a .

$$0 - a = -a$$

Man kann nun also $-a$ auch als Kurzschreibweise für die Differenz $0 - a$ auffassen. Analog dazu kann man $+a$ als Kurzform für die Summe $0 + a$ verstehen.

Die schon in Satz 49.2 aufgetretene Gleichung $a + (-a) = 0$ kann nun auch folgendermaßen gedeutet werden: Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine zweite Zahl (nämlich $-a$), so daß die Summe dieser Zahlen das neutrale Element der Addition, also 0, ist. Man sagt dazu auch: »Die beiden Zahlen heben sich beim Addieren gegenseitig auf.« In der Mathematik bezeichnet man solche Zahlen als *zueinander invers** bezüglich der Addition.

* inversus (lat.) = umgekehrt

Satz 57.1: Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Addition, nämlich die Gegenzahl $-a$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Addition dar, das als »Existenz des Inversen« bezeichnet wird. Wir verwenden dafür die Abkürzung (I). Damit haben wir für die Addition in $\mathbb{Q}$ fünf Rechengesetze:

(E), (K), (A), (N), (I).

Wir betrachten noch einmal die Pfeildarstellung der Differenz $b - a$ (Abbildung 57.1).

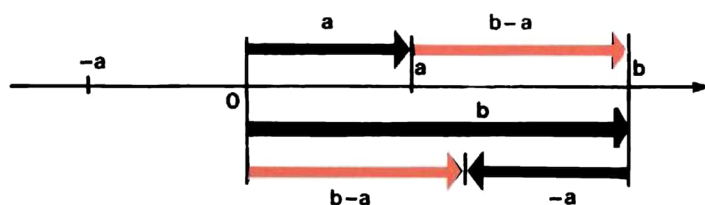


Abb. 57.1 Pfeildarstellung der Differenz

Offensichtlich erhält man den Pfeil $b - a$ auch dadurch, daß man an den Pfeil b den Pfeil $-a$ ansetzt, also die **Pfeilsumme** $b + (-a)$ bildet! Ob das allgemeingültig ist, können wir durch Rechnen überprüfen. Da $b - a$ die Lösung der Gleichung $a + x = b$ ist, rechnen wir nach, ob auch $b + (-a)$ diese Gleichung erfüllt:

$$a + (b + (-a)) \stackrel{K}{=} a + ((-a) + b) \stackrel{A}{=} (a + (-a)) + b = 0 + b = b,$$

also $a + (b + (-a)) = b$.

Damit ist gezeigt, daß die Lösung der Gleichung $a + x = b$, für die wir in Definition 54.1 die Differenzschreibweise $x = b - a$ vereinbart haben, auch in der Form $x = b + (-a)$ geschrieben werden kann. Da die Gleichung nur eine einzige Lösung besitzt, kann es sich bei $b - a$ und $b + (-a)$ nur um verschiedene Darstellungen derselben Zahl handeln! Es gilt also:

Satz 57.2: $b - a = b + (-a)$

Das heißt: Das Subtrahieren einer Zahl ist gleichbedeutend mit dem Addieren ihrer Gegenzahl.

Mit diesem Satz kann man jede Differenz in eine Summe, jede Subtraktion in eine Addition umwandeln! Das ist deshalb von großer praktischer Bedeutung, weil wir das Addieren in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ bereits gut beherrschen – und damit nun auch schon das Subtrahieren.

Beispiele:

- 1) $5 - 11 = 5 + (-11) = -(11 - 5) = -6.$
 2) $(-2,17) - 8,05 = (-2,17) + (-8,05) = -(2,17 + 8,05) = -10,22.$
 3) $(-6\frac{4}{15}) - (-9\frac{7}{20}) = (-6\frac{4}{15}) + (-(-9\frac{7}{20})) = (-6\frac{4}{15}) + 9\frac{7}{20} =$
 $= +(9\frac{7}{20} - 6\frac{4}{15}) = 3\frac{5}{60} = 3\frac{1}{12}.$

Aufgaben**1. Berechne folgende Differenzen:**

- a) $99 - 1000$ b) $(-99) - 1000$ c) $(-99) - (-1000)$
 d) $5,2 - 7,9$ e) $(-16,45) - (-17,5)$ f) $(-0,625) - 0,625$
 g) $\frac{51}{60} - \frac{7}{8}$ h) $2\frac{3}{7} - (-5\frac{2}{3})$ i) $(-10\frac{10}{11}) - (-7,2)$

2. a) Beschreibe für die im folgenden angegebenen Fälle, wie man das Vorzeichen und den Betrag der Differenz $a - b$ aus den Vorzeichen und Beträgen von Minuend a und Subtrahend b erhält. (Vergleiche dazu die entsprechende Untersuchung auf Seite 48 für die Summe $a + b$.) Fertige jeweils eine Pfeilskizze an.

1. Fall: a positiv und b negativ
2. Fall: a negativ und b positiv
3. Fall: a und b positiv und $|a| > |b|$
4. Fall: a und b positiv und $|a| < |b|$
5. Fall: a und b negativ und $|a| > |b|$
6. Fall: a und b negativ und $|a| < |b|$

b) Formuliere nun einen dem Satz 49.1 entsprechenden Satz für die Subtraktion.

3. Schreibe nach Definition 54.1 die Lösung der Gleichung als Differenz und berechne sie.

- a) $3 + x = 1$ b) $-3 + x = 1$ c) $3 + x = -1$
 d) $-3 + x = -1$ e) $x + 2,7 = 1,5$ f) $x + (-2,7) = 1,5$
 g) $x + 2,7 = -1,5$ h) $x + (-2,7) = -1,5$ i) $5\frac{1}{3} = x + 8\frac{1}{2}$
 k) $2\frac{1}{3} - 4\frac{1}{12} = 9\frac{1}{2} + x$ l) $231,77 + 378,29 = -167,71 + x$

4. Berechne:

- a) $21 - (17 + 14)$ b) $(-123) - (213 - 321)$
 c) $(-76) - (18 + 58)$ d) $(-51,6) + (34,9 - (-17,7))$
 e) $((-15\frac{13}{24}) + 81\frac{5}{9}) - 100$ f) $13,25 - (2\frac{3}{4} - (-1\frac{2}{3}))$

5. Berechne:

- a) $(365 - 640) + (575 - 700)$
 b) $(62,8 - 20,25) - (32,08 + 10,47)$
 c) $((-0,216) + 0,173) - (17,3 - 21,6)$
 d) $(16 - 12\frac{4}{15}) - (8,75 + (-3\frac{7}{9}))$

- 6. Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $x - a = b$, indem du $x - a$ als Summe schreibst und Definition 54.1 anwendest.
- a) $x - 5 = -3$ b) $x - 22 = 29,3$
c) $x - 2\frac{1}{9} = 3\frac{1}{3} - 6\frac{1}{5}$ d) $5\frac{1}{6} - 14\frac{1}{2} = x - 8\frac{1}{3}$
e) $33 - (17 + 48) = x - 25$ f) $x - (3\frac{1}{12} + 8\frac{1}{36}) = 4\frac{1}{18} - 9\frac{1}{9}$

- 7.** Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $a - x = b$, indem du $a - x$ als Summe schreibst und nach Definition 54.1 zuerst $-x$ berechnest.
- a) $10 - x = 20$ b) $3\frac{1}{4} - x = 5\frac{1}{8}$
- c) $6,92 - x = 2,17 - (0,25 - 4,5)$ d) $4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} = 7\frac{1}{3} - x$

- 8. Während eines Wintertages wurde im Abstand von je 3 Stunden die Temperatur abgelesen und notiert:**

Uhrzeit	0 ^h	3 ^h	6 ^h	9 ^h	12 ^h	15 ^h	18 ^h	21 ^h	24 ^h
Temperatur in °C	−9,5	−10,7	−11,8	−5,6	2,7	2,1	−2,1	−5,8	−7,3

- a) Berechne die Temperaturänderung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ablesungen.
 - b) In welchem dieser Zeitabschnitte war die Temperaturabnahme, in welchem die Temperaturzunahme am größten?
9. Gase werden bei sehr tiefen Temperaturen flüssig, z. B. Sauerstoff bei -183°C und Helium bei -269°C . Um wieviel Grad muß man Helium, das mit flüssigem Sauerstoff vorgekühlt wurde, noch weiter abkühlen, um es zu verflüssigen?
10. Wenn man Quecksilber abkühlt, erstarrt es bei einer Temperatur von -59°C . Um wieviel Grad muß sich Quecksilber, das die Temperatur von flüssigem Sauerstoff (-183°C) hat, erwärmen, damit es wieder flüssig wird?
11. Auf das Bankkonto des Herrn Knapp wurde am Monatsersten sein Gehalt in Höhe von 3275 DM überwiesen. Am gleichen Tag wurden 840 DM als Monatsmiete abgebucht. Danach betrug sein Guthaben 2361,42 DM. Wie hoch war der Kontostand vor den beiden Buchungen?
12. Auf einer Reise durch den Westen der USA übernachtet Familie Brown im berühmten Death Valley (California). Am nächsten Tag fahren sie weiter nach NW in die Sierra Nevada und erreichen dabei am Tioga-Paß (Meereshöhe 3031) den höchsten Punkt. Herr Brown stellt fest, daß sie damit an diesem Tag einen Höhenunterschied von 3116 m überwunden haben. Auf welcher Meereshöhe liegt demnach der tiefste Punkt des Death Valley (= tiefster Punkt in den USA!)?

2.5 Anordnung der rationalen Zahlen

2.5.1 Definition der Anordnung in $\mathbb{Q}$

Für je zwei Zahlen p und q aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ ist die folgende Aussage richtig:

Entweder gilt $p = q$, gelesen » p ist gleich q «,
 oder es gilt $p < q$, gelesen » p ist kleiner als q «,
 oder es gilt $p > q$, gelesen » p ist größer als q «.

Man sagt deshalb: »Die Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ ist angeordnet.« Die Aussagen $p < q$ oder $p > q$ nannte 1838 der Gymnasialdirektor Johann Heinrich Traugott MÜLLER (1797–1862) in seinem *Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen Ungleichungen*.

Das Zeichen $=$ wurde von dem Engländer Robert RECORD(E) (1510(?)–1558) erfunden. In seinem *The whetstone of witte* (Der Schleifstein des Denkens) schreibt er 1557: »And to avoid the tedious repetition of these words ›is equal to‹ I will set [...] a pair of parallels, or twin lines of one length, thus: $\equiv$, because no 2 things can be more equal.« – Zeichen der Gleichheit nannte es 1791 Johann Heinrich VOIGT (1751–1823). Die Zeichen $<$ und $>$ erscheinen zum ersten Mal in der postum 1631 gedruckten *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas* des Engländers Thomas HARRIOT (1560–1621). Der Herausgeber, Walter WARNER, gab HARRIOTS handschriftlichen Zeichen $\ll$ bzw. $\gg$ diese einfache Form.

Wir wollen nun versuchen, die Anordnung in $\mathbb{Q}_0^+$ auf die größere Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auszudehnen. Dazu müssen wir auch für die neu hinzugekommenen negativen Zahlen die Verwendung der Zeichen $<$ und $>$ sinnvoll festlegen. Da in $\mathbb{Q}_0^+$ die Ungleichung $p < q$ bedeutet, daß auf dem *Zahlenstrahl* der Punkt p links vom Punkt q liegt, bietet es sich an, zu vereinbaren, daß auch für zwei Zahlen a und b aus $\mathbb{Q}$ die Beziehung $a < b$ genau dann gelten soll, wenn auf der *Zahlengeraden* der Punkt a links vom Punkt b liegt (Abbildung 60.1). Damit müßte z. B. $-20 < -1$ oder $-500 < 0$ oder $-2 < 0,2$ gelten! Deutet man die Zahlen etwa als Angaben über Temperaturen oder Kontostände, so erkennt man, daß solche Ungleichungen durchaus sinnvoll sind.

Definition 60.1: Für zwei rationale Zahlen a und b gilt $a < b$ genau dann, wenn auf der Zahlengeraden der Punkt a links vom Punkt b liegt.
 Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$.

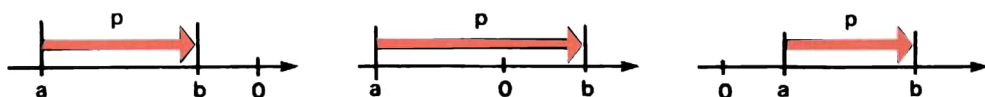


Abb. 60.1 Veranschaulichung von $a < b$

Aus Definition 60.1 folgt, daß nun auch in der Menge $\mathbb{Q}$ für je zwei Zahlen a, b die Aussage zutrifft:

Es gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $a > b$.

Auf Grund der Anordnung auf der Zahlengeraden bestehen zwischen den negativen Zahlen, der Zahl null und den positiven Zahlen die folgenden Beziehungen:

Satz 61.1: 1. Jede positive Zahl ist größer als 0.
 2. Jede negative Zahl ist kleiner als 0.
 3. Jede negative Zahl ist kleiner als jede positive.

Wegen Teil 1 und 2 dieses Satzes können wir die Aussagen » a ist positiv« bzw. » a ist negativ« kürzer durch die Ungleichungen $a > 0$ bzw. $a < 0$ beschreiben.

Wie die Abbildung 60.1 zeigt, ist im Fall $a < b$ der Pfeil von a nach b stets rechtsgerichtet; er stellt also eine positive Zahl p dar. p ist diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten, also die Differenz $b - a$. Da umgekehrt für eine Zahl $p > 0$ zur Summe $a + p$ immer ein rechts von a liegender Punkt der Zahlengeraden gehört, gilt

Satz 61.2: $a < b$ gilt genau dann, wenn es eine positive Zahl p gibt, so daß $a + p = b$.

Beispiele:

- 1) $-20 < -1$; denn $-20 + 19 = -1$.
- 2) $-500 < 0$; denn $-500 + 500 = 0$.
- 3) $-2 < 0,2$; denn $-2 + 2,2 = 0,2$.
- 4) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$; denn $\frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$.

2.5.2 Monotoniegesetz der Addition

Wir wissen: Wenn man zwei gleiche Zahlen a und b hat und zu jeder dieselbe Zahl c addiert, erhält man auch gleiche Summen. Das heißt, aus $a = b$ folgt stets $a + c = b + c$.

Beispiel*: $2 + 3 = 5 \Rightarrow (2 + 3) + 8 = 5 + 8$

Welche Beziehung besteht aber zwischen $a + c$ und $b + c$, wenn a und b verschiedene Zahlen sind, wenn z. B. $a < b$ gilt?

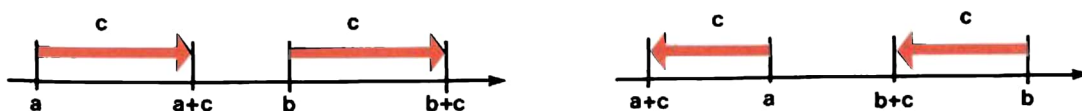


Abb. 61.1 Zum Monotoniegesetz der Addition

* Den Folgepfeil $\Rightarrow$ liest man *daraus folgt*.

Wie Abbildung 61.1 zeigt, gilt mit $a < b$ stets auch $a + c < b + c$, und zwar unabhängig davon, ob $c > 0$ oder $c < 0$ oder $c = 0$ gewählt wird. Die Addition von c verschiebt jeden der Punkte a und b auf der Zahlengeraden um den Pfeil c . Dabei bleibt ihre Reihenfolge und sogar ihre Entfernung erhalten. Daß umgekehrt aus $a + c < b + c$ auch wieder die Ungleichung $a < b$ folgt, erkennt man, indem man auf beiden Seiten $-c$ addiert. Damit gilt

Satz 62.1: Monotoniegesetz der Addition

Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Ein entsprechendes Monotoniegesetz gilt auch für die Subtraktion, denn man kann ja nach Satz 57.2 jede Differenz auch als Summe schreiben. Durchführung in Aufgabe 63/3.

Das Monotoniegesetz der Addition wendet man gerne an, um festzustellen, ob eine Ungleichung zutrifft oder nicht.

Beispiele:

- 1) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 6 < -6 + 6 \Leftrightarrow -30 < 0$
- 2) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 36 < -6 + 36 \Leftrightarrow 0 < 30$
- 3) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 21 < -6 + 21 \Leftrightarrow -15 < 15$
- 4) $2,25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2,25 - \frac{7}{20} > \frac{47}{20} - \frac{7}{20} \Leftrightarrow 2,25 - 0,35 > \frac{40}{20} \Leftrightarrow 1,9 > 2(!)$
- 5) $2,25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2,25 - 2,25 > \frac{47}{20} - 2,25 \Leftrightarrow 0 > 2,35 - 2,25 \Leftrightarrow 0 > 0,1(!)$

Die Beispiele 1, 2 und 5 zeigen, wie man durch Anwendung des Monotoniegesetzes der Addition bzw. Subtraktion eine Ungleichung auf »Nullform« bringen, d. h. auf einer Seite der Ungleichung die Zahl 0 herstellen kann. An einer solchen Nullform erkennt man besonders leicht, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

Aufgaben

1. Stelle aus den Zahlen der folgenden Paare mit einem der Zeichen $=$, $<$, $>$ eine richtige Gleichung bzw. Ungleichung her.

a) 0; 0,1	b) 3; -1	c) -5,6; -6,5	d) $-\frac{7}{20}$; -0,35
e) -25; 0	f) -0,99; 0,01	g) $-\frac{9}{40}$; $\frac{9}{24}$	h) $-\frac{19}{24}$; $-\frac{33}{40}$
i) -3; -1	k) $-1,4$; $\frac{7}{5}$	l) 10; -100	m) -57; -75
2. Unter den folgenden Ungleichungen sind einige falsch! Welche?

a) $1,65 < 2$	b) $-1,65 < -2$
c) $\frac{14}{23} > 0,56$	d) $-\frac{14}{23} < -0,56$
e) $1 - 2,75 > -2,25$	f) $-1,3 - 2,45 < -4 + 0,75$
g) $3,5 - (2\frac{7}{8} + 0,625) \neq (1\frac{3}{8} - \frac{1}{2}) - 0,875$	
h) $0,5 - (\frac{2}{7} + \frac{1}{5}) \neq 1,2 - \frac{17}{14}$	

3. Zum Monotoniegesetz der Subtraktion

a) Fasse folgenden Satz in Worte und begründe ihn:

Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt: $a < b \Rightarrow a - c < b - c$.

b) Begründe: Für alle $a, b, d \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - d < b - d \Rightarrow a < b$.

4. Stelle bei den folgenden Ungleichungen ihre beiden Nullformen her und entscheide, ob die Ungleichungen wahr oder falsch sind.

a) $9,99 < 9,999$

b) $-1,001 < -1,01$

c) $1,85 > \frac{13}{7}$

d) $-\frac{17}{24} > -\frac{18}{25}$

e) $1,5 - \frac{4}{15} < 1\frac{11}{50}$

f) $16,1 - \frac{17}{18} > 18\frac{1}{3} - 3\frac{2}{11}$

5. Auch für Ungleichungen der Form $a \neq b$ gilt das Monotoniegesetz der Addition: $a \neq b \Leftrightarrow a + c \neq b + c$.

a) Gib zu diesem Monotoniegesetz drei Beispiele an.

b) Begründe dieses Monotoniegesetz.

6. Wenn man bei zwei Ungleichungen $a < b$ und $c < d$ die Zahlen links vom Ungleichheitszeichen sowie die Zahlen rechts davon addiert und das Ungleichheitszeichen beibehält, so entsteht wieder eine richtige Ungleichung. Kurz:

aus $a < b$ }
und $c < d$ } folgt $a + c < b + d$.

a) Prüfe diese Behauptung an drei Zahlenbeispielen.

• b) Beweise die obige Behauptung, indem du bei $a < b$ auf beiden Seiten c und bei $c < d$ auf beiden Seiten b addierst und die erhaltenen Ungleichungen miteinander vergleichst. Mache dir die Zusammenhänge auch an der Zahlengeraden klar.

• c) An der Ungleichung $3 + 97 < 1 + 100$ erkennt man, daß der in b) bewiesene Satz nicht umkehrbar ist. Begründe dies und gib ein weiteres Gegenbeispiel an.

2.6 Multiplikation und Division von rationalen Zahlen**2.6.1 Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$**

In der Menge der rationalen Zahlen beherrschen wir bis jetzt erst das Addieren und das Subtrahieren. Zwar wissen wir auch, wie Zahlen aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ miteinander multipliziert werden, aber wir kennen noch keine Produkte mit negativen Faktoren. Was soll z. B. $3 \cdot (-4)$ oder $(-2,4) \cdot \frac{2}{3}$ oder gar $(-3,4) \cdot (-5,1)$ bedeuten?

Zunächst eine Bemerkung zur Schreibweise: Auch bei Produkten ist es sehr wichtig, zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen genau zu unterscheiden. Ein Faktor mit Vorzeichen muß, wie die Beispiele zeigen, in Klammern gesetzt werden.

Produkte mit negativen Faktoren müssen wir also erst noch definieren. Natürlich versuchen wir wieder, es so einzurichten, daß für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die Rechengesetze erhalten bleiben, die uns für die Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$ geläufig sind (Permanenzprinzip, vgl. Seite 38). Zur Wiederholung stellen wir diese Rechengesetze hier zusammen:

Rechengesetze der Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$	
Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:	
(E) $a \cdot b$ ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}_0^+$	eindeutige Existenz des Produkts
(K) $a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz der Multiplikation
(A) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Assoziativgesetz der Multiplikation
(N) $a \cdot 1 = a$	1 ist neutrales Element der Multiplikation

Produkte traten erstmals beim Rechnen mit natürlichen Zahlen auf. Sie wurden dort als Kurzschreibweise für Summen mit gleichen Summanden eingeführt; z. B. gilt: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$. Deshalb liegt es nahe, ein Produkt wie $3 \cdot (-4)$ ebenfalls als abgekürzte Schreibweise für eine Summe aufzufassen, nämlich als $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4)$. Die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Summe können wir berechnen! Wir erhalten so $3 \cdot (-4) = -12$, wofür man wegen $12 = 3 \cdot 4$ auch schreiben kann:

$$3 \cdot (-4) = -(3 \cdot 4)$$

Das sieht nach einer sehr einfachen Regel aus! Man kann sie offenbar immer dann anwenden, wenn der erste Faktor eine natürliche Zahl und größer als 1 ist.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad 5 \cdot (-0,7) &= (-0,7) + (-0,7) + (-0,7) + (-0,7) + (-0,7) = \\ &= -3,5 = -(5 \cdot 0,7) \end{aligned}$$

$$2) \quad 2 \cdot (-3\frac{2}{9}) = (-3\frac{2}{9}) + (-3\frac{2}{9}) = -6\frac{4}{9} = -(2 \cdot 3\frac{2}{9})$$

Ein Produkt wie $3,4 \cdot (-5,1)$, bei dem der erste Faktor zwar wieder positiv, jedoch nicht ganzzahlig ist, kann nicht mehr als Summe gedeutet werden. Wohl aber ist es auch hier möglich, den Term $-(3,4 \cdot 5,1)$ zu berechnen. Der Vergleich mit den obigen Beispielen legt nahe, zu vereinbaren, daß $3,4 \cdot (-5,1) = -(3,4 \cdot 5,1)$ gelten soll. Dieses Verfahren läßt sich auf alle Produkte mit positivem ersten und negativem zweiten Faktor anwenden. Wir erhalten so

Definition 65.1: Für das Produkt aus einer positiven Zahl p und einer negativen Zahl $-q$ soll gelten:

$$p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$$

Beachte, daß in dieser Definition (und auch im folgenden) die Variablen p und q positive Zahlen vertreten!

Vertauscht man im Beispiel $3,4 \cdot (-5,1)$ die Reihenfolge der Faktoren, so erhält man ein Produkt, bei dem der erste Faktor negativ, der zweite positiv ist. Natürlich soll, da wir ja das Kommutativgesetz retten wollen, dieses Produkt denselben Wert wie $3,4 \cdot (-5,1)$ erhalten! Es soll also gelten: $(-5,1) \cdot 3,4 = 3,4 \cdot (-5,1) = -(3,4 \cdot 5,1)$ bzw., da man die positiven Faktoren in der letzten Klammer vertauschen darf:

$$(-5,1) \cdot 3,4 = -(5,1 \cdot 3,4)$$

Die Verallgemeinerung dieser Überlegung führt zu

Definition 65.2: Für das Produkt aus einer negativen Zahl $-p$ und einer positiven Zahl q soll gelten:

$$(-p) \cdot q = -(p \cdot q)$$

Die beiden in den Definitionen 65.1 und 65.2 enthaltenen Regeln lassen sich so zusammenfassen: Man erhält das Produkt aus einer positiven und einer negativen Zahl, indem man das Minuszeichen des negativen Faktors vor das Produkt der beiden Beträge setzt.

Wenn wir nun weiter überlegen, wie man ein Produkt aus zwei negativen Faktoren, z. B. $(-3,4) \cdot (-5,1)$, definieren soll, so liegt es nahe, die Regeln in den Definitionen 65.1 und 65.2 versuchsweise auch jetzt zu benützen, also das »Herausziehen des Minuszeichens« auch in diesem Fall anzuwenden (Permanenzprinzip!). Damit erhält man:

$$\begin{aligned} (-3,4) \cdot (-5,1) &= -((-3,4) \cdot 5,1) = && \text{(Anwendung von Def. 65.1 auch bei} \\ & && \text{negativem 1. Faktor!)} \\ &= -(-(3,4 \cdot 5,1)) = && \text{(nach Def. 65.2)} \\ &= 3,4 \cdot 5,1 && \text{(nach Satz 42.1)} \end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung dieses Vorgehens würde also folgende Regel ergeben: $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$ für $p > 0$ und $q > 0$.

Demnach müßte das Produkt zweier negativer Zahlen positiv sein! Das mag auf den ersten Blick überraschen. Sinnvoll erscheint aber jedenfalls, daß, wie in den vorausgehenden Fällen, der Betrag des Produktes wieder den Wert $p \cdot q$ haben soll. Dann kann das Produkt selbst aber nur $p \cdot q$ oder $-(p \cdot q)$ sein. Der Produktwert $-(p \cdot q)$ ergab sich aber bereits in den Fällen $p \cdot (-q)$ und $(-p) \cdot q$, von denen sich $(-p) \cdot (-q)$ doch sicherlich unterscheiden sollte. Das spricht wieder für das Ergebnis $p \cdot q$, also für

Definition 66.1: Für das Produkt zweier negativer Zahlen $-p$ und $-q$ soll gelten:

$$(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$$

Der jetzt noch verbleibende Fall, daß eine negative Zahl mit 0 multipliziert werden soll, bereitet uns wenig Mühe. Natürlich soll ein solches Produkt wieder den Wert 0 haben:

Definition 66.2: Für das Produkt einer negativen Zahl $-p$ mit der Zahl 0 soll gelten:

$$(-p) \cdot 0 = 0 \cdot (-p) = 0$$

Nunmehr sind wir in der Lage, das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen zu berechnen. Die dafür geltenden Regeln kann man so zusammenfassen:

Satz 66.1: Zwei rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert.
Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Beträge bildet und ihm das negative Vorzeichen gibt.
Ein Produkt mit dem Faktor 0 hat den Wert 0.

Beispiele:

- 1) $4 \cdot (-5) = -(4 \cdot 5) = -20$
- 2) $(-3) \cdot 17 = -(3 \cdot 17) = -51$
- 3) $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$
- 4) $(-8) \cdot (-7,5) = 8 \cdot 7,5 = 60$
- 5) $2,5 \cdot (-3,7) = -(2,5 \cdot 3,7) = -9,25$
- 6) $(-\frac{3}{4}) \cdot 1\frac{1}{9} = -(\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{9}) = -(\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9}) = -\frac{5}{6}$
- 7) $(-100\,000) \cdot 0 = 0$

Wichtige Sonderfälle von Produkten sind solche aus zwei gleichen Faktoren, also die **Quadrate*** rationaler Zahlen: $a \cdot a = a^2$.

Beispiele:

- 1) $4^2 = 16$; 2) $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 4 \cdot 4 = 16$
- 3) $0^2 = 0$; 4) $(-1,2)^2 = (-1,2) \cdot (-1,2) = 1,2 \cdot 1,2 = 1,44$

* Das Produkt einer Zahl mit sich selbst nannten die Griechen – so belegt bei EUKLID, 8. Buch der *Elemente* – τετράγωνος [ἀριθμός] (tetrágonos [arithmós]) = *viereckig[e Zahl]*, da sie den Inhalt des τετράγωνον [σχῆμα] (tetrágonon [s-chema]) = *viereckig[e Figur]* angab, falls diese Figur gleichseitig rechtwinklig ist. Über das lateinische *quadratus* = *viereckig* entstand das deutsche **Quadrat**.

Auf Grund dieser Beispiele vermuten wir die Gültigkeit von

Satz 67.1: Das Quadrat einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl ist positiv. Das Quadrat von 0 ist 0. Kurz:

$$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \quad \text{und} \quad 0^2 = 0$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 66.1 (vgl. Aufgabe 69/2).

2.6.2 Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

Es war unser Ziel, die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ so zu definieren, daß die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze gültig bleiben. Ob uns das gelungen ist, muß nun geprüft werden.

1) Existenz des Produkts: Mit Hilfe der Definitionen in 2.6.1 bzw. nach Satz 66.1 kann man zwei rationale Zahlen stets miteinander multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

2) Kommutativgesetz der Multiplikation: Hier muß untersucht werden, ob die Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ für beliebige rationale Zahlen gilt. Bei den hierzu notwendigen **Fallunterscheidungen** verwenden wir wieder p und q als Zeichen für positive Zahlen.

1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$

Dann gilt, wie schon bekannt, $a \cdot b = b \cdot a$ ((K) in $\mathbb{Q}_0^+$).

2. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$, $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b &= p \cdot (-q) = -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot p = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

3. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (-p) \cdot q = -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= q \cdot (-p) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

4. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (-p) \cdot (-q) = p \cdot q = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= q \cdot p = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot (-p) = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

5. Fall: $a = 0$ oder $b = 0$

Dann gilt $a \cdot b = 0 = b \cdot a$ (Satz 66.1)

Damit ist nachgewiesen, daß in jedem Fall $a \cdot b = b \cdot a$ gilt. Also bleibt (K) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig.

3) Assoziativgesetz der Multiplikation: Gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für beliebige rationale Zahlen a, b, c ?

1) Wenn mindestens einer der drei Faktoren 0 ist, gilt nach Satz 66.1:

$$(a \cdot b) \cdot c = 0 = a \cdot (b \cdot c).$$

2) Wenn keiner der drei Faktoren 0 ist, bestehen folgende acht Möglichkeiten:

	1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall	5. Fall	6. Fall	7. Fall	8. Fall
a	pos.	pos.	pos.	pos.	neg.	neg.	neg.	neg.
b	pos.	pos.	neg.	neg.	pos.	pos.	neg.	neg.
c	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.

Im 1. Fall gehören alle drei Faktoren zur Menge $\mathbb{Q}^+$, in welcher (A) gilt. Als Muster für die Überprüfung der übrigen Fälle soll hier nur der 6. Fall untersucht werden:

6. Fall: $a < 0, b > 0$ und $c < 0$

Wir setzen $a = -p, b = q$ und $c = -r$, mit p, q, r aus $\mathbb{Q}^+$.

Dann gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = ((-p) \cdot q) \cdot (-r) = -(pq) \cdot (-r) = (pq)r. \quad \begin{array}{l} \text{(Definition 65.2)} \\ \text{(Definition 66.1)} \end{array}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (-p) \cdot (q \cdot (-r)) = (-p) \cdot -(qr) = p(qr). \quad \begin{array}{l} \text{(Definition 65.1)} \\ \text{(Definition 66.1)} \end{array}$$

Wegen der Gültigkeit von (A) in $\mathbb{Q}^+$ ist aber $(pq)r = p(qr)$, also gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Nach derselben Methode kann man auch die übrigen Fälle untersuchen (vgl. Aufgabe 70/4). Dabei zeigt sich, daß (A) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt.

4) Neutrales Element der Multiplikation: Für $a < 0$, also $a = -p$, gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= (-p) \cdot 1 = -(p \cdot 1) = \quad \text{(Definition 65.2)} \\ &= -p = \quad \text{((N) in } \mathbb{Q}^+) \\ &= a. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß 1 auch für die negativen und damit für alle rationalen Zahlen neutrales Element der Multiplikation ist.

Damit ist gezeigt:

Satz 69.1: Für die Multiplikation in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Ebenso wie bei dreigliedrigen Summen kann man nun auch bei Produkten mit drei Faktoren wegen (A) auf Klammern verzichten:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$$

Mit Hilfe von (K) erkennt man, daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig verändert werden darf:

Beispiel 1:

Behauptung: $abc = cba$

Beweis: $abc \stackrel{A}{=} (ab)c \stackrel{K}{=} c(ab) \stackrel{K}{=} c(ba) \stackrel{A}{=} cba.$

Ganz entsprechend läßt sich auch bei Produkten mit mehr als drei Faktoren zeigen, daß man auf Klammern verzichten kann und daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden darf.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12,5 \cdot (-23,91) \cdot 8 &\stackrel{A}{=} 12,5 \cdot ((-23,91) \cdot 8) = \\ &\stackrel{K}{=} ((-23,91) \cdot 8) \cdot 12,5 = \\ &\stackrel{A}{=} (-23,91) \cdot (8 \cdot 12,5) = \\ &= (-23,91) \cdot 100 = -2391. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Faktoren und der Rechenschritte die Berechnung eines Produktes oft vereinfachen kann. Achte also stets auf solche **Rechenvorteile**.

Aufgaben

1. a) $(-5) \cdot 24$ b) $16 \cdot (-30)$ c) $(-125) \cdot (-81)$
 d) $(-2,5) \cdot 0,28$ e) $(-17,25) \cdot (-3,04)$ f) $0,064 \cdot (-6,25)$
 g) $3\frac{4}{15} \cdot (-2\frac{1}{7})$ h) $(-\frac{7}{12}) \cdot (-\frac{3}{14})$ i) $(-8,45) \cdot 1\frac{1}{39}$
2. Beweise Satz 67.1. Unterscheide dabei die Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$.
3. a) $1,1^2$ b) $(-0,11)^2$ c) $(-32)^2$ d) $(-\frac{11}{12})^2$
 e) $(0,375 - \frac{3}{8})^2$ f) $(\frac{3}{6} - \frac{4}{7})^2$ g) $(\frac{4}{7} - \frac{3}{6})^2$ h) $((-\frac{4}{7}) - \frac{3}{6})^2$

4. Überprüfe das Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$ nach dem Muster des auf Seite 68 durchgeführten 6. Falles
- für $a > 0, b > 0, c < 0$ (2. Fall),
 - für $a > 0, b < 0, c < 0$ (4. Fall),
 - für $a < 0, b < 0, c < 0$ (8. Fall).
5. Berechne die folgenden Produkte. Achte dabei auf Rechenvorteile.
- $4 \cdot (-37) \cdot \frac{3}{4}$
 - $(-107) \cdot 8 \cdot (-25)$
 - $(-0,2) \cdot (-6,28) \cdot (-50)$
 - $(-300) \cdot 1\frac{2}{3} \cdot (-0,132)$
 - $(-\frac{17}{91}) \cdot 0 \cdot (-\frac{14}{31})$
 - $(-2\frac{2}{3})^2 \cdot (-\frac{31}{32}) \cdot \frac{3}{7}$
6. Begründe den **Satz**: Ein Produkt, in dem kein Faktor 0 ist, hat genau dann einen positiven Wert, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist.
7. Setze zwischen die folgenden Zahlenterme eines der Zeichen $<, =, >$ so, daß eine wahre Aussage entsteht. In welchen Beispielen ist dies ohne Rechnung möglich?
- $7 \cdot (-0,02)$ und 1
 - $(-12) \cdot (-13)$ und 150
 - -6 und $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$
 - $(-\frac{3}{7}) \cdot (-\frac{14}{27}) \cdot (-9\frac{10}{11})$ und 0
 - $(-0,64)^2$ und $-0,64$
 - $(-\frac{13}{18}) \cdot 4,5$ und $5,4 \cdot (-0,6)$
8.
 - $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$
 - $1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4)$
 - $(-2,5) \cdot (-1,6) \cdot 3,25 \cdot (-0,5)$
 - $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot (-1\frac{1}{4}) \cdot 1\frac{1}{5}$
9. Achte bei der Berechnung der folgenden Summen und Differenzen auf die richtige Reihenfolge der Rechenschritte.
- $(-1) + (-2) \cdot (-3)$
 - $(-1) \cdot (-2) - (-3) \cdot (-4)$
 - $250 \cdot (-0,25) - 25 \cdot (-0,250)$
 - $(-4,56) \cdot (-10,5) + 6,3 \cdot (-7,6)$
 - $(-8,1) \cdot \frac{25}{7} - (-0,98) \cdot (-\frac{5}{7})$
 - $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-\frac{5}{6}) + 2 \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot \frac{6}{5}$
10.
 - $(263 - 298)(298 - 263)$
 - $(41,5 + (-67,75)) \cdot ((-2,1) - 1,9)$
 - $(1\frac{2}{7} - 2\frac{1}{7}) \cdot 3,5 \cdot ((-1\frac{2}{3}) - \frac{1}{6})$
 - $(1 - \frac{7}{2})(2 - \frac{7}{3})(3 - \frac{7}{4})$
11. Berechne folgende Absolutbeträge:
- $|5(-2)|$
 - $|(-8) \cdot 9|$
 - $|(-17)(-3)|$
 - $|24 \cdot 25|$
 - $|0,75(-4)(-\frac{2}{3})|$
 - $|(-0,75) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}|$
 - $|(-0,75)(-4)(-\frac{2}{3})|$
 - $|9,81 \cdot (-\frac{7}{11}) \cdot 0 \cdot (-3\frac{1}{3})|$
12. Beweise den **Satz**: Der Betrag des Produktes zweier rationaler Zahlen a und b ist gleich dem Produkt der Beträge dieser Zahlen, d. h. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
13. Berechne den Wert der folgenden Terme für die angegebenen Einsetzungen:
- $T(x) = x^2 + 4x + 1$ für $x = -5$ ($-2,3; 0; 2$)
 - $T(a; b) = (a + 2b)(a - 2b)$ für $a = 3; b = -1,5$ und für $a = -8,3; b = -3,8$

- c) $T(x; y; z) = xyz - (x - y)(y - z)$ für $x = -12; y = 4; z = 18$
und für $x = 0,8; y = -1,25; z = -9,65$
- d) $T(a; b; c) = |(a - b) - c| - (|a| - |b - c|)$ für $a = -22; b = -18;$
 $c = 33$ und für $a = -14,3; b = -5,8; c = -6,7$

2.6.3 Division in $\mathbb{Q}$

Es kommt häufig vor, daß von einem Produkt der Wert bekannt ist und einer der Faktoren bestimmt werden muß. Dessen Berechnung führt auf eine **Division**. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Division als **Umkehrung der Multiplikation**.

Beispiel:

Die Klasse 7a mietet für einen Ausflug einen Bus. Sie muß dafür 350 DM bezahlen. Welchen Fahrpreis hat jeder der 28 Schüler zu entrichten?

Wenn wir den Fahrpreis pro Schüler mit x DM bezeichnen, muß gelten:

$$28 \cdot x = 350; \quad \text{also} \quad x = 350 : 28 = 12,5.$$

Jeder Schüler muß also 12,50 DM bezahlen.

Man erkennt an diesem mit Zahlen aus $\mathbb{Q}^+$ gebildeten Beispiel, daß der **Quotient** $350 : 28$ die **Lösung der Gleichung** $28 \cdot x = 350$ darstellt. Genau diese Bedeutung wollen wir nun auch für Quotienten aus beliebigen rationalen Zahlen vereinbaren:

Definition 71.1: Unter dem Quotienten $b : a$ der rationalen Zahlen b und $a \neq 0$ versteht man die Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.
Statt $b : a$ schreibt man auch $\frac{b}{a}$.

$b : a$ ist also diejenige Zahl, mit der man a multiplizieren muß, um b zu erhalten.

Nach dieser Definition hat ein Quotient $b : a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung hat. Wir wissen schon, daß dies für $a \in \mathbb{Q}^+$ und $b \in \mathbb{Q}_0^+$ zutrifft. Gilt das aber auch, wenn a oder b negativ ist? Das läßt sich mit Hilfe einer Fallunterscheidung überprüfen:

1. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$ und $b = -q$ ($p > 0, q > 0$); dann gilt:

$$a \cdot x = b \Leftrightarrow p \cdot x = -q.$$

Falls diese Gleichung eine Lösung x besitzt, muß sie negativ sein. Für sie gilt also: $x = -|x|$. Damit erhält man:

$$p \cdot x = -q \Leftrightarrow p \cdot (-|x|) = -q \Leftrightarrow -(p \cdot |x|) = -q \Leftrightarrow p \cdot |x| = q.$$

Dies ist nun eine Gleichung mit positiven Zahlen. Sie hat die Lösung

$$|x| = \frac{q}{p}. \text{ Damit gilt: } x = -\frac{q}{p}.$$

Ergebnis: Die Gleichung $p \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

Auf ganz entsprechende Weise kann man auch den 2. und 3. Fall untersuchen. Man findet dabei folgende Ergebnisse:

2. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

3. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = \frac{q}{p}$.

4. Fall: $a < 0$ und $b = 0$

Nach Satz 66.1 ist $x = 0$ eine Lösung der Gleichung $a \cdot x = 0$. Dies muß auch die einzige Lösung sein; denn für $x > 0$ wäre $a \cdot x < 0$, für $x < 0$ wäre $a \cdot x > 0$.

Damit ist nachgewiesen:

Satz 72.1: Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für $a \neq 0$ in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Für den Fall $a = 0$, d.h. für die Gleichung $0 \cdot x = b$, gelten in $\mathbb{Q}$ dieselben Feststellungen wie in $\mathbb{Q}_0^+$:

Wenn $b \neq 0$, hat die Gleichung $0 \cdot x = b$ **keine Lösung**,

wenn $b = 0$, ist **jede Zahl eine Lösung**.

Daher sind Quotienten mit dem Nenner 0 auch in $\mathbb{Q}$ sinnlos. Damit gilt

Satz 72.2: In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kann man jede Zahl durch jede **von 0 verschiedene** Zahl dividieren.
Aber: **Durch 0 kann man nicht dividieren.**

Aus den in den ersten drei Fällen berechneten Lösungen der Gleichung $a \cdot x = b$ und der Quotientendefinition 71.1 können wir weitere wichtige Folgerungen ableiten:

Die Gleichung $p \cdot x = -q$ (1. Fall) hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$. Für diese Lö-

sung haben wir aber in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{-q}{p}$ vereinbart. Daher gilt: $\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}$.

Ganz entsprechend erhalten wir im 2. und 3. Fall:

$\frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}$ und $\frac{-q}{-p} = \frac{q}{p}$. Damit haben wir **Vorzeichenregeln für Quotienten** gewonnen! Diese entsprechen ganz den Regeln für Produkte, die wir in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellt haben.

Satz 73.1: Für Quotienten rationaler Zahlen gelten mit $p > 0$ und $q > 0$ folgende Vorzeichenregeln:

$$\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{-q}{-p} = \frac{q}{p},$$

$$\text{bzw. } (-q) : p = -(q : p), \quad q : (-p) = -(q : p), \\ (-q) : (-p) = q : p$$

Beispiele:

$$1) \frac{-24}{8} = -\frac{24}{8} = -3; \quad \frac{-121}{22} = \frac{121}{22} = \frac{11}{2} = 5,5;$$

$$2) 6,25 : (-1,25) = -(6,25 : 1,25) = -5;$$

$$3) (-\frac{7}{11}) : (-\frac{3}{11}) = \frac{7}{11} : \frac{3}{11} = \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Einen wichtigen Sonderfall stellt die Gleichung $a \cdot x = 1$ dar. Für $a \neq 0$ hat sie nach Satz 72.1 genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1}{a}$, also den **Kehrwert** von a . Es gilt somit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, d.h., das Produkt der Zahlen a und $\frac{1}{a}$ ist gleich dem neutralen Element der Multiplikation. Daher bezeichnet man diese Zahlen als *zueinander invers bezüglich der Multiplikation*. Es gilt

Satz 73.2: Zu jeder von 0 verschiedenen rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Multiplikation, nämlich ihren Kehrwert $\frac{1}{a}$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Multiplikation dar, das man als »Existenz des Inversen« bezeichnet und mit (I) abkürzt. Damit kennen wir für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die fünf Rechengesetze (E), (K), (A), (N), (I).

Für $a \neq 0$ hat also der Term $a \cdot \frac{1}{a}$ stets den Wert 1. Multipliziert man ihn mit einem Faktor b , so erhält man daher $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = 1 \cdot b$, also $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = b$.

Eine einfache Umformung der linken Seite liefert die Gleichung

$$a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{a} \right) = b.$$

Diese läßt sich nun so deuten:

$$b \cdot \frac{1}{a} \text{ ist Lösung der Gleichung } a \cdot x = b.$$

Da aber diese Gleichung nur eine einzige Lösung hat und wir für diese in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{b}{a}$ eingeführt haben, müssen $\frac{b}{a}$ und $b \cdot \frac{1}{a}$ lediglich verschiedene Schreibweisen für dieselbe Zahl sein. Daher gilt

Satz 74.1: Die Division durch eine Zahl $a \neq 0$ kann man durch die Multiplikation mit ihrem Kehrwert $\frac{1}{a}$ ersetzen und umgekehrt,

$$\text{d.h., } \frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} \text{ bzw. } b : a = b \cdot (1 : a) \text{ für } a \neq 0.$$

Beispiele:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{45}{0,3} = 45 \cdot \frac{10}{3} = 150; & 2) \left(-\frac{7}{12}\right) : \frac{3}{4} = \left(-\frac{7}{12}\right) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{7}{9}; \\ 3) 126 \cdot \frac{1}{21} = 126 : 21 = 6; & 4) (-6,6) \cdot \frac{5}{11} = (-6,6) : 2,2 = -3. \end{array}$$

Aufgaben

1. Berechne die folgenden Quotienten:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 105 : (-15) & \text{b)} (-7) : (-1) & \text{c)} (-65) : 125 \\ \text{d)} (-3,24) : (-1,8) & \text{e)} 1024 : 32 & \text{f)} (-10,24) : 0,064 \\ \text{g)} 2,7 : (-81) & \text{h)} (-2,5) : (-0,35) & \text{i)} (-18) : 21,6 \end{array}$$

2. Gib den Wert der folgenden Brüche in möglichst einfacher Form an:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{5}{-1} & \text{b)} \frac{-16}{12} & \text{c)} \frac{-35}{-49} & \text{d)} \frac{84}{144} \\ \text{e)} \frac{(-1)^2}{-1} & \text{f)} \frac{(-1)^3}{(-1)^5} & \text{g)} \frac{-1}{(-1)^{20}} & \text{h)} \frac{(-1)^{16}}{(-1)^{57}} \\ \text{i)} \frac{8}{(-2)^2} & \text{k)} \frac{(-2)^3}{5} & \text{l)} \frac{(-3)^2}{(-3)^3} & \text{m)} \frac{2^4}{(-1)^7} \end{array}$$

3. Berechne:

- a) $(3 - 5^2) : (20 - 9)$ b) $(\frac{3}{8} + 0,625) : (\frac{3}{8} - 0,625)$
 c) $(2\frac{1}{3} - 5) : 4\frac{4}{9}$ d) $(-10\frac{5}{7}) : (\frac{12}{13} - 1\frac{1}{7})$
 e) $(11 \cdot 25) : (31 - 75)$ f) $(8,5 : (-\frac{5}{7})) : ((-3,4) \cdot 2,5)$

4. Berechne den Wert folgender Bruchterme:

- a) $\frac{16 \cdot 1,2 - 20}{16 - 1,2 \cdot 20}$ b) $\frac{3,6 \cdot 2,5 \cdot (-1,6)}{3,6 + (2,5 - 1,6)}$
 c) $\frac{4,3 - 0,72 \cdot (-31)}{1\frac{5}{6} : (-\frac{5}{12})}$ d) $\frac{(10\frac{1}{2} + 6\frac{5}{6}) : (2\frac{1}{3} - 6\frac{1}{5})}{\frac{7}{9} \cdot (-\frac{3}{35}) \cdot 1\frac{2}{7}}$

5. Gib, wenn möglich, zu den folgenden Zahlen die Inversen bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation an.

- a) 1 b) -1 c) 0 d) -0,125
 e) $\frac{2}{7}$ f) -4,5 g) 0,75 h) $-2\frac{3}{11}$

6. Begründe den Satz: Es gibt keine rationale Zahl, für welche die Inverse bezüglich der Addition gleich der Inversen bezüglich der Multiplikation ist.

7. Schreibe nach Definition 71.1 die Lösung der Gleichung als Quotienten und berechne sie.

- a) $(-1) \cdot x = 17$ b) $3x = -12$ c) $x \cdot (-38) = -7,6$
 d) $\frac{5}{7} \cdot x = -\frac{1}{49}$ e) $(2 - \frac{2}{3})x = 2\frac{2}{3}$ f) $x \cdot (-2\frac{1}{4}) = 0,125 - 1,25$

8. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Gleichungen?

- a) $x \cdot (\frac{1}{15} - 0,8) = 1$ b) $(0,625 : 5 - \frac{1}{8}) \cdot x = 0$
 c) $x \cdot (\frac{3}{4} - \frac{4}{3}) = \frac{4}{3} - \frac{3}{4}$ d) $(\frac{3}{20} - 0,15) \cdot x = (\frac{3}{20} - 0,15) \cdot 7$

2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten

Die Multiplikation einer Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit 1, dem neutralen Element der Multiplikation, bewirkt keine Änderung: $a \cdot 1 = a$. Was aber erhält man, wenn man a mit der Gegenzahl von 1, also mit -1 , multipliziert?

Beispiele:

- 1) $7 \cdot (-1) = -(7 \cdot 1) = -7$; 2) $(-1) \cdot 0 = -(1 \cdot 0) = -0 = 0$
 3) $(-1) \cdot 3,14 = -(1 \cdot 3,14) = -3,14$; 4) $(-\frac{5}{7}) \cdot (-1) = \frac{5}{7} \cdot 1 = \frac{5}{7}$

Wie man leicht beweisen kann (vgl. Aufgabe 78/2) gilt

Satz 75.1: Multipliziert man eine Zahl mit -1 , so erhält man ihre Gegenzahl.

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$$

Das Interessante an diesem Satz ist, daß man das Bilden der Gegenzahl nun auch als Multiplikation mit -1 beschreiben kann. Das ist oft nützlich, z. B. bei den folgenden Überlegungen:

In der Algebra treten häufig Produkte der Form $a \cdot (-b)$, $(-a) \cdot (-b)$ usw. auf, bei denen die Variablen a, b beliebige rationale Zahlen vertreten. Zum Vereinfachen solcher Produkte darf man daher nicht ohne weiteres die in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellten Regeln anwenden, denn die dort benützten Variablen p, q bedeuten *positive Zahlen*. Immerhin wäre es denkbar und wünschenswert (Permanenzprinzip!), daß diese Regeln auch für beliebige rationale Zahlen gültig bleiben. Das soll nun untersucht werden:

Beispiel 1:

$a \cdot (-b)$ kann man folgendermaßen umformen:

$$a \cdot (-b) = a \cdot ((-1) \cdot b) = \quad (\text{Satz 75.1})$$

$$\stackrel{\text{K}}{=} a \cdot (b \cdot (-1)) =$$

$$\stackrel{\text{A}}{=} (a \cdot b)(-1) =$$

$$= -(a \cdot b). \quad (\text{Satz 75.1})$$

Natürlich ist wegen (K) damit auch die Regel $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ bewiesen.

Beispiel 2:

$(-a) \cdot (-b)$ kann man so umformen:

$$(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot ((-1) \cdot b) = \quad (\text{Satz 75.1})$$

$$\stackrel{\text{A}}{=} ((-a) \cdot (-1)) \cdot b =$$

$$= (-(-a)) \cdot b = \quad (\text{Satz 75.1})$$

$$= a \cdot b. \quad (\text{Satz 42.1})$$

Nimmt man der Vollständigkeit halber noch die Vereinbarung $a \cdot b = ab$ hinzu und schreibt, um die Vorzeichen zu betonen, für a, b und ab noch $+a$, $+b$, $+ab$, so erhält man folgende allgemeingültigen Vorzeichenregeln für Produkte:

Satz 76.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b gilt:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab \quad (-a) \cdot (-b) = +ab$$

$$(+a) \cdot (-b) = -ab \quad (-a) \cdot (+b) = -ab$$

Diese Vorzeichenregeln prägt man sich am besten in folgender Form ein:

$$\text{Regel 76.1: } (+) \cdot (+) = + \quad (-) \cdot (-) = +$$

$$(+) \cdot (-) = - \quad (-) \cdot (+) = -$$

Man kann nun also auch Produkte mit Variablen, die beliebige Zahlen vertreten, in gewohnter Weise vereinfachen. Dazu einige

Beispiele:

- 1) $5(-a) = -5a$; 2) $(-2)(-3b) = 6b$;
 3) $(-x)y(-z) = xyz$; 4) $(-2)(-0,5)(-\frac{1}{3}z) = -\frac{1}{3}z$.

Auch von den in Satz 73.1 enthaltenen Vorzeichenregeln für Quotienten, die dort nur für positive Zahlen p, q bewiesen wurden, kann man zeigen, daß sie für beliebige rationale Zahlen gelten:

Beispiel:

$$\frac{-b}{a} = (-b) \cdot \frac{1}{a} = \quad (\text{Satz 74.1})$$

$$= ((-1)b) \cdot \frac{1}{a} = \quad (\text{Satz 75.1})$$

$$\stackrel{\Delta}{=} (-1) \left(b \cdot \frac{1}{a} \right) =$$

$$= (-1) \cdot \frac{b}{a} = \quad (\text{Satz 74.1})$$

$$= -\frac{b}{a}. \quad (\text{Satz 75.1})$$

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, daß auch $\frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$ und $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$ für beliebige Zahlen gilt. Zusammen mit $\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}$ erhält man so

Satz 77.1: Für rationale Zahlen $a \neq 0$ und b gilt:

$$\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{+b}{-a} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{+a} = -\frac{b}{a}$$

Die entsprechende Merkregel lautet:

Regel 77.1: $\frac{+}{+} = +$ $\frac{-}{-} = +$ $\frac{+}{-} = -$ $\frac{-}{+} = -$

Beachte, daß man in diesen Regeln den Bruchstrich auch durch den Doppelpunkt als Divisionszeichen ersetzen kann.

Beispiele:

- 1) $\frac{-a}{2} = -\frac{a}{2}$; 2) $\frac{(-x)y}{(-2z)} = \frac{-(xy)}{-(2z)} = \frac{xy}{2z}$;
 3) $15 : (-u) = -(15 : u)$; 4) $(-2vw) : (-xy) = (2vw) : (xy)$.

Aufgaben

- Vereinfache durch Anwendung der Vorzeichenregeln für Produkte:
 - $(-2) \cdot x$
 - $(-5)(-y)$
 - $(-z)(+2,3)$
 - $a(-b)(+c)$
 - $(-a)(-b)c$
 - $(+a)(+b)(-c)$
- Beweise die Gleichung $a \cdot (-1) = -a$ (Satz 75.1) mit Hilfe der Fallunterscheidung $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. Gib jeweils an, welche Definitionen oder Sätze benützt werden.
- Stelle entsprechend der Regel 76.1 die Vorzeichenregeln für Produkte mit drei Faktoren symbolisch dar.
 - Ergänze zu richtigen Vorzeichenregeln:
 $(-) \cdot (+) \cdot (-) \cdot (+) = ?$ und $(+) \cdot (-) \cdot (-) \cdot (+) \cdot (-) = ?$
- Vereinfache durch Anwenden der Vorzeichenregeln für Quotienten:
 - $\frac{2(-m)}{-3}$
 - $\frac{(-1)(+m)}{(+1)(-n)}$
 - $\frac{(-21)(-s)t}{q(+r)(-5)}$
- Verwandle in den folgenden Produkten den Zahlenfaktor in einen Divisor.
 - $m \cdot \frac{1}{7}$
 - $n \cdot 0,2$
 - $p \cdot (-0,25)$
 - $(-\frac{2}{9}) \cdot q$
 - $r \cdot (1\frac{2}{3})$
 - $(-\frac{10}{13}) \cdot s$
- Schreibe die folgenden Quotienten als Produkte:
 - $x : 0,5$
 - $y : \frac{1}{6}$
 - $z : (-\frac{2}{3})$
 - $(-u) : (-0,125)$
 - $v : (3\frac{1}{3})$
 - $w : (-0,001)$

2.7 Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen

2.7.1 Das Distributivgesetz

Im bisherigen Rechenunterricht hast du schon das **Verteilungs-** oder **Distributivgesetz*** kennengelernt. Es besagt, daß man beim Multiplizieren einer Summe auf zwei verschiedenen Wegen zum richtigen Ergebnis kommen kann. Dazu ein

Beispiel:

Die Klasse 7b besteht aus 16 Knaben und 10 Mädchen. Für den Besuch einer Ausstellung sammelt der Klassensprecher pro Schüler 2,50 DM ein. Wieviel Geld muß er dann haben?

1. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Gesamtzahl der Schüler«, also
 $2,50 \text{ DM} \cdot (16 + 10) = 2,50 \text{ DM} \cdot 26 = 65,00 \text{ DM}.$

* distribuiere (lat.) = verteilen. – Der Ausdruck *distributiv* wurde ebenso wie das Wort *kommutativ* 1814 von dem französischen Professor der Mathematik François Joseph SERVOIS (1767–1847) geprägt. Siehe auch die Fußnote* auf Seite 50.

2. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Zahl der Knaben« + »2,50 DM · Zahl der Mädchen«, also

$$2,50 \text{ DM} \cdot 16 + 2,50 \text{ DM} \cdot 10 = 40,00 \text{ DM} + 25,00 \text{ DM} = 65,00 \text{ DM}.$$

Man erkennt: $2,50 \text{ DM} \cdot (16 + 10) = 2,50 \text{ DM} \cdot 16 + 2,50 \text{ DM} \cdot 10$.

Allgemein gilt für $a, b, c \in \mathbb{Q}_0^+$ die Beziehung $a(b + c) = ab + ac$. Dies ist das Distributivgesetz, für das wir die Abkürzung (D) verwenden.

Nachdem wir nun wissen, wie in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Addition und die Multiplikation auszuführen sind, stellt sich die Frage, ob das Rechengesetz (D) auch in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt. Wir prüfen dies zunächst an einigen Beispielen.

Beispiel 1: $a = -2, b = 5, c = -8$

$$\text{dann gilt: } a(b + c) = (-2) \cdot (5 + (-8)) = (-2) \cdot (-3) = 6$$

$$\text{und: } ab + ac = (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot (-8) = -10 + 16 = 6.$$

Beispiel 2: $a = 4,1; b = -4,8; c = 3,5$

$$\text{dann gilt: } a(b + c) = 4,1 \cdot ((-4,8) + 3,5) = 4,1 \cdot (-1,3) = -5,33$$

$$\text{und: } ab + ac = 4,1 \cdot (-4,8) + 4,1 \cdot 3,5 = -19,68 + 14,35 = -5,33.$$

Beispiel 3: $a = -\frac{2}{7}, b = -\frac{3}{4}, c = -\frac{2}{11}$

$$\begin{aligned} \text{dann gilt: } a(b + c) &= \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{11}\right)\right) = \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{11}\right)\right) = \\ &= \frac{2}{7} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{11}\right) = \frac{2}{7} \cdot \frac{41}{44} = \frac{41}{154} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und: } ab + ac &= \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{11} = \\ &= \frac{3}{14} + \frac{4}{77} = \frac{33+8}{154} = \frac{41}{154}. \end{aligned}$$

Diese Beispiele lassen also vermuten, daß (D) für alle rationalen Zahlen gilt. Der genaue Nachweis dafür erfordert eine ziemlich umfangreiche Fallunterscheidung und ist schwierig. Für Interessenten soll hier als Beispiel einer der einfacheren Fälle untersucht werden:

Fall: $a > 0, b < 0, c < 0$

Wir setzen $a = p, b = -q, c = -r$ mit $p, q, r \in \mathbb{Q}^+$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } a(b + c) &= p((-q) + (-r)) = p(-(q + r)) = \\ &= -(p(q + r)) = -(pq + pr). \end{aligned}$$

Hier wurde beim letzten Schritt (D) in $\mathbb{Q}^+$ angewandt.

$$\begin{aligned} \text{Weiter gilt: } ab + ac &= p(-q) + p(-r) = (-pq) + (-pr) = \\ &= -(pq + pr). \end{aligned}$$

Damit ist für diesen Fall (D) bewiesen. Man kann so tatsächlich zeigen, daß das Distributivgesetz in jedem Fall gilt. Dies halten wir fest in

Satz 79.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b, c gilt das **Distributivgesetz:**

$$(D): \quad a(b + c) = ab + ac$$

Beispiele:

$$1) (-2)(a + 5) = (-2)a + (-2) \cdot 5 = -2a - 10.$$

$$2) (x + 2y) \cdot 19 = 19(x + 2y) = 19x + 38y.$$

$$3) 6,5(a - 4b) = 6,5(a + (-4b)) = 6,5a + 6,5(-4b) = 6,5a - 26b.$$

$$4) ((-3z) - 7) \cdot (-10) = ((-3z) + (-7)) \cdot (-10) = \\ = (-3z) \cdot (-10) + (-7) \cdot (-10) = 30z + 70.$$

Aufgaben

- Berechne zur Überprüfung des Distributivgesetzes die Terme $T_1 = a(b + c)$ und $T_2 = ab + ac$ für folgende Zahlenwerte:
 a) $a = -8$; $b = -2$; $c = 5$ b) $a = 1,1$; $b = -0,7$; $c = -160$
 c) $a = -36$; $b = \frac{7}{16}$; $c = -1\frac{3}{8}$ d) $a = -2,5$; $b = -9,12$; $c = -\frac{22}{25}$
- Begründe bei dem auf Seite 79 stehenden Beweis des Distributivgesetzes für den Fall $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ die einzelnen Termumformungen, z. B. durch Angabe der dabei verwendeten Sätze oder Regeln.
- Beweise nach dem Muster des auf Seite 79 durchgeführten Falles das Distributivgesetz auch für den Fall $a < 0$, $b < 0$ und $c < 0$.
- Verwandle die angegebenen Produkte in Summen oder Differenzen:
 a) $(16x + 3y) \cdot 9$ b) $(2,8xy - 5) \cdot (-12,5)$ c) $(-0,5) \cdot (1,6v - \frac{3}{5}w)$
 d) $12(-4a + 3b)$ e) $(-n) \cdot (2n + 7)$ f) $(-\frac{2}{3}x - \frac{5}{8}y) \cdot \frac{6}{7}$
- Berechne und vergleiche $T_1 = (a + b) : c$ und $T_2 = a : c + b : c$ für folgende Zahlenwerte:
 a) $a = 22$; $b = 10$; $c = 8$ b) $a = -5,4$; $b = 7,8$; $c = -6$
 c) $a = -2\frac{1}{7}$; $b = -\frac{10}{21}$; $c = \frac{5}{11}$ d) $a = -\frac{1}{3}$; $b = -1,6$; $c = -0,4$
- Begründe, daß auch für das Dividieren einer Summe ein Distributivgesetz gilt, nämlich $(a + b) : c = a : c + b : c$, für $c \neq 0$.
Hinweis: Beachte Satz 74.1.
- Verwandle die folgenden Quotienten in Summen oder Differenzen:
 a) $(8x + 6y) : 4$ b) $(0,64z^2 - 1) : 0,4$
 c) $(\frac{2}{3}u - 5v) : (-\frac{5}{6})$ d) $(-5,1p - 8,5q) : (-17)$

2.7.2 Die Monotoniegesetze der Multiplikation

Wir wissen schon nach Satz 62.1, daß eine Ungleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. Gilt eine entsprechende Feststellung auch, wenn man beide Seiten einer Ungleichung mit derselben Zahl multipliziert?

Beispiele:**1) Multiplikation mit 7:**

Aus $2 < 5$ wird $14 < 35$, weil 14 links von 35 liegt.

Aus $-5 < 1,5$ wird $-35 < 10,5$.

Aus $-3,1 < -1,2$ wird $-21,7 < -8,4$.

2) Multiplikation mit -3 :

Aus $2 < 5$ wird $-6 > -15$, weil -6 rechts von -15 liegt.

Aus $-5 < 1,5$ wird $15 > -4,5$.

Aus $-3,1 < -1,2$ wird $9,3 > 3,6$.

Die Beispiele unter 1) lassen vermuten, daß gilt:

Satz 81.1: Monotoniegesetz der Multiplikation

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **positiven** Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; also

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac < bc.$$

Bemerkung: Da statt $a < b$ auch $b > a$ und statt $ac < bc$ auch $bc > ac$ geschrieben werden kann, gilt Satz 81.1 natürlich dann auch für Ungleichungen mit dem Größerzeichen.

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.

Dann ist auch $(a + p)c = bc$ bzw. $ac + pc = bc$.

Wegen $c > 0$ und $p > 0$ gilt auch $pc > 0$. Man muß also zu ac die positive Zahl pc addieren, um bc zu erhalten. Nach Satz 61.2 bedeutet dies aber $ac < bc$, was zu zeigen war.

Die Beispiele 2) lassen erkennen, daß für negative Faktoren das Monotoniegesetz nicht gilt. Offenbar kehrt sich in diesem Fall das Ungleichheitszeichen um, d. h., aus dem Kleinerzeichen wird ein Größerzeichen bzw. aus dem Größer ein Kleinerzeichen. Es gilt der folgende

Satz 81.2: Gesetz von der Umkehrung der Monotonie

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **negativen** Zahl, so kehrt sich das Ungleichheitszeichen um, d. h.,

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ c < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac > bc.$$

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.

Die Auflösung dieser Gleichung nach a liefert

$$a = b - p \quad \text{oder} \quad a = b + (-p).$$

$$\text{Dann gilt auch} \quad ac = (b + (-p))c = \\ \stackrel{D}{=} bc + (-p)c.$$

Nach Voraussetzung sind $(-p)$ und c negative Zahlen; somit ist $(-p)c$ positiv. Da man also zu bc eine positive Zahl addieren muß, um ac zu erhalten, gilt $ac > bc$, was zu zeigen war.

Einen wichtigen Sonderfall von Satz 81.2 stellt das Multiplizieren einer Ungleichung mit -1 dar. Es gilt (Abbildung 82.1):

$$a < b \Rightarrow a \cdot (-1) > b \cdot (-1), \quad \text{also}$$

$$a < b \Rightarrow -a > -b.$$

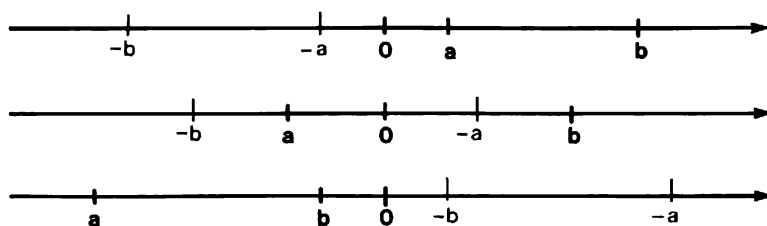


Abb. 82.1 $a < b \Leftrightarrow -a > -b$

Natürlich gelten die beiden Monotoniegesetze auch für das Dividieren einer Ungleichung durch eine positive oder negative Zahl. Das ergibt sich daraus, daß man die Division durch $c \neq 0$ als Multiplikation mit $\frac{1}{c}$ auffassen kann.

Da c und $\frac{1}{c}$ gleiches Vorzeichen haben, gilt also:

$$\left. \begin{array}{l} a < b \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} a < b \\ c < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Aufgaben

1. Multipliziere die Ungleichung mit der angegebenen Zahl.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & -20 < -2 \parallel \cdot 5 & \text{b)} & 1,7 > -1,8 \parallel \cdot (-0,5) & \text{c)} & 24 > 0 \parallel \cdot (-\frac{3}{8}) \\ \text{d)} & \frac{3}{7} > -\frac{7}{3} \parallel \cdot (-21) & \text{e)} & 2x > y \parallel \cdot 0,7 & \text{f)} & 0,2u < -8v \parallel \cdot (-5) \end{array}$$

2. Dividiere die Ungleichung durch die angegebene Zahl:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & -2 < 1 \parallel : 5 & \text{b)} & 68 > 0 \parallel : (-0,5) \\ \text{c)} & -5,4 < -4,5 \parallel : (-\frac{5}{3}) & \text{d)} & \frac{14}{15} < \frac{24}{25} \parallel : 0,4 \\ \text{e)} & 0,01 > -0,1 \parallel : (-0,001) & \text{f)} & -0,8 > -\frac{7}{8} \parallel : |-2| \end{array}$$

3. Multipliziere die zwischen a und b bestehende Ungleichung mit dem Faktor c :
- a) $a = 37; b = -1; c = 3$

b) $a = \frac{4}{5}; b = \frac{3}{4}; c = -10$

c) $a = -1,9; b = -2,1; c = -0,2$

d) $a = -0,985; b = 0; c = 200$
4. Was ergibt sich, wenn man eine Ungleichung mit 0 multipliziert?
5. Ist x positiv, null oder negativ, wenn gilt
- a) $a < b \Rightarrow ax > bx$

b) $u > v \Rightarrow ux = vx$

c) $n > m \Rightarrow \frac{n}{x} < \frac{m}{x}$

d) $p > 0 \Rightarrow \frac{p}{x} > 0$?

2.7.3 Zusammenstellung der Rechengesetze

Für rationale Zahlen a, b, c gelten folgende Rechengesetze:		
Gesetze der Addition	Gesetze der Multiplikation	Bezeichnungen
(E ₊) $a + b \in \mathbb{Q}$	(E _.) $a \cdot b \in \mathbb{Q}$	Existenz der Summe/des Produkts
(K ₊) $a + b = b + a$	(K _.) $a \cdot b = b \cdot a$	Kommutativgesetz
(A ₊) $(a + b) + c = a + (b + c)$	(A _.) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Assoziativgesetz
(N ₊) $a + 0 = a$	(N _.) $a \cdot 1 = a$	Existenz des neutralen Elements
(I ₊) $a + (-a) = 0$	(I _.) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, falls $a \neq 0$	Existenz des inversen Elements
(D) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		Distributivgesetz
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$	$\left. \begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	Monotoniegesetz
	$\left. \begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	Umkehrung der Monotonie

Die hier zusammengestellten Rechengesetze bilden die Grundlage für das Rechnen mit rationalen Zahlen und überhaupt für die ganze Algebra. Du wirst sie im folgenden immer wieder benötigen, besonders häufig die mit (E), (K), (A), (N), (I) und (D) bezeichneten Gesetze. Präge sie dir daher gut ein (Merkwort: EKANID, vgl. auch Aufgabe 84/5.).

Besonders auffällig an dieser Gesetzestafel ist natürlich die weitgehende Analogie zwischen den Rechengesetzen der Addition und der Multiplikation: die »EKANI-Gesetze« gibt es für beide Rechenarten. Zu ihrer Unterscheidung wurde in der Tafel ein an den Kennbuchstaben angehängtes Plus- bzw. Malzeichen verwendet. Im Distributivgesetz (D) – und nur in ihm (!) – kommen beide Rechenarten zugleich vor. Es stellt eine Verbindung zwischen den beiden durch die Gesetze der Addition und der Multiplikation beschriebenen Rechenbereichen dar.

Aufgaben

1. Welches der in $\mathbb{Q}$ geltenden Rechengesetze der Addition konnte in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ noch nicht aufgestellt werden und warum nicht?
2. Weshalb benötigt man keine eigenen Rechengesetze für die Subtraktion und die Division? (In welchen Rechengesetzen der Addition und Multiplikation sind diese Umkehroperationen enthalten?)
3. Ist es richtig, zu sagen »Wenn man in den Rechengesetzen der Addition die Pluszeichen durch Malzeichen ersetzt, erhält man die Rechengesetze der Multiplikation«?
4. Erkläre an der Zahlengeraden, warum es bei der Addition keine »Umkehrung der Monotonie« gibt.
5. a) Wie gefällt dir der Wahlspruch »In Mathe fit mit EKANID«?
Oder folgender: »Was EKANID weiß, macht mich nicht heiß«?
Denke dir selbst beß're Merksätze aus!
Vielleicht wird gar ein Gedicht daraus?
- b) »Beim Rechnen in $\mathbb{Q}_0^+$ eckt man oft an,
Weil man häufig nicht subtrahieren kann.
Das liegt daran: Man hat nur EKAN!
.....«
Erfinde zu diesem großartigen Gedichtanfang eine passende Fortsetzung, welche auf den mit $\mathbb{Q}$ und EKANI erreichten Fortschritt hinweist!

**Zur Geschichte der negativen Zahlen

Bereits in altbabylonischen Texten um 2000 v. Chr. kommen an einigen Stellen negative Zahlen vor. Aber wir wissen nicht, wie die Babylonier sie aufgefaßt und ob sie mit ihnen gerechnet haben.

Im chinesischen Rechenbuch *Chiu Chang Suan Shu** = *Neun Bücher arithmetischer Technik*, von dem man nicht weiß, wie alt es wirklich ist – der älteste erhaltene Text ist die 263 n. Chr. von LIU Hui mit Kommentaren versehene Ausgabe** –, kommen positive und negative Zahlen vor. Die positiven Zahlen werden rot, die negativen schwarz geschrieben. Die Regeln für die Addition und Subtraktion negativer Zahlen sind bekannt und werden angegeben. Ergeben sich beim Lösen von Gleichungen negative Zahlen, so werden sie als Lösungen anerkannt.

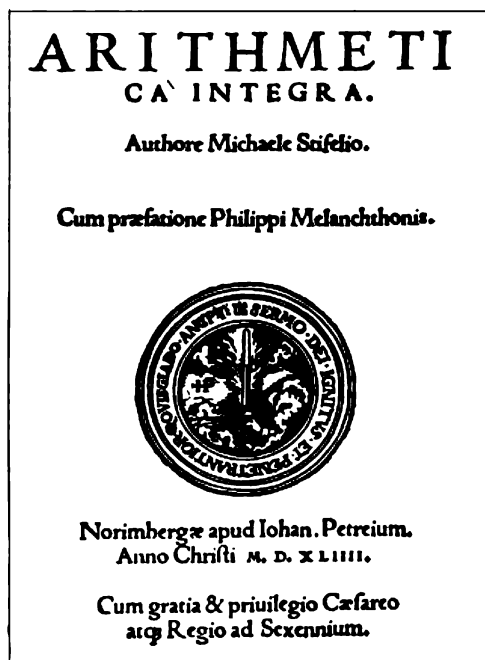
Rechenregeln für das Ausmultiplizieren von $(a - b)(c - d)$ findet man auch bei DIOPHANT (um 250 n. Chr.), der aber im Grunde nur mit Differenzen arbeitet, die einen positiven Wert haben. Negative Zahlen als Lösungen von Gleichungen bezeichnet er als »unstatthaft«.

Die Inder kennen positive und negative Zahlen und benennen sie durch die Wörter *dhana* = Vermögen und *rna* = Schulden. Bei BRAHMAGUPTA (598–nach 665) werden negative Zahlen durch einen darübergesetzten Punkt gekennzeichnet; er schreibt also z. B. $\dot{3}$ für unser -3 . In der weiteren Entwicklung der indischen Mathematik werden negative Zahlen auch als Lösungen von Gleichungen zugelassen.

Die Araber übernehmen zwar von den Indern das Rechnen mit negativen Zahlen, erkennen sie aber nicht als Lösungen von Aufgaben an.

Spätestens im 9. Jh. kann man im Abendland mit negativen Zahlen rechnen, aber als erster läßt LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) eine negative Zahl als Lösung zu, die er als Schulden deutet; andernfalls wäre die Aufgabe unlösbar.***

Ähnlich geht auch Michael STIFEL (1487(?)–1567) vor, obgleich er zu tieferer Einsicht in das Wesen der negativen Zahlen gekommen ist. Er spricht 1544 in seiner *Arithmetica integra* davon, daß man sich Zahlen kleiner als null vorstellen könne und daß null zwischen den »wahren« Zahlen und den »absurden« Zahlen liege. Im Gegensatz zu STIFEL hat sein



Michael Stifel

Abb. 85.1 Titelblatt der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – (1544) von Michael STIFEL (1487? Esslingen bis 19.4.1567 Jena) und dessen Unterschrift. Ein Bildnis ist nicht überliefert.

* gesprochen tshiu tshang suan shu

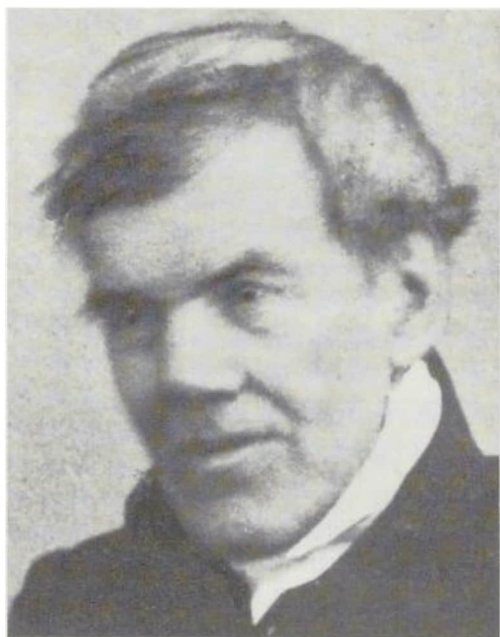
** Der erste Kaiser Chinas, SCHI HUANG-TI (= erster erhabener Kaiser, Regierungszeit 221–210 v. Chr.), ließ 213 v. Chr. alle Bücher verbrennen und viele konfuzianische Gelehrte lebendig begraben. LIU Hui berichtet, daß das Rechenbuch von CHANG Tsan († 152 v. Chr.) aus erhalten gebliebenen Resten neu zusammengestellt und von CHING Ch'ou-ch'ang (um 50 v. Chr.) erweitert wurde.

*** Um 1430 wird in einer auf provenzalisch geschriebenen Handschrift zum ersten Mal eine negative Zahl als Lösung ohne weitere Erklärung akzeptiert.

Zeitgenosse Geronimo CARDANO (1501–1576) keine Schwierigkeiten mit negativen Zahlen als Lösungen von Aufgaben, nennt sie aber »gedachte« Zahlen im Gegensatz zu den positiven, den »wahren« Zahlen. François VIÈTE (1540–1603), der Begründer der modernen Algebra, hingegen erkennt die negativen Zahlen nicht als Lösungen an. René DESCARTES (1596–1650) verwendet zwar positive und negative Ordinaten bei seinen graphischen Darstellungen, die Abszissen sind für ihn aber immer positiv. Negative Gleichungslösungen nennt er »falsche« Lösungen im Gegensatz zu den »wahren« positiven. Auch Buchstaben stellen bei ihm immer positive Zahlen dar. Der erste, bei dem ein Buchstabe – so wie bei uns jetzt üblich – sowohl eine positive wie auch eine negative Zahl vertreten konnte, war der Amsterdamer Bürgermeister und Mathematiker Jan HUDDE (1628(?)–1704), und zwar in seiner um 1655 verfaßten Schrift *De reductione aequationum*.

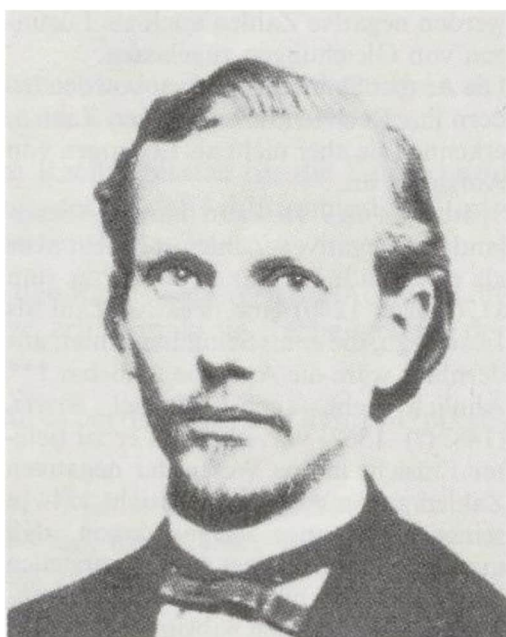
Selbst im 18. Jahrhundert gelang es noch nicht, eine befriedigende Erklärung der negativen Zahlen zu finden. Dies führte dazu, daß diese Zahlen von manchen Mathematikern nicht anerkannt wurden, zum Beispiel auch nicht durch Christian von WOLFF (1679–1754). Im großen und ganzen wurden sie aber allmählich gleichberechtigt neben die positiven Zahlen gestellt.

Die endgültige wissenschaftliche Klärung dieses Problems brachte erst das 19. Jahrhundert, insbesondere durch George PEACOCK (1791–1858) und Hermann HANKEL (1839–1873). Sie erkannten, daß man bei der Erweiterung eines Zahlenbereichs nach Möglichkeit so zu verfahren hat, daß die für die bisherigen Zahlen gültigen Gesetze auch im erweiterten Zahlenbereich gültig bleiben. PEACOCK nannte 1830 diesen Grundsatz das *Permanenzprinzip* (vgl. Seite 38).



George Peacock

Abb. 86.1 George PEACOCK (1791 Thornton Hall/Denton – 1858 Ely (?))



30. 11. 1869

Hankel

Abb. 86.2 Hermann HANKEL (14.2.1839 Halle/Saale – 29.8.1873 Schramberg)

3 Einfache Termumformungen



Endstation der Autobuslinie 84 an der Place du Panthéon in Paris (1985)

Zum Wort *Term* siehe Seite 180.

3 Einfache Termumformungen

3.1 Äquivalente Terme

Terme, also auch Variablen, stehen für rationale Zahlen. Beim Rechnen mit Termen denken wir uns jede Variable durch eine geeignete Zahl ersetzt. Dadurch wird der Term selbst zu einer rationalen Zahl, und man kann mit ihm wie mit einer rationalen Zahl rechnen. Also gelten die Rechengesetze für rationale Zahlen auch für das Rechnen mit Termen. Mit Hilfe der Rechengesetze kann man dann Terme in andere Terme umwandeln. Vor allem will man natürlich komplizierte Terme vereinfachen. Wir zeigen dieses Umformen von Termen mittels der Rechengesetze an einigen Beispielen.

1) Umformungen mit Hilfe der Rechengesetze für die Addition

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$

$$2x + 3 = 3 + 2x \quad 1 - x = -x + 1$$

Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

$$(3x + 1) + 12 = 3x + (1 + 12) = 3x + 13$$

$$(1\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}) - 2\frac{1}{4} = (1\frac{1}{2}x + (-3\frac{3}{4})) + (-2\frac{1}{4}) = \\ = 1\frac{1}{2}x + (-3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4}) = 1\frac{1}{2}x - 6$$

0 als neutrales Element der Addition: $a + 0 = 0 + a = a$

$$3x + 0 = 3x$$

Inverses Element bei der Addition: $a + (-a) = a - a = 0$

$$x - x = 0 \quad 3,7x - 3,7x = 0 \quad (3x + 5y + 8) - (3x + 5y + 8) = 0$$

2) Umformungen mit Hilfe der Rechengesetze für die Multiplikation

Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$

$$x \cdot 3 = 3 \cdot x = 3x \quad x \cdot (-\frac{3}{7}) = (-\frac{3}{7})x = -\frac{3}{7}x$$

Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

$$2 \cdot (4 \cdot x) = (2 \cdot 4) \cdot x = 8x$$

$$(-3)((-2,1)x) = ((-3)(-2,1))x = 6,3x$$

1 als neutrales Element der Multiplikation: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

$$1 \cdot x = x \quad x = 1 \cdot x$$

Inverses Element bei der Multiplikation: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad \text{für } a \neq 0$

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad (2,7x) \cdot \frac{1}{2,7x} = 1 \quad \frac{-3x}{-3x} = 1$$

3) Umformungen mit Hilfe des Distributivgesetzes

Ausmultiplizieren:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$$

$$(-2) \cdot (3 - x) = -6 + 2x$$

$$(-1) \cdot (x - 7) = -x + 7$$

Ausklammern:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

$$2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$$

$$2x + x = (2 + 1)x = 3x$$

Interessanter, aber auch schwieriger wird es, wenn mehrere Gesetze nacheinander oder gleichzeitig angewendet werden:

$$(-3 + x) + 1 \stackrel{K}{=} (x + (-3)) + 1 \stackrel{A}{=} x + ((-3) + 1) = x + (-2) = x - 2$$

$$\frac{8x - 14}{2} = \frac{1}{2} \cdot (8x - 14) \stackrel{D}{=} \frac{1}{2} \cdot (8x) - \frac{1}{2} \cdot 14 \stackrel{A}{=} (\frac{1}{2} \cdot 8)x - 7 = 4x - 7$$

$$\text{oder kürzer} \quad \frac{8x - 14}{2} = \frac{8x}{2} - \frac{14}{2} = 4x - 7$$

Der umgewandelte und der ursprüngliche Term sind mathematisch gleichwertig. Setzt man nämlich in beide Terme irgendeine Zahl ein, so entstehen jeweils gleiche Zahlenwerte. So ergibt sich z. B. bei den Termen $T_1(x) = \frac{8x - 14}{2}$ und

$$T_2(x) = 4x - 7 \text{ bei der Einsetzung } x = 3 \text{ einerseits } T_1(3) = \frac{8 \cdot 3 - 14}{2} = 5,$$

andererseits $T_2(3) = 4 \cdot 3 - 7 = 5$, also jedesmal 5.

Man kennzeichnet diese Gleichwertigkeit von Termen durch ein Fachwort:

Definition 89.1: Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen **äquivalent***, wenn sie bei *jeder* Einsetzung für x jeweils gleiche Zahlenwerte liefern.

Kommen in Termen mehrere Variablen vor, so müssen sie bei der Ersetzung *aller* Variablen durch Zahlen jeweils gleiche Zahlenwerte liefern.

Die Rechengesetze liefern uns Beispiele für äquivalente Terme. So sagt z. B. das Kommutativgesetz der Addition, daß die Terme $a + b$ und $b + a$ äquivalent sind.

Die Grundmenge $\mathbb{Q}$ hat unendlich viele Elemente. Daher kann man mit der Methode des Einsetzens die Äquivalenz von Termen niemals nachweisen, da man mit dem Einsetzen nie fertig wird. Wie kann man aber dann feststellen, ob zwei Terme äquivalent sind? Antwort hierauf gibt

* *aequus* (lat.) = gleich; *valere* (lat.) = wert sein, gelten für

Satz 90.1: Zwei Terme, die durch Anwendung der Rechengesetze auseinander hervorgehen, sind äquivalent.

Zur **Begründung** dieses Satzes überlegen wir uns: Wenn man einen Term mit Hilfe eines Rechengesetzes durch einen anderen ersetzt, so haben der ursprüngliche und der neue Term bei jeder Einsetzung den gleichen Wert. Also sind die beiden Terme äquivalent.

Bei umfangreichen oder kompliziert gebauten Termen ist der Nachweis der Äquivalenz sehr langwierig. So ist insbesondere der Nachweis, daß die Rechengesetze auf mehr als 2 bzw. 3 Summanden und Faktoren verallgemeinert werden können, sehr mühsam. Für Tüftler führen wir als Beispiel vor, wie man ein Kommutativgesetz der Addition bei 4 Summanden beweisen kann.

Wir wollen zeigen:

$$a + b + c + d = d + b + c + a$$

Mit Hilfe des Assoziativgesetzes (A) und des Kommutativgesetzes (K) formen wir langsam um.

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= ((a + b) + c) + d = \\ &\stackrel{\text{K}}{=} d + ((a + b) + c) = \\ &\stackrel{\text{K}}{=} d + ((b + a) + c) = \\ &\stackrel{\text{A}}{=} d + (b + (a + c)) = \\ &\stackrel{\text{K}}{=} d + (b + (c + a)) = \\ &\stackrel{\text{A}}{=} d + ((b + c) + a) = \\ &\stackrel{\text{A}}{=} (d + (b + c)) + a = \\ &\stackrel{\text{A}}{=} ((d + b) + c) + a = \\ &= d + b + c + a \end{aligned}$$

Wer selber so etwas versuchen will, soll Aufgabe 95/12 lösen!



Hamilton.

Abb. 90.1 Sir (seit 1835) William Rowan HAMILTON (4. 8. 1805 Dublin bis 2. 9. 1865 Dunsink bei Dublin), der 1843 das Wort *assoziativ* prägte.

Auch andere Rechengesetze lassen sich verallgemeinern. Es gilt nämlich

Satz 90.2: Verallgemeinerte Rechengesetze

Verallgemeinertes Kommutativgesetz

Bei Summen darf die Reihenfolge der Summanden beliebig geändert werden, ohne daß sich der Wert der Summe ändert; z. B.

$$a + b + c + d = d + b + c + a$$

Bei Produkten darf die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden, ohne daß sich der Wert des Produkts ändert; z. B.

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = d \cdot b \cdot c \cdot a$$

Verallgemeinertes Assoziativgesetz

Bei Summen dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden, ohne daß sich der Wert der Summe ändert; z. B.

$$(a + ((b + c) + d)) = \\ = (a + b) + (c + d)$$

Bei Produkten dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden, ohne daß sich der Wert des Produkts ändert; z. B.

$$a \cdot ((b \cdot c) \cdot d) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$$

Verallgemeinertes Distributivgesetz

Ausmultiplizieren: Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliziert und die entstandenen Produkte addiert; z. B.

$$a \cdot (b + c + d + e) = \\ = ab + ac + ad + ae$$

Ausklammern: Enthält in einer Summe aus Produkten jedes Produkt denselben Faktor, so kann man diesen Faktor »ausklammern«; z. B.

$$ab + ac + ad + ae = \\ = a(b + c + d + e)$$

Da wegen $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ eine Division immer durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ersetzt werden kann, erhalten wir aus dem verallgemeinerten Distributivgesetz eine merkwürdige Folgerung; nämlich

Satz 91.1: Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert und die entstandenen Quotienten addiert; z. B.

$$(a + b + c + d) : e = a : e + b : e + c : e + d : e \quad \text{oder} \\ \frac{a + b + c + d}{e} = \frac{a}{e} + \frac{b}{e} + \frac{c}{e} + \frac{d}{e}$$

Eine besonders wichtige Anwendung finden die verallgemeinerten Rechengesetze beim Zusammenfassen gleichartiger Terme. Dabei nennt man Terme **gleichartig**, wenn sie gleiche Buchstabenfaktoren haben. So sind z. B. $7x$ und $-3x$ gleichartig, ebenso $\frac{4}{3}a^2b$ und a^2b . Nicht gleichartig sind hingegen $3a^2$ und $5a$. Der Zahlenfaktor eines Terms heißt **Koeffizient*** des Terms. Die Terme $7x$, $-\frac{3}{4}a^2b$ und uv haben die Koeffizienten 7 bzw. $-\frac{3}{4}$ bzw. 1. Mit Hilfe des verallgemeinerten Distributivgesetzes fassen wir nun gleichartige Terme zusammen:

$$3x + 5x + 8x = (3 + 5 + 8)x = 16x$$

$$11ab - ab = (11 - 1)ab = 10ab$$

* *coefficiens* (lat.) = mitbewirkend. Eingeführt wurde das Wort als Fachausdruck in die Mathematik von François VIÈTE (1540–1603) in seinen *Ad logisticen speciosam notae priores* 1591. Im Deutschen sagt man statt **Koeffizient** gelegentlich auch *Beizahl*.

Mit einiger Übung erspart man sich das Ausklammern der Koeffizienten und addiert diese gleich im Kopf:

$$7a + 12a + a = 20a$$

Wir merken uns

Satz 92.1: Gleichartige Terme werden addiert, indem man ihre Koeffizienten addiert und das Variablenprodukt beibehält.

Aus einfachen Termen kann man durch Addition umfangreichere Terme aufbauen, z. B.

$$3x + (-5) + 7,2xy + (-\frac{1}{3}x) + (-13).$$

So wie wir für $a + (-b)$ kurz $a - b$ geschrieben haben, vereinbaren wir diese einfache Schreibweise auch für komplizierte Terme aus mehr als zwei Gliedern. Damit läßt sich der obige Term kurz und übersichtlich schreiben:

$$3x - 5 + 7,2xy - \frac{1}{3}x - 13.$$

Da ein so gebauter Term eigentlich eine Summe ist, nennt man ihn zur Unterscheidung *algebraische Summe*. Vielfach ist dafür auch der Name *Aggregat** im Gebrauch. Wir merken uns

Definition 92.1: Eine Verbindung mehrerer Terme durch Plus- oder Minuszeichen nennt man **algebraische Summe** oder **Aggregat**. Die einzelnen Summanden heißen **Glieder des Aggregats**.

Wegen des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes der Addition dürfen die Glieder eines Aggregats *mit ihren Vorzeichen* beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} 2x - 3 + 8x + 5 - x &= \\ &= 2x + (-3) + 8x + 5 + (-x) = \\ &= 2x + 8x + (-x) + (-3) + 5 = \\ &= 2x + 8x - x - 3 + 5 = \\ &= 9x + 2. \end{aligned}$$

* *grex* (lat.) = Herde, Haufen; *aggregare* (lat.) = beigesellen. LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) verwendet das Wort *aggregatum*. Als **Aggregat** im Sinne von Summe erscheint es 1489 im weitverbreiteten Werk *Behende und hupsche Rechenung auff allen kauffmanschaft* des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500), Professor an der 1409 gegründeten Universität von Leipzig. Im Sommer 1486 hielt WIDMANN in seinem Haus als Zusatzveranstaltung zum Lehrprogramm die erste öffentliche Vorlesung über Algebra im deutschen Sprachraum, wofür er von jedem Studenten 2 Gulden (= 42 Silbergroschen [= gr]) verlangte, ein unerhört hoher Betrag, verglichen z. B. mit den 8 gr für die 20 bis 30 Wochen dauernde Vorlesung über die ersten Bücher EUKLIDS. WIDMANN zufolge verdiente ein Maurer 5 gr am Tag, und für 2 Gulden erhielt man ca. 4,5 g reines Gold. Übrigens bekam man 1480 in Sachsen für 4 gr ein Schaf und für 2 gr ein Paar Schuhe. François VIÈTE (1540–1603) benützt in seiner *In artem analyticem Isagoge* (1591) das Wort *adgregatum*. Im *Mathematischen Wörterbuch* von Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) von 1803 wird Aggregat in unserem Sinne verwendet.

Beim praktischen Rechnen erspart man sich das Umschreiben in eine Summe und stellt gleich unter Mitnahme des Vorzeichens um:

$$\begin{aligned} 2x - 3 + 8x + 5 - x &= \\ &= 2x + 8x - x - 3 + 5 = \\ &= 9x + 2. \end{aligned}$$

Wir merken uns

Satz 93.1: In einem Aggregat dürfen die Glieder unter Mitnahme ihres Vorzeichens beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden.

Beispiel:

$$\begin{aligned} &-2\frac{1}{4}a - 7b + 9ab + \frac{1}{2}a + 3\frac{1}{3}b - 5a = \\ &= -2\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a - 5a - 7b + 3\frac{1}{3}b + 9ab = \\ &= (-2\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 5)a + (-7 + 3\frac{1}{3})b + 9ab = -6\frac{3}{4}a - 3\frac{2}{3}b + 9ab. \end{aligned}$$

Da die Gesetze der Multiplikation von der gleichen Bauart sind wie die der Addition, gilt auch

Satz 93.2: In einem Produkt dürfen die Faktoren beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden.

Mit Hilfe dieses Satzes kannst du die Faktoren in einem Produkt ordnen. Dadurch werden die Terme übersichtlicher und sind leichter zu vergleichen. Für das Ordnen der Faktoren empfiehlt sich die

Vereinbarung 93.1: Zuerst entscheidet man auf Grund der Vorzeichenregeln über das Vorzeichen des Produkts. Dann kommen die Zahlenfaktoren und schließlich die Buchstaben dem Alphabet nach. Für das Endergebnis wird der Wert des Zahlenprodukts ausgerechnet.

Beispiele:

- 1) $4a \cdot 3b = 3 \cdot 4 \cdot ab = 12ab.$
- 2) $(-\frac{3}{4}) \cdot x \cdot (-y) \cdot (-3\frac{1}{3}) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot xy = -\frac{5}{2}xy.$
- 3) $r \cdot (-2,5t) \cdot (-\frac{3}{7})s = +\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot rst = \frac{15}{14}rst.$

Aufgaben

1. a) $(x - 2,5) + 1,9$ b) $3\frac{1}{7} + (\frac{1}{7} - 2u)$
 c) $(-\frac{15}{8} + a) - \frac{1}{8}$ d) $(5,93y - 81z) - (5,93y - 81z)$
 e) $(\frac{7}{4}g - 2,8) - (-\frac{14}{5} + 1,75g)$
2. a) $12 \cdot (4\frac{1}{4}x)$ b) $(-\frac{3}{4}) \cdot r \cdot (-\frac{8}{5})$ c) $(2,1s) \cdot (-1,2)$
 d) $(-1)(-3,75a)$ e) $(-a)(-5) \cdot (-\frac{3}{4})$ f) $(-0,55c) \cdot (-\frac{28}{33})$
3. a) $3a \cdot \frac{1}{3a}$ b) $(-7)a \cdot \frac{1}{a}$ c) $7a \cdot \frac{1}{7}$
4. a) $(-5)(-x)(-y)$ b) $(-8a)(-9b)(+5c)$ c) $(-0,5r) \cdot 1,7s(-3,4t)$
5. a) $12(-u)v(-2w)$ b) $(-1,8)(-x)(-0,25)y$
 c) $(-\frac{2}{3})(+ab)(-18c)$ d) $(-1)(+a)(-b)(-c)(+1)$
 e) $(-\frac{1}{2})(-x)(-y)(-\frac{2}{3}z)$ f) $(+6,25)(-uv)(+w)(-4x)(+2y)$
6. a) $(-ab) : (4(-c))$ b) $(-2)(+x)(+z) : (7(-y)(-1))$
7. a) $\frac{(-3)(-m \cdot 27)}{(+4)(-n)(-16)}$ b) $\frac{(-5)^2(-1,4r)(+0,6s)}{(-1)^3(0,125t)(-4)^2}$
 c) $(+xy)(-\frac{2}{7})^2(-z)(+343) : [(-\frac{1}{3})^3(-uv)(-243w)]$
8. a) $3(0,9x - 0,3)$ b) $7(r + s)$ c) $(p - q) \cdot 3$
 d) $\frac{1}{4}(\frac{2}{7}a - \frac{8}{5}b)$ e) $(0,5c + \frac{6}{5}d) \cdot 6$ f) $32(\frac{3}{2}a + \frac{5}{4}b)$
 g) $x(3x - 5y)$ h) $-5a(\frac{5}{2}a - \frac{3}{7})$ i) $(8x + 2xz)\frac{1}{2}y$
 j) $3 \cdot (-2u - 5v)$ k) $-\frac{5}{6}z(-\frac{7}{15}r + \frac{3}{5}z)$ l) $-2x(-\frac{3}{8}tx - \frac{3}{4}sx)$
9. a) $3x - 4x$ b) $7\frac{1}{2}x - x$ c) $a + 2a - 3a$
 d) $0,1b - 0,01b$ e) $3\frac{5}{6}s + 2\frac{1}{6}s$ f) $\frac{3}{7}v - \frac{3}{14}v$
 g) $\frac{5}{6}xy + \frac{3}{8}xy$ h) $10,5rs - 11,5rs$ i) $3,7uv - uv$
 j) $1985abc - 1648abc$ k) $0,003rst - 0,3rst$ l) $-5\frac{4}{5}x^2y - 4\frac{1}{5}x^2y$
10. Wende das Distributivgesetz der Division an.
 a) $\frac{12x - 51}{3}$ b) $\frac{-4,9 + 5,6a}{0,7}$ c) $\frac{-1,44u - 0,72}{36}$
11. LEON VON BYZANZ (9. Jh. n. Chr.) hat behauptet, daß $a(bc) = b(ac) = c(ab)$ sei. Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung durch Anwendung der Rechengesetze.

12. Zeige durch Anwendung der Rechenregeln:

a) $abcd = dbca$

b) $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

13. Schreibe als Summe:

a) $7x - 3y$

b) $-2a - 5b$

c) $3 - x + y$

d) $-5u + 3v - 9$

e) $-1 - 2x - 3y$

f) $5a - 6b + 7c - 8d$

14. Schreibe als Summe:

a) $12xy - 3,7uv$

b) $8 - (a - b)$

c) $(3x - 5y) - (2x + 3y)$

d) $(3u + 5v) - (2u - 3v - 1) - 2v$

e) $2(x + y) - 3(x - y) - 2(x^2 - y^2)$

15. a) $2x + 7y + 3y + x$

b) $2x - 7y + 3y + x$

c) $-2x + 7y - 3y + x$

d) $2x - 7y - 3y - x$

e) $-2x + 7y + 3y - x$

f) $-2x - 7y - 3y - x$

g) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$

h) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$

i) $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$

j) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$

k) $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$

l) $-\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$

16. a) $3x - 3,2 + 5xy - 2 - x$

b) $8,1x^2 - 8,1x - 8,1 + 2,9x + x^2 - 7,9$

c) $3ab - 0,3a - 0,3ab + 3,7a + 2,3ab$

d) $-4\frac{5}{8}x + 3\frac{1}{2}y + xy - 3\frac{2}{3}x + 1\frac{17}{24}x - xy - 4\frac{3}{4}y$

3.2 Potenzen

Für Produkte mit lauter gleichen Faktoren führt man eine abkürzende Schreibweise ein*:

$a \cdot a =: a^2$, gesprochen »a hoch 2« oder »a Quadrat«

$a \cdot a \cdot a =: a^3$, gesprochen »a hoch 3«

$a \cdot a \cdot a \cdot a =: a^4$, gesprochen »a hoch 4«

.....

* Um kenntlich zu machen, was das neue Symbol ist, verwendet man gern ein Gleichheitszeichen in Verbindung mit einem Doppelpunkt, der entweder links oder rechts vom Gleichheitszeichen stehen kann. Dabei bedeutet $A =: B$, daß A das neue Zeichen, die neue Schreibweise für das schon bekannte B ist. Umgekehrt bedeutet $C =: D$, daß das neue D durch das schon bekannte C erklärt wird.

Das Wort *Symbol* kommt vom griechischen *σύμβολον* (*sýmbolon*) = *Erkennungszeichen, vereinbartes Zeichen*. Ursprünglich bezeichnete man damit das dem Gastfreunde übergebene abgebrochene Stück einer Sache, z. B. eines Rings, eines Täfelchens, das mit seinem Bruchrand genau in das zurückbehaltene Stück paßte, so daß man durch *Zusammenlegen* (= *συνβάλλειν* [*syμβálllein*]) den rechtmäßigen Besitzer wieder erkennen konnte.

Macht man so weiter, so kommt man zu

Definition 96.1: Für das Produkt $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n , gesprochen » a hoch n «, und nennt es **n -te Potenz** von a ; kurz:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \in \{2, 3, 4, \dots\}.$$

Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**.*

Da n die Anzahl der Faktoren im Produkt angibt, gilt die Definition von a^n nur für natürliche Zahlen, die größer als 1 sind. Wir sind oben nämlich von $a \cdot a = a^2$ zu immer höheren Potenzen fortgeschritten. Ein Schritt zurück brächte rein formal die Zeile $a = a^1$. Das liefert eine naheliegende Ergänzung der Potenzdefinition, die sich im folgenden als zweckmäßig erweisen wird:

Definition 96.2: $a^1 := a$

In Termen, die aus Potenzen, Produkten und Summen bestehen, muß man wissen, in welcher Reihenfolge die Rechnung auszuführen ist. So ist z. B. unklar, wie $3 \cdot 5^2$ zu verstehen ist:

Geht die Multiplikation vor oder das Potenzieren?

Geht die Multiplikation vor, so muß man $3 \cdot 5^2 = 15^2 = 225$ rechnen.

Geht hingegen das Potenzieren vor, so ergibt sich $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$.

Durch Setzen von Klammern kann man die Anweisung eindeutig machen; im ersten Fall schreibe man $(3 \cdot 5)^2$, im zweiten Fall $3 \cdot (5^2)$.

Um Klammern zu sparen, hält man sich an die 1873 von Ernst SCHRÖDER (1841–1902) in seinem *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende* eingeführte

Vereinbarung 96.1: 1. »Potenz vor Punkt vor Strich.«
2. »Klammern haben absoluten Vorrang.«

* DIOPHANT (um 250 n. Chr.) verwendet für die 2. Potenz einer Unbekannten neben τετράγωνος (siehe Seite 66) bevorzugt δύναμις (dýnamis) = *Kraft*, das bereits bei HERON (wirkte um 62 n. Chr. in Alexandria) so belegt ist, wogegen HIPPOKRATES von Chios (2. Hälfte des 5. Jh.s v. Chr.) damit die Quadratzahl bezeichnet hatte. Raffaele BOMBELLI (1526–1572) verwendet 1572 in seiner *L'Algebra* dafür das italienische Wort *potenza*. Im 18. Jh. setzt sich *potentia*, zu deutsch **Potenz**, als allgemeine Bezeichnung für a^n gegenüber den bis dahin gebräuchlichen Wörtern wie *potestas* (VIÈTE) und *dignità* (TARTAGLIA und BOMBELLI) durch. Leonhard EULER (1707–1783) versucht in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* 1770 die Verdeutschung *Macht*, die sich aber nicht verbreitete. **Basis** ist das griechische Wort βάσις, das *Grundlage*, *Fundament* bedeutet. Das Wort **Exponent** wurde 1544 von Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* geprägt; *exponere* (lat.) bedeutet *herausstellen*. Auch die Schreibweise für Potenzen hat eine lange Geschichte. Das heute übliche a^2 , a^3 usw. geht auf René DESCARTES (1596–1650) zurück, und zwar auf die 1628 entstandenen und erst 1701 erschienenen *Regulae ad directionem ingenii*. Potenzen mit einem allgemeinen Exponenten n kommen jedoch erst bei Isaac NEWTON (1643–1727) vor.

Beispiele:

- 1) $4 + 3 \cdot 5^2 = 4 + 3 \cdot 25 = 4 + 75 = 79.$
- 2) $(4 + 3) \cdot 5^2 = 7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 25 = 175.$
- 3) $4 + (3 \cdot 5)^2 = 4 + 15^2 = 4 + 225 = 229.$
- 4) $(4 + 3 \cdot 5)^2 = (4 + 15)^2 = 19^2 = 361.$
- 5) $((4 + 3) \cdot 5)^2 = (7 \cdot 5)^2 = 35^2 = 1225.$

Beachte: Manche Taschenrechner halten sich nicht an diese Vereinbarung. Studiere also jeweils genau die Gebrauchsanweisung!

Beim Umgang mit Potenzen passieren dem Anfänger manchmal folgende zwei Fehler:

1. *Fehler:* Er verwechselt a^3 mit $a \cdot 3$. Aber es gilt

$$a^3 = a \cdot a \cdot a \quad \text{und} \quad a \cdot 3 = 3 \cdot a = a + a + a, \text{ zum Beispiel}$$

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \text{und} \quad 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15.$$

2. *Fehler:* Er rechnet $a^3 - a^2 = a$, z. B. $7^3 - 7^2 = 7$. Dabei läßt sich $a^3 - a^2$ nicht weiter berechnen, $7^3 - 7^2$ aber zu $343 - 49 = 294$ ausrechnen, und das ist nicht 7.

Wie geht man aber richtig mit Potenzen um? Vorläufig genügen uns drei Rechenregeln:

1) Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$$

Bei der Umformung war es nicht wesentlich, daß 2 die Basis war; also gilt für jede Basis a

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7.$$

Genauso können wir allgemein vorgehen:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \dots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}.$$

Also gilt

Satz 97.1: Potenzen gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält;
kurz $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$

Beispiele:

- 1) $x^8 \cdot x^{19} = x^{8+19} = x^{27}.$
- 2) $z \cdot z^2 = z^1 \cdot z^2 = z^{1+2} = z^3.$
- 3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3} \cdot a^4 = a^{(2+3)+4} = a^{2+3+4} = a^9.$

2) Potenzieren einer Potenz

$$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}.$$

Auch hier war es nicht wesentlich, daß 2 die Basis war; also gilt für jede Basis a

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}.$$

Genauso können wir allgemein vorgehen:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = \overbrace{a^{m+m+\dots+m}}^{n \text{ Summanden } m} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}.$$

Somit gilt

Satz 98.1: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält; kurz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

$$1) (x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6.$$

$$2) ((z^3)^5)^7 = (z^{3 \cdot 5})^7 = z^{(3 \cdot 5) \cdot 7} = z^{3 \cdot 5 \cdot 7} = z^{105}.$$

Beachte: $(x^2)^3 \neq x^{2^3}$. Auf der linken Seite wird nämlich die Basis x^2 mit 3 potenziert, und das ergibt x^6 . Auf der rechten Seite hingegen wird die Basis x mit dem Exponenten 2^3 potenziert; da x^{2^3} die Kurzschreibweise für $x^{(2^3)}$ ist, erhält man x^8 .

3) Potenzieren eines Produkts bzw. eines Quotienten

Betrachten wir gleich den allgemeinen Fall:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } (a \cdot b)} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b} = a^n \cdot b^n$$

Satz 98.2: Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die entstandenen Potenzen miteinander multipliziert; kurz

$$(a : b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Offensichtlich gilt dieser Satz auch für Produkte aus mehr als zwei Faktoren, z. B.: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$.

Beispiele:

$$1) (3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81x^4.$$

$$2) (0,3 \cdot x^2)^4 = 0,3^4 \cdot (x^2)^4 = 0,0081x^8.$$

Für Brüche erhalten wir analog:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Satz 99.1: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Zählerpotenz durch die Nennerpotenz dividiert; kurz

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

$$1) \left(\frac{3}{2}xy^3\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 = \frac{3^4}{2^4}x^4y^{12} = \frac{81}{16}x^4y^{12}.$$

$$2) \left(\frac{3ax^2}{4b^3y}\right)^3 = \frac{(3ax^2)^3}{(4b^3y)^3} = \frac{3^3a^3(x^2)^3}{4^3(b^3)^3y^3} = \frac{27a^3x^6}{64b^9y^3}.$$

Aufgaben

- Berechne die Quadrate der Zahlen von 1 bis 25 und lerne sie auswendig.
- Wie lauten die dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 10?
- $4^3 + 25^2 - 14^2 - 7^3$
 - $9^3 - 9^2 + 5^3 - 5^2$
 - $6^3 - 18^2 - 21^2 + 4^3$
 - $-23^2 + 8^3 - 16^2 - 3^3$
- Berechne die Potenzen von 2 bis zum Exponenten 10 und lerne sie auswendig.
- Berechne die Potenzen von 10 bis zum Exponenten 6.
- Berechne die Potenzen a^1, a^2, a^3, a^4 für $a = 0; \frac{1}{2}; 1; 2$.
- Berechne und vergleiche:
 - 2^3 und 3^2
 - 3^5 und 5^3
 - $(2+5)^2$ und 2^2+5^2
 - $(17-12)^2$ und 17^2-12^2
 - $(3 \cdot 5)^2$ und $3 \cdot 5^2$
 - $(12:4)^2$ und $12:4^2$

8. a) Berechne und vergleiche: 1) $(2^2)^3$ und $(2^3)^2$ 2) $(3^2)^3$ und $(3^3)^2$
 b) Was kann man allgemein von $(a^m)^n$ und $(a^n)^m$ aussagen? Beweis!
9. a) $(\frac{1}{4})^3$ b) $(-\frac{2}{3})^2$ c) $(1\frac{2}{3})^4$ d) $(-\frac{36}{27})^5$ e) $0,3^2$
 f) $-0,3^3$ g) $0,3^4$ h) $0,03^2$ i) $-2,5^2$ k) $0,25^2$
- 10. **Rechenvorteil:** $3^8 = (3^4)^2 = 81^2 = 6561$
 Berechne in entsprechender Weise:
 a) 3^6 b) 4^4 c) 5^4 d) 2^{12} e) 2^{20}
11. Zerlege unter Verwendung der Potenzschreibweise folgende Zahlen in ihre Primfaktoren:
 a) 512 b) 432 c) 1400 d) 1568
 e) 1089 f) 1352 g) 1331 h) 3636
- 12. **Rechenvorteil:**
 $28 \cdot 75 = (2^2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5^2) = 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 21 \cdot 100 = 2100$
 Berechne ebenso:
 a) $12 \cdot 65$ b) $24 \cdot 375$ c) $625 \cdot 48$
 d) $25 \cdot 24 \cdot 15$ e) $225 \cdot 64 \cdot 125$ f) $12 \cdot 175 \cdot 14$
13. a) $x^3 \cdot x^5$ b) $2a^2 \cdot 3a$ c) $u \cdot 5u \cdot 2u^3$
 d) $\frac{3}{4} \cdot b^5 \cdot \frac{8}{9} \cdot b^2$ e) $(ab)^2 \cdot a^3$ • f) $3xy^2 \cdot (5xy)^2$
 • g) $2p^3 \cdot 3(pq^2)^2$ • h) $(3u^2v^3)^2 \cdot (2u^2v^3)^3$ • i) $[2a(3ab^2)^3]^2 \cdot (4a^2b)^2$
14. a) $x(x+y)$ b) $v(u-v)$ c) $(2a+b) \cdot a^2$
 • d) $3b^4(5b-2c^2)$ • e) $xy^2(2-3x^4y)$ • f) $(a^2b+bc^2+1)a^3c$
- 15. Für welche natürlichen Zahlen a und b gilt $a^b = a \cdot b$?
16. **Zehnerpotenzschreibweise.** Der besseren Lesbarkeit wegen schreibt man oft große Zahlen als Produkt aus einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz. Für 1300000 schreibt man also lieber das Produkt $1,3 \cdot 10^6$.
 a) Schreibe die folgenden Zahlen mit Hilfe einer Zehnerpotenz:
 1) 7840000 4) 80500000
 2) 100000 5) 724
 3) 3020 6) 17 Billionen
 b) Schreibe ohne Zehnerpotenz:
 1) $1,03 \cdot 10^9$ 4) $1,35 \cdot 10^6$
 2) $3 \cdot 10^8$ 5) $5,05 \cdot 10^5$
 3) $1,5 \cdot 10^{11}$ 6) $8,07 \cdot 10^5$
17. a) $(-\frac{4}{3}x^2y^3)^2$ b) $(0,02ab^3)^5$ c) $(-1\frac{1}{2}r^4s^3)^3$
18. a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^2$ b) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2$ c) $\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$
 d) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$ e) $((\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2})^2$ f) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$

19. Bestimme die Werte der folgenden Potenzen:

- a) $(-1)^2$ b) $(-1)^3$ c) $(-1)^4$ d) $(-1)^5$
 e) $(-1)^8$ f) $(-1)^{17}$ g) $(-1)^{103}$ h) $(-1)^{1234}$

i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen? Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

20. Berechne:

- a) $(-0,1)^2$ b) $(-10)^2$ c) $(-0,1)^3$ d) $(-10)^3$
 e) $(-0,01)^2$ f) $(-0,01)^3$ g) $(-100)^2$ h) $(-100)^3$

21. a) $(-a)^2$ b) $(-a)^5$ c) $(-a)^{32}$ d) $(-a)^1$
 e) $(-a)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ f) $(-a)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ g) $(-a)^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

22. a) $(-c)^4 - c^4$ b) $(-c)^5 + (-c)^5$ c) $(-ab)^3$ d) $(-ab)^4$
 e) $-(-ab)^4$ f) $[-(-ab)]^4$ g) $-(-uv)^7$ h) $-(-uv^7)$

23. a) $-(-x)^2$ b) $-(-x)^3$ c) $[-(-x)]^2$ d) $[-(-x)]^3$

24. a) $(-a)^2(-b)^3(-c)^4$ b) $(-a)^3(-b)^2(-c)^3$
 c) $(-\frac{1}{5})^3(-x)^2(-y)^4$ d) $(-8a)^4(-\frac{1}{8}a)^3(-8a)^2$
 • e) $-4a(-\frac{3}{4}a)^2 \cdot (\frac{2}{3}a)^3$ • f) $(-0,5x)^3 \cdot 2,7x \cdot (-3,4x)^2$

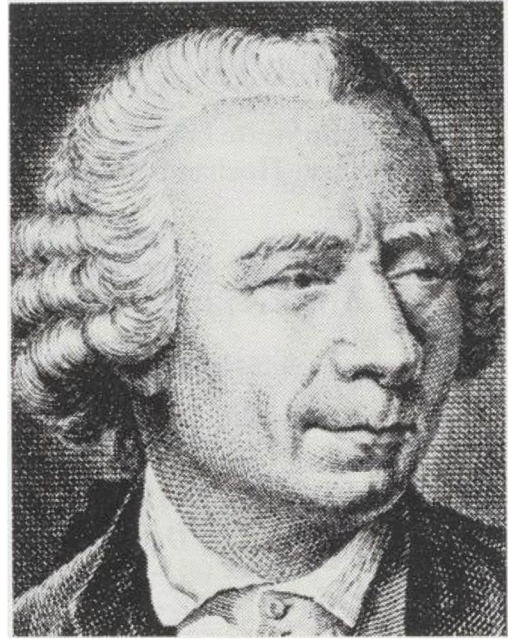
25. a) $1 + (-1)^1$ b) $1 + (-1)^2$ c) $1 + (-1)^3$ d) $1 + (-1)^4$
 e) $1 - (-1)^1$ f) $1 - (-1)^2$ g) $1 - (-1)^3$ h) $1 - (-1)^4$

3.3. Umgang mit Klammern

Der Term $(3x + 2y - 5) - (2y - 5 + 3x)$ läßt sich zu 0 vereinfachen, weil Minuend und Subtrahend gleich sind, wie man durch Umordnen des Subtrahenden erkennt. Schwieriger ist es, wenn man einen Term wie $(3x + 2y - 5) - (-8x + 3y - 1)$ vereinfachen will. Die Klammern lassen sich nicht vereinfachen, und dennoch hat man das Gefühl, daß man diesen Term auch einfacher schreiben kann. Tatsächlich geht es auch. Die dazu nötigen Hilfsmittel erarbeiten wir uns in diesem Kapitel.

Es hat sehr lange gedauert, bis sich Klammern als Zeichen für das Zusammenfassen durchgesetzt haben. Zum erstenmal wurden runde Klammern von Michael STIFEL (1487?–1567) verwendet, als er in seinem Handexemplar seiner *Arithmetica integra* eine Randbemerkung machte. Bei Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) erschienen sie 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* im Druck. Wichtig wurden Zusammenfassungszeichen aber erst, als man allgemein mit Buchstaben rechnen wollte. François VIÈTE (1540–1603) faßte 1593 zusammengehörige Ausdrücke durch eckige und geschweifte Klammern zusammen. Viele Mathematiker hatten das Zusammen-

gehören durch Unterstreichen ausgedrückt. René DESCARTES (1596–1650) führte statt dessen 1637 das Überstreichen ein, das durch seine Schüler allgemeine Verbreitung fand; man schrieb also $\overline{7 + 3} : 5$ an Stelle des heutigen $(7 + 3) : 5$. Da aber für die Druckereien Klammern bequemer zu setzen waren als Überstreichungen, setzten sie sich immer mehr durch. Leonhard EULER (1707–1783) verwandte 1770 in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* zum erstenmal das deutsche Wort *Klammer*.



1753

Abb. 102.1 Leonhard EULER (15.4.1707
Basel – 18.9.1783 St. Petersburg)

L. Euler

3.3.1 Rechenzeichen und Vorzeichen

Wir erinnern daran, daß die Subtraktion zweier Terme nichts anderes ist als die Addition des Gegenterms:

$$a - b = a + (-b).$$

Das Rechenzeichen Minus auf der linken Seite verwandelt sich dabei zum Vorzeichen Minus auf der rechten Seite. Das Vorzeichen Plus bei a lassen wir wie üblich weg.

Stehen vor einem Term mehrere Vorzeichen, so kann man sie immer mit der Vorzeichenregel auf eines reduzieren; nämlich

$$\begin{array}{ll} + (+a) = +a = a & - (+a) = -a \\ + (-a) = -a & - (-a) = +a = a. \end{array}$$

Man kann damit auch ganze Vorzeichenserien abbauen:

$$\begin{aligned} -(-(+(-(+(-a)))))) &= -(-(+(-(-a)))) = \\ &= -(-(+(+a))) = \\ &= -(-(+a)) = \\ &= -(-a) = \\ &= a. \end{aligned}$$

Wir haben die Serie dabei von innen nach außen abgebaut. Genausogut könnte man sie auch von außen nach innen abbauen.

Aufgaben**1. Reduziere auf ein Vorzeichen:**

- a)** $+(+3a)$ **b)** $-(-\frac{4}{3}b)$
c) $-(+xyz)$ **d)** $+(-4ab)$
e) $-((+(-7xy)))$ **f)** $-(-(-(-(+(-13u))))))$

2. Reduziere auf ein Vorzeichen:

- a)** $+(a-b)$ **b)** $-(-(a-b))$ **c)** $-(+(-(a-b)))$

3. Du erinnerst dich sicher:

- Malpunkte in Produkten dürfen vor Variablen und Klammern weglassen werden, z. B. $3 \cdot a \cdot (x - y) = 3a(x - y)$.
- Das Pluszeichen bei gemischten Zahlen kann entfallen, also $1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$.
- Das Pluszeichen als Vorzeichen am Anfang schreibt man nicht, z. B. $+2ab + 5a - b = 2ab + 5a - b$.

Was versteht man nun eigentlich unter dem Term $-1\frac{1}{3}b$?

Welche der folgenden Vorschläge hältst du für richtig:

- a)** $(-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot b$ **b)** $-(1 + \frac{1}{3}) \cdot b$
c) $-1 + \frac{1}{3} \cdot b$ **d)** $(-1 - \frac{1}{3}) \cdot b$
e) $(-1 + \frac{1}{3}) \cdot b$ **f)** $-(1 + \frac{1}{3} \cdot b)?$

3.3.2 Plusklammern

Steht in einem Aggregat vor einer Klammer ein Pluszeichen, so spricht man kurz von einer **Plusklammer**, z. B. $3x + (7y - 5x + 8)$. Weil es üblich ist, am Anfang keine Pluszeichen zu schreiben – denke etwa daran, daß $3 + 5$ auch als $+3 + 5$ geschrieben werden kann – so ist auch eine am Anfang stehende Klammer eine Plusklammer: $(3x + 5) + 8x$.

Diese Plusklammern wollen wir nun beseitigen. Dabei hilft uns das verallgemeinerte Assoziativgesetz. Weil es nur von Summen handelt, müssen wir gegebenenfalls den Inhalt der Plusklammer als Aggregat, d. h. als algebraische Summe, betrachten und dann das verallgemeinerte Assoziativgesetz anwenden.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 a + (-b - c + d) &= a + ((-b) + (-c) + d) = \\
 &= a + (-b) + (-c) + d = \\
 &= a - b - c + d.
 \end{aligned}$$

Untersuchen wir das vorgeführte Beispiel auf das Wesentliche, so erkennen wir

Satz 104.1: In einem Aggregat kann eine Plusklammer mitsamt ihrem Plusrechenzeichen weggelassen werden, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert. Die Rechenzeichen in der Klammer bleiben erhalten. Falls vor dem ersten Glied in der Klammer kein Zeichen steht, so muß ein Plusrechenzeichen gesetzt werden; kurz:

Plusklammern können weggelassen werden, Rechenzeichen bleiben.

Wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Plusklammer ein Aggregat ist, dann läßt sich dieser Satz auch noch anders ausdrücken, nämlich:

Ein Aggregat wird addiert, indem man jedes Glied des Aggregats einzeln addiert.

Nach Satz 104.1 kann man also Plusklammern an beliebiger Stelle in einem Aggregat weglassen. Umgekehrt kann man sie demnach an beliebiger Stelle setzen! Wir merken uns

Satz 104.2: Ein Aggregat ändert seinen Wert nicht, wenn man beliebig viele Glieder in einer Plusklammer zusammenfaßt und dabei ihre Rechenzeichen beibehält, z. B.

$$a + b - c + d - e - f = a + (b - c + d) + (-e - f).$$

Nun können wir endlich das eingangs angeführte Aggregat vereinfachen:

$$\begin{aligned} 3x + (7y - 5x + 8) &= 3x + 7y - 5x + 8 = \\ &= 7y + 3x - 5x + 8 = \\ &= 7y + (3x - 5x) + 8 = \\ &= 7y - 2x + 8. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $5a + (3b + 7a)$ b) $(5a + 3b) + 7a$
 c) $5a + (3b - 7a)$ d) $-5a + (-3b + 7a)$
 e) $(-5a + 3b) - 7a$ f) $-5a + (-3b - 7a)$
2. a) $(2x + 4y) + (6x + 4y)$ b) $(2x - 4y) + (-6x + 4y)$
 c) $(-2x + 4y) + (6x - 4y)$ d) $(-2x - 4y) + (-6x - 4y)$
 e) $2x + (-4y + 6x - 4y)$ f) $-2x + (4y - 6x) - 4y$

3. a) $3a + (9x + 7a) + (15a + 11x)$
 b) $17b + (15a + 9b) + 2a + (11a + b)$
 c) $14x + (20a + 7b + 4x) + (9x + 13a + 31b)$
 d) $11a + (13b + (12a + 19b)) + ((4a + 27b) + 14a)$
4. $(9 + 11b + 13c) + (15b + 17 + 19c) + (21c + 23b + 25)$
5. $12x + (23x + 27y) + (-29y + 3z - 4u) + (43z + 47u - 59x) + (-43u - 7x - 2y) + (-19x + 4y - 46z)$
- 6. $2 + x + (x + (y + 2) + (x + 2)) + (((x + 2) + 2) + 2)$
- 7. $n + 1 + (r + 1) + ((n + 1) + (r + 1)) + (2 + (2n + 1) + (2r + 1))$
- 8. $(-2 + x) + (1 - x + ((1 - x) + (-1 + x))) + ((1 - x) + (x + 1))$
9. a) Wie lautet die Quersumme* q der Zahl $10 \cdot x + y$; $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; \dots; 9\}$?
 b) Warum sind alle Zahlen der Form $10 \cdot x + (9 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ durch 9 teilbar?
 •c) Sind auch alle Zahlen der Form $100 \cdot x + (99 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \dots; 99\}$ durch 9 teilbar?
 •d) Welche gemeinsamen Teiler haben alle Zahlen aus c)?

3.3.3 Minusklammern

Steht in einem Aggregat vor einer Klammer ein Minuszeichen, so spricht man kurz von einer **Minusklammer**, z. B. $3x - (7y - 5x + 8)$.

Diese Minusklammer wollen wir nun beseitigen. In Satz 75.1 haben wir gezeigt, daß $-a = (-1) \cdot a$ ist. Setzen wir an Stelle von a ein Aggregat, dann erhalten wir z. B.

$$-(b - c - d + e) = (-1) \cdot (b - c - d + e) = (-1) \cdot (b + (-c) + (-d) + e).$$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes ergibt sich für die rechte Seite

$$(-1) \cdot b + (-1) \cdot (-c) + (-1) \cdot (-d) + (-1) \cdot e = -b + c + d - e.$$

Also gilt:

$$-(b - c - d + e) = -b + c + d - e.$$

Mit dieser Erkenntnis können wir nun auch Minusklammern im Innern eines Aggregats beseitigen:

$$\begin{aligned} a - (b - c - d + e) &= a + [- (b - c - d + e)] = \\ &= a + (-1) \cdot (b - c - d + e) = \\ &= a + (-b + c + d - e) = \\ &= a - b + c + d - e. \end{aligned}$$

* Das bequeme Fachwort **Quersumme** scheint erst im 19. Jh. aufgekommen zu sein.

Weil sich unsere Überlegungen auf jedes Aggregat übertragen lassen, gilt:

Satz 106.1: In einem Aggregat kann man, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert, eine Minusklammer mitsamt ihrem Minuszeichen weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert, d. h. Pluszeichen durch Minuszeichen und Minuszeichen durch Pluszeichen ersetzt. Falls vor dem ersten Glied in der Klammer kein Zeichen steht, so muß ein Minuszeichen gesetzt werden;
kurz: **Minuskammern dürfen weggelassen werden, wenn alle Rechenzeichen geändert werden.**

Beispiel:

$$3x - (7y - 5x + 8) = 3x - 7y + 5x - 8 = 8x - 7y - 8.$$

Wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Minusklammer ein Aggregat ist, dann läßt sich dieser Satz auch noch anders ausdrücken, nämlich:

Ein Aggregat wird subtrahiert, indem man jedes Glied des Aggregats subtrahiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x - (7y - 5x + 8) &= 3x - 7y - (-5x) - 8 = \\ &= 3x - 7y + 5x - 8 = \\ &= 8x - 7y - 8. \end{aligned}$$

Nach Satz 106.1 kann man also Minuskammern an beliebigen Stellen in einem Aggregat weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert. Umgekehrt kann man demnach Minuskammern an beliebigen Stellen setzen, wenn man die Rechenzeichen bei den Gliedern ändert, die in die Minusklammer kommen. Wir haben damit

Satz 106.2: Ein Aggregat ändert seinen Wert nicht, wenn man beliebig viele Glieder in einer Minusklammer zusammenfaßt und dabei alle Rechenzeichen ändert, z. B.

$$a + b - c + d - e - f = a - (-b + c - d) - (e + f).$$

Wie man mit diesem Satz arbeitet, zeigen wir an folgendem

Beispiel:

$$\begin{aligned} -(-2a + 3b) - (5b + 8a) &= 2a - 3b - 5b - 8a = \\ &= (2a - 8a) - (3b + 5b) = \\ &= -6a - 8b. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $5a - (3b + 7a)$ b) $5a - (3b - 7a)$
 c) $5a - (-3b + 7a)$ d) $5a - (-3b - 7a)$
2. a) $(2x - 4y) - (6x - 4y)$ b) $(2x + 4y) - (6x + 4y)$
 c) $(2x + 4y) - (6x - 4y)$ d) $(-2x - 4y) - (6x - 4y)$
 e) $(-2x + 4y) - (-6x - 4y)$ f) $-2x - (4y - 6x) - 4y$
3. a) $3a - (9x + 7a) - (-4a - 11x)$
 b) $17b - (15a - 9b) - 2a + (-17a - 26b)$
 c) $14x - (-20a + 7b - 4x) - (-9x + 19a + 17b) + 6x$
 d) $11a + (13b + (12a - 19b)) - ((4a - 17b) + 19a)$
4. $(9 - 11b + 13c) - (15b + 17 - 19c) - (-21c - 26b + 18)$
5. $12x - (23x - 27y) - (-29y + 3z + 4u) + (-43z - 47u - 59x) -$
 $-(-51u - 16x + 56y) - (7z + x)$
6. a) $\frac{5}{3} + a - (\frac{1}{6} - 2\frac{1}{2}a)$
 b) $-\frac{2}{3}b + \frac{1}{2}a + 3\frac{1}{3}c - (-c - 1\frac{1}{2}b)$
 c) $-(-a + 7\frac{1}{2} - 4\frac{2}{5}) - (6\frac{3}{10} + a - 9\frac{2}{5})$
 d) $(5,7 - b) - (a + 3,6) - (9,6 - b) + (2,4 + a)$
7. a) $-(-a + \frac{7}{3}b - 21c + 9,05) + (2\frac{1}{3}b - 9,5)$
 b) $-(-(-3,5u + 5,5v - 7w)) - (3,5u - 5,5v - 7w)$
8. a) $(-\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - 2) - (-\frac{3}{10}x + \frac{4}{5}y - \frac{5}{2}) - \frac{23}{6}x$
 b) $(\frac{2}{3}a - 1 - \frac{7}{11}b) - (-\frac{1}{3}a - \frac{5}{11}b) - (1 - \frac{10}{11}b)$
 c) $(\frac{1}{5}r - \frac{5}{2}s - 3) - (-\frac{1}{10}r + \frac{4}{5}s - \frac{11}{2})$
9. a) $(3x^2 - 2x + 1) - (-2x^2 + 4x - 6)$
 b) $(7x^3 - 3x + 2) - (-4x + 5x^3 + 3)$
 c) $(-3x^3 + 2x - 3) - (4x^2 - 5 - 2x) - 6x^3$
 d) $-(6x^3 - 2x^2 + 5) - (3x^3 + 7x^2 - 2)$
10. a) $(\frac{3}{4}ab - \frac{5}{3}a^2b + 1) - (-\frac{1}{4}ab + \frac{2}{3}a^2b) + (-ab + \frac{7}{3}a^2b)$
 b) $(\frac{5}{2}a^2 + \frac{4}{3}a - 7) - (a^2 + \frac{1}{3}a - 5) - (\frac{3}{2}a^2 + a - 3)$

3.3.4 Faktor bei der Klammer

Bisher haben wir gelernt, wie man bei Aggregaten vom Typ $a + (b - c) - (e + f - g)$ die Klammern auflöst. Was aber, wenn vor einer dieser Klammern noch ein Faktor steht? Jetzt muß doch auch die Regel »Punkt vor Strich« berücksichtigt werden. Die einfachsten Fälle sind $a + b(c + d - e)$

und $a - b(c + d - e)$. Die schwierigeren Fälle, wo beide Faktoren Klammern sind, wie z. B. $a + (b - c)(d - e + f)$, betrachten wir erst in 7.1.

Nun zum ersten Fall:

Wegen der Regel »Punkt vor Strich« können wir eine zusätzliche Klammer setzen, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert:

$$a + b(c + d - e) = a + (b(c + d - e)).$$

Wir wenden auf den Inhalt der roten Klammer das Distributivgesetz an:

$$a + (b(c + d - e)) = a + (bc + bd - be).$$

Nach unserer Klammerregel (Satz 104.1) können wir die rote Plusklammer einfach weglassen. Damit haben wir:

$$a + b(c + d - e) = a + bc + bd - be.$$

Den zweiten Fall können wir analog behandeln:

$$\begin{aligned} a - b(c + d - e) &= a - (b(c + d - e)) = && \text{Punkt vor Strich} \\ &= a - (bc + bd - be) = && \text{Distributivgesetz} \\ &= a - bc - bd + be. && \text{Satz 106.1} \end{aligned}$$

Vergleichen wir in beiden Fällen das gegebene Aggregat mit dem Ergebnis der Umformungen, so erkennen wir

Satz 108.1: Steht in einem Aggregat bei einer Klammer ein Faktor, so multipliziert man jedes Glied in der Klammer mit diesem Faktor unter Berücksichtigung der Vorzeichen.

$$a + b(c + d - e) = a + bc + bd - be.$$

$$a - b(c + d - e) = a - bc - bd + be.$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 3x - 5y(2 - 2x + 3y) + 2x(-6 + x - 5y) = \\ & = 3x - 10y + 10xy - 15y^2 - 12x + 2x^2 - 10xy = \\ & = 2x^2 - 9x - 15y^2 - 10y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 5 \cdot \left(\frac{1}{10}ab - \frac{2}{5}b\right) - \frac{3}{2}a\left(-\frac{5}{6}b + 1\frac{1}{3}\right) + b\left(2 - \frac{7}{4}a\right) = \\ & = \frac{1}{2}ab - 2b + \frac{5}{4}ab - 2a + 2b - \frac{7}{4}ab = \\ & = -2a. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $3a + 5(2a - b)$ **b)** $x - 3(1 - x)$
c) $3 + x(1 - x)$ **d)** $12z^2 - 3z(-2 + 4z)$
2. $6(2a + 3b - 7c) + 7(4a - 3b + 7c) - 8(5a - 4b + 3c)$

3. $15(a + b - 3) - 6(3a - 2b) + 7(4 - 3b) - 8(5 - 2a)$
4. a) $a(a - 2b) - b(2a - b)$ b) $a(2a + 3b) - b(2a + 5b)$
5. $x(x - 1) - 3x^2 + 4x(2x + 1) - 6(3x + 2)$
6. $15a(3x - 4y + 7a) + 12x(11a - 7y + 4x) - 10y(13x - 4a + 11y)$
7. $(3b^2 - 4ab)2b - 3a(4ab + b^2) - 5ab(3a - 2b)$
- 8. $(12a^2b - 13ab^2 + b^3)5a - (11a^3 - 32a^2b - 19ab^2) \cdot 3b -$
 $- 16ab(a^2 + 2ab + 4b^2)$
- 9. $5a^2bc(2ac - 3bc^2) - 7abc^2(3abc + 4b^2c^2) - 8b^3c^2(2ac^2 - 3bc^3) -$
 $- 4ab^2c^3(-9a - 11bc)$
- 10. $17a^2xy(9a^2x^2y - 11ax^3y^3 + 10xy^2) - 21ax^2y^2(12a^2x^2y^2 +$
 $+ 15ay - 9a^3x) + 23axy(7axy^2 - 5a^3x^2y + 9a^2x^3y^3)$
11. $5ab(3ab + 4ac - bc) - 3ac(3bc - 4ac + 5ab) -$
 $- 4bc(3ab - 4ac + bc) - 4c^2(3a^2 - b^2 + 2ab) - 15a^2b^2$
- 12. $40a^2bc^3 - 4ab^2(3a^2c + 3ac^2 + 4bc^3) + 3a^2c(4ab^2 - 2bc^2 - 4b^2c) -$
 $- 5abc(9ac^2 - 4abc - 4b^2c^2) + 4bc^2(5a^2c - ab^2c + a^2b)$
13. $2x(1 - x(3 - 5x + 2x^2) - x^2(2 - 3x)) - 4x^2(2x - 2)$
14. $a(a + b - 2) - b(a + b - 3) - 4(a - b) - 7(b - \frac{6}{7}a)$
15. $4(x - y + 5) - 5(x + y) + 17(y - x - 3)$
16. $50x - 12(x + y - z) - 14(x - y + z) + 17(y + z - x)$
17. $(a - b - 5 + c) \cdot 3 + (b - a + c - 11) \cdot 7 - (c + a - b - 14) \cdot 6 -$
 $- (2c + 5b - 5a) \cdot 2$
18. $27(a + b + c) - 29(a - b + c) + 31(a + b - c) - 35(b - c - a)$
19. $(x + y + z) \cdot 17 - (x - 4 - z) \cdot 12 - (y - 15 - x) \cdot 13 - 3(6x - 49)$
20. $5(a + x - 3) + 6x - (x - a - 3) \cdot 7 - 3a - 4(a - x)$
21. $(a - b) \cdot 5 + 7(a + b) - (a - 7) \cdot 5 - 7(a + 5)$
22. $100 - 99(a + b - 1) - 50 + 49(b + a - 1) + 50(a + b - 2)$
23. $(x - y - z - 2) \cdot 2 + 3 - 4(z - y - x - 5) + (x + 4) \cdot 8 - 5(y + 2)$
24. $a(1 + b + c) - b(2 + a - c) - c(3 + a + b)$
25. $y + y(1 - y) - y(2 - y) + y^2$
26. $x(n + 1) - x(n - 1) + x(n - 2) - nx + 3x$
27. $x^2 - x(a + x) + x - x(a - 1) + (a + 1 + x)x - x(3 - a)$
28. $4b + a(x - 3) + a(7 - x) + a - (a + b) \cdot 4$

29. $a(a + b) + c(a + b) - ac - c^2 + b(a + b) - bc - 2ab$
30. $a^2 + c(b - c) + ac - b(b - c) + a(b - c) - ab - 2bc$
31. a) $3a - (7b - a) + 15(2a + b)$ b) $-w(7 - 8v) + 3w(2 - 3v)$
 c) $7(17 + 8\frac{4}{5}x) - (x + 7) \cdot 17$
 d) $3(2x + 11y) + 7y(1 + 5x) + y(-2 + x)$
32. $a(a^2b + a^3c^2) + a^3(2b + ac^2)$
33. $x^2(5a + bx) + 3a(2b + x^2) + 2b(a + 2x^3) - 8a(x^2 + b)$
- 34. $p^2q(2pr + 4r^3 + 7rq^2) + 2r(p^2q^3 + 5p^2q + 2p^2qr^2) -$
 $- 2pqr(p^2 + pq^2 + 5p)$
35. a) $0,5x(0,8x - 0,6y) - 0,4y(1,5y - 2,5x)$
 b) $2\frac{1}{2}a(4\frac{2}{5}a - 6\frac{1}{4}b) - 2\frac{2}{5}b(3\frac{3}{4}a + 8\frac{1}{3}b)$
 c) $6\frac{2}{7}b(4\frac{1}{5}b - 11\frac{2}{3}a) - 4\frac{4}{9}a(3\frac{3}{8}b - 5\frac{2}{5}a)$
36. a) $u(v - w) + v(w - u) + w(u - v)$
 b) $x(y + z) - y(x + z) + z(x - y)$
 c) $5xy + 3y(2x + 1) - 6x(y - 2) + 2(x - y)$
37. a) $4pqr - (8prs - 11qrs) - (7prq - 6rsq + 4srp) \cdot (-2)$
 b) $2a(9b - 6c) - b(6a + 15c) + 3c(4a - 2b)$
 c) $2ab(5 + c) - 7b(3a + ac) - ab(18c - 7 \cdot 3c)$
38. a) $6p(3pq + q^2) - 2q(9pq - 3p^2) + 8pq(p - q)$
 b) $\frac{4}{3}a^2b^2(15c^2 - 5) + \frac{3}{2}ab(8ab - 10abc^2) - 7a^2b^2$
39. a) $3(\frac{5}{6}xy - \frac{2}{3}y) - \frac{2}{3}x(-\frac{9}{8}y - 1\frac{1}{2}) + 26y(\frac{1}{13} - \frac{1}{8}x)$
 b) $3\frac{1}{7}a(1\frac{3}{11}a - b + 7) - 3\frac{1}{6}b(\frac{18}{95}b - \frac{129}{133}a - 6) -$
 $- (63\frac{7}{9}b - \frac{4}{9}ab + 6\frac{2}{9}a^2) \cdot \frac{9}{14} + \frac{3}{5}b^2$
 • c) $(-0,2x)^2(-0,2 + x) - 0,2x^2(0,2^2 - x) - (-0,2x)^3$

3.3.5 Schachtelklammern

Bei komplizierteren Termen kommt es vor, daß in Klammern Klammern stehen, in denen womöglich wieder Klammern stehen usw.

Beispiel: $4a - (-1 + 3(2a - (a + 3)))$.

Wenn es dabei zu unübersichtlich wird, verwendet man auch verschiedene Klammerarten, z. B. runde und eckige Klammern.

Beispiel: $4a - (-1 + 3[2a - (a + 3)])$.

Mit Hilfe unserer Klammerregeln können wir jetzt solche »Schachtelklammern« auflösen. Man kann dabei verschieden vorgehen. Wir empfehlen die

- Regel 111.1:** 1. Vereinfache, falls möglich, in jeder Klammer.
 2. Löse die innerste Klammer auf.
 3. Vereinfache wieder.
 4. Wiederhole 2. und 3. so lange, bis keine Klammern mehr vorhanden sind.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
 1) \quad 4a - (-1 + 3[2a - (a + 3)]) &= 4a - (-1 + 3[2a - a - 3]) = \\
 &= 4a - (-1 + 3[a - 3]) = \\
 &= 4a - (-1 + 3a - 9) = \\
 &= 4a - (-10 + 3a) = \\
 &= 4a + 10 - 3a = \\
 &= a + 10.
 \end{aligned}$$

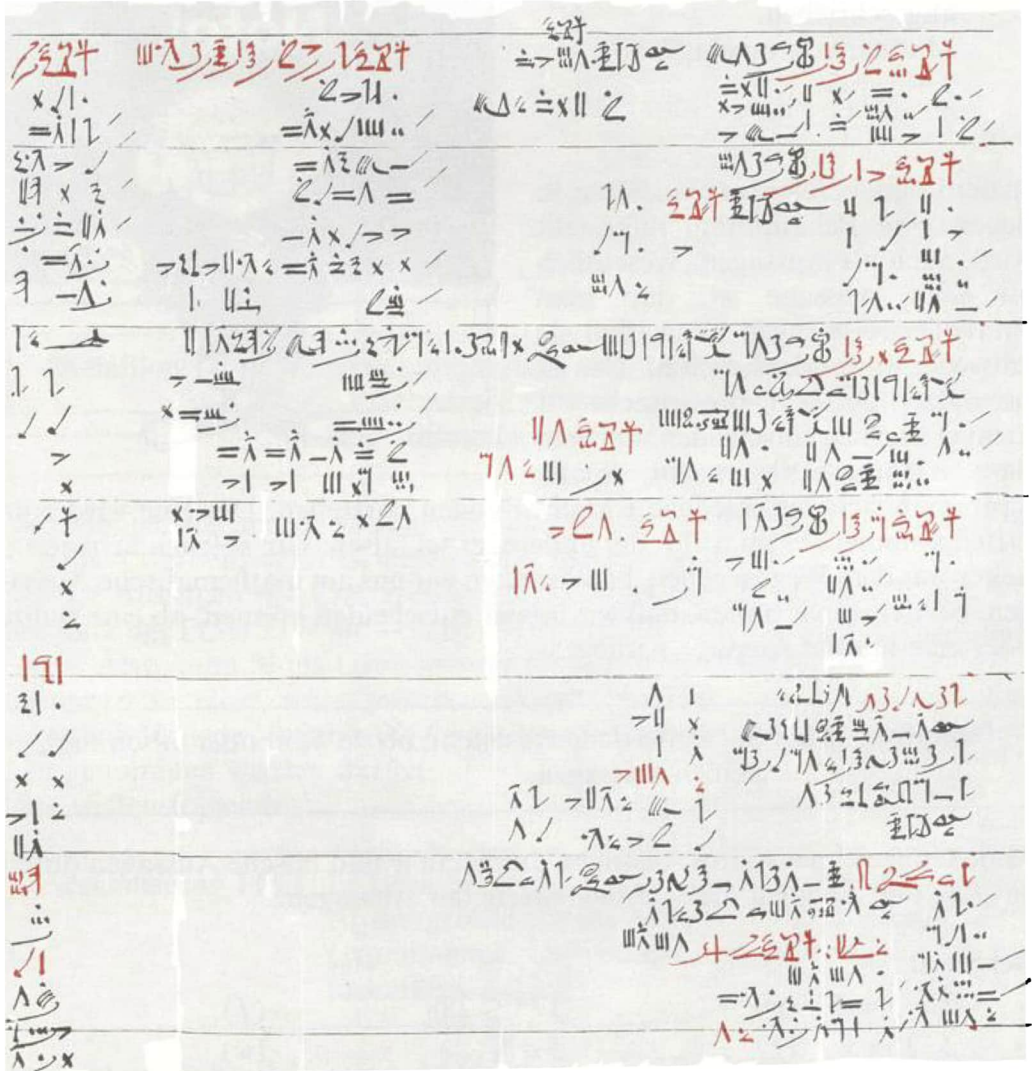
$$\begin{aligned}
 2) \quad (3x - (7yz + 3z(-3 + 2x - 5y) - 6xz))(-5) - (8z - 15x) &= \\
 = (3x - (7yz - 9z + 6xz - 15yz - 6xz))(-5) - 8z + 15x &= \\
 = (3x - (-8yz - 9z))(-5) - 8z + 15x &= \\
 = (3x + 8yz + 9z)(-5) - 8z + 15x &= \\
 = -15x - 40yz - 45z - 8z + 15x &= \\
 = -53z - 40yz.
 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $(3a^2 + 4b) - (5a^2 - (2a^2 - b))$
 b) $(7a^3 - 2b) - (4a^3 - (4b - (3a^3 - b)))$
2. a) $5x^3 - xy - (3xy - (2x^3 + y^2 + 6xy)) - (3xy - (2x^3 + xy))$
 b) $2xy - 4x^3 - (2xy - (3x^3 - y^2 - 8xy)) - (-2y^2 - (8xy + 10x^3))$
3. a) $3a^4 - b^2 + (5ab - (2a^4 - 3b^2)) - (8ab - (b^2 - 2a^4))$
 b) $6ab - a^4 - (2ab - (4a^4 - b^2)) + (-4a^4 - (7ab - 4b^2))$
4. a) $-(-a + (7b - (21c - 9)))$ b) $-[-(-3u + 5v - 7w)]$
 c) $-[(x - 3y) - (-2x + y + 1)]$
 d) $-\{ -[(6m - 9n) - (-p - q)] - (1 + 5m + 10n) \} - (1 + p + q)$
5. $0,5u[3v^3 + (2,4uv - 1)] + 3[2u - 1,8uv(u + v^2)]$
- 6. $((11 - 16x + 17x^2) \cdot 3x - 5x(6 - 10x + 10x^2)) \cdot 3x -$
 $- 4x((x + 2)x + 1) + 1$

- 7. $((2a + 3b)2b - (3a - 2b)3a)ab^2 + (3a(2a - 3b) - 2b(3a + 2b))a^2b$
- 8. $5a(6 - 4(3 - a)) - (5a(6a - 11) - 4(3a^2 - 6a + 6)) - 24$
- 9. $6[((3x - 1)2 - 4(x + 5)) \cdot 5 - 4(2 - 2(3 - 3(4 - 5x)))] - 20(39x - 58) - 19$
- 10. $3a((5a - 4) \cdot 5 - (2a - 7 + 2a^2) + 6a(2a - 4)) - 5a^2(3a - 4)$
- 11. $((a^2 + ab + b^2)b - a(a^2 + ab + b^2))b - a(b^3 + 2ab^2 - a^2b) + b^3(b + a)$
- 12. $(a^2 + 2b(2b - 3a))a - b(b^2 - 2a(2a - b)) + b^3 - a^3$
- 13. $2(3 - 4(5 - 6(7 - x))) - 7(6 - 5(4 - 3(2 - x)))$
- 14. $2x(4x((3x - 2) \cdot 5 - 3(2x - 4)) + 6(3x - 1)) - 3x^2(x(20 - x) + 20)$
- 15. $a(25a - ((4a + 3) \cdot 4 - 15a) \cdot 2a + 3(a + 4(a - 2))) + 4(a(a + a(a + 1)) + a)$
- 16. $(\frac{7}{15}x - 3x^2) - (3x^2 - \frac{1}{3}x - (2x^2 - 2 - 4x + \frac{1}{3}) + (\frac{4}{5}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{13}{15}))$
- 17. $x^2 - (\frac{1}{4}x + 3x^2 - (2x^2 - 3x - (4x^2 - \frac{1}{5}x + 2) + \frac{3}{4}x^3) - \frac{1}{5}x^3) + (\frac{61}{20}x - \frac{19}{20}x^3) + 2$
- 18. $\frac{1}{3}ab^2 - (6ac^2 - c^3 - 2a(c^2 - \frac{1}{8}b^2) + ab^2 - \frac{5}{3}c^3) + \frac{11}{12}ab^2 + 4ac^2$
- 19. $\frac{1}{4}b^3 + 4a^2 - (\frac{3}{2}(3bc - 4) - (a^2 - bc - 2ab) + \frac{8}{9}bc) - \frac{1}{4}b^3 - 6 - \frac{11}{18}bc$
- 20. $\frac{1}{4}b^2(7ab - \frac{1}{2}a^2) - \frac{3}{4}b(ab(b - \frac{5}{6}a) + \frac{1}{10}ab^2) - \frac{1}{40}ab^2(20a + 37b)$

4 Gleichungen



Ausschnitt aus dem *Papyrus Rhind* mit den Aufgaben 24 bis 31

4 Gleichungen

4.1 Aussagen und Aussageformen

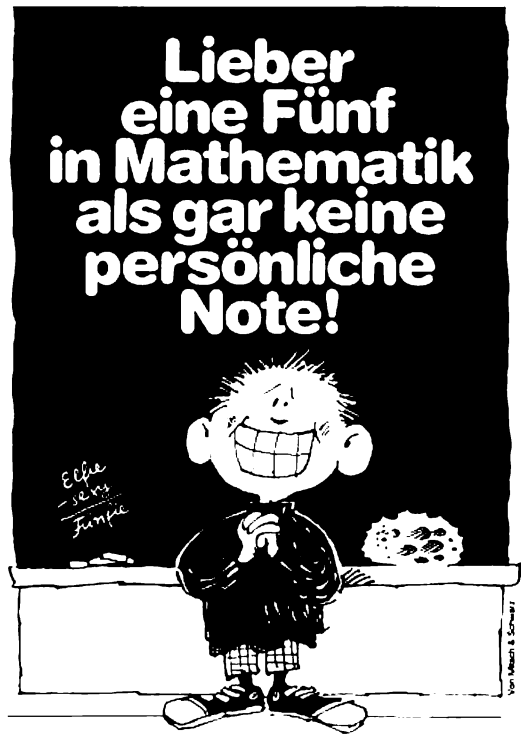
4.1.1 Definitionen

Jeder Mensch stellt in seinem Leben viele Behauptungen auf.

Beispiele:

Ich bin heute müde.
Ich habe nicht von Karl
abgeschrieben.
Mathematik macht Spaß.
 $2 + 3 = 5$.
 $2 \cdot 3 = 5$.

In der Logik bezeichnet man Sätze, in denen eine Behauptung aufgestellt wird, auch als Aussagen. Wesentlich an einer Aussage ist, daß man sinnvollerweise sagen kann, daß sie entweder wahr oder falsch ist. Das ist bei Sätzen der Umgangssprache oft nicht einfach zu entscheiden. Bei dem Satz »Mathematik macht Spaß« kann man sich verschiedene Entscheidungen vorstellen. Der eine wird zum Urteil kommen, er sei wahr, der andere, er sei falsch. Um solchen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, beschränken wir uns auf mathematische Aussagen, bei denen wir hoffen, daß wir immer entscheiden können, ob eine wahre oder eine falsche Aussage vorliegt.



Definition 114.1: Sätze, bei denen feststeht, ob sie wahr oder falsch sind, heißen **Aussagen**.

Man kennzeichnet wahre Aussagen durch ein w und falsche Aussagen durch ein f . w und f heißen die **Wahrheitswerte** der Aussagen.

Beispiele:

$2 + 3 = 5$	(w)	$17^2 \leq 288$	(f)
$2 \cdot 3 = 5$	(f)	$5 \in \mathbb{N}$	(w)
$17^2 = 289$	(w)	$0,5 \in \mathbb{N}$	(f)
$17^2 < 290$	(w)	39 ist eine Primzahl	(f)

Ersetzt man in einer Aussage eine oder mehrere Zahlen durch Variablen oder durch einen Term mit Variablen, dann entsteht eine Aussageform.

Ersetzt man in einer Aussageform alle Variablen durch geeignete Zahlen, dann entsteht wieder eine Aussage, die wahr oder falsch ist.

Beispiele:

Aussageform	Ersetzung	Aussage	Wahrheitswert
x ist eine Primzahl	$x = 39$ $x = 41$	39 ist eine Primzahl 41 ist eine Primzahl	f w
$x + 3 = 5$	$x = \frac{1}{2}$ $x = 2$	$\frac{1}{2} + 3 = 5$ $2 + 3 = 5$	f w
$x^2 < 25$	$x = -8\frac{1}{3}$ $x = 0$	$(-8\frac{1}{3})^2 < 25$ $0^2 < 25$	f w
$\frac{5x - y}{3} + y^2 = 5$	$x = 1; y = 3$ $x = 3; y = 0$	$\frac{5 \cdot 1 - 3}{3} + 3^2 = 5$ $\frac{5 \cdot 3 - 0}{3} + 0^2 = 5$	f w

Definition 115.1: Sätze mit mindestens einer Variablen, die durch geeignete Ersetzungen aller Variablen zu Aussagen werden, heißen **Aussageformen**.

Die Menge, aus der die geeigneten Ersetzungen für die jeweilige Variable genommen werden, heißt **Grundmenge G** dieser Variablen.

Bei der Aussageform »Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 36 und x ist 4«, kurz »ggT(36; x) = 4«, sind nur natürliche Zahlen geeignete Ersetzungen für x . Also kann $\mathbb{N}$ als Grundmenge für x gewählt werden.

Kommen in einer Aussageform mehrere Variablen vor, dann muß man natürlich für jede Variable die Grundmenge angeben, aus der die Einsetzungen genommen werden dürfen.

Wir treffen folgende

Vereinbarung 115.1: Ist keine besondere Grundmenge angegeben, dann ist die größte jeweils bekannte Zahlenmenge die Grundmenge. Das ist zur Zeit die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Man interessiert sich bei einer Aussageform natürlich besonders für die Ersetzungen, bei denen eine wahre Aussage entsteht. Solche Ersetzungen heißen **Lösungen** der Aussageform.

Definition 116.1: Die Menge aller Ersetzungen, die eine Aussageform zu einer wahren Aussage machen, heißt **Lösungsmenge L** der Aussageform.

Beispiele:

Aussageform	Lösungsmenge
x ist eine Primzahl ·	$\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$
$x + 3 = 5$	$\{2\}$
$x^2 < 25$	Menge aller Zahlen zwischen -5 und 5 , also $\{x \mid -5 < x < 5\}$

Außerhalb der Mathematik treten Aussageformen oft als Formulare auf. Die Variablen werden dann meist durch Leerstellen gekennzeichnet.

Beispiel:

Der Schüler
besucht im Schuljahr die Klasse
des Euler-Gymnasiums.

Aussageformen können also sehr verschieden aussehen. Für die Mathematik sind die wichtigsten Aussageformen Gleichungen und Ungleichungen.

Aufgaben

- Formuliere 3 wahre und 3 falsche Aussagen aus dem Alltag.
- Formuliere 3 wahre und 3 falsche mathematische Aussagen.
- Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie Aussagen sind, und gib gegebenenfalls den Wahrheitswert an.
 - Mathematik ist schwierig.
 - Caesar wurde am 15. März 44 v. Chr. ermordet.
 - Nachts ist es kälter als draußen.
 - Wagadugu ist die Hauptstadt von Mali.
 - Wie alt bist du? f) Rot ist schöner als Blau.
- Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie Aussagen sind, und gib gegebenenfalls den Wahrheitswert an.
 - $(1\frac{1}{3})^2 = 1\frac{1}{9}$
 - $\frac{5}{18} - \frac{7}{24} = -\frac{1}{72}$
 - $-7 > \frac{1}{2}$
 - $-8 \leq -8$
 - Die Winkelsumme im Viereck ist 720° .
 - $-3 \cdot 7\frac{1}{3} + 12$
 - $3,2 \text{ ha} = 32 \text{ a}$
 - Die Differenz zweier Primzahlen ist eine Primzahl.
 - Die Differenz zweier Primzahlen ist keine Primzahl.
 - 193 ist eine Primzahl.

5. Führe in den folgenden Aussageformen die angegebenen Ersetzungen durch und entscheide, ob sie zu einer wahren oder falschen Aussage führen.
- a) $\frac{7}{3}x - 2 = -1$; $x \in \{0, 1, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, -3\}$
- b) $7,5 - x < 2x$; $x \in \{-2, -\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 100\}$
- c) $\frac{\frac{x}{3} + \frac{x}{5}}{\frac{x}{3} - \frac{x}{5}} = 2x$; $x \in \{3, -5, 2\}$
- d) $(x - 3) \cdot (x + 5) > 0$; $x \in \{-4, -6, 0\}$
- e) x ist Teiler von 360; $x \in \{1, 2, \dots, 10\}$
6. Gib zu den gegebenen Grundmengen die Lösungsmenge der folgenden Aussageformen an.
- a) $x < 5$; $G = \mathbb{N}_0$
- b) $z^2 < 5$; 1) $G = \mathbb{N}_0$ 2) $G = \mathbb{Z}$
- c) $\frac{1}{10} \leq \frac{2}{n} < \frac{1}{3}$; $G = \mathbb{N}$
- d) t ist Teiler von 36; 1) $G = \mathbb{N}_0$
2) $G = \text{Menge aller Primzahlen}$
- e) n ist teilerfremd* zu 18; $G = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$
- f) $\text{ggT}(36; x) = 4$; $G = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$
- g) $\text{kgV}(y; 18) = 72$; $G = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$
- 7. Gib die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$ an.
- a) $x - x = 0$ b) $x - 2x = 0$
- c) $x - 1 = x$ d) $\frac{x}{x} = 1$ e) $\frac{x}{x} = 0$
8. Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$.
- a) $|x| = 4$ b) $|x| = -4$ c) $|x| < 4$
- d) $|x| > 4$ • e) $|x| = x$ • f) $|x| = -x$

4.1.2 Existenzaussagen und Allaussagen

Wir haben oben eine Möglichkeit kennengelernt, wie man aus Aussageformen Aussagen gewinnt, nämlich dadurch, daß man alle Variablen durch geeignete Zahlen (oder gegebenenfalls auch Wörter) ersetzt. Es gibt aber noch eine zweite Möglichkeit, aus Aussageformen Aussagen zu machen.

$x + 0 = x$ ist eine Aussageform, ihre Lösungsmenge ist $\mathbb{Q}$. Diesen Sachverhalt können wir auch so ausdrücken:

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $x + 0 = x$.

* Beachte: 2 Zahlen heißen **teilerfremd**, wenn ihr ggT gleich 1 ist.

Dieser Satz enthält zwar eine Variable, ist aber keine Aussageform mehr, weil durch den vorangestellten Redeteil »Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt:« entscheidbar wird, ob der Satz wahr oder falsch ist; d. h., der Satz ist eine Aussage.

Man kann noch durch einen zweiten Redeteil eine Aussageform zu einer Aussage machen, nämlich durch »Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß ...«.

Zum Beispiel erhält man aus der Aussageform $x^2 = 9$ die Aussage:

Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß $x^2 = 9$.

Diese Aussage ist wahr, weil z. B. $(-3)^2 = 9$.

Allgemein legen wir fest:

Definition 118.1: Eine Aussage, die den Redeteil »Es gibt ein ...« bzw. »Es existiert ein ...« enthält, heißt **Existenzaussage**. Eine Aussage, die den Redeteil »Für alle ...« enthält, heißt **Allaussage**.

All- und Existenzaussagen können natürlich auch falsch sein:

»Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt $x + 1 = 5$ « ist falsch, weil z. B. $2 + 1 = 5$ falsch ist.

»Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß $x + 1 = x$ « ist falsch, weil für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt, daß $x + 1 > x$ ist.

Die wichtigsten Beispiele für wahre All- und Existenzaussagen sind die Rechengesetze für die rationalen Zahlen, wie z. B. das Kommutativgesetz der Addition, das ausführlich geschrieben so lautet:

Für alle $a \in \mathbb{Q}$ und alle $b \in \mathbb{Q}$ gilt $a + b = b + a$.

Aufgaben

- 1. Entscheide bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr sind.
 - a) Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - a = a$.
 - b) Für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt: $y^2 > 0$.
 - c) Für alle $n \in \mathbb{N}$: $2n > n$.
 - d) Für alle $x \in \mathbb{Q}$: $2x > x$.
- 2. Entscheide bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr sind.
 - a) Es gibt ein $a \in \mathbb{Q}$, so daß $7a = a$.
 - b) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $n < 1$.
 - c) Es gibt ein $z \in \mathbb{Z}$: $z < 1$.
 - d) Es gibt ein $u \in \mathbb{Q}$: $u^2 < 0$.

4.2 Lösen von Gleichungen

4.2.1 Gleichung als Information über eine unbekannte Zahl

4.2.1.1 Ein historisches Beispiel

Der Hyksoskönig* A'USER-RE APOPHIS (um 1590–um 1550 v. Chr.) herrschte schon seit 33 Jahren über Ägypten. Im 4. Monat der Überschwemmungsjahreszeit dieses 33. Regierungsjahres schrieb AHMOSE** auf eine Papyrusrolle*** ein altes Buch der Mathematik ab, das aus der Zeit des Königs AMENEMHET III. (1842–1794 v. Chr.) stammte.**** Die Rolle wurde im 19. Jh. wieder aufgefunden und im Jahre 1858 in Luxor an den schottischen Juristen Alexander Henry RHIND (1833–1863) verkauft. Sie ist 33 cm breit und 5,34 m lang und beidseitig beschrieben (Abb. 113). Der Text der Rolle – sie heißt heute *Papyrus Rhind* – beginnt mit einer großen Versprechung:



»Regeln zur Erforschung aller Dinge, zur Erkenntnis alles Seienden, aller dunklen Geheimnisse«.

Abb. 119.1 Papyrusrolle (um 1250 v. Chr.) Kairo, Ägyptisches Museum

Dann kommen Divisionstabellen, an die sich 84 Aufgaben anschließen. Diese entschleiern zunächst das Geheimnis der Zahlen und der Bruchrechnung, dann lösen sie Probleme aus der Geometrie und der Lehre von den Körpern, und schließlich beschäftigen sie sich mit Fragen aus der Landwirtschaft. Aufgabe 24 – man liest den Text von rechts nach links – lautet:

« $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} = 19$ »

Übersetzung: Haufen, sein Siebentel zu ihm, es macht 19.

Gemeint war: Ein Siebentel einer unbekannten Zahl wird zu dieser Zahl hinzugefügt; man erhält dann 19.

* Hyksos bedeutet »Fürst aus der Fremde«. Mit diesem Wort bezeichneten die ägyptischen Geschichtsschreiber später die aus Westasien stammenden fremden Herrscher, die Ägypten von ca. 1650–ca. 1540 v. Chr. regiert hatten.

** sprich Achmose, zu deutsch *Mondgeborener*. Oft liest man auch die gräzisierte Form AHMES.

*** Zu Beginn des 3. Jahrtausends v. Chr. gelang es den Ägyptern, aus dem faserigen Mark des dreieckigen Halms der bis zu 6 m hohen Doldenpflanze *Cyperus papyrus*, die in den Sumpfbereichen wuchs, einen Beschreibstoff herzustellen, der das Leder verdrängte. Wegen des hohen Verbrauchs wurde die Papyrusstaude immer seltener, so daß sich König EUMENES I. (263–241 v. Chr.) von Pergamon genötigt sah, feingegerbtes Leder wieder als Schreibmaterial zu verwenden, das sog. Pergament. Die Papyrusstaude ist heute in Ägypten ausgerottet.

**** Der Pharao AMENEMHET III. war so klug, von den Bürgern nur die Steuern zu verlangen, die sie auch aufbringen konnten. Dazu ließ er jedes Jahr den höchsten Pegelstand des Nils messen und daraus die zu erwartende Ernte berechnen. Dann erst setzte er die Jahressteuern fest.

4.2.1.2 Die Unbekannte

Die Ägypter waren vermutlich die ersten, die für eine unbekannte Zahl eine eigene Bezeichnung verwendeten. Im *Papyrus Rhind* schrieben sie dafür – in Hieroglyphen* . Ausgesprochen wurde dieses Wort »aha«;

seine Bedeutung war eigentlich *Haufen*.

Es war sicherlich ein ganz großer Einfall in der Entwicklung der Mathematik, für eine Zahl, die man noch gar nicht kennt, ein eigenes Wort zu verwenden. Denn nun konnte man, da sie ja einen Namen hatte, von ihr reden, mit ihr Überlegungen, ja sogar Rechnungen ausführen.

Diese großartige Idee taucht auch bei den Babyloniern und bei den Indern auf, im 4. Jh. v. Chr. finden wir sie bei griechischen Mathematikern. THYMARIDAS nennt die gesuchte Zahl genauso, wie wir es heute machen, nämlich *unbekannt* ἀόριστον (aóriston). Bei AL-CHARIZMI (um 780–nach 847) heißt die unbekannte Zahl شيء = schai = ein Etwas.

Nun haben wir oben auf Seite 15 gesehen, daß es sich immer mehr eingebürgert hatte, bekannte Zahlen durch Buchstaben wiederzugeben, wenn man allgemeine Rechenregeln angeben oder einen allgemeingültigen Rechenweg beschreiben wollte. Was lag also näher, als auch für die unbekannte Zahl einen Buchstaben zu verwenden? Aber welchen? Recht einleuchtend ist eigentlich die Idee von François VIÈTE (1540–1603), der 1591 vorschlug, für die unbekannte Zahl den Vokal A zu verwenden, und, falls es mehrere unbekannte Zahlen gibt, eben die Vokale der Reihe nach zu benützen, nämlich A, E, I, O, U und Y. Bekannte Zahlen sollten durch Konsonanten bezeichnet werden, also durch B, G, D usw. (Siehe Abbildung 120.1, Nr. 5.)

Durchgesetzt hat sich aber eine Schreibweise, die 1637 der große französische Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (1596 bis 1650) ohne weitere Begründung im Abschnitt *La Géométrie* seines *Discours de la méthode* einführte.

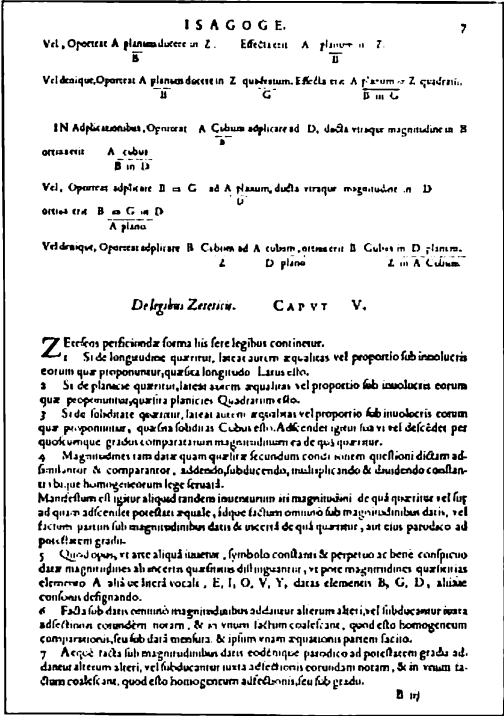


Abb. 120.1 Seite 7r der *In artem analyticam isagoge* (1591) des François VIÈTE (1540–1603)

* Entstanden aus den griechischen Wörtern ἱερός (hierós) = *heilig* und γλύφειν (glýphein) = *einmeißeln*. Sprich hi-erós, Hi-eroglyphe.

Er bezeichnete die unbekannten Zahlen mit x , y und z , die bekannten dagegen mit den ersten Buchstaben des Alphabets, also mit a , b , c usw.

Wir wollen es genauso halten!

Falls du mehr über die geschichtliche Entwicklung wissen willst, dann lies weiter!

Die BABYLONIER (um 1800 v. Chr.) nannten die unbekannte Zahl 𐎶𐎵 = *usch*

= *Länge*, die INDER (vor 300 v. Chr.)

यावत् तावत् = *yavat-tavat* = *wieviel-soviel*.

Erst um 250 n. Chr. kamen griechische Mathematiker, unter ihnen DIOPHANT, (siehe Aufgabe 166/15), auf die Idee, für die unbekannte Zahl, die sie kurz *Zahl* = $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*arithmós*) nannten, eine Abkürzung einzuführen, nämlich ζ' , über deren Entstehung heute noch die Gelehrten streiten. Die einen meinen, sie sei der letzte Buchstabe von $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$, zusammen mit einem Akzent. Andere hingegen meinen, das Zeichen sei eine Verschmelzung der beiden ersten Buchstaben dieses Worts. Wie dem auch sei, die Abkürzung

war erfunden! Fast 400 Jahre später – wir wissen es sogar ganz genau, es war im Jahre 628 – kam auch in Indien jemand auf die Idee, das lange *yavat-tavat* abzukürzen: In seinem in Versen abgefaßten Mathematiklehrbuch schrieb BRAHMAGUPTA (um 598 bis nach 665) einfach या = *ya* dafür.

Die ARABER lernten von den Indern die Mathematik, und die EUROPÄER des Mittelalters lernten sie bei den Arabern. Da das *schai* des AL-CHARIZMI im Arabischen auch *Sache* bzw. *Ding* heißt, übersetzte man es mit dem lateinischen *res*, gelegentlich auch mit *causa*, woraus im 15. Jh. das italienische *cosa* wurde. Daraus wurde im Deutschen *Coß* als Bezeichnung für das, was wir heute *Algebra* nennen.

Bis zum x für die Unbekannte war aber noch ein langer Weg. Einige Araber kürzten das *schai* mit *s* ab, LUCA PACIOLI (um 1445–1517) mit *co*, seine *cosa*. Das tat man auch in Deutschland, so z. B. in den vor 1486 geschriebenen Abhandlungen, die im *Codex Dresden C80* zusammengebunden sind: Der Verfasser der *Deutschen Algebra* von 1481 schreibt *g* für *cosa*, der der *Lateinischen Algebra* zunächst $\mathfrak{C}$, das ist ein *c* und ein *o*, das in ein Schwänzchen ausläuft. Immer mehr aber krümmt er sein *c* nach links und gibt ihm schließlich sogar eine Spitze: $\mathfrak{C}$. Den Plural *cosae* kennzeichnet er durch ein kleines hochgestelltes *e*: $\mathfrak{C}^e$. In der Form $\mathfrak{C}$ führt es Christoff RUDOLFF (um 1500–vor 1543) in seiner 1525 gedruckten *Coß* als Symbol für die Unbekannte ein. Er liest es aber – wie andere auch – als *radix*, vermutlich, weil es einem handschriftlichen *r* ähnelt, vor allem aber, weil GERHARD VON CREMONA (1114–1187) mit *radix* das arabische *dschidr* (= Wurzel) übersetzt hat, das AL-CHARIZMI auch für die unbekannte Größe verwendete.* Gelegentlich wurde es übrigens auch *res* gele-



Descartes

Abb. 121.1 René DESCARTES, latinisiert zu CARTESIUS (31.3.1596 La Haye-Des-cartes/Touraine – 11.2.1650 Stockholm)

* Siehe Lösungsheft Seite 4f.

sen.* Vor allem durch die *Arithmetica integra* (1544) Michael STIFELS (1487?–1567) fand $\mathfrak{x}$ seine Verbreitung. DESCARTES hat es noch benutzt, doch 1637 entschied er sich anders: das x als Zeichen für die Unbekannte war geboren.

Mit der Schreibweise von DESCARTES lautet die Aufgabe 24 des *Papyrus Rhind*

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

Diese Gleichung stellt eine Information über eine unbekannte Zahl x dar. Unsere Aufgabe besteht nun darin, auf Grund dieser Information die Zahl x zu entlarven. Da man annimmt, daß durch eine solche Information die unbekannte Zahl x bestimmt ist, nennt man eine solche Gleichung auch **Bestimmungsgleichung** für x . Zahlen, die für x in Frage kommen, heißen **Lösungen** der Gleichung.

Die Methoden, die zur Bestimmung von x , d.h. zur Lösung der Gleichung führen, werden wir im Abschnitt 4.2.2 kennenlernen.

Aufgaben

- Schreibe als Bestimmungsgleichung für x die folgenden Aufgaben aus dem *Papyrus Rhind*:
 - Aufgabe 25*: Haufen, seine Hälfte zu ihm, es macht 16.
 - Aufgabe 26*: Haufen, sein Viertel zu ihm, es macht 15.
 - Aufgabe 27*: Haufen, sein Fünftel zu ihm, es macht 21.
- Im Museum der Schönen Künste in Moskau wird ein mathematischer Papyrus aufbewahrt, der noch etwas älter als der *Papyrus Rhind* ist. Er heißt *Moskauer Papyrus*. Er ist nur 8 cm breit und 5,44 m lang und enthält 25 Probleme, von denen allerdings die meisten fast unleserlich sind. Schreibe als Bestimmungsgleichung für x die folgenden Aufgaben aus dem *Moskauer Papyrus*:
 - Problem 25*: Haufen, zweimal genommen, und noch ein Haufen, es ergibt 9.
 - Problem 19*: Haufen, eineinhalb davon, zusammen mit 4, es ergibt 10.
- Ich denke mir eine Zahl, vervierfache sie und subtrahiere dann 6. Wenn ich das Ergebnis halbieren, erhalte ich 10.
Schreibe eine Bestimmungsgleichung für die gedachte Zahl z an.

4.2.1.3 Die Gleichung als Aussageform

$x + \frac{1}{7}x = 19$ ist ein Satz, der eine Variable enthält; also ist er nach Definition 115.1 eine Aussageform. Deuten wir eine Bestimmungsgleichung als Aussageform, so besteht unsere Aufgabe darin, alle Zahlen zu finden, durch die man die Variable x ersetzen kann, so daß dabei aus der Aussageform eine *wahre* Aussage wird. Kurz, wir suchen die Lösungsmenge L der Aussageform. Im *Papyrus Rhind* wird behauptet, die Lösungsmenge der Aussageform $x + \frac{1}{7}x = 19$ sei $\{16\frac{5}{8}\}$.

* Andere Wissenschaftler meinen aber, $\mathfrak{x}$ sei ursprünglich aus dem Worte *res* entstanden, dann aber doch als *cosa* gelesen worden.

4.2.1.4 Die Probe

Wenn man eine Zahl gefunden hat, von der man vermutet, daß sie eine Lösung der Gleichung ist, dann kann man diese Vermutung durch eine Probe bestätigen oder widerlegen. Dazu ersetzt man die Variable x durch die gefundene Zahl und berechnet *getrennt* die **linke Seite** und die **rechte Seite** der Gleichung. Dabei versteht man unter *linker Seite* einer Gleichung denjenigen Term, der links vom Gleichheitszeichen steht. Wir schreiben dafür kurz LS. Der rechts vom Gleichheitszeichen stehende Term heißt *rechte Seite*, kurz RS. Machen wir also in $x + \frac{1}{7}x = 19$ die Probe für $x = 16\frac{5}{8}$:

$$\begin{aligned} \text{LS} &= 16\frac{5}{8} + \frac{1}{7} \cdot 16\frac{5}{8} = & \text{RS} &= 19. \\ &= 16\frac{5}{8} + \frac{1}{7} \cdot \frac{133}{8} = \\ &= 16\frac{5}{8} + \frac{19}{8} = \\ &= 16\frac{5}{8} + 2\frac{3}{8} = \\ &= 19. \end{aligned}$$

Wir stellen fest: $\text{LS} = \text{RS}$, also ist $16\frac{5}{8}$ eine Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$, was man kurz durch $16\frac{5}{8} \in L$ ausdrücken kann.

Schon im *Papyrus Rhind* ist diese Probe ausgeführt!

Aufgaben

1. *Aufgabe 28 des Papyrus Rhind* lautet in moderner Form $(x + \frac{2}{3}x) - \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x) = 10$.
AHMOSE gibt als Lösung $x = 9$ an. Mach die Probe!
2. *Aufgabe 30 des Papyrus Rhind* lautet in moderner Form $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10$.
AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{23}$ an. Mach die Probe!
3. *Aufgabe 29 des Papyrus Rhind* lautet in moderner Form $\frac{1}{3}[x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(x + \frac{2}{3}x)] = 10$.
AHMOSE gibt als Lösung $x = 13\frac{1}{2}$ an. Mach die Probe!
- 4. *Aufgabe 32 des Papyrus Rhind* lautet in moderner Form $x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2$.
AHMOSE gibt als Lösung $x = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{228}$ an.* Mach die Probe!
5. Für die Bestimmungsgleichung $1\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{8} + \frac{2}{3}x$ werden die Zahlen 2 , $\frac{3}{4}$ und $-\frac{3}{4}$ als Lösungen angeboten. Mach die Probe und entscheide, welche der Zahlen wirklich Lösungen sind.

* Die Ägypter gaben mit Ausnahme von $\frac{2}{3}$ alle anderen Brüche nur als Summe von **Stammbrüchen**, das sind Brüche mit dem Zähler 1, an.

6. Im Algebrabuch des AL-CHARIZMI finden wir eine Aufgabe, die in heutiger Schreibweise als Bestimmungsgleichung so lautet: $x^2 + 15 = 8x$. Er gibt als Lösungen die Zahlen 3 und 5 an. Sind das Lösungen?
7. Für die Bestimmungsgleichung $x^3 + x^2 = 2x - 2x^3$ werden folgende Lösungen angeboten: 1, -1 , $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 0. Entscheide durch Proben, welche dieser Zahlen zu der Lösungsmenge gehören.

4.2.1.5 Was kann eine Information leisten?

Wir haben oben gesehen, daß $16\frac{5}{8}$ eine Lösung der Gleichung $x + \frac{1}{7}x = 19$ ist. Man wird sich also fragen müssen, ob es noch weitere Lösungen dieser Gleichung gibt oder ob $16\frac{5}{8}$ die einzige Lösung ist.

Falls es keine weitere Lösung gibt, dann wird durch die Information $x + \frac{1}{7}x = 19$ eindeutig eine Zahl x bestimmt. Gibt es aber mehr als eine Lösung, dann ist die Information mehrdeutig.

Allgemein unterscheidet man je nach der Anzahl der Lösungen verschiedene Arten von Informationen.

- 1) Eine Information ist **eindeutig**, wenn sie genau eine Zahl x bestimmt. Die Lösungsmenge der Aussageform enthält dann eine einzige Zahl. Unser Informant hat die unbekannte Zahl x genau beschrieben.

Beispiel:

$3x = 2$ ist eine eindeutige Information über x . Denn wegen Satz 72.1 ist $\frac{2}{3}$ die Zahl, die durch sie eindeutig bestimmt ist.

Die Lösungsmenge der Aussageform $3x = 2$ ist die Menge $\{\frac{2}{3}\}$.

- 2) Manchmal reicht die Information nicht zur eindeutigen Bestimmung der unbekannten Zahl x aus. Der Informant hat die Zahl x also nicht genau genug beschrieben. Somit gibt es mehrere Möglichkeiten für x . Man sagt, die Information sei **mehrdeutig**. Die Lösungsmenge einer solchen Aussageform besteht dann aus mindestens zwei Zahlen.

Beispiel:

$$x^2 = 64.$$

Die Information reicht nicht aus, die unbekannte Zahl x eindeutig zu ermitteln. Wir können nämlich sagen, daß sowohl $+8$ als auch -8 Lösungen sind.

- 3) Je mehr Möglichkeiten es für die unbekannte Zahl x gibt, desto wertloser ist die Information zur Bestimmung der unbekannten Zahl x . Ganz schlimm wird es, wenn uns der Informant an der Nase herumführt und wir für die unbekannte Zahl x *jede* Zahl nehmen können. Die Information ist also allgemein gültig. Wir merken uns

Definition 124.1: Eine Gleichung heißt **allgemeingültig**, wenn *jede* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$$x + 1 = 1 + x.$$

Jede Zahl ist Lösung dieser Gleichung. Also ist sie allgemeingültig.

Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = 1 + x$ ist die Menge $\mathbb{Q}$.

- 4) Andererseits kann es aber vorkommen, daß es solch eine Zahl, wie sie durch die Information beschrieben wird, gar nicht gibt. Der Informant hat uns also angeschwindelt!

Wir merken uns

Definition 125.1: Eine Gleichung heißt **widersprüchlich**, wenn *keine* Zahl Lösung der Gleichung ist.

Beispiel:

$$x + 1 = x.$$

Es gibt keine Zahl x , deren Wert sich nicht ändert, wenn man 1 dazu zählt. Also ist die Gleichung widersprüchlich.

Die Lösungsmenge der Aussageform $x + 1 = x$ ist die leere Menge $\{ \}$, für die man auch $\emptyset$ schreibt.

Aufgaben

Bei den folgenden Aufgaben soll entschieden werden, welche Art von Gleichung vorliegt. Gib jedesmal die Lösungsmenge an.

1. a) $x + 3 = -18$ b) $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ c) $-3\frac{1}{2}x = 3\frac{1}{2}$ d) $x^2 = 256$
 e) $x^4 = 16$ f) $\frac{x}{x} = 3$ g) $\frac{x}{x} = 1$ h) $\frac{x}{x} = 0$
2. a) $-0,02x + 0,02 = 0,02$ b) $-0,02x + 0,02 = -0,02x$
 c) $-2x^2 = -2,88$ d) $x + x = 2x$ e) $x^2 = -4$
- 3. a) $\frac{x+1}{x} = 1$ b) $\frac{x+1}{x} = 0$ • c) $9x^2 = 1024$
 d) $x(x+3) = 0$ e) $3 \cdot (x+2) = 3x+6$

4.2.2 Äquivalenzumformungen von Gleichungen**4.2.2.1 Äquivalenz von Gleichungen**

Der einfachste Gleichungstyp ist von der Bauart $x = 7$. Eine Lösung dieser Gleichung liest man direkt ab, nämlich 7. Weitere Lösungen gibt es nicht, da man mit keiner von 7 verschiedenen Zahl an Stelle von x eine wahre Aussage erhält. Die Information über die gesuchte Zahl ist also eindeutig. Die gesuchte Zahl ist 7.

Wir halten fest: Gleichungen der Bauart $x = a$ sind eindeutige Informationen über die gesuchte Zahl x . Die gesuchte Zahl x heißt a , die Lösungsmenge der Gleichung $x = a$ ist die Menge $\{a\}$.

Normalerweise sind Gleichungen viel komplizierter, z. B. $13x - 7 = 5x + 4$. Um solche Gleichungen lösen zu können, formt man sie so lange um, bis man auf den einfachen Typ $x = a$ kommt. Bei diesem Umformen dürfen aber keine Lösungen hinzukommen und auch keine Lösungen verlorengehen. Umformungen, die dies leisten, bekommen einen besonderen Namen.

Definition 126.1: Zwei **Gleichungen** heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Gleichungsumformung heißt **Äquivalenzumformung**, wenn die ursprüngliche Gleichung und die neue Gleichung äquivalent sind.

Unser Ziel ist es nun, Gleichungsumformungen aufzufinden, die als Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen benutzt werden können.

Aufgaben

Stelle bei den folgenden Gleichungen fest, ob sie äquivalent sind. Sind Gleichung I und Gleichung II äquivalent, dann kannst du kurz $I \Leftrightarrow II$ schreiben.

1. a) I. $x = 3$; II. $13x = 39$ b) I. $x + 1 = 2$; II. $x + 9 = 10$
 c) I. $x + 1 = 2$; II. $x + 10 = 9$ d) I. $x^2 = 1$; II. $x = 1$
2. a) I. $\frac{5}{3}x = \frac{3}{5}$; II. $x^2 = \frac{9}{25}$ b) I. $x = x$; II. $0 \cdot x = 0$
 c) I. $10\frac{3}{4} + x = 9\frac{7}{8} + x$; II. $\frac{x}{x} = 2$ d) I. $x - x = 0$; II. $1 = 1$

4.2.2.2 Äquivalenzumformung durch Termersetzung

Ersetzt man in einer Gleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil nach Definition 89.1 bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiele:

1) $2x + 5 - x = 1 - x - 8$

Vereinfacht man die Terme auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung, so erhält man die äquivalente Gleichung

$$x + 5 = -7 - x.$$

$$2) \quad 3(x - 5) = \frac{14 + 8x}{4}$$

Unter Anwendung der Rechengesetze erhalten wir die äquivalente Gleichung

$$3x - 15 = \frac{7}{2} + 2x.$$

Durch Termersetzungen können wir die Gleichungen also vereinfachen. Zur vollständigen Lösung brauchen wir allerdings noch weitere Äquivalenzumformungen. Wir werden sie im folgenden kennenlernen. Weil es lästig ist, jedesmal durch einen Zwischentext zu versichern, daß man gerade eine Äquivalenzumformung durchgeführt hat, treffen wir die

Vereinbarung 127.1: Die durch Äquivalenzumformungen entstandene neue Gleichung schreiben wir ohne Kommentar unter die alte Gleichung. Zur Verdeutlichung kann man auch zwischen die äquivalenten Gleichungen das Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$ setzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} -2(3 - 5(x - 1) + 4) - 8 &= \frac{7}{3}(x - (9 - 2x)) \\ -2(7 - 5x + 5) - 8 &= \frac{7}{3}(x - 9 + 2x) \\ -2(12 - 5x) - 8 &= \frac{7}{3}(3x - 9) \\ -24 + 10x - 8 &= 7x - 21 \\ 10x - 32 &= 7x - 21. \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber haben wir die äquivalenten Gleichungen im letzten Beispiel so geschrieben, daß die Gleichheitszeichen immer untereinander zu stehen kamen. Dadurch erkennt man gut, wie sich die linke Seite und wie sich die rechte Seite jeweils verändert haben. Gleichungen in dieser Form untereinanderzuschreiben geht natürlich nur, wenn man schon weiß, wieviel Platz die linke Seite in der neuen Zeile brauchen wird. Du wirst es im Heft nicht immer so einrichten können. Eins mußt du aber immer tun: Jede neue Gleichung muß in eine neue Zeile geschrieben werden. Auch bei einfachen Termumformungen darfst du nie in derselben Zeile mit einem $=$ -Zeichen weiterschreiben, auch wenn es noch so bequem wäre.

Beachte: Bei Gleichungen gibt es in jeder Zeile nur *ein* Gleichheitszeichen!

Beispiel:

Schreibe **nicht** $x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,
sondern **richtig** mit **zwei** Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Aufgaben

- Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.
 - $x + 0,5x = \frac{7}{2}x - 2x$
 - $\frac{3}{2} \cdot (5x - 2) = 1 - 4$
 - $\frac{-15x - 6}{3} + 1,5 = 3x - (3 : \frac{3}{8})x$
 - $x - 3(2\frac{1}{6} : 1\frac{6}{7}) = 0$
 - $x(x - 2(x + 5)) = -10x - x^2$
 - $3\frac{1}{2} \cdot [2 - x(1\frac{1}{2} + 2x) + x(0,5 + 2x)] = 7$
- Die unbekannte Zahl muß nicht immer x heißen! Vereinfache die folgenden Gleichungen und gib die Lösungsmenge an.
 - $[(5 - 3 : 4) \cdot 6 - 22] \cdot y = 0$
 - $[(5 - 3 : 4) \cdot 8 - 34]z = 0$
 - $(0,25 - 0,35 \cdot \frac{5}{7}) \cdot u = 1,55 \cdot \frac{20}{31} - 2$
 - $y \cdot (9 : 4 \cdot 6 - 9 : 6 \cdot 4 - 4 : 6 \cdot 9 - 0,5) = 6 : 4 : 9$
 - $14\frac{1}{2}z - 8\frac{1}{3}z - 5\frac{1}{6}z = 5\frac{1}{6} - 8\frac{1}{3} - 14\frac{1}{2}$
- Vereinfache und gib die Lösungsmenge an.
 - $[2,6 + (1\frac{1}{2} - 2\frac{4}{5}) \cdot 2]x = \frac{1}{2}[2 - \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - 1,25]$
 - $[\frac{7}{3} \cdot 4\frac{1}{14} - (2,64 - 4,14)(-\frac{19}{3})]y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

4.2.2.3 Äquivalenzumformung durch Addition von Termen

Bei der Gleichung $x - 3\frac{1}{2} = 7\frac{3}{4}$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:

Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man sie sich eingesetzt denkt, links und rechts vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Addiert man nun auf beiden Seiten der Gleichung Gleiches, dann ergibt sich auf beiden Seiten die gleiche Summe. Um also zu erreichen, daß die unbekannte Zahl x alleine auf der linken Seite übrigbleibt – wir sagen kurz, wir wollen x **isolieren** –, müssen wir in unserem Beispiel auf beiden Seiten $3\frac{1}{2}$ addieren. Dieses Vorgehen deuten wir dadurch an, daß wir hinter die Gleichung zwei senkrechte Striche setzen und dahinter $+3\frac{1}{2}$ schreiben. Nun führen wir es vor:

$$\begin{aligned}
 x - 3\frac{1}{2} &= 7\frac{3}{4} && \parallel + 3\frac{1}{2} \\
 (x - 3\frac{1}{2}) + 3\frac{1}{2} &= 7\frac{3}{4} + 3\frac{1}{2} \\
 x - 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} &= 11\frac{1}{4} \\
 x &= 11\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Die gesuchte Zahl ist also $11\frac{1}{4}$.

Die obigen Überlegungen können wir verallgemeinern auf Terme, da Terme wie Zahlen behandelt werden. Es gilt

Satz 129.1: Die Addition desselben Terms auf *beiden* Seiten einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung; kurz

$$\begin{aligned} T_1 = T_2 & \parallel + T \\ \Leftrightarrow T_1 + T = T_2 + T \end{aligned}$$

Zur **Begründung** überlegen wir uns:

1) Ist a eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$, dann gilt

$$T_1(a) = T_2(a), \text{ also auch}$$

$$T_1(a) + T(a) = T_2(a) + T(a).$$

Damit ist a auch eine Lösung der durch Termaddition umgeformten Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$. Es gehen also bei der Umformung durch Termaddition sicherlich keine Lösungen verloren.

2) Ist umgekehrt b eine Lösung der umgeformten Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$, dann gilt

$$T_1(b) + T(b) = T_2(b) + T(b).$$

Addiert man auf beiden Seiten $-T(b)$, dann erhält man

$$T_1(b) = T_2(b).$$

Das heißt aber, daß b auch eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$ ist. Es kann bei der Umformung durch Termaddition also auch keine Lösung hinzugekommen sein.

Da somit bei der Termaddition weder Lösungen hinzugekommen sind noch verlorengegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $T_1 + T = T_2 + T$ überein; die Umformung durch Addition von Termen ist also eine Äquivalenzumformung.

In der Sprache der Mengenlehre läßt sich die obige Überlegung kurz so schreiben, wenn L die Lösungsmenge von $T_1 = T_2$ und L' die von $T_1 + T = T_2 + T$ bedeuten und das Zeichen $\Rightarrow$ als Abkürzung für »daraus folgt« steht:

$$\left. \begin{array}{l} 1) a \in L \Rightarrow a \in L', \text{ d.h. } L \subset L' \\ 2) b \in L' \Rightarrow b \in L, \text{ d.h. } L' \subset L \end{array} \right\} \Rightarrow L = L'$$

Zum Einüben eine etwas anspruchsvollere Gleichung:

Beispiel 1:

$3x - 7 = 19 + 2x$. Wir wollen x auf der linken Seite isolieren. Dazu muß 7 auf beiden Seiten addiert und $2x$ auf beiden Seiten subtrahiert werden,

d.h., auf beiden Seiten muß der Term $T = 7 - 2x$ addiert werden. Die Rechnung sieht also so aus:

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= 19 + 2x & || + 7 - 2x \\ (3x - 7) + (7 - 2x) &= (19 + 2x) + (7 - 2x) \\ 3x - 7 + 7 - 2x &= 19 + 2x + 7 - 2x \\ x &= 26. \end{aligned}$$

Mit einiger Übung kannst du durch Kopfrechnen gleich von der 1. zur 4. Zeile kommen!

Es ist nicht günstig, die unbekannte Zahl auf der linken Seite zu isolieren, wenn dort die unbekannte Zahl weniger oft vorkommt als auf der rechten Seite. In einem solchen Fall isoliert man die unbekannte Zahl eben auf der rechten Seite!

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} -3,5x + 1,4 &= -2,5x + 0,1 & || + 3,5x - 0,1 \\ 1,3 &= x \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $25 + x = 42$ b) $x + 56 = 38$ c) $2,65 + x = 2\frac{13}{20}$
 d) $\frac{5}{7} = x + \frac{3}{4}$ e) $-28,1 = 16,5 + x$ f) $17\frac{5}{16} = \frac{52}{3} + x$
 g) $\frac{2}{3} - 1,5 + 4 \cdot \frac{3}{7} = z - \frac{1}{14}$ h) $-8\frac{5}{36} + 2\frac{7}{24} = z - \frac{5}{27}$
2. a) $2x - 1 = x - 1$ b) $16,3x - \frac{1}{8} = 17,3x + 2\frac{1}{4}$
 c) $\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = 1,75 + 1,75x$ d) $\frac{5}{14}x = -\frac{9}{14}x$
 e) $\frac{13}{8}x + 7 = 3 + 1,625x$ f) $-2,5x - 0,8145 = -1,804 - 3,5x$
3. a) $1 - [2 - (x - 5)] = 5 - (19 - 9)$ b) $126 + 7x = \left(\frac{x}{5} - 44\right) \cdot 30$
 c) $7,5 - 2,4x = (3,1x - 9) \cdot 2 - 9,6x$ d) $\frac{x}{2} - \frac{x}{8} = 2 + \frac{x}{4} - \frac{7}{8}x$
 e) $\frac{4}{7}x + \frac{2}{3}x - 13 = \frac{1}{6}x + \frac{1}{14}x$ f) $\frac{4}{5}x + 18 = \frac{x}{3} - 0,2x + 2\left(1 - \frac{x}{6}\right)$
4. a) $11x - 2(x - 1) = 5(2x - 3) - (1 + 2x)$
 b) $x + 2[x + 3(x + 4)] = 15 + 8x$
 c) $1 - 5(4x + 11) = 5[3x - 7(2x - 1)] + 6(6x - 14)$
 d) $1,5(3 - 5x) - [4(2,8 + 0,3x) - 10] + 9x = 0,3x$
 e) $[(x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}] \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} - \frac{5}{4}x$

4.2.2.4 Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit Termen

Bei der Gleichung $8x = 15$ sind beide Seiten schon so einfach wie möglich. Wir benötigen nun eine neue Äquivalenzumformung, die diese Gleichung auf die Form $x = a$ bringt. Dazu überlegen wir:

Wenn eine Gleichung eine Lösung besitzt, dann steht, wenn man diese sich eingesetzt denkt, rechts und links vom Gleichheitszeichen dieselbe Zahl. Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen Faktor, dann stellt sich auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis ein. Um bei unserer Gleichung x zu isolieren, müssen wir also beide Seiten mit $\frac{1}{8}$ multiplizieren oder beide Seiten durch 8 dividieren.

Wir führen es vor:

$$\begin{array}{ll} 8x = 15 & \parallel \cdot \frac{1}{8} \quad \text{oder} \quad 8x = 15 \quad \parallel : 8 \\ (8x) \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{8} & \frac{8x}{8} = \frac{15}{8} \\ 8x \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{8} & x = \frac{15}{8} \\ x = \frac{15}{8} & \end{array}$$

Die gesuchte Zahl ist also $\frac{15}{8}$.

Die obigen Überlegungen können wir verallgemeinern auf Terme, da Terme wie Zahlen behandelt werden. Es gilt

Satz 131.1: Die Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einem Term ist eine Äquivalenzumformung, falls der Term nicht null ist.

$$\begin{array}{l} \text{Kurz:} \quad T_1 = T_2 \quad \parallel \cdot T \quad (T \neq 0) \\ \Leftrightarrow T_1 \cdot T = T_2 \cdot T \end{array}$$

Zur **Begründung** überlegen wir uns:

1) Ist a eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$, dann gilt

$$T_1(a) = T_2(a), \quad \text{also auch}$$

$$T_1(a) \cdot T(a) = T_2(a) \cdot T(a).$$

Damit ist a auch eine Lösung der durch Termmultiplikation entstandenen Gleichung. Es gehen also bei der Umformung durch Termmultiplikation sicher keine Lösungen verloren.

2) Ist umgekehrt b eine Lösung der umgeformten Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$, dann gilt

$$T_1(b) \cdot T(b) = T_2(b) \cdot T(b).$$

Multipliziert man beide Seiten mit $\frac{1}{T(b)}$, was natürlich nur für $T(b) \neq 0$ möglich ist, dann erhält man

$$T_1(b) = T_2(b).$$

Das heißt aber, daß b auch eine Lösung der Gleichung $T_1 = T_2$ ist. Es kann also bei der Umformung durch Termmultiplikation auch keine Lösung hinzugekommen sein, wenn $T(b) \neq 0$ gilt.

Da somit bei der Termmultiplikation weder Lösungen hinzugekommen sind noch verlorengegangen sind, stimmt die Lösungsmenge der Gleichung $T_1 = T_2$ mit der Lösungsmenge der Gleichung $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$ überein; die Umformung durch Multiplikation mit Termen ($\neq 0$) ist also eine Äquivalenzumformung.

Zum Einüben zwei etwas anspruchsvollere Gleichungen.

Beispiel 1: $7\frac{1}{3}x = -5\frac{1}{2}$

Zum Rechnen verwandeln wir die gemischten Zahlen besser in gemeine Brüche:

$$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2}$$

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit $\frac{3}{22}$, um x zu isolieren:

$$\frac{22}{3}x = -\frac{11}{2} \quad || \cdot \frac{3}{22}$$

$$x = -\frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 22}$$

$$x = -\frac{3}{4}.$$

Beispiel 2: $27,2 = -0,06x \quad || : (-0,06)$

$$-\frac{27,2}{0,06} = x$$

Weil $a = b$ dasselbe bedeutet wie $b = a$, vertauschen wir der leichteren Lesbarkeit halber die beiden Seiten und vereinfachen weiter.

$$x = -\frac{2720}{6}$$

$$x = -\frac{1360}{3}.$$

Aufgaben

1. a) $2x = 5$

b) $\frac{1}{2}x = 3$

c) $\frac{2}{3}x = 9$

2. a) $5x = -2$

b) $2\frac{1}{2}x = -1$

c) $-3\frac{1}{2} = \frac{1}{4}x$

3. a) $-x = 7,1$

b) $(-2)x = 1$

c) $-0,1x = 0,01$

4. a) $-2,5x = 5\frac{5}{7}$

b) $3 - \frac{1}{5} = -\frac{5}{11}x$

c) $\frac{x}{27} = \frac{1}{18}$

5. a) $9 : 14 = \frac{x}{84}$

b) $-80 = x : 6$

c) $\frac{2x}{5} = 3 \cdot 2\frac{1}{6}$

6. a) $\frac{x}{7} = 4$

b) $-\frac{x}{2} = 7,8$

c) $-\frac{9}{8} = -\frac{8x}{9}$

7. a) $\frac{5}{6}x = -\frac{5}{4} + 1$

b) $x : 17,5 = 5,25 \cdot 0,01$

c) $\frac{x}{49,6} = 4,3 : 18,6$

8. a) $\frac{7}{9}(-x) = \frac{1}{-3}$

b) $(-x) : 1024 = \frac{17}{128}$

c) $\frac{-2,198}{-0,7} = -3,14(-x)$

4.2.2.5 Mehrfache Äquivalenzumformungen

In den meisten Fällen wird man nicht mit einer der drei im letzten Abschnitt behandelten Äquivalenzumformungen allein auskommen. Fast immer braucht man alle drei! Betrachten wir etwa die Gleichung

$$97 + 2x - (19x - 15) + 3 = 107 - 7x - (11x - (5 + 3x)).$$

Zuerst vereinfachen wir beide Seiten durch Termersetzungen:

$$100 + 2x - 19x + 15 = 107 - 7x - (11x - 5 - 3x)$$

$$115 - 17x = 107 - 7x - (8x - 5)$$

$$115 - 17x = 107 - 7x - 8x + 5$$

$$115 - 17x = 112 - 15x.$$

Durch Addition von Termen sorgen wir jetzt dafür, daß alle x -Glieder auf der einen und alle von x freien Glieder auf der anderen Seite stehen. Der Bequemlichkeit halber achten wir darauf, daß der Faktor bei x positiv ist.

$$115 - 17x = 112 - 15x \quad || +17x - 112$$

$$3 = 2x.$$

Durch Vertauschen der Seiten erhalten wir die gewohnte Form

$$2x = 3.$$

Zum Abschluß isolieren wir x durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$.

$$2x = 3 \quad || \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}.$$

Die drei Äquivalenzumformungen reichen aus, um jede Gleichung, in der die Unbekannte nicht in zweiter oder gar in höherer Potenz vorkommt, zu lösen. Weil $x^1 = x$ gilt, sagt man auch: Die Unbekannte kommt in der Gleichung nur in der ersten Potenz vor. Für solche Gleichungen hat man einen eigenen Namen eingeführt.

Definition 133.1: Eine Gleichung, in der die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, heißt **lineare Gleichung**.*

Den Weg zur Lösung einer linearen Gleichung fassen wir zusammen in

Regel 133.1: Eine lineare Gleichung löst man durch Äquivalenzumformungen in der folgenden Reihenfolge:

1. Vereinfachen
2. Addieren
3. Multiplizieren

* Zum ersten Mal 1694 belegt als *égalité linéaire* bei Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Nouveaux Éléments des Mathématiques ou Principes généraux de Toutes les Sciences, qui ont les grandeurs pour objet*.

Zur Einübung der Regel betrachten wir noch ein komplizierteres

Beispiel: $3\frac{3}{4}x - (1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x) = -3\frac{3}{4} + (1\frac{1}{2}x - (1\frac{1}{2} - x)) + 3\frac{3}{5}$
 $3\frac{3}{4}x - 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x = -\frac{3}{20} + (1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2} + x)$
 $3\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{20} + (2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})$
 $3\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2} = -\frac{3}{20} + 2\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$
 $3\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2} = -1\frac{13}{20} + 2\frac{1}{2}x \quad || -2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$
 $\frac{3}{4}x = -\frac{3}{20} \quad || \cdot \frac{4}{3}$
 $x = -\frac{1}{5}$

Manchmal vereinfacht sich die Rechnung, wenn man als allerersten Schritt die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, um die Brüche zu beseitigen.

Beispiel:

$$\frac{5x + 12,5}{7} - \frac{5(0,4 - 2x)}{6} = \frac{9x - 0,7}{4} - \frac{7x - 1,1}{3} + 2 \quad || \cdot 84$$

$$12(5x + 12,5) - 14 \cdot 5 \cdot (0,4 - 2x) = 21(9x - 0,7) - 28(7x - 1,1) + 2 \cdot 84$$

$$60x + 150 - 28 + 140x = 189x - 14,7 - 196x + 30,8 + 168$$

$$200x + 122 = -7x + 184,1 \quad || +7x - 122$$

$$207x = 62,1 \quad || : 207$$

$$x = 0,3$$

Aufgaben

1. a) $8 + 6x = 20$ b) $-3 + 5x = 17$ c) $4x - 12 = 44$
2. a) $1 = 13 - 6x$ b) $10 = 24 - 7x$ c) $-9x - 144 = -36$
3. a) $19 - x = 100 - 10x$ b) $3x + 1 = 5x - 3$ c) $19 - 2x = 8x - 16$
4. a) $4x + 15 - x = 54$ b) $5x + 2 + x = 26$ c) $-x + 8 - 3x = 0$
5. a) $17 = 17 - 12x + 3x$ b) $31 + x = 111 - 7x$ c) $21 + 8x = 30 + 5x$
6. a) $11x - 41 = 10x - 31$ b) $5x - 5 = 15 + 3x$ c) $4x - 16 = 19 - 3x$
7. a) $8x + 22 - x = 100 - 11x - 42$
 b) $9x = 7x + 16 + 5x + 7 - 10x$
 c) $19 + 3x - 23 = 10 + 2x - 34$
8. a) $29x + 39 - 34x = 49 - 20x - 10$
 b) $4x + 4 - 7x = -8x + 2 + 5x - 4$
9. a) $8x - 17 + x = 9x - 13 - 4$
 b) $9x - 16 = 10x - 9 - 4x + 5$
10. a) $0 = 14 - 8x + x - 3x + x + 4$
 b) $9x + 34 - 6x - 33 + 2x = 9$

11. a) $11x = 8x + 15 + 6x + 6 - 10x$
 b) $27x - 9 - 17x + 10 = 45 + 5x - 4$
12. a) $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x - 4 = 0$
 b) $18 = 93 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1$
13. a) $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 8 = 0$
 b) $6x - 13 + x - 1 + 12x - 15 - 10x + 2 = 0$
14. a) $19x = 5x + 2 + 5x + 3 + 7x + 3 + 6$
 b) $36 + 12x - 19 - x + 10 - 8x = 0$
15. a) $21x - 21 - 7x + 7 = 7x + 21 + 14x - 7 - 19x + 26x$
 b) $121x + 49 - 234x + 3 - x = x - 56 - 115x + 108$
16. a) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} + \frac{x}{8} - \frac{x}{6} + \frac{x}{2} + \frac{x}{12} = 11$ b) $\frac{7}{3}x + \frac{7}{6} - \frac{7}{2}x + \frac{1}{5} = 3 - \frac{14}{5}x$
17. a) $(-0,7)^3 + 5,94x - 9,02 + 2,63x + 11,31 = 6,24x - 6,263 - 1,11$
 b) $0 = 12,9x - 1,45x - 3,29 - 0,99x - 11x + 0,32$
18. a) $2x - \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2 - \frac{2}{3}x$
 b) $-0,5x + 9 = \frac{3}{2}x + 4 - \frac{6}{5}x + 0,2$
19. a) $5x - 9 = 3x + 7$ b) $2x + 11 = 8x - 10$
20. a) $126 + 7x = \frac{1}{5}x - 44$ b) $7,5 - 2,4x = 3,1x - 9$
21. a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x = 2 + \frac{1}{4}x$ b) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{3}x - 13 = \frac{1}{6}x$
22. a) $\frac{4}{5}x + 18 = \frac{1}{3}x + 0,2x + 2$ b) $1,5x - 8,5 = \frac{19}{24}x$
23. a) $\frac{0,64}{3}x + 0,5x - 0,43 = x$ b) $\frac{2,75}{9}x - \frac{x}{0,72} + x + 6 = 0$
24. a) $\frac{2x + 5}{3} = x + 4$ b) $\frac{8 + 12x}{19} = \frac{6x - 7}{4}$
25. a) $\frac{3x - 6}{5} - \frac{1 - 15x}{2} = 1$ b) $\frac{13x + 8}{6} - \frac{1}{3} = \frac{3}{5} + \frac{6 - 11x}{15}$
26. a) $\frac{5x}{36} + \frac{1}{3} = 0$ b) $\frac{3x - 7}{5} = 4$
 c) $5 = \frac{28 + 0,7x}{7} + 0,85$ d) $3 + \frac{8 - 11x}{6} = \frac{2}{3}$
27. a) $4(2x - 3) = 2(3x - 4)$ b) $(25 + 3x) \cdot 7 = (7 + 25x) \cdot 3$
28. a) $13 - 3(5 - x) = 7(x + 1) - 13$
 b) $5(2x - 300) - (150 - x) \cdot 2 = 3x$

29. a) $3(1,8 + 3x) - 26 = 9 - 5(1,5x - 2)$
 b) $0,75(7x - 16) - 0,25(9x - 60) + 1 = 0$
 c) $5\left(\frac{x}{3} - 26\right) - 3\left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{x}{2} - 14$
 d) $\frac{1}{7}\left(1 - \frac{2}{3}x\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}(2 - x)$
30. a) $3x + (9 - x) = 13$ b) $5x - (1 + 2x) = 11$
 c) $-(8 - x) + 2x = 10$
31. a) $9x - 2 - (7 - 2x) = 13$ b) $x - (2x - (3x - 1)) = 101$
 c) $12x = -12 - (-12x - 12)$ d) $5x - (3 - 4x) = 3^2 \cdot (x + 4)$
32. a) $9 - (5x + 2) + (10 + 8x) - (3x - 18) = x + 20$
 b) $93 + 2x - (19x - 15) = 100 - 7x - (11x - (5 + 2x))$
33. a) $(25 + 12x) - (10x - 11) = (12 + 6x) - ((12x + 13) - (10x - 11))$
 b) $-2x - (4 + (2x - 3)) = (30 - 18x) - (2x - (3x - 5))$
34. a) $5(5 + 2x) = 9 + 4x$ b) $0 = 4(10 - 2x) - 3(x - 5)$
 c) $3(9 - x) = 5(x - 9)$ d) $2^3(x - 3^2) = 3^2(x + 2^3)$
35. a) $1(4x - 3) + 3(9 - 18x) = 10(1 - 3x)$
 b) $7(3x - 7) + 5(x - 3) + 4(17 - x) = 103 - 11x$
36. a) $13x - 7(11 - x) + 11 = 4x - 3(20 - x) + 7x$
 b) $8(2x - 3) - 5(2x - 8) = 32 - 4(1 - 3x) + 8x$
37. a) $3\frac{1}{3}x - 4\frac{1}{4} = 5\frac{1}{5}x - 6\frac{1}{6}$ b) $0,1x - 0,2 = 0,3x - 0,4$
38. a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - \frac{3}{7} = -\frac{38}{7}$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}x$
39. a) $10x = 7\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{5}x + 1 + 5x$
 b) $x = \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x - \frac{3}{5}x + \frac{5}{6}$
40. a) $\frac{4x}{3} - \frac{3x}{2} + \frac{4x}{5} + \frac{1}{6} = \frac{9}{5} - x$
 b) $-37\frac{13}{30} = \frac{x}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x}{6} - 1\frac{5}{12}x + 2\frac{4}{5} - 3\frac{9}{10}x + 98$
41. a) $47x - 43 = 73 + 41,5x + 7,2x + 16,6$
 b) $0 = 1,45x - 2,7x - 0,6x + 0,5x - 7,8 - 1,2$
42. a) $18x - 7,52 - 2,35x = 5,381 - 2,9x - 0,58 + 13x$
 b) $1,45x + 3,29 = 12,9x - 0,99x - 11x + 0,32$
43. a) $\frac{2}{3}(x - 5) - x = 1 + \frac{2}{3}(11 - 2x)$
 b) $\frac{1}{4}(3x - 16) = 2x - 3(5 + \frac{3}{4}x) + \frac{2}{3}(4 - x)$

44. a) $3x(x+7) - x(3x+7) + 70 = 0$

b) $4x(6-3x) + 6x(2x+1) = 15$

45. $(\frac{3}{7}x - \frac{7}{3}) \cdot 21x - (33x + 5) \cdot \frac{3}{11}x = 277$

46. $0,32x(1,25x - 10) + (6,3 - 0,8x) \cdot 0,5x + 1 = 0$

47. a) $x - (x - (x - (x - 1) - 1) - 1) = 0$

b) $1 - 2(x - 3(x - 4(x - 5))) = 11(11 - 2x) + 2x$

48. a) $6x - \frac{x-3}{2} = 5x + \frac{3+x}{2}$ **b)** $\frac{-x+3}{2} + 6x = \frac{x-3}{2} + 5x$

Die Aufgaben 49 bis 51 sollen den Einfluß von Rundungen zeigen.

49. a) $3,14x - 6,28 = -9,577$ **b)** $3,14x - 6,28 = -9,58$

c) $3,1x - 6,3 = -9,6$ **d)** $3x - 6 = -10$

50. a) $-1,27x + 9,51 = 9,88 - 1,22x$ **b)** $-1,3x + 9,5 = 9,9 - 1,2x$

c) $-x + 10 = 10 - x$

51. a) $3,14x - 7,28 = -8,193$ **b)** $3,1x - 7,3 = -8,2$ **c)** $3x - 7 = -8$

52. $25\left(\frac{2}{15}x + \frac{1}{3}\right) - x + 2\left(\frac{x}{6} - 15\right) - 36x = 0$

53. $x + 2[x + 3(x + 4)] = 15$

54. $\left[\left(x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right] \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$

55. $1 - 5(4x - 11) = 5[3x - 7(2x - 1)]$

56. $1,5(3 - 5x) - [4(2,8 + 0,3x) - 10] + 9x = 0$

57. $1 - (2 + 3 \cdot [(3x - 8) - 2(8 - 3x)]) = 5(1 - 2x) - 2$

58. $\left(\left[(x+1) \cdot 2 + \frac{1}{2}\right] \cdot 3 + \frac{1}{3}\right) \cdot 4 + \frac{1}{4} = \left(\left[(x+1) \cdot 2 + \frac{x}{2}\right] \cdot 3 + \frac{x}{3}\right) \cdot 4 + \frac{x}{4}$

59. $5 \cdot \frac{x-2}{9} - (2x-18) \cdot 3 = \frac{7}{3} \cdot \frac{9x+10}{5}$

60. $\frac{3}{2} \cdot \frac{3x+5}{6} - \frac{2(2x-3)-24}{5} = 1\frac{1}{4} - \frac{(x-270) \cdot \frac{1}{5}}{9}$

61. $\frac{\frac{4}{5}(x+4)}{6} - 3\left(\frac{3x-1}{4} - x\right) = 2x - 11$

62. $\frac{7\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)}{16} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4x+2,5}{8} - 3\left(1 - \frac{x}{64}\right) + \frac{17}{32} \cdot (x-2) = \frac{1}{192}$

****4.2.2.6. Die Äquivalenzumformungen des AL-CHARIZMI oder was bedeutet Algebra?**

Du kennst nun die 3 Äquivalenzumformungen, mit deren Hilfe du lineare Gleichungen lösen kannst. Wir fassen sie kurz zusammen in der Regel »Vereinfachen – Addieren – Multiplizieren«. Diese Äquivalenzumformungen waren von Anbeginn an das Rüstzeug der Mathematiker, die Gleichungen lösen wollten. Ausführlich hat sie AL-CHARIZMI in seinem *al-Kitab al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa'-l-muqabala* beschrieben.

Zuerst rät AL-CHARIZMI dem Leser, so wie wir es dir geraten haben, in einer Gleichung die Nenner zu beseitigen, indem man jedes Glied mit dem Hauptnenner multipliziert. Die Gleichung ist dann einfacher geworden. Dann ersetzt er auf jeder Seite kompliziertere Terme durch einfachere, so wie wir es auch machen. So entsteht z. B.

$$8x + 11 = 13 - 7x.$$

AL-CHARIZMI empfindet das Wegnehmen von $7x$ von der Zahl 13 als etwas, was die 13 verletzt. Er möchte es wiedergutmachen. So wie ein Arzt ein ausgerenktes Glied durch Einrichten wieder voll funktionsfähig macht, so will er die 13 wieder unverletzt sehen. Dazu braucht er bloß auf beiden Seiten $7x$ zu addieren. Diese Äquivalenzumformung des Wiederherstellens nennt AL-CHARIZMI *al-dschabr*. Nun weißt du, was das Wort *al-dschabr*, aus dem *Algebra* entstanden ist, mathematisch bedeutet.

Durch *al-dschabr* wird aus der obigen Gleichung also die äquivalente Gleichung

$$15x + 11 = 13.$$

Jetzt betrachtet AL-CHARIZMI beide Seiten, d. h., er stellt sie einander gegenüber. Dabei sieht er, daß auf der linken Seite 11 zu $15x$ addiert wird. Er stellt sich vor, daß 11 auch rechts als Summand auftritt, also $13 = 2 + 11$. Durch Subtraktion von 11 auf beiden Seiten kann er diesen Überschuß ausgleichen. Diese Äquivalenzumformung des Vergleichens und Ausgleichens nennt AL-CHARIZMI *al-muqabala*. Nun weißt du auch, was das zweite Wort im Titel seines Algebrabuchs für einen mathematischen Sinn hat. Durch *al-muqabala* wird also aus der letzten Gleichung die äquivalente Gleichung

$$15x = 2.$$

Nun muß noch x isoliert werden, d. h., $15x$ muß auf $1x$ zurückgeführt werden. Dies geschieht, indem man die Gleichung durch 15 dividiert; man erhält $x = \frac{2}{15}$. Diese Äquivalenzumformung des Zurückführens auf $1x$ nennt AL-CHARIZMI *al-radd*.

Wäre man aber auf eine Gleichung der Form $\frac{1}{4}x = 6$ gestoßen, dann hätte man $\frac{1}{4}x$ zu $1x$ vervollständigen müssen. Dies geschieht, indem man die Gleichung mit 4 multipliziert; man erhält $x = 24$. Diese Äquivalenzumformung des Vervollständigens auf $1x$ nennt AL-CHARIZMI *al-ikmal*.

Da für uns die Division durch eine Zahl dasselbe ist wie die Multiplikation mit dem Kehrwert dieser Zahl – statt durch 15 zu dividieren, multiplizieren wir mit $\frac{1}{15}$ –, müssen wir die beiden letzten Äquivalenzumformungen nicht unterscheiden und haben sie zusammengefaßt in der Äquivalenzumformung durch Termmultiplikation.

Natürlich war AL-CHARIZMI nicht der erste, der Gleichungen so löste. Der griechische Mathematiker DIOPHANT aus Alexandria (um 250 n. Chr.) beschreibt genau die beiden Äquivalenzumformungen des Wiederherstellens und des Ausgleichens in seinem Werk *Ἀριθμητικῶν βιβλία* (*Arithmetikōn biblía*) = *Bücher über die Zahlenlehre*. Aber AL-CHARIZMI hat dieses Werk nicht gekannt. Es wurde erst nach seinem Tode ins Arabische übersetzt.

4.2.3 Produkte mit dem Wert null

Wir erinnern an die Tatsache, daß die Null als Faktor jedes Produkt zu null macht*, und halten dies fest in

Satz 139.1: Wenn in einem Produkt mindestens ein Faktor null ist, dann hat das Produkt den Wert null.

Beispiele:

1) $3 \cdot 0 = 0$

2) $0 \cdot (-7) = 0$

3) $\frac{1}{2} \cdot 2^{10} \cdot 0 \cdot 8 = 0$

4) $-3 \cdot 0 \cdot (a^2 - a) \cdot 0 \cdot 5 = 0$

Wissen wir umgekehrt von einem Produkt, daß es den Wert null hat, dann muß mindestens einer der Faktoren null sein; denn wären alle Faktoren von null verschieden, dann wäre nach den Vorzeichenregeln auch das Produkt von null verschieden.

Es gilt also

Satz 139.2: Wenn ein Produkt den Wert null hat, dann ist mindestens einer der Faktoren null.

Als Anwendung dieses Satzes bestimmen wir die Lösungsmenge der Gleichung

$$(x - 1)(x - 2) = 0.$$

Das links stehende Produkt besteht aus den Faktoren $x - 1$ und $x - 2$; mindestens einer davon muß null sein. Es gilt also $x - 1 = 0$ oder $x - 2 = 0$, d. h., $x = 1$ oder $x = 2$.

Beide Faktoren können nicht zugleich null werden, weil x nicht zwei verschiedene Werte gleichzeitig annehmen kann.

Die Information, die uns die Gleichung $(x - 1)(x - 2) = 0$ liefert, ist also mehrdeutig. Sie ist äquivalent mit der Information » $x = 1$ oder $x = 2$ «. Solche mit *oder* zusammengesetzte Aussageformen kommen in der Mathematik häufig vor, so daß es sich lohnt, für das Wort »oder« in diesem Zusammenhang eine symbolische Abkürzung einzuführen. Für *oder* schreibt man kurz $\vee$. Das $\vee$ soll an das lateinische Wort für *oder*, nämlich *vel*, erinnern.

Eine Zahl ist Lösung einer *Oder*-Aussageform, wenn beim Einsetzen eine wahre Oder-Aussage entsteht. Eine **Oder-Aussage** in der Mathematik ist eine Verknüpfung zweier Teilaussagen durch das Wort *oder* bzw. durch $\vee$.

Eine Oder-Aussage ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussa-

* Beachte die Groß- und Kleinschreibung: Die Zahl Null hat den Wert null. Bei der Zahl 10 sagt die Ziffer Null, daß die Zehn null Einer hat.

gen wahr ist, d.h., wenn die erste Teilaussage wahr ist oder wenn die zweite wahr ist oder wenn beide zugleich wahr sind. Die Lösungsmenge einer Oder-Aussageform ist also die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen der Teilaussageformen. Das Zeichen $\cup$ erinnert an $\vee$. Unsere Oder-Aussageform $x = 1 \vee x = 2$ besitzt demnach die Lösungsmenge $L = \{1; 2\}$.

**** Zur Geschichte der Null**

In einem Zeichenwertsystem, wie es die Ägypter, die Griechen und die Römer verwendeten, brauchte man keine Null; denn 10 schrieb man römisch eben als X und 101 als CI. Interessanterweise findet man aber um 100 v. Chr. bei den Ägyptern ein Zeichen für den Wert null, die abwehrenden Hände (Abbildung 140.1). Bei einem Stellenwertsystem ist aber ein Zeichen für die nicht besetzte Stelle nötig; denn 11 ist etwas anderes als 101. Beim babylonischen Stellenwertsystem, dem 60er- oder Sexagesimalsystem, taucht bereits um 2000 v. Chr. ein solches Lückenzeichen auf, wird aber erst ab 200 v. Chr. systematisch verwendet. (Abbildung 140.2) Die Inder besaßen spätestens seit den ersten Jahrhunderten n. Chr. ein Stellenwertsystem, das praktischste, das jemals erfunden worden war und das wir heute noch benützen. Zu ihren neun Zahlzeichen für eins, zwei, ..., neun kommt im 7. Jh. ein Zeichen für die Lücke, die sie *sunya* = *die Leere* genannt hatten, hinzu; es ist ein Punkt oder auch ein kleiner Kreis.

Woher hatten nun die Inder dieses Zeichen? Darüber streiten bis heute die Gelehrten. Die einen meinen, die Inder hätten es selbst erfunden. Nun stammt die früheste erhaltene indische Null als Kreisring von einer Tempelinschrift bei Gwalior aus dem Jahre 870. Daher meinen andere Gelehrte, die Inder könnten den Punkt und den Kreis für die Null von den Chinesen übernommen haben; denn in einem chinesischen astronomischen Text aus der Zeit von zwischen 718 und 729 ist uns ein Punkt für die Null überliefert. Noch früher, und vielleicht von China beeinflusst, sind Inschriften aus Kambojscha und von der indonesischen Insel Bangka mit den Jahreszahlen 605 bzw. 608 (Abbildung 140.3). Haben die Inder über ihre Kaufleute von dort die Idee bezogen? Oder stammt sie gar von den Griechen?

Der größte Astronom des Altertums, Klaudios PTOLEMAIOS (um 100–160) benötigte ein Zeichen, um anzudeuten, daß ein Winkel null Grad, null Minuten und nur 14 Winkelsekunden mißt. Er



Abb. 140.1 Ägyptisches Zeichen für null an einem Tempel in Edfu (2./1. Jh. v. Chr.)



Abb. 140.2 Der Doppelhaken, das babylonische Lückenzeichen:
 $2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 15 = 7215$



Abb. 140.3 Die Schakajahrzeichen 605 (= 683/4 n. Chr.) und 608 (= 686/7 n. Chr.) Der südindische Schakakalender beginnt seine Zeitählung am 15. März 78 n. Chr.



Abb. 140.4 Die Mayazahl 820 =
 $= 8 \cdot (20 \cdot 18) + 2 \cdot 20 + 0 =$
 $= 2920$ indisch

Im Jahre 773 brachte ein Inder ein in Sanskrit geschriebenes astronomisches Werk nach Bagdad an den Hof des Kalifen AL-MANSUR (regierte 754–775). Es wurde ins Arabische übersetzt. So wurden die Araber mit den indischen Ziffern bekannt, die wir heute die arabischen nennen. AL-CHARIZMI überarbeitete später diese Übersetzung in seinen *Astronomischen Tafeln*. Zur Verbreitung der indischen Ziffern und der Kunst des Rechnens mit ihnen trug AL-CHARIZMI wesentlich durch ein Buch bei, das nur mehr bruchstückhaft in einer lateinischen Übersetzung unter dem Titel *Algoritmi de numero indorum* – »Buch des AL-CHARIZMI über die Zahlenschreibweise der Inder« – erhalten ist. *Sunya* übersetzten die Araber mit *al-sifr*, ihrem Wort für *Leere*. *Al-sifr* wurde latinisiert zu *cifra*, womit sogar noch 1799 Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) die Null bezeichnete. Im Deutschen entstand aus *cifra* das Wort *Ziffer*, das im 15. Jh. allmählich die heutige Bedeutung von Zahlzeichen erlangte. Im Lateinischen hieß Zahlzeichen aber *figura*, der kleine Kreis für die durch kein Zahlzeichen besetzte Stelle *figura nihili* = *Zeichen für das Nichts* oder auch *nulla figura* = *kein Zahlzeichen*. Daraus entstand im Deutschen zunächst *Nulla*, dann *eine Nulle*, so z. B. 1716 belegt im *Mathematischen Lexicon* des Christian v. WOLFF (1679–1754), der in der 2. Auflage 1734 bereits die Kurzform *Null* als Stichwort aufführt.* Unabhängig von der Alten Welt haben in der Neuen Welt die Maya vielleicht schon um 500 n. Chr., also noch vor allen anderen Völkern, ein vollwertiges Stellenwertsystem mit der Null als Ziffer gekannt (Abbildung 140.4).

Aufgaben

1.

a) $145x = 0$	b) $x \cdot (17^2 - 6^3) = 0$
c) $\frac{7}{9} \cdot y \cdot \frac{3}{14} = 0$	d) $(29 - 377 : 13) \cdot 3z = 0$
e) $16 + \frac{2}{5}x = 2\frac{1}{2} \cdot 6\frac{2}{5}$	f) $1,97x \cdot 4 = 23,5 + 15\frac{2}{3} : (-\frac{2}{3})$
2. Bestimme die Lösungsmenge.

a) $(x + 1)(x - 2) = 0$	b) $(x - \frac{2}{3})(x + \frac{1}{4}) = 0$
c) $(6x - 3)(2x - 1) = 0$	d) $(\frac{2}{5}x - 15)(1\frac{2}{3} - 2x) = 0$
e) $14(3x - 8)(65 + 13x) = 0$	f) $(2\frac{5}{6}x - 34) \cdot 7^2 \cdot (1,5 - 2,5x) = 0$
3.

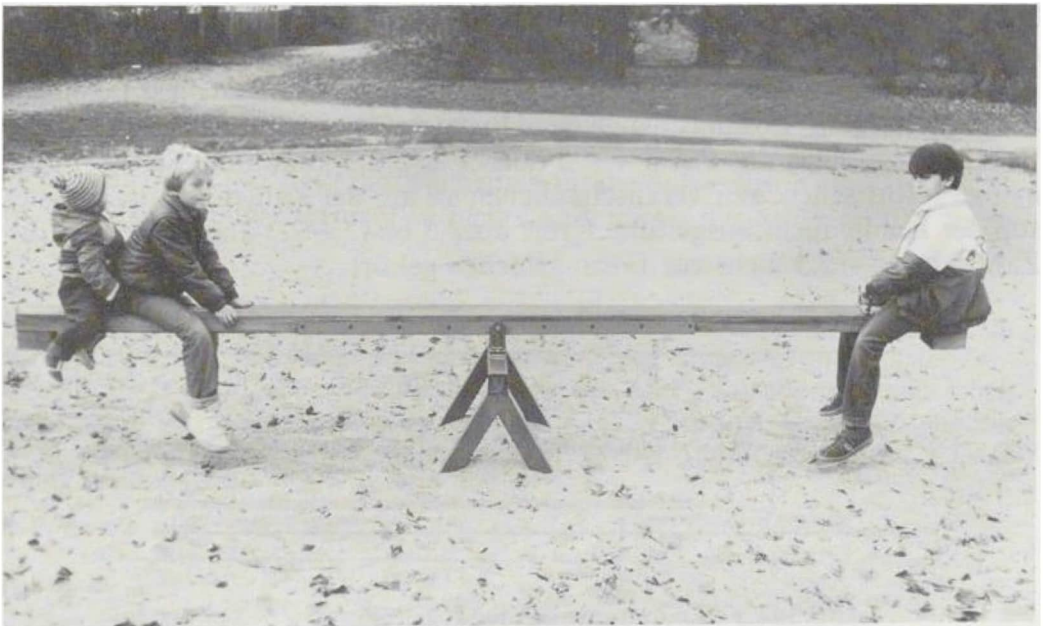
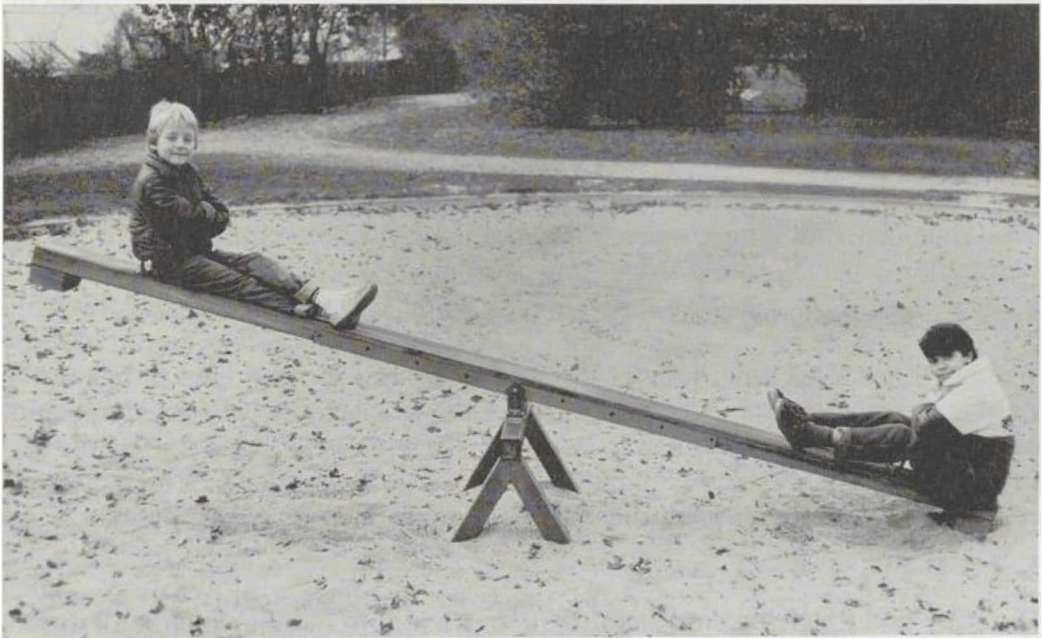
a) $(x + 1)^2 = 0$	b) $3 \cdot (2x - 5)^2 = 0$
c) $2,35 \cdot (x - 2)^3 = 0$	d) $(x + 9)(x - 9)^2 = 0$
- 4.

a) $(2x + 1)(3x + 2)(4x + 3) = 0$	b) $(5x - 9)(11 + 2x)(7x - 49) = 0$
c) $89^2(16 - 5x)(x - 1)^2 = 0$	
d) $[(1,75x - 5,25)(x + 19)] \cdot 5(2 - x) = 0$	

* Aus dem lateinischen *cifra* wurde im 15. Jh. das französische *chiffre* und schließlich das englische *cipher*, die beide neben *Null* und *Ziffer* auch noch *Geheimzahl* bedeuten. In dieser Bedeutung entstand im 17. Jh. das deutsche Fremdwort *Chiffre*. Bei LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) wird aus *al-sifr* 1202 *zephirum*, woraus das französische *zéro*, das italienische *zero* und das englische *zero* wurden.

- 5. Gib eine möglichst einfache Gleichung an, die die folgenden Zahlen als Lösung besitzt
- | | | |
|---------------------|-------------------------------------|---------------|
| a) 2 und 3 | b) 2 und -3 | c) -2 und 3 |
| d) -2 und -3 | e) $\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{4}$ | f) 0 und -1 |
| g) 0 und 1 und -1 | h) 2 und -2 (zwei Möglichkeiten!) | |
6. Entscheide, welche der folgenden Oder-Aussagen wahr sind.
- a) Hannibal war ein Römer oder Alexander der Große war ein Römer.
 - b) Eine Spinne hat 6 oder 8 Beine.
 - c) Die Hauptstadt der Türkei ist Istanbul oder Izmir.
 - d) $2 = 3 \vee 2 < 3$
 - e) $2 = 3 \vee 2 > 3$
 - f) $2 < 3 \vee 2 > 3$
 - g) $2 < 3 \vee 2 = 3 \vee 2 > 3$
 - h) 2 teilt 11 oder 2 teilt 12.
 - i) 2 teilt 17^{17} oder 2 teilt $17^{17} + 1$.

5 Ungleichungen



5 Ungleichungen

5.1 Was ist eine Ungleichung?

Wir erinnern daran, daß $a < b$ anschaulich bedeutet, daß die Zahl a auf der Zahlengeraden links von der Zahl b liegt. Rechnerisch bedeutet $a < b$: Es gibt eine positive Zahl p , so daß $a + p = b$ gilt. Abbildung 144.1 veranschaulicht dies.

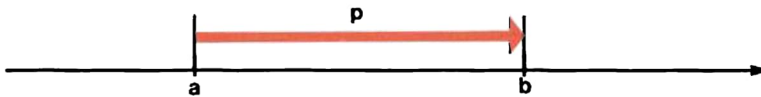


Abb. 144.1 $a < b \Leftrightarrow$ Es gibt ein $p > 0$, so daß $a + p = b$.

Was aber bedeutet eine Ungleichung, die eine Variable enthält? Betrachten wir z. B. die Ungleichung

$$2x - 3 < 1 - x.$$

Wie bei einer Gleichung haben wir eine Information über eine unbekannte Zahl x vor uns. Diese Information ist in der vorliegenden Form noch sehr undurchsichtig. Durch Probieren kann man womöglich Zahlen finden, die der Information entsprechen. Nehmen wir z. B. für x die Zahlen 0, 2 oder -2 , so erhalten wir der Reihe nach die Zahlen-Ungleichungen

$$-3 < 1 \qquad 1 < -1 \qquad -7 < 3.$$

Die erste und die dritte sind richtig, die mittlere falsch. Wir sehen, daß durch die Information $2x - 3 < 1 - x$ die Zahl x nicht eindeutig festgelegt ist, da bereits die beiden Zahlen 0 und -2 der Ungleichung genügen. Wie bei Gleichungen möchten wir aber alle Zahlen kennen, die der Information genügen. Betrachtet man die Ungleichung als Aussageform, dann bilden diese Lösungszahlen gerade die Lösungsmenge der Ungleichung.

Bei Ungleichungen der Form $x < 5$ oder $x > -2,3$ kann man die Lösungsmenge sofort sehen. Wir veranschaulichen sie auf der Zahlengeraden. Dabei soll der kleine, nicht ausgefüllte Kreis über 5 bzw. $-2,3$ andeuten, daß die Zahl 5 bzw. $-2,3$ nicht zur Lösungsmenge gehört.



Abb. 144.2 Lösungsmenge der Ungleichung $x < 5$



Abb. 144.3 Lösungsmenge der Ungleichung $x > -2,3$

Unser Ziel ist es, Ungleichungen so lange umzuformen, bis man auf solche einfache Ungleichungen stößt. Das ist immer dann erreicht, wenn man die Unbekannte auf einer Seite der Ungleichung isoliert hat. Dabei dürfen aber weder Lösungen hinzukommen noch verlorengehen. Wie bei Gleichungen legt man daher fest:

Definition 145.1: Zwei Ungleichungen heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Eine Ungleichungsumformung heißt Äquivalenzumformung, wenn die ursprüngliche Ungleichung und die umgeformte Ungleichung äquivalent sind.

5.2 Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

Ersetzt man in einer Ungleichung einen Term durch einen äquivalenten, so ändert sich die Lösungsmenge nicht, weil bei jeder Einsetzung der alte und der neue Term den gleichen Zahlenwert liefern.

Beispiel: $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$
 $4x - 5 < 7x + 6$

Für die Addition von Termen gilt

Satz 145.1: Monotoniegesetz der Addition

Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung einen Term, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz

$$\begin{aligned} T_1 < T_2 & \quad \parallel + T \\ \Leftrightarrow T_1 + T < T_2 + T \end{aligned}$$

Bemerkung: Satz 145.1 gilt natürlich auch für die Subtraktion eines Terms, da die Subtraktion eines Terms T ja nichts anderes als die Addition des Terms $-T$ ist.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Monotoniegesetzes der Addition für rationale Zahlen (Satz 62.1) kann man auf beiden Seiten die Zahl $T(a)$ addieren und erhält $T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$. (Siehe Abbildung 145.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $T_1 + T < T_2 + T$. Wir haben somit bei der Addition des Terms T keine Lösung verloren.

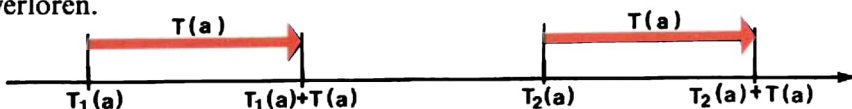


Abb. 145.1 $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow T_1(a) + T(a) < T_2(a) + T(a)$

Ist umgekehrt b eine Lösung der Ungleichung $T_1 + T < T_2 + T$, dann gilt $T_1(b) + T(b) < T_2(b) + T(b)$. Addiert man hier auf beiden Seiten die Zahl $-T(b)$, so erhält man nach dem Monotoniegesetz der Addition für rationale Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung der Ungleichung $T_1 < T_2$. Somit kann durch die Addition des Terms T keine Lösung hinzugekommen sein. Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $T_1 + T < T_2 + T$ sind also äquivalent.

Beispiel: $4x - 5 < 7x + 6 \quad || -4x - 6$
 $-11 < 3x$

Bei der Multiplikation von Ungleichungen mit Zahlen muß man aufpassen, da es zwei Monotoniegesetze gibt, eines für positive Multiplikatoren und eines für negative Multiplikatoren. Du kennst sie für rationale Zahlen bereits als Satz 81.1 und Satz 81.2.

Deshalb müssen wir auch bei den Äquivalenzumformungen von Ungleichungen mit Variablen zwei Monotoniegesetze unterscheiden.

Satz 146.1: Monotoniegesetz der Multiplikation

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer *positiven* Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten, kurz

$$T_1 < T_2 \quad || \cdot p, \text{ wobei } p > 0$$

$$\Leftrightarrow p \cdot T_1 < p \cdot T_2$$

Bemerkung: Satz 146.1 gilt natürlich auch für die Division durch eine positive Zahl, da die Division durch p ja nichts anderes ist als die Multiplikation mit $\frac{1}{p}$.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Monotoniegesetzes der Multiplikation für rationale Zahlen (Satz 81.1) kann man beide Seiten mit der positiven Zahl p multiplizieren und erhält $p \cdot T_1(a) < p \cdot T_2(a)$. (Siehe Abbildung 146.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$. Bei der Multiplikation mit p ist keine Lösung verlorengegangen!

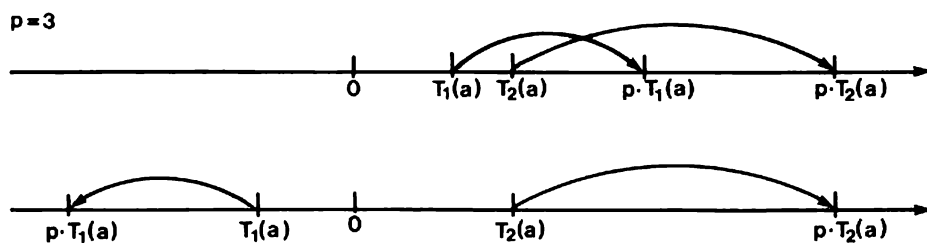


Abb. 146.1 Ist $p > 0$, dann gilt: $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow p \cdot T_1(a) < p \cdot T_2(a)$.

Ist umgekehrt b eine Lösung der Ungleichung $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$, dann gilt $p \cdot T_1(b) < p \cdot T_2(b)$. Multipliziert man diese Zahlenungleichung mit der positiven

Zahl $\frac{1}{p}$, dann gilt nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation für rationale Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung von $T_1 < T_2$. Bei der Multiplikation mit p ist keine Lösung hinzugekommen!

Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $p \cdot T_1 < p \cdot T_2$ mit positivem p sind daher äquivalent.

Beispiel: $-11 < 3x \quad || \cdot \frac{1}{3}$
 $-\frac{11}{3} < x$

Damit haben wir durch drei Äquivalenzumformungen die eingangs gegebene Ungleichung $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$ schließlich auf die äquivalente Form $-\frac{11}{3} < x$ gebracht, bei der wir die Lösungsmenge sofort erkennen können; Abbildung 147.1 zeigt sie.

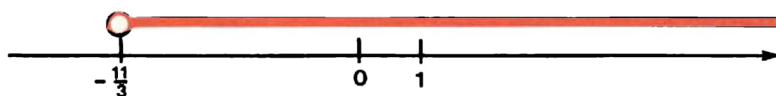


Abb. 147.1 Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x - 5 + x < 7x - (13 - 19)$

Nun zum zweiten Monotoniegesetz der Multiplikation!

Satz 147.1: Gesetz von der Umkehrung der Monotonie

Multipliziert man eine Ungleichung mit einer *negativen* Zahl, so wird aus dem Kleiner-Zeichen ein Größer-Zeichen bzw. aus dem Größer-Zeichen ein Kleiner-Zeichen; man sagt dafür auch, das Ungleichheitszeichen kehrt sich um. Kurz

$$T_1 < T_2 \quad || \cdot q, \text{ wobei } q < 0$$

$$\Leftrightarrow q \cdot T_1 > q \cdot T_2$$

Bemerkung: Satz 147.1 gilt natürlich auch für die Division durch eine negative Zahl.

Beweis: Ist a ein Element der Lösungsmenge der Ungleichung $T_1 < T_2$, dann gilt $T_1(a) < T_2(a)$. Auf Grund des Gesetzes von der Umkehrung der Monotonie bei rationalen Zahlen (Satz 81.2) erhält man daraus bei Multiplikation mit einem negativen q die Zahlenungleichung $q \cdot T_1(a) > q \cdot T_2(a)$. (Siehe Abbildung 148.1) Also ist a auch Lösung der Ungleichung $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$. Keine Lösung ist verlorengegangen!

Ist umgekehrt b eine Lösung von $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$, dann gilt $q \cdot T_1(b) > q \cdot T_2(b)$. Multipliziert man diese Zahlenungleichung mit der negativen Zahl $\frac{1}{q}$, dann erhält man wegen

des Gesetzes von der Umkehrung der Monotonie bei rationalen Zahlen die Zahlenungleichung $T_1(b) < T_2(b)$. Also ist b auch eine Lösung von $T_1 < T_2$. Somit ist bei der Multiplikation mit q keine Lösung hinzugekommen!

Die Ungleichungen $T_1 < T_2$ und $q \cdot T_1 > q \cdot T_2$ mit negativem q sind somit äquivalent.

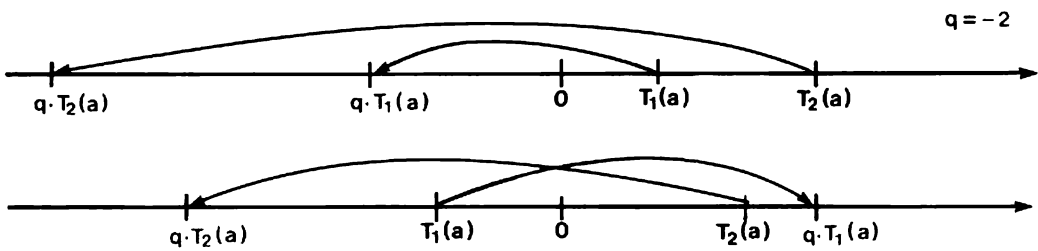


Abb. 148.1 Ist $q < 0$, dann gilt: $T_1(a) < T_2(a) \Leftrightarrow q \cdot T_1(a) > q \cdot T_2(a)$.

Beispiel: $-\frac{2}{3}x < -6 \quad || \cdot (-\frac{3}{2})$
 $x > 9$

Die in diesem Abschnitt gefundenen Äquivalenzumformungen von Ungleichungen sollen uns nun helfen, die Lösungsmenge einer Ungleichung zu bestimmen.

5.3 Lösen von Ungleichungen

5.3.1 Intervalle

Die Lösungsmengen von Ungleichungen enthalten meistens unendlich viele Lösungen, denen auf der Zahlengeraden Strecken oder Halbgeraden entsprechen. Diese Zahlenmengen nennen wir Intervalle*. Für Intervalle gibt es in der Mathematik Kurzbezeichnungen:

Definition 148.1:			
Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Bild des Intervalls
Menge aller Zahlen zwischen a und b einschließlich der Grenzen	$[a; b]$	abgeschlossen	$a \bullet \text{---} \bullet b$
Menge aller Zahlen zwischen a und b ohne die Grenzen	$]a; b[$	offen	$a \circ \text{---} \circ b$
Menge aller Zahlen zwischen a und b mit a , aber ohne b	$[a; b[$	halboffen	$a \bullet \text{---} \circ b$
Menge aller Zahlen zwischen a und b ohne a , aber mit b	$]a; b]$	halboffen	$a \circ \text{---} \bullet b$

* intervallum (lat.) = Zwischenraum, eigentlich der Raum zwischen (= inter) zwei Pfählen (= vallus) einer Palisade.

Beachte: In der Intervallschreibweise darf die linke Zahl nicht größer sein als die rechte.

Wie man mit Intervallen umgeht, zeigen die folgenden

Beispiele: (Vgl. dazu Abbildung 149.1).

- 1) $0 \in [0; 3[$, $1,7 \in [0; 3[$, $3 \notin [0; 3[$
- 2) $[0; 3[\subset [-1,5; 6]$, $\{4,1; 5; 6\frac{1}{3}; 7,99\} \subset]4; 8[$
- 3) $[-1,5; 6] \cap]4; 8[=]4; 6]$, $[-6; -4[\cap [-4; -2] = \{ \}$
- 4) $[-6; -4[\cup [-4; -2] = [-6; -2]$,
 $[-1,5; 6] \cup]4; 8[= [-1,5; 8[$



Abb. 149.1 Zu den Beispielen 1) bis 4)

Bei Halbgeraden gibt es auf einer Seite keinen Endpunkt, da es dort keine letzte Zahl gibt. Als Ersatz für die fehlende Grenze hat 1655 der englische Mathematiker John WALLIS (1616–1703) in seiner *Arithmetica Infinitorum* das Symbol ∞ , gesprochen *unendlich*, eingeführt.

Die Römer schrieben mit dem Zeichen ∞ ihr Zahlwort *mille*, das einerseits *tausend* bedeutet, andererseits im übertragenen Sinn für *unzählig viele* verwendet wurde – denke nur an unseren Tausendfüßer! Ob die Römer WALLIS inspirierten, wissen wir nicht.*

Weil ∞ keine Zahl ist, gehört es niemals zum Intervall. Je nachdem, ob man nach links oder rechts ins Unendliche fortschreitet, unterscheidet man zwischen $-\infty$ und $+\infty$.

* Neben ∞ gab es noch $\textcircled{M}$ und $\textcircled{D}$ als Zeichen für *mille*. Das M ist im wesentlichen mittelalterlichen Ursprungs, wenngleich es sich gelegentlich auch in römischen Inschriften findet; frühester Beleg 89 v. Chr.



1698

John Wallis.

Abb. 149.2 John WALLIS (3.12.1616 Ashford/Kent – 8.11.1703 Oxford)

Damit haben wir

Definition 150.1:			
Beschreibung des Intervalls	Intervall- symbol	Art des Intervalls	Bild des Intervalls
Menge aller Zahlen links von a einschließlich a	$] - \infty; a]$	halboffen	
Menge aller Zahlen links von a ohne a	$] - \infty; a[$	offen	
Menge aller Zahlen rechts von a einschließlich a	$[a; + \infty[$	halboffen	
Menge aller Zahlen rechts von a ohne a	$]a; + \infty[$	offen	

Aufgaben

1. Zeichne die Intervalle
- a) $[2; 4]$ b) $[-1,5; 5,6]$ c) $] - 2; - 0,5]$
d) $[1,4; 4,1[$ e) $]0; 5[$ f) $[1; 1]$
2. Schreibe als Intervall
- a) $2 \bullet \text{---} \bullet 3,9$ b) $- 7 \bullet \text{---} \circ 3$
c) $- 1 \circ \text{---} \bullet 1$ d) $- 8,3 \circ \text{---} \circ 16,6$
3. Zeichne die Intervalle
- a) $[2; + \infty[$ b) $] - 1; + \infty[$ c) $] - \infty; 0]$ d) $] - \infty; - 2[$
4. Schreibe als Intervall
- a) $- 5 \bullet \text{---}$ b) $\text{---} \bullet 7$
c) $\text{---} \circ 100$ d) $\text{---} \circ - 13$
5. Schreibe als Intervall
- a) $\mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Q}^+$ c) $\mathbb{Q}^-$ d) $\mathbb{Q}_0^+$ e) $\mathbb{Q}_0^-$ f) $\{ \}$
6. Entscheide für jede der Zahlen $- 5; 20; 0; - 3,1; 1,5$ ob sie in dem folgenden Intervall liegt oder nicht:
- a) $] - 5; 1,5]$ b) $[- 3; 5]$ c) $] - 10; 20]$ d) $] - 5,5; 0[$
7. Bestimme das *größte abgeschlossene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen, das eine Teilmenge des folgenden Intervalls ist:
- a) $]0; 5[$ b) $] - 2,7; 3]$ c) $[- 2,7; 3[$ d) $[- 6; - 1,1[$ e) $[- 1; 2]$
8. Gib zu den Intervallen der Aufgabe 7 das jeweils *kleinste offene* Intervall mit ganzzahligen Grenzen an, welches das gegebene Intervall ganz überdeckt.

9. Bestimme folgende Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen:

a) $[-1; 2] \cap]0; 4[$

b) $[-1; 2] \cup]0; 4[$

c) $[-3; -0,5] \cup [-0,5; 3[$

d) $[-3; -0,5] \cap [-0,5; 3[$

e) $\mathbb{N} \cap [0; 6[$

f) $(]-5; 0[\cup [-1; 4]) \cap \mathbb{Z}$

5.3.2 Kleiner- und Größer-Ungleichungen

Mit Hilfe der Äquivalenzumformungen können wir nun Ungleichungen wie z. B. $2x + 5 < 7x - 3$ lösen, wenn es uns gelingt, sie auf eine der Normalformen $x < a$ oder $x > a$ zu bringen.

Beispiel 1: $2x + 5 < 7x - 3 \quad || -2x + 3$
 $8 < 5x \quad || :5$
 $\frac{8}{5} < x$
 $x > \frac{8}{5}$

In der Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L =]\frac{8}{5}; +\infty[$. Sie läßt sich auch graphisch darstellen:

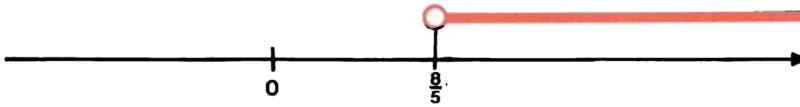


Abb. 151.1 Lösungsmenge der Ungleichung $2x + 5 < 7x - 3$

Es gibt aber auch Ungleichungen, die sich nicht auf die Normalformen $x < a$ bzw. $x > a$ bringen lassen, nämlich dann, wenn die Unbekannte bei den Äquivalenzumformungen »herausfällt«. Es bleibt in diesem Fall eine Ungleichung zwischen Zahlen übrig, also statt einer Aussageform nur eine Aussage. Ist diese wahr, dann ist die ursprüngliche Ungleichung allgemeingültig, ihre Lösungsmenge ist also $\mathbb{Q}$. Ist die übrigbleibende Zahlenungleichung eine falsche Aussage, dann ist die ursprüngliche Ungleichung widersprüchlich, ihre Lösungsmenge also $\{ \}$. Die folgenden beiden Beispiele sollen dir das verdeutlichen.

Beispiel 2: $2x + 5 < 1 - (5 - 2x)$
 $2x + 5 < 17 - 5 + 2x$
 $2x + 5 < 12 + 2x \quad || -2x - 5$
 $0 < 7; \text{ wahre Aussage! Also } L = \mathbb{Q}.$

Beispiel 3: $2x + 5 < 7 - (5 - 2x)$
 $2x + 5 < 7 - 5 + 2x$
 $2x + 5 < 2 + 2x \quad || -2x - 5$
 $0 < -3; \text{ falsche Aussage! Also } L = \{ \}.$

Aufgaben

1. a) $x - 3 < 5$ b) $2 - x > -3$ c) $-x < -3$
 d) $3x > 18$ e) $\frac{2}{5}x < \frac{2}{5}$ f) $-\frac{3}{2}x > -\frac{3}{2}$
 g) $-\frac{14}{5}x < 24\frac{1}{2}$ h) $\frac{39}{49} < 2\frac{10}{21}x$ i) $4\frac{11}{25} < -\frac{74}{75}x$
2. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
 a) $3x - 11 < 12x - 10$ b) $5 - 8x < x - 13$
 c) $15 - 6y > 1 - 20y$ d) $-z > z - 10$
3. Stelle die Lösungsmenge graphisch dar.
 a) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} < \frac{1}{4}x + 1\frac{3}{4}$ b) $15\frac{3}{8} - 14\frac{5}{8}x > 12\frac{1}{4}x + 42,25$
 c) $0,8 - 0,9z > \frac{3}{7}z + \frac{4}{5}$ d) $0,3y - \frac{1}{3} < \frac{1}{3}y - 3\frac{2}{3}$
4. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
 a) $x - (3 - x) > 5 - (5 - x)$
 b) $2y + 3 - (5 + 3y) < 3 - (2y - 1)$
 c) $5\frac{1}{2} - (3\frac{2}{7}z - \frac{1}{2}) > 8z + (7 - \frac{2}{7}z)$
5. a) $11z - 3(-z + 4) > -(z - 8) + 5(2z - 3)$
 b) $-5(3 - 3x) + 4(7 - 5x) < 5x + 19 - 2(x + 11)$
 c) $2y + 11 > -3(y + 1) - 1$
- 6. a) $3x - 12 < 4 + 3(1 - (1 - x))$
 b) $7\frac{1}{4}x + 3(-\frac{1}{12}x + \frac{4}{9}) > 4\frac{1}{4}x - 6(\frac{11}{24} - \frac{11}{24}x)$
 c) $-11x + (17 - 3x) \cdot 3 < 7 - \frac{2}{5}(50x - 3\frac{4}{7})$
 d) $0,01x - 0,1x + x < 0,02x - 0,31x + 1,2x$

5.3.3 Höchstens- und Mindestens-Ungleichungen

In öffentlichen Verkehrsmitteln können Jugendliche zu einem günstigeren Tarif fahren, wenn sie höchstens 15 Jahre alt sind. Die Verbilligung kann also jeder in Anspruch nehmen, der 15 Jahre alt ist oder der weniger als 15 Jahre alt ist. Bezeichnet man die Anzahl der Jahre kurz mit j , so gibt es Fahrpreisermäßigung, falls gilt:

$$j = 15 \vee j < 15.$$

Die beiden Bedingungen dieser *Oder*-Aussageform faßt man zusammen zu

$$j \leq 15$$

und liest dies als

» j ist **höchstens** 15« oder auch » j ist kleiner oder gleich 15«.

Zu Schuljahrsbeginn bietet ein Schreibwarengeschäft 5% Rabatt* bei Abnah-

* Vom italienischen *rabatto* = Preisabschlag. Erst im 17. Jh. wird unser *Rabatt* aus dem Italienischen entlehnt.

me von mindestens 10 Hefte gleicher Art an. Diesen Preisnachlaß erhält man also, wenn man 10 Hefte oder mehr als 10 Hefte kauft. Bezeichnet man die Anzahl der Hefte kurz mit h , so wird Rabatt gewährt, falls gilt:

$$h = 10 \vee h > 10.$$

Die beiden Bedingungen dieser Oder-Aussageform faßt man zusammen zu

$$h \geq 10$$

und liest dies als

» h ist **mindestens** 10« oder auch » h ist größer oder gleich 10«.

Definition 153.1: $a \leq b$ bedeutet $a < b \vee a = b$
 $a \geq b$ bedeutet $a > b \vee a = b$
 $a \neq b$ bedeutet $a < b \vee a > b$

Die Zeichen $\leq$ und $\geq$ wurden 1734 von Pierre BOUGUER (1698–1758) erfunden.

Ungleichungen mit $\leq$ bzw. $\geq$ löst man genauso wie Ungleichungen mit $<$ bzw. $>$. Dazu ein

Beispiel: $3\frac{1}{7}x - \frac{5}{14} \geq 5\frac{4}{21} + 2\frac{9}{14}x \quad || -2\frac{9}{14}x + \frac{5}{14}$
 $\frac{1}{2}x \geq 5\frac{23}{42} \quad || \cdot 2$
 $x \geq 11\frac{2}{21}.$

In Intervallschreibweise lautet die Lösungsmenge $L = [11\frac{2}{21}; +\infty[$. Abbildung 153.1 veranschaulicht L .

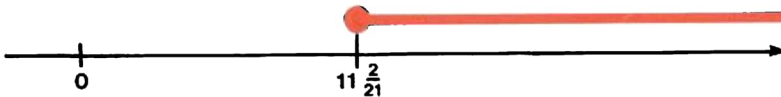


Abb.153.1 Die Lösungsmenge $[11\frac{2}{21}; +\infty[$

Aufgaben

1. Löse die folgenden Ungleichungen. Veranschauliche die Lösungsmengen auf der Zahlengeraden.

a) $x + 7 \leq 9$ b) $x - 16 \leq -17$ c) $x + 2,5 \geq 5$
d) $x - \frac{2}{3} \leq \frac{7}{3}$ e) $x + \frac{3}{4} \geq -1,75$ f) $x - 4 \neq 0$

2. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.

a) $2x - 1 \leq 1 - 2x$ b) $1 - x \geq 17 - 17x$
c) $12x - 7 \geq 8x + 41$ d) $y - 19 \leq 19y - 19$
e) $8z - 1 \geq 18z - 10$ f) $11w - 92 \leq 108 + 11w$

3. Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.
- a) $\frac{7}{4}x - \frac{1}{2} \leq 3\frac{1}{2} - \frac{9}{4}x$ b) $18\frac{1}{3} - 7\frac{1}{2}x \leq 3\frac{1}{4}x + 7\frac{7}{12}$
- c) $0,01y - 12,7 \geq 3,3 - 0,1y$ d) $\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2} - \frac{3}{7}z$
- 4. Schreibe die Lösungsmenge als Intervall.
- a) $3x - (1 - 2x) \leq -2(x - 1) + 7$
- b) $3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{7}(\frac{1}{3}x - 3\frac{3}{4}) \geq 2\frac{1}{2}x(1\frac{1}{2} - 0,75) + (2\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x)$
- 5. a) $2,1x + 2,1(0,1x - 2,1(1 - 0,01x)) \leq 2,1 - 2,1((1 - 2x) + 2,1)$
- b) $\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}x) \geq \frac{1}{5}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x)$

5.3.4 Doppelungleichungen

Die Deutsche Bundespost erkennt Sendungen nur dann als Briefe an, wenn sie gewisse Mindest- und Höchstmaße erfüllen. So muß z. B. die Länge mindestens 14 cm und darf höchstens 23,5 cm betragen. Bezeichnet man kurz mit l die Länge in cm, so muß für einen Brief gelten:

$$l \geq 14 \quad \text{und} \quad l \leq 23,5.$$

Eine Länge ist Lösung dieser *Und*-Aussageform, wenn beim Einsetzen eine wahre Und-Aussage entsteht. Eine **Und-Aussage** in der Mathematik ist eine Verknüpfung zweier Aussagen durch das Wort *und*, das man symbolisch durch $\wedge$ wiedergibt. Eine Und-Aussage ist genau dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Die obigen Bedingungen für die Länge lassen sich mit dem $\wedge$ -Symbol kurz schreiben:

$$l \geq 14 \wedge l \leq 23,5.$$

Übersichtlicher wird es, wenn man nur Ungleichheitszeichen derselben Richtung verwendet, also

$$14 \leq l \wedge l \leq 23,5 \quad \text{oder auch} \quad l \geq 14 \wedge 23,5 \geq l$$

schreibt. Stimmen dann die rechte Seite der ersten und die linke Seite der zweiten Ungleichung überein, so kann man beide Ungleichungen zu einer **Doppelungleichung** zusammenfassen. Statt $14 \leq l \wedge l \leq 23,5$ schreibt man kurz

$$14 \leq l \leq 23,5.$$

Bei der Notierung $l \geq 14 \wedge 23,5 \geq l$ läßt sich unsere Regel nicht anwenden! Weil die Reihenfolge der Bedingungen in einer Und-Verknüpfung aber keine Rolle spielt, so kann man sie auch in der Form $23,5 \geq l \wedge l \geq 14$ schreiben, was sich nun zu $23,5 \geq l \geq 14$ zusammenfassen läßt. – Wir merken uns

Definition 155.1: $a \leq b \leq c$ bedeutet $a \leq b \wedge b \leq c$
 $a < b < c$ bedeutet $a < b \wedge b < c$
 $a \geq b > c$ bedeutet $a \geq b \wedge b > c$
 $a > b \geq c$ bedeutet $a > b \wedge b \geq c$
 usw.

- Bemerkungen:* 1) Die Doppelungleichung $a < b < c$ drückt aus, daß b **zwischen** a und c liegt.
 2) Doppelungleichungen mit *gegenläufigen* Ungleichheitszeichen wie $a < b > c$ sind nicht erlaubt! Näheres dazu in Aufgabe 156/5.

Eine Doppelungleichung mit einer Unbekannten löst man, indem man die beiden durch $\wedge$ verknüpften Ungleichungen einzeln löst. Weil eine Lösung der Doppelungleichung die beiden Teilungleichungen zugleich erfüllen muß, ist die Lösungsmenge der Doppelungleichung die Schnittmenge der beiden Teillösungsmengen. Das $\wedge$ -Zeichen erinnert an das Schnittmengenzeichen $\cap$. Merke dir also den

Satz 155.1: Die Lösungsmenge einer Doppelungleichung ist die Schnittmenge der Lösungsmengen der beiden Teilungleichungen.

Beispiel:

$$4x + 5 \leq -3x + 5 < 17$$

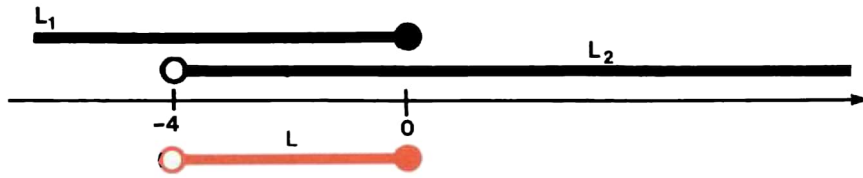
$$\Leftrightarrow 4x + 5 \leq -3x + 5 \wedge -3x + 5 < 17$$

In zwei getrennten Nebenrechnungen (NR.) lösen wir die beiden Teilungleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{NR. 1: } 4x + 5 \leq -3x + 5 & \parallel +3x - 5 \\ 7x \leq 0 & \parallel : 7 \\ x \leq 0 & \\ \Rightarrow L_1 =]-\infty; 0] & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{NR. 2: } -3x + 5 < 17 & \parallel -5 \\ -3x < 12 & \parallel : (-3) \\ x > -4 & \\ \Rightarrow L_2 =]-4; +\infty[& \end{array}$$

Als Lösungsmenge L für die Doppelungleichung erhalten wir somit $L = L_1 \cap L_2 =]-4; 0]$. Abbildung 156.1 veranschaulicht die Entstehung von L .

Abb. 156.1 $L = L_1 \cap L_2$

Aufgaben

- Schreibe als Doppelungleichung und gib die Lösungsmenge als Intervall an.
 - $x > -1 \wedge x \leq 5$
 - $x \leq 0 \wedge x \geq -3,5$
 - $x \leq -7 \wedge x > -10$
 - $15 < x \wedge 22 > x$
- Bestimme die Lösungsmenge als Intervall und stelle sie auf der Zahlengeraden dar.
 - $0 \leq 2x - 1 \leq 1$
 - $0 < 1 - \frac{3}{4}x < 2$
 - $84 > 7(5 - \frac{2}{3}x) \geq -153$
- Bestimme die Lösungsmenge als Intervall.
 - $0 < x \leq 1 - x$
 - $2x \leq 1 \leq 3x$
 - $3x < 1 < 2x$
- $2x - 1 < 3x - 1 \leq 1 - x$
 - $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} < \frac{5}{4}x - \frac{1}{2} < -\frac{5}{6}x + \frac{3}{4}$
 - $0,1(0,1 - 2x) \geq 1,01x - 0,5(2x - 0,3) > -0,7x - 1,27$
- In einer Doppelungleichung verbirgt sich neben den beiden Teilungleichungen der Und-Aussage noch eine weitere Ungleichung; sie entsteht, wenn man das Mittelstück und ein Ungleichheitszeichen wegnimmt. Wie heißen die drei Ungleichungen, die man aus $-3 < x < 1$ erhält?
 - Hans baut die Und-Aussageform $-3 < x \wedge x > -10$ zu einer »Doppelungleichung« der Art $-3 < x > -10$ zusammen. Sabine zeigt ihm, daß sich dann beim Vorgehen nach a) ein Widerspruch ergibt. Welcher? Trotzdem hat die Und-Aussageform $-3 < x \wedge x > -10$ eine Lösungsmenge. Gib sie als Intervall an.

5.3.5 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

In Gleichungen und in Ungleichungen kann auch der Betrag der Unbekannten auftreten. Die einfachste solche Gleichung ist von der Art $|x| = 4$, die einfachsten Ungleichungen sind von der Art $|x| < 4$ bzw. $|x| > 4$.

Die Lösung ist ganz einfach, wenn wir uns an die Definition des Betrags (Definition 43.1) erinnern: $|x|$ ist die Entfernung des Punkts x vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden.

Die Information $|x| = 4$ teilt uns mit, daß die Zahl x bzw. der zugehörige Punkt auf der Zahlengeraden 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt ist. Diese Information ist nicht eindeutig, weil sie auf die beiden Zahlen 4 und -4 zutrifft. Also gilt:

$$|x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4.$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{-4; 4\}$.

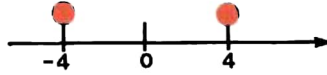


Abb. 157.1 Die Lösungsmenge von $|x| = 4$

Durch die Information $|x| < 4$ wird uns mitgeteilt, daß die Zahl x weniger als 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt liegt. Alle Zahlen zwischen -4 und 4 erfüllen diese Bedingung. Also gilt:

$$|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$$

Die Lösungsmenge ist $L =]-4; 4[$.

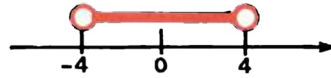


Abb. 157.2 Die Lösungsmenge von $|x| < 4$

Durch die Information $|x| > 4$ wird uns mitgeteilt, daß die Zahl x mehr als 4 Einheiten vom Nullpunkt entfernt liegt. Alle Zahlen links von -4 oder rechts von 4 erfüllen diese Bedingung. Also gilt:

$$|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4.$$

Die Lösungsmenge ist $L =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$.

Mit Hilfe des Ohne-Symbols $\setminus$ läßt sich L statt als Vereinigungsmenge auch als Restmenge schreiben, nämlich zu $L = \mathbb{Q} \setminus [-4; 4]$. Eine solche Schreibweise kann gelegentlich übersichtlicher sein.

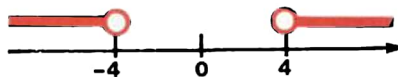


Abb. 157.3 Die Lösungsmenge von $|x| > 4$

Man kann also die angegebenen einfachen Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen auf betragsfreie Formen äquivalent umschreiben.

Wir merken uns

Satz 158.1: Für $a > 0$ gilt

$$|x| = a \Leftrightarrow x = -a \vee x = a$$

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a.$$

Aufgaben

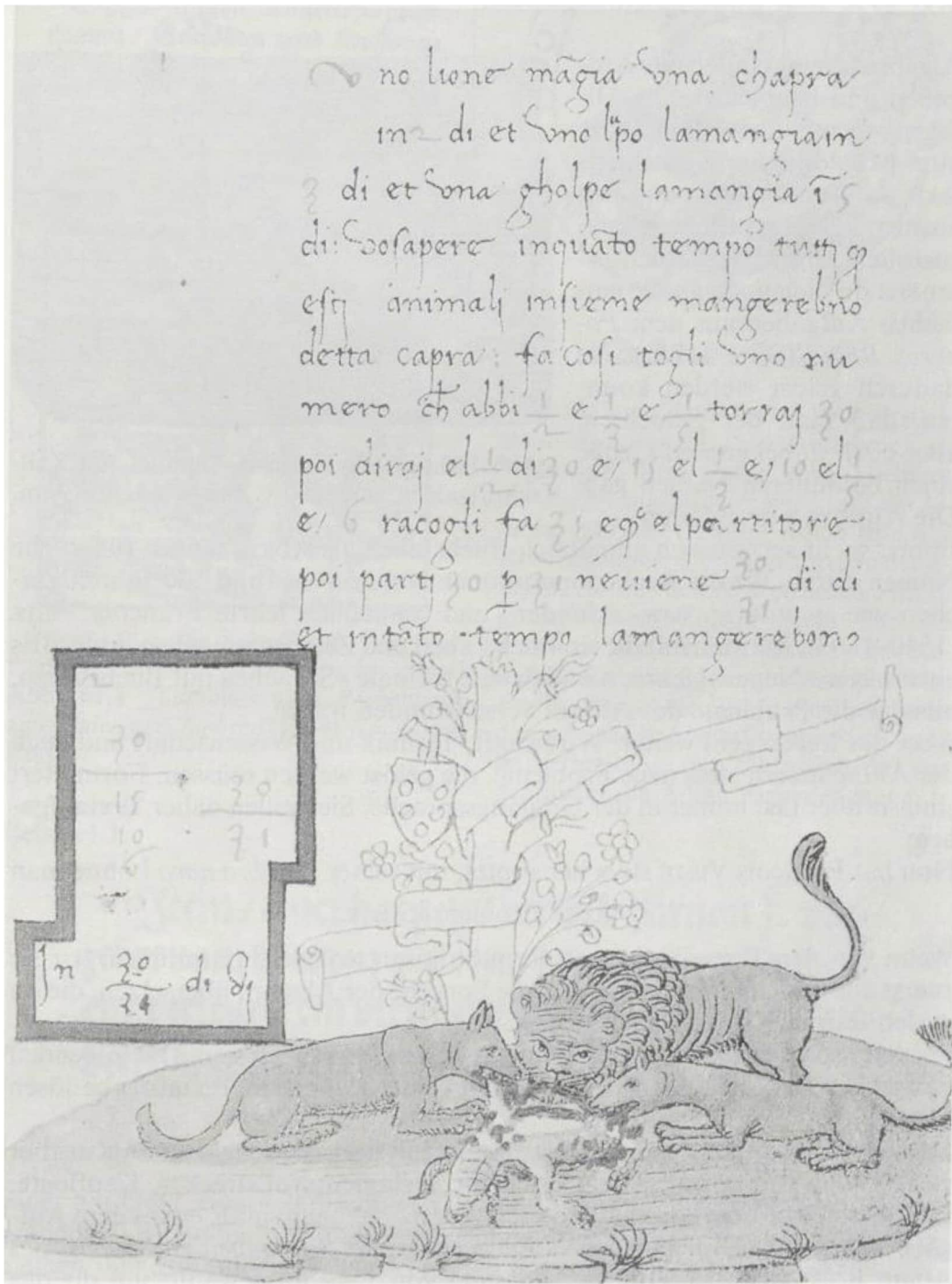
- Welche Zahlen erfüllen die Gleichung?
 - $|x| = 4,5$
 - $|x| = 1986$
 - $|x| = 0,1$
 - $|x| = 0$
 - $|x| = -\frac{2}{3}$
 - $|x| = |3,7 - 5,9|$
- Gib die Lösungsmenge der Ungleichung an und stelle sie auf der Zahlengeraden dar.
 - $|x| < 1$
 - $|x| \leq 4,5$
 - $|x| > -2$
 - $|x| \leq -4$
 - $|x| \geq 3,6$
 - $|x| > 3\frac{1}{7}$
 - $|x| \leq 3,14$
 - $\frac{8}{9} \leq |x|$
- Stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar.
 - $2 \leq |x| \leq 4$
 - $0 < |x| \leq 3$
 - $4 > |x| > 1$
- Welche rationalen Zahlen erfüllen die folgenden UND-Bedingungen? Stelle dazu die Lösungsmengen der Teilbedingungen und die der Gesamtbedingung auf der Zahlengeraden dar.
 - $|x| > 1$ und $|x| \leq 5$
 - $|x| \leq 1$ und $|x| > 0,5$
 - $x < 0,3$ und $|x| > 3,5$
 - $-2,75 \leq |x|$ und $x \geq -1,5$
 - $x > -1$ und $|x| \leq 4$
 - $|x| < 6$ und $x < -2$

Zu Seite 159:

Uno liono mangia una chapra in 2 di et uno lupo la mangia in 3 di et una gholpe la mangia in 5 di: vo' sapere in quanto tempo tuttj questj animalj insieme mangereb[ò]no detta capra: fa' così toglì uno numero che abbi $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ torraj 30 poi diraj el $\frac{1}{2}$ di 30 è 15 el $\frac{1}{3}$ è 10 e'l $\frac{1}{5}$ è 6 racogli fa 31 e questo è 'l partitore; poi partj 30 per 31, ne viene $\frac{30}{31}$ di di et in tanto tempo la mangerebono.

Ein Löwe frisst eine Ziege in 2 Tagen, und ein Wolf frisst sie in 3 Tagen, und ein Fuchs frisst sie in 5 Tagen. Du willst wissen, in welcher Zeit all diese Tiere gemeinsam diese Ziege fräßen. Mach es wie folgt. Nimm eine Zahl, die $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ hat, nimm 30; dann sage: $\frac{1}{2}$ von 30 ist 15, $\frac{1}{3}$ ist 10 und $\frac{1}{5}$ ist 6. Zähle zusammen, das ergibt 31, und das ist der Teiler. Teile dann 30 durch 31, daraus erhält man $\frac{30}{31}$ des Tages, und in dieser Zeit fräßen sie sie.

6 Textaufgaben



Löwe, Wolf und Fuchs fressen eine Ziege.

Fol. 97v des *Trattato di aritmetica* (1491) des Filippo CALANDRI (um 1430 Florenz-?)

6 Textaufgaben

6.1 Wie löst man Textaufgaben?

Algebra ist entstanden aus Aufgaben und Problemen des Alltags, wie uns über 4000 Jahre alte babylonische Keilschrifttexte auf Tontäfelchen und fast ebenso alte ägyptische Papyrusrollen zeigen. Sicherlich erinnerst du dich noch an die einfachen Aufgaben aus dem *Papyrus Rhind* (Seite 119ff.), die dadurch gelöst werden konnten, daß man der gesuchten, aber noch unbekannten Größe einen besonderen Namen gab. Die Algebra war geboren!

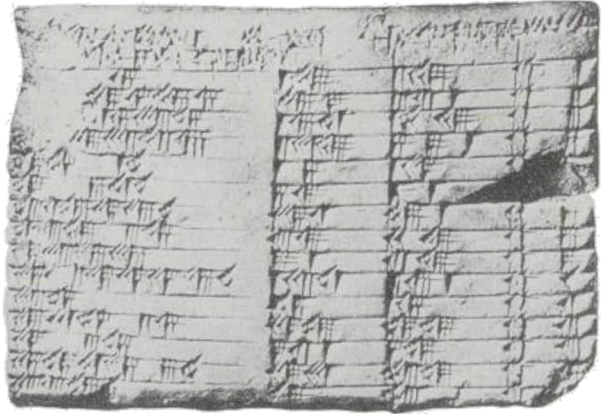


Abb. 160.1 Babylonische Tontafel mit Keilschriftzahlen, um 1800 v. Chr. – 13 cm × 9 cm.

Immer mehr setzten sich allmählich Buchstaben als Abkürzungen für solche Namen durch; für die Rechenoperationen wurden vor rund 500 Jahren Zeichen wie + und – usw. erfunden, und schließlich lehrte François VIÈTE (1540–1603), wie man mit diesen Buchstaben und Zeichen umgehen mußte. Es entstand die Neue Algebra, nämlich eine formale »Sprache« mit Buchstaben, aus der die Probleme des Alltags verschwunden waren.

Aber das Leben geht weiter, Wirtschaft, Technik und Wissenschaft und auch der Alltag liefern stets neue Probleme, die gelöst werden müssen. Formuliert sind sie aber fast immer in der Umgangssprache. Sie heißen daher **Textaufgaben**.

Nun hat François VIÈTE stolz behauptet, mit seiner *Algebra nova* könne man »jedes Problem lösen«.

Wenn wir also Textaufgaben algebraisch lösen wollen, dann müssen wir sie zuerst aus der Umgangssprache in die Sprache der Algebra übersetzen, die du in den letzten Kapiteln gelernt hast.

Bei einer solchen Übersetzung kann ein *Schema** hilfreich sein. Die folgenden Beispiele sollen dir zeigen, wie man mit seiner Hilfe eine Textaufgabe lösen kann.

Da die Aufgaben des *Papyrus Rhind* zu einfach sind, die des AL-CHARIZMI aber viel zu schwer – er hat ja sein Buch für Testamentsvollstrecker, Kaufleute, Landvermesser und Bankhalter geschrieben –, haben wir als erstes eine Aufgabe aus der 1522 erschienenen *Rechenung auff der linihen vnd federn* des Adam RIES (1492–1559) in der Fassung von 1574 ausgewählt, um dir das Schema vorzuführen.

* σχήμα (griech.) gesprochen s|chema, hat viele Bedeutungen, u. a. auch *Gestalt, Figur, Form*.

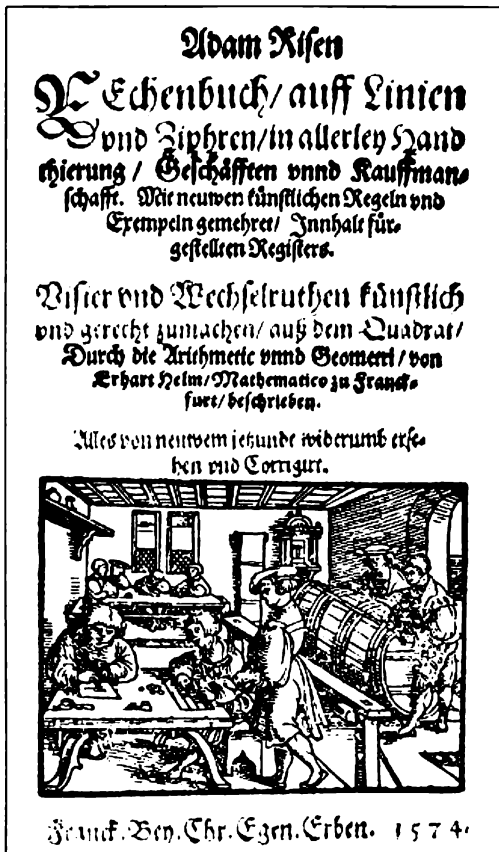


Abb. 161.1 Titelblatt vom *Rechenbuch auff Linien und Ziphren* (1574) von Adam RIES



Adam Ries

Abb. 161.2 Adam RIES (1492 Staffelsein–30.3./1.4.(?) 1559 Annaberg) als 58jähriger. Holzschnitt vom Titelblatt der *Rechenung nach der lenge, auff den Linien und Feder* (1550). – Adam RIES war Rechenmeister, d. h., er gehörte zu denjenigen, die mit den in arabischen Ziffern geschriebenen Zahlen auch rechnen konnten. In Annaberg führte er das Rechenwesen des Erzbergbaus und leitete eine Rechenschule. Seine Lehrbücher und damit seine Methoden fanden eine so große Verbreitung, daß schließlich die Rechenart »nach Adam Riese« entstand.

Beispiel 1:

**Item / einer hat gelt / verspielt darvon $\frac{1}{3}$. ver-
zehret vom vbrigen 4. fl. mit dem andern handele
er / verleuret ein viertheil / vnd behelt 20. fl. wie
viel hat er zum ersten aufgeführt?**

Im heutigen Deutsch liest sich die Aufgabe etwa so:

Einer hat Geld, verspielt davon $\frac{1}{3}$. Von dem, was ihm übriggeblieben ist, verbraucht er 4 Gulden*. Mit dem Rest handelt er und verliert ein Viertel. Es bleiben ihm 20 Gulden. Wieviel Gulden hat er anfänglich besessen?

* = goldene Münze. 1252 begann Florenz mit der Prägung einer solchen Münze, die *floren* und auf französisch *florin* hieß. Daher wurde der Gulden mit fl. abgekürzt.

Lösung:

1. Festlegung der Unbekannten: Zuerst mußt du dir klarwerden, wonach überhaupt gefragt ist. Für diese gesuchte Größe führst du einen Buchstaben, meist x , als Unbekannte ein:

x = Anzahl der Gulden, die der Mann anfänglich besessen hat.

2. Übersetzen der Textinformationen und Aufstellen der Gleichung: Durch die soeben vorgenommene Bezeichnung der unbekannten Größe mit x kannst du nun so tun, als wäre sie dir bekannt. Damit kannst du alle Informationen des Textes in mathematische Terme übersetzen, die du am besten gleich vereinfachst, und schließlich die Gleichung als Bedingung für diese Terme aufstellen. Kontrolliere aber, ob du alle Angaben des Textes auch wirklich verwendet hast. Schrittweise erhalten wir

Anzahl der im Spiel verlorenen Gulden $= \frac{1}{3}x$

Anzahl der ihm noch verbliebenen Gulden $= x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$

Anzahl der Gulden, mit denen er handelt $= \frac{2}{3}x - 4$

Anzahl der Gulden, die er beim Handel verliert $= \frac{1}{4}(\frac{2}{3}x - 4)$

Anzahl der Gulden, die ihm noch bleiben $= \frac{3}{4}(\frac{2}{3}x - 4) = \frac{1}{2}x - 3$

Mit der letzten verbliebenen Information können wir nun die Bestimmungsgleichung aufstellen:

$$\frac{1}{2}x - 3 = 20.$$

3. Auflösung der Gleichung: Wende auf die gefundene Gleichung die Methoden an, die du gelernt hast, um die Lösungsmenge der Gleichung zu ermitteln.

$$\frac{1}{2}x - 3 = 20$$

$$\frac{1}{2}x = 23$$

$$x = 46, \text{ also } L = \{46\}.$$

4. Antwort: Das mathematische Ergebnis wird nun in die Alltagssprache übersetzt und damit die Antwort auf die im Text gestellte Frage gegeben.

»Der Mann besaß anfänglich 46 Gulden.«

5. Textprobe: Es geht jetzt nicht darum zu prüfen, ob du die in 2 aufgestellte Gleichung richtig gelöst hast, sondern darum, ob die gefundenen Lösungszahlen alle Bedingungen des Textes erfüllen. Du mußt also eine Textprobe durchführen. Geht sie schief, dann hast du dich entweder verrechnet, oder du hast den Aufgabentext falsch übersetzt. Meist macht man die Textprobe nur mündlich. Wir schreiben sie ausnahmsweise hin.

Anfänglicher Besitz $= 46$ fl.

Verlust beim Spiel $= \frac{1}{3}$ von 46 fl. $= 15\frac{1}{3}$ fl.

Rest $= 46$ fl. $- 15\frac{1}{3}$ fl. $= 30\frac{2}{3}$ fl.

Kapital, mit dem er handelt $= 30\frac{2}{3}$ fl. $- 4$ fl. $= 26\frac{2}{3}$ fl.

Verlust beim Handel $= \frac{1}{4}$ von $26\frac{2}{3}$ fl. $= \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{3}$ fl. $= \frac{20}{3}$ fl. $= 6\frac{2}{3}$ fl.

Es verbleiben ihm $26\frac{2}{3}$ fl. $- 6\frac{2}{3}$ fl. $= 20$ fl. – Stimmt!

Eine weitere Aufgabe zum Einüben bietet dir ein altes Testament*.

Beispiel 2:

Ein Mann hinterläßt seinen 3 besten Freunden 300 Gulden. Im Testament bestimmt er, daß Anton um 40 Gulden mehr als Hans erhalten soll; Ulrich aber soll halb soviel wie die beiden anderen zusammen bekommen. Wie viele Gulden entfallen auf jeden?

Lösung:

1. Festlegung der Unbekannten: Gefragt ist hier nach den Anzahlen der Gulden, die jeder einzelne erhält. Das sind eigentlich 3 Unbekannte. Da aber auf Grund des Textes ein gewisser Zusammenhang zwischen diesen besteht, hoffen wir, mit einer Unbekannten auszukommen. Wegen der komplizierten Bedingung für Ulrich eignen sich seine Gulden wohl nicht recht dafür. Wir könnten uns aber mit gleich guten Gründen für den Anteil von Anton oder für den von Hans entscheiden. Daher führen wir dir beide Möglichkeiten vor.

x = Anzahl der Gulden, die Anton erhält		y = Anzahl der Gulden, die Hans erhält
---	--	--

2. Übersetzen der Textinformationen und Aufstellung der Gleichung: Nun drücken wir die Anteile, die auf die beiden anderen entfallen, durch die gewählte Unbekannte aus:

Anzahl der Gulden, die Hans erhält $= x - 40$ Anzahl der Gulden, die Ulrich erhält $= \frac{1}{2}[x + (x - 40)] = x - 20$		Anzahl der Gulden, die Anton erhält $= y + 40$ Anzahl der Gulden, die Ulrich erhält $= \frac{1}{2}[y + (y + 40)] = y + 20$
--	--	---

Da wir nun die 3 Anzahlen als Terme in x bzw. y kennen, können wir mit Hilfe der übriggebliebenen Information über die Höhe der Erbschaft die Bestimmungsgleichung aufstellen:

$x + (x - 40) + (x - 20) = 300$		$(y + 40) + y + (y + 20) = 300$
---------------------------------	--	---------------------------------

3. Auflösung der Gleichung:

$x + (x - 40) + (x - 20) = 300$ $x + x - 40 + x - 20 = 300$ $3x - 60 = 300$ $3x = 360$ $x = 120$ also $L = \{120\}$.		$(y + 40) + y + (y + 20) = 300$ $y + 40 + y + y + 20 = 300$ $3y + 60 = 300$ $3y = 240$ $y = 80$ also $L = \{80\}$.
--	--	--

* testamentum (lat.) = der letzte Wille

4. Antwort:

Anton erhält 120 Gulden,
 Hans erhält $(120 - 40)$ Gulden =
 = 80 Gulden,
 Ulrich erhält $\frac{1}{2}[120 + (120 - 40)]$
 Gulden = 100 Gulden.

Hans erhält 80 Gulden,
 Anton erhält $(80 + 40)$ Gulden =
 = 120 Gulden,
 Ulrich erhält $\frac{1}{2}[80 + (80 + 40)]$
 Gulden = 100 Gulden.

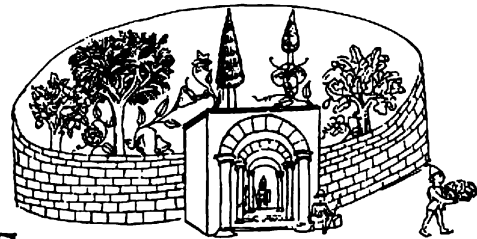
5. Textprobe: Die 120 Gulden von Anton sind tatsächlich um 40 mehr als die 80, die Hans erhält. Zusammen erhalten sie 200; die Hälfte davon ist 100. Und unsere Rechnung hat dem Ulrich 100 Gulden zugeteilt. Dadurch haben sie zusammen $(120 + 80 + 100)$ Gulden = 300 Gulden, was die ganze Erbschaft ausmacht. – Stimmt!

Aufgaben

1. Ein Onkel vermacht seinen beiden Neffen ein Vermögen von 12400 DM. Wieviel erhält jeder, wenn der ältere Neffe laut Testament für sein Studium 3500 DM mehr bekommen soll als der jüngere?
2. Ein Vermögen von 14000 DM soll an die drei erbberechtigten Kinder in folgender Weise verteilt werden: Der Sohn erhält zum Ausgleich für die Kosten seiner Ausbildung 3000 DM weniger als die jüngere Tochter, die ältere Tochter als Entschädigung für ihre Mithilfe im Haushalt 2000 DM mehr als diese.
3. Eine Erbschaft von 19500 DM soll unter drei Erben A, B, C so verteilt werden, daß B um 1500 DM mehr als A und C um 3500 DM weniger als A und B zusammen erhält.
4. Die Zahl 100 ist in 4 Summanden aufzuteilen. Der 2. Summand soll die Hälfte, der 3. ein Drittel, der 4. ein Viertel des ersten Summanden sein. Wie heißen die vier Summanden?
5. Die Zahl 1000 soll so in vier Summanden zerlegt werden, daß der zweite doppelt, der dritte dreimal und der vierte viermal so groß ist wie der erste.
6. Eine alte chinesische Aufgabe: In einem Stall sind Kaninchen und Fasanen; sie haben zusammen 35 Köpfe und 98 Füße. Wieviel Tiere jeder Art waren es?
7. In einer Garage stehen Personenkraftwagen, Motorräder und Fahrräder. Die Gesamtzahl der Fahrzeuge beträgt 30, die der Kraftfahrzeuge 20. Die Fahrzeuge stehen auf insgesamt 86 Rädern. Wie viele Fahrzeuge jeder Art sind hinterstellt?
- 8. Ein aus 12 Wagen und einer Lokomotive bestehender Personenzug ist aus zweiachsigen Güterwagen und dreiachsigen Personenwagen zusammen-

gestellt. Die elektrische Lokomotive läuft auf vier Achsen. Aus wieviel Personen- und Güterwagen besteht der Zug, wenn er einschließlich Lokomotive auf insgesamt 72 Rädern läuft?

9. Eine Weinlieferung im Wert von 675 DM besteht aus drei Sorten. Eine Flasche der besten Qualität kostet 13,5 DM, eine von der mittleren Qualität 10,5 DM und eine der billigen Sorte 6 DM. Von der mittleren Sorte sind es zweimal und von der teuren Sorte dreimal soviel Flaschen wie von der billigen Preisklasse. Wieviel Flaschen wurden von jeder Sorte geliefert?
10. Bei einer Kinovorstellung betrug die Gesamteinnahme 1718 DM. Für den dritten Platz wurden 83, für den zweiten 106 und für den ersten 34 Eintrittskarten gelöst. Der Eintrittspreis für den 2. Platz war um 1,5 DM höher als der für den 3. Platz, während der Preis für den 1. Platz $\frac{5}{3}$ desjenigen für den 2. ausmachte. Wie teuer waren die einzelnen Plätze?
11. Aus dem *Chiu Chang Suan Shu*: Ein Mann hat Reis bei sich. Er geht durch 3 Zollschranken hindurch. An der äußeren Zollschranke wird ihm $\frac{1}{3}$ weggenommen, an der mittleren Schranke wird ihm vom Verbliebenen der fünfte Teil weggenommen, an der inneren Zollschranke wird ihm $\frac{1}{7}$ von dem weggenommen, was er noch bei sich hatte. Es blieben ihm 5 Tou. Wie viele Tou hatte er am Anfang? (1 Tou $\approx$ 0,2 dm³)
12. Von dem armenischen Astronomen und Mathematiker ANANIA SCHIRAKAZI (= ANANIA VON SCHIRAK, † um 670) stammt die Aufgabe: Ein Mann trat in eine Kirche und bat Gott: Gib mir soviel, wie ich habe, dann gebe ich Dir 25 Dahekan. Dasselbe tat er dann in einer anderen Kirche und schließlich noch in einer dritten. Übrig blieb ihm nichts. Wie viele Dahekan* hatte er anfangs?
13. Aus dem *Liber abbaci* (1202) des LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240): *De illo qui intravit in viridario pro pomis colligendis***: Jemand ging in einen Obstgarten, in dem 7 Tore waren; er bekam dort eine bestimmte Anzahl Äpfel. Als er herausgehen wollte, mußte er dem ersten Wächter die Hälfte aller Äpfel geben und einen mehr, dem zweiten Wächter die Hälfte der restlichen Äpfel und einen mehr. Als er so auch den anderen 5 Wächtern gegeben hatte, hatte er nur noch 1 Apfel. Wie viele Äpfel hatte er bekommen?



E Gleiche Signatur: *De illo qui intravit in viridario pro pomis colligendis*

Abb. 165.1 Apfelgarten mit drei Torwächtern. Aus einem Manuskript des italienischen Mathematikers, Astronomen, Astrologen und Dichters Paolo DAGOMARI (um 1281 – zwischen 1365 und 1372).

* Dahekan ist ein Gewichtsmaß; 1 Dahekan entspricht 4,72 g. Zugleich bedeutet es auch eine Goldmünze von diesem Gewicht.

** Von jenem, der in den Obstgarten ging, um Äpfel zu holen. – Die älteste Aufgabe dieses Typs stammt aus dem *Chiu Chang Suan Shu*.

14. Aufgabe 26 der *propositiones ad acuendos iuvenes* des ALKUIN (735 bis 804): *De cursu canis ac fuga leporis**: Ein Hund sieht in einer Entfernung von 150 Fuß einen Hasen und jagt ihn. Der Hase springt 7 Fuß, der Hund 9 Fuß weit. Nach wie vielen Sprüngen hat der Hund den Hasen erjagt?
- 15. Vom Leben des großen griechischen Mathematikers DIOPHANT (*Διόφαντος*), den manche Vater der Algebra nennen, weil er die Lehre von den Zahlen und Gleichungen von der Geometrie abtrennte, wissen wir nichts. Vermutlich hat er um 250 n. Chr. in Alexandria gelebt. Seine angebliche Grabinschrift ist aber in der *Anthologia Palatina*, einer Sammlung griechischer Epigramme, überliefert.

»Hier dies Grabmal deckt Diophantos – ein Wunder zu schauen!
 Durch arithmetische Kunst lehret sein Alter der Stein.
 Knabe zu sein gewährt ein Sechstel des Lebens der Gott ihm,
 Als dann ein Zwölftel dahin, ließ er ihm sprossen die Wang’;
 Noch ein Siebtel, da steckt’ er ihm an die Fackel der Hochzeit,
 Und fünf Jahre darauf teilt’ er ein Söhnlein ihm zu.
 Weh! unglückliches Kind! Halb hatt’ es das Alter des Vaters
 Erst erreicht, da nahm’s Hades, der schaurige, auf.
 Noch vier Jahre ertrug er den Schmerz, der Wissenschaft lebend,
 Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht.«

Wie alt wurde DIOPHANT? Beachte, daß »das Alter des Vaters« in Zeile 7 auf zwei Arten verstanden werden kann. Einerseits kann damit das von DIOPHANT wirklich erreichte Lebensalter gemeint sein, andererseits könnte es aber auch das Alter sein, das DIOPHANT beim Tode seines Sohnes hatte. Welche der beiden Lösungen scheint dir auf Grund der 4. Zeile des Epigramms die richtige zu sein?

6.2 Wichtige Typen von Textaufgaben

Textaufgaben können sehr verschiedenartig aussehen. Trotzdem kann man bei näherer Betrachtung gewisse Typen ausmachen, die in verschiedener Einkleidung immer wieder auftauchen. Wenn du erkannt hast, daß eine vorgelegte Textaufgabe zu einem bekannten Typ gehört, dann fällt dir meist die Lösung leichter. Einige wichtige Typen stellen wir im Folgenden vor.

* Vom Lauf des Hundes und der Flucht des Hasen. – Ähnliche Aufgaben findet man bereits im *Chiu Chang Suan Shu*, aus dem überhaupt die ältesten Bewegungsaufgaben stammen.
 Die Aufgaben, die Jugend scharfsinniger zu machen, werden dem angelsächsischen Gelehrten ALKUIN (= Freund des Tempels) (um 712 York – 19.5.804 Tours) zugeschrieben. ALKUIN war Freund und Lehrer Kaiser Karls des Großen. Er übte erheblichen Einfluß auf das geistige Leben seiner Zeit aus.

6.2.1 Bestimmung von Zahlen

Beispiel:

Eine dreiziffrige Zahl hat die Quersumme 13. Ihre Einerziffer ist doppelt so groß wie ihre Hunderterziffer. Vertauscht man Einer- und Zehnerziffer miteinander, dann erhält man eine um 27 kleinere Zahl. Wie hieß die ursprüngliche Zahl?

Lösung:

1. x = Hunderterziffer

2. Einerziffer = $2x$

$$\text{Zehnerziffer} = 13 - x - 2x = 13 - 3x$$

$$\begin{aligned}\text{Wert der Zahl} &= x \cdot 100 + (13 - 3x) \cdot 10 + (2x) \cdot 1 = \\ &= 100x + 130 - 30x + 2x = \\ &= 72x + 130\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Wert der veränderten Zahl} &= x \cdot 100 + (2x) \cdot 10 + (13 - 3x) \cdot 1 = \\ &= 117x + 13\end{aligned}$$

$$\text{Bestimmungsgleichung: } 72x + 130 - 27 = 117x + 13$$

$$\begin{aligned}3. \quad 72x + 103 &= 117x + 13 \\ 90 &= 45x \\ x &= 2.\end{aligned}$$

4. Die ursprüngliche Zahl hat die Hunderterziffer 2, die Einerziffer $2 \cdot 2 = 4$ und die Zehnerziffer $13 - 3 \cdot 2 = 7$. Also heißt sie 274.

Beachte: Eine Zahl mit der Einerziffer a , der Zehnerziffer b und der Hunderterziffer c hat den Wert $100c + 10b + a$ und die Quersumme $c + b + a$.

Aufgaben

- 1. Aus dem *Schlüssel zur Arithmetik* von AL-KASCHI († 1429 in Samarkand): Verdoppelt man eine Zahl und addiert die Eins dazu, multipliziert man dann die Summe mit 3 und gibt 2 dazu, multipliziert man dann das Erhaltene mit 4 und addiert 3, dann hat man 45. Wie heißt die Zahl?
- 2. Vermehrt man eine Zahl um 16, so erhält man um 2 weniger als ihr Dreifaches. Wie heißt sie?
- 3. Vergrößert man eine Zahl um 5, zieht vom Doppelten dieser Summe 4 ab und teilt dann das Ergebnis durch 5, so erhält man 4. Welche Zahl ist es?
- 4. Welche Zahl hat folgende Eigenschaft: zieht man 9 von ihr ab und addiert zur Hälfte dieser Differenz 5, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl?

5. Aus *Daheim* (1884):
 Eine Zahl hab' ich gewählt, jetzt mit 3 multipliziert,
 90 noch hinzugezählt, 84 subtrahiert,
 drauf durch 18 dividiert, und als Rest ist mir geblieben
 wieder 18 dann addiert, dann zuletzt die heilige 7.
- 6. Welche 3 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen haben die Summe 33?
 - 7. Welche zweiziffrige Zahl ist durch 11 teilbar und hat die Quersumme 8?
 - 8. Bei welcher Zahl ist es gleichgültig, ob man sie durch 2 teilt oder um 2 vermindert?
 - 9. Bei welcher Zahl ist es gleichgültig, ob man sie mit 13 multipliziert oder durch 13 dividiert?
 - 10. Die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl ist um 2 kleiner als die Einerziffer. Die ganze Zahl ist 6mal so groß wie die Einerziffer. Wie heißt die Zahl?
 - 11. Auf der Einerstelle einer zweistelligen Zahl steht die Ziffer 6. Vertauscht man Einer- und Zehnerziffer und addiert die neue Zahl zur ursprünglichen, so erhält man 88. Wie heißt die Zahl?
 - 12. Auf der Einerstelle einer dreistelligen Zahl steht die Ziffer 7. Die Anzahl der Zehner ist so groß wie die Anzahl der Einer und Hunderter zusammen. Nun vertauscht man die Einer- mit der Hunderterziffer. Die Summe aus der neuen und der ursprünglichen Zahl ist 1089. Wie heißt die Zahl?
 - 13. Die Hunderterziffer einer dreistelligen Zahl ist 4. Streicht man diese links weg und setzt sie rechts an, so entsteht eine um 243 größere Zahl. Berechne die ursprüngliche Zahl.
 - 14. Die Einerziffer einer sechsstelligen Zahl ist 2. Nimmt man diese Ziffer weg und setzt sie vor die übrigen, so entsteht eine Zahl, die gleich dem 3. Teil der ursprünglichen ist. Berechne die Zahl.
 - 15. Die Summe zweier Zahlen ist 56, ihre Differenz 22. Wie heißen die Zahlen?

6.2.2 Bestimmung des Alters

Beispiel:

Eine Mutter ist jetzt dreimal so alt wie ihre Tochter. In 4 Jahren wird sie achtmal so alt sein, wie ihre Tochter vor 7 Jahren war. Wie alt sind Mutter und Tochter jetzt?

Lösung:

1. x = jetziges Alter der Tochter in Jahren

2. Der Übersicht halber bestimmt man die Terme in einer Tabelle:

	vor 7 Jahren	jetzt	in 4 Jahren
Alter der Tochter in Jahren	$x - 7$	x	$x + 4$
Alter der Mutter in Jahren	$3x - 7$	$3x$	$3x + 4$

Bestimmungsgleichung: $3x + 4 = 8 \cdot (x - 7)$

3.
$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 8x - 56 \\ 60 &= 5x \\ x &= 12. \end{aligned}$$

4. Die Tochter ist jetzt 12 Jahre alt, die Mutter 36 Jahre.

Aufgaben

1. Ein Vater ist doppelt so alt wie sein Sohn. Vor 24 Jahren war er um 32 Jahre älter als dieser. Wie alt sind beide jetzt?
2. Eine Mutter, die jetzt doppelt so alt ist wie ihre Tochter, war vor 11 Jahren gerade dreimal so alt wie diese. Wie alt sind beide jetzt?
3. Hans ist 16 Jahre, sein Bruder Fritz 12 Jahre alt.
 - a) Vor wieviel Jahren war Hans doppelt so alt wie Fritz?
 - b) Vor wieviel Jahren war er $1\frac{1}{2}$ mal so alt?
- 4. Ein Vater ist jetzt 13mal so alt wie sein Sohn. Nach $17\frac{1}{2}$ Jahren ist das Alter des Vaters um $2\frac{1}{2}$ Jahre höher als das dreifache Alter des Sohnes. Wie alt sind beide jetzt?
5. An seinem 50. Geburtstag stellt ein Vater fest, daß seine drei Kinder zusammen ebenso alt sind wie er selbst. Die Tochter ist um 6 Jahre älter als der jüngste Sohn, der gerade halb so alt ist wie sein älterer Bruder.
 - a) Wie alt ist der Vater?
 - b) Wie alt sind die Kinder?
- 6. In welchem Jahr fand zwischen Vater und Sohn folgendes Gespräch statt?
»Bei deiner Geburt war ich 30 Jahre alt. Am Ende des 2. Weltkriegs warst du sieben. Heute bin ich gerade dreimal so alt wie du.«
- 7. Ein Onkel ist jetzt dreimal so alt wie sein Neffe und viermal so alt, wie der Neffe vor 5 Jahren war. Wie alt sind beide jetzt?
- 8. Otto ist jetzt dreimal so alt, wie Heinz vor fünf Jahren war. Nach 5 Jahren wird Otto doppelt so alt sein, wie Heinz jetzt ist. Wie alt sind beide jetzt?
- 9. Lotte ist 19 Jahre alt. Als Helga 13 Jahre zählte, war Lotte ebenso alt, wie Helga jetzt ist. Wie alt ist Helga jetzt?

10. Karl ist 27 Jahre alt. Er ist dreimal so alt, wie Inge war, als Karl doppelt so alt war, wie Inge jetzt ist. Wie alt ist Inge jetzt?
11. Der berühmte französische Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (latinisiert zu CARTESIUS) hatte 4 Jahre vor Beginn des 30jährigen Krieges (1618) noch zwei Drittel seiner Lebenszeit vor sich. Er starb zwei Jahre nach Kriegsende. Berechne sein Geburts- und Todesjahr.
12. Müller & Sohn werben mit dem Slogan: »Wir haben zusammen 50 Jahre Berufserfahrung«. Wie alt können Vater Müller und Sohn Karl sein, wenn sie den Beruf seit dem 18. Lebensjahr ausüben und wenn der Vater mindestens 20 Jahre älter ist als sein Sohn? Wie alt sind sie zusammen?
13. *Löse ohne Bestimmungsgleichung durch Knobeln:*
 PLATON war ein Schüler des SOKRATES, ARISTOTELES ein Schüler des PLATON. Der Schüler war jeweils um 43 Jahre jünger als sein Lehrer. Die Zahl der Lebensjahre hat bei jedem dieser Philosophen die Quersumme 8. Das von PLATON erreichte Alter wird durch die größte zweistellige Zahl mit dieser Eigenschaft angegeben. SOKRATES starb im 8., ARISTOTELES im 7. Jahrzehnt seines Lebens. Vermehrt man die doppelte Summe der drei Lebensalter um 1, so erhält man das Geburtsjahr des PLATON. Berechne für jeden der drei Philosophen das Geburts- und Todesjahr.

6.2.3 Prozentaufgaben

Beispiel:

Jemand hat einen gewissen Betrag als Einlage in ein Geschäft eingebracht. Nach einem Jahr erhält er 10% davon als Gewinn. Er erhöht seinen Geschäftsanteil um diesen Betrag. Im darauffolgenden Jahr erzielt er aber nur einen Gewinn von 5% seiner Einlage. Immerhin hat er nun 12 400 DM mehr als anfangs. Wie groß war die ursprüngliche Einlage?

Lösung:

1. x = ursprüngliche Einlage in DM
2. Gewinn in DM im 1. Jahr = 10% von $x = 0,1x$
 Einlage in DM für das 2. Jahr = $x + 0,1x = 1,1x$
 Gewinn in DM nach dem 2. Jahr = 5% von $1,1x = 0,055x$
 Kapital in DM am Ende des 2. Jahres = $1,1x + 0,055x = 1,155x$
 Bestimmungsgleichung: $1,155x = x + 12400$
3. $0,155x = 12400$
 $x = 80000$.
4. Die Einlage betrug anfangs 80 000 DM.

Beachte: $p\%$ ist die Zahl $\frac{p}{100}$.

$p\%$ von a bedeutet $\frac{p}{100} \cdot a$.

** Zur Geschichte des Prozentbegriffs

Die Idee, bei vielen Aufgaben des praktischen Lebens die Zahl 100 als Vergleichszahl zu wählen, hat sich seit alters her bewährt. Man findet sie bereits in einem babylonischen Text, bei Aufgaben der Ägypter, Griechen und Inder. Die italienischen Kaufleute des Mittelalters machten sehr häufig Angaben verschiedener Art »für hundert« = *per cento*. In süddeutschen Quellen taucht dieses italienische *per cento* im 15. Jh. auf; es wird zu Anfang des 16. Jh.s im hochdeutschen Sprachraum zu einem falsch latinisierten *pro cento**. Schließlich werden die beiden Wörter zusammengeschrieben, im 18. Jh. dann als *das Prozent* substantiviert und letztlich auch dekliniert. Im Österreichischen hat sich die süddeutsche Form als *das Perzent* noch erhalten.

Vielfach benützt man als Vergleichszahl auch die Zahl 1000, die im Lateinischen *mille* heißt; man spricht daher von einer Promille-Rechnung. Die Idee dazu stammt wohl von dem berühmten italienischen Arzt und Mathematiker Geronimo CARDANO (1501–1576).

Woher kommt unser Prozentzeichen %? In Italien kürzte man ab dem 14. Jh. das *per cento* durch *p c* oder auch durch *p c* ab, das handschriftlich manchmal die Form $\text{P} \text{---}$ hatte. In der 2. Hälfte des 17. Jh.s wurde vermutlich aus drucktechnischen Gründen aus dem $\text{P} \text{---}$ einfach $\frac{0}{0}$. Später ließ man das *per* weg. Schließlich schrieb 1841 Albert Franz JÖCHER das Zeichen $\frac{0}{0}$ mit dem schrägen Bruchstrich als $\frac{0}{0}$, woraus dann das Prozentzeichen % wurde.

Für *pro mille* schrieb man zunächst $\frac{00}{00}$, dann $\frac{0}{0}$ und schließlich mit dem schrägen Bruchstrich $\frac{0}{00}$.



1572

Geronimo Cardano

Abb. 171.1 Geronimo CARDANO
(24.9.1501 Pavia – 20.9.1576 Rom)

Aufgaben

1. Ein Grossist verkauft das aus der Fabrik bezogene Tuch mit 15% Gewinn an den Händler, der seinerseits noch 25% Gewinn daraufschlägt. Nun ist das Meter um 17,50 DM teurer als der Fabrikpreis. Wie hoch war dieser?
2. Es spekuliert einer mit seinem Vermögen und gewinnt dadurch im ersten Jahr 7%, verbraucht aber 20000 DM. Mit seinem jetzigen Vermögen gewinnt er im darauffolgenden Jahr 6%, verbraucht aber 20900 DM, so daß er schließlich um 5% mehr als am Anfang besitzt. Wieviel hatte er?

* Korrekt muß es nämlich *pro centum* heißen.

- 3. Zwei Brüder erben zusammen 9240 DM zu ungleichen Teilen; da aber der eine sein Kapital zu $3\frac{1}{2}\%$, der andere zu 4% anlegt, erhalten sie jährlich den gleichen Zins. Wieviel erbte jeder?
- 4. Zwei Kapitalien brachten gleich viel Zins, obwohl das erste um $\frac{1}{2}\%$ höher ausstand als das zweite. Wie hoch waren sie verzinst, wenn das erste 3000 DM, das zweite 3375 DM betrug?
- 5. Zu wieviel Prozent sind 2662,50 DM ausgeliehen, wenn sie in 144 Tagen 49,70 DM Zins einbringen? (Das Zinsjahr hat 360 Tage.)
- 6. Ein Kapital von 6000 DM verzinst sich mit 3% . Nach einem Jahr wird der Zins zum Kapital geschlagen. Gleichzeitig ändert die Bank den Zinsfuß. Nach einem weiteren Jahr ist das Kapital samt Zinsen auf 6427,20 DM angewachsen. Wie hoch war der Zinsfuß im zweiten Jahr?
- 7. 1800 DM sind zu einem gewissen Zinsfuß ausgeliehen. Ein zweites, um 400 DM größeres Kapital verzinst sich mit einem Zinsfuß, der $\frac{2}{7}$ von dem des ersten Kapitals beträgt. Beide Kapitalien zusammen bringen in einem Jahr 216 DM Zinsen ein. Wie hoch verzinst sich jedes der beiden Kapitalien?
- 8. Jemand hat $\frac{1}{4}$ eines Kapitals in Pfandbriefen angelegt, die sich mit $4\frac{1}{2}\%$ verzinsen, $\frac{1}{3}$ in Häusern, die 4% , $\frac{1}{5}$ in Grundstücken, die durch Verpachtung $3\frac{1}{2}\%$ einbringen. Den Rest hatte er in Aktien angelegt, bei denen er 2% verlor. Wie groß war sein Kapital, wenn er einen Jahreszins von 8175 DM erhielt?
- 9. Auf ein Sparkonto wird ein gewisses Kapital eingezahlt, das mit 4% verzinst wird. Nach einem Jahr werden die Zinsen dazugeschlagen und noch 720 DM einbezahlt. Nach weiteren 75 Tagen ist das Konto mit Zinsen auf 5445 DM angewachsen. Wie groß war das Anfangskapital? (Das Zinsjahr hat 360 Tage.)
- 10. Ein Spieler gewinnt beim ersten Spiel 30% seines Einsatzes. Dadurch ermutigt, wagt er ein zweites Spiel und verliert dabei 125% des vorher erzielten Gewinnes. Es bleiben ihm vom ursprünglichen Einsatz noch 74 DM. Wieviel hatte er eingesetzt?
- 11. Eine Rechnung macht einschließlich 14% Mehrwertsteuer 889,20 DM. Wieviel macht der reine Rechnungsbetrag ohne Steuer aus?

6.2.4 Mischungsaufgaben

Beispiel:

Aus einer 10%igen und einer 4%igen Salzlösung sollen durch Mischen 2 kg einer 7,6%igen Salzlösung hergestellt werden. Wie viele kg von jeder der Ausgangslösungen muß man verwenden?

Lösung:

1. x = Anzahl der kg der 10%igen Salzlösung
2. Anzahl der kg der 4%igen Salzlösung = $2 - x$
 Salzmenge in der 10%igen Lösung in kg = 10% von $x = 0,1x$
 Salzmenge in der 4%igen Lösung in kg = 4% von $(2 - x) = 0,04 \cdot (2 - x) = 0,08 - 0,04x$
 Salzmenge in der 7,6%igen Lösung in kg = 7,6% von $2 = 0,076 \cdot 2 = 0,152$

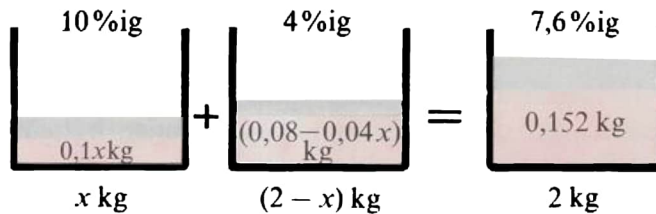


Abb. 173.1 Überlegungsfigur zur Aufstellung der Bestimmungsgleichung

Bestimmungsgleichung: $0,1x + (0,08 - 0,04x) = 0,152$

3. $0,06x = 0,072$
 $x = 1,2$.
4. Man muß 1,2 kg 10%iger Salzlösung mit 0,8 kg 4%iger Salzlösung mischen, um 2 kg einer 7,6%igen Salzlösung zu erhalten.

Beachte: 1. Prozentangaben bei Mischungen bedeuten Gewichtsprozente, wenn nichts anderes gesagt wird.

So enthält z. B. eine 12%ige Salzlösung 12 g Salz je 100 g Lösung.

2. Bei Mischungen gilt:

Menge eines Stoffes vorher = Menge des Stoffes nachher

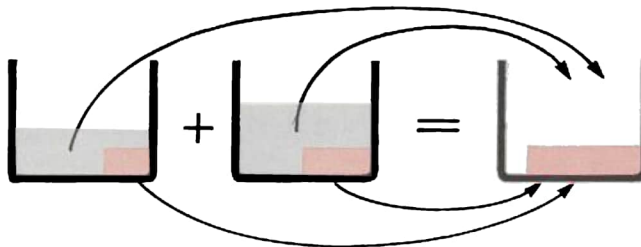


Abb. 173.2 Veranschaulichung der Erhaltung der Menge beim Mischen

Aufgaben

- 1. *Aufgabe 71* aus dem *Papyrus Rhind*: Aus einem Krug Bier der Stärke 2 wird $\frac{1}{4}$ abgeschüttet und durch Wasser ersetzt. Wie groß ist die Stärke der Mischung?
- 2. 800 g einer 10%igen Sole werden mit 400 g Wasser verdünnt. Wieviel % Salz enthält die Mischung?
- 3. Bei starken Blutverlusten wird häufig $\frac{2}{3}$ %ige Kochsalzlösung in die Blutbahn eingeführt. Mit wieviel kg reinem Wasser muß man 539 g einer 2%igen Kochsalzlösung verdünnen, um die erforderliche Konzentration herzustellen?
- 4. 180 g einer Sole werden durch Verdampfen 125 g Wasser entzogen, wodurch ihr Salzgehalt auf 12 % ansteigt. Welchen Salzgehalt hatte sie anfangs?
- 5. 255 g einer 15%igen Zuckerlösung werden mit 207 g einer 8%igen Zuckerlösung gemischt. Welchen Prozentgehalt an Zucker hat die Mischung?
- 6. 595 g einer 15%igen Zuckerlösung sollen mit 8%iger Zuckerlösung so gemischt werden, daß die Mischung 12 % Zucker enthält. Wieviel Gramm der zweiten Lösung sind dazu erforderlich?
- 7. Wieviel Gramm reines Wasser muß man 300 g 98%igem Alkohol zusetzen, um 60%igen Alkohol zu erhalten?
- 8. Von zwei Sorten Spiritus enthält die eine 4 kg Alkohol in 7 kg Spiritus, die andere 7 kg Alkohol in 8 kg Spiritus. Wie viele kg von jeder Sorte Spiritus sind zur Herstellung einer Sorte verwendet worden, die 33 kg Alkohol in 45 kg Spiritus enthält?
- 9. Ein Faß enthielt 98%igen Spiritus. Nachdem jemand 12 kg abzapfte und durch Wasser ersetzte, war der Alkoholgehalt nur noch 83 %. Wie viele kg Spiritus enthielt das Faß?
- 10. Das Meerwasser im Persischen Golf enthält etwa 5 % Salz. Wie viele kg Süßwasser muß man zu 40 kg Meerwasser dazugießen, damit der Salzgehalt der Mischung 2 % beträgt?
- 11. Ein Kaufmann bezieht zwei Sorten Rosinen. Der Verkaufspreis würde für 2 kg der ersten Sorte 4,50 DM, für 1 kg der zweiten 1,80 DM betragen. Wieviel kg der zweiten Sorte muß man mit 8 kg der ersten Sorte mischen, damit man 1 kg der Mischung um 2,04 DM verkaufen kann?
- 12. Von einer Kaffeesorte kosten 16 kg 368 DM, von einer zweiten kostet das Kilogramm 30 DM. Welche Menge der zweiten Sorte muß man mit 26 kg der ersten Sorte mischen, damit das Kilogramm der Mischung um 26 DM verkauft werden kann?

13. 1 kg Likörbohnen kostet 31,20 DM, $\frac{1}{2}$ kg Pralinen 9,60 DM. Wie müssen die Pralinen und Likörbohnen gemischt werden, damit 1 kg der Mischung 24 DM kostet?
14. Ein Auto braucht als Kühlflüssigkeit für den Motor eine Mischung aus Wasser und einem Frostschutzmittel. Der Anteil des benötigten Frostschutzmittels hängt vom Klima ab.
- Herr Huber hat in einem Kanister 10 kg Kühlflüssigkeit mit einem Frostschutzmittelanteil von 25%. Für den zu erwartenden kalten Winter braucht er aber einen Frostschutzmittelanteil von 40%. Wieviel Wasser muß er verdampfen und durch reines Frostschutzmittel ersetzen?
 - Wieviel kg reines Frostschutzmittel muß man zu 10 kg Kühlflüssigkeit mit 25% Anteil schütten, um 40%ige Kühlflüssigkeit zu erhalten?
 - Wieviel kg der Kühlflüssigkeit muß man durch reines Frostschutzmittel ersetzen, um aus 10 kg 25%iger Kühlflüssigkeit 10 kg 40%ige zu erhalten?
15. Mit wieviel g Kupfer muß man 234 g Feingold mischen, wenn die Legierung den Feingehalt 585 haben soll? (**Feingehalt** ist der heute meist in Promille des Gesamtgewichts ausgedrückte Gehalt an reinem Edelmetall.)
16. In welchem Verhältnis muß man Silber vom Feingehalt 750 mit Silber vom Feingehalt 600 mischen, um Silber vom Feingehalt 700 zu erhalten?
17. Manchmal wird der Feingehalt von Gold in Karat, der von Silber in Lot angegeben. Gold von n Karat besteht zu $\frac{n}{24}$ aus Feingold, Silber von n Lot zu $\frac{n}{16}$ aus Feinsilber.*

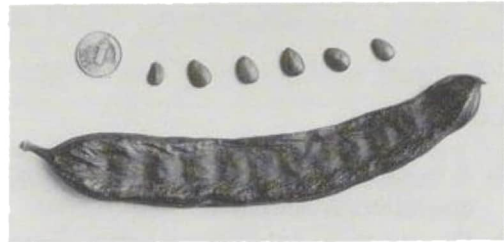


Abb. 175.1 Hülse und Samen des Johannisbrotbaums (*Ceratonia siliqua*), zum Vergleich eine 1-Pf-Münze. Das Gewicht der Samen wurde zu 77, 205, 221, 209, 202 und 158 mg bestimmt. Die mittleren vier wiegen also mit guter Näherung 0,2 g. Bedenke die Genauigkeit der alten Waagen!

- Wieviel g Feingold und wie viel g Kupfer benötigt man zur Herstellung eines 14karätigen Ringes von 5 g?
- Ein Silberschmied möchte 24 10lötige Teelöffel zu je 50 g herstellen. Welche Menge des vorhandenen 14lötigen Silbers benötigt er?

* Feingold ist Gold mit einem Feingehalt von mehr als 997‰. Rechne aber so, als wäre Feingold reines Gold. Das **Karat** entstand aus dem griechischen κεράτιον (*kerátion*) = *Hörnchen*, womit aber, ihrer Form wegen, auch die *Hülse des Johannisbrotbaums* bezeichnet wurde; arabisch *kirrat*. Die harten, nahezu gleichmäßig großen Samen wurden als Gewichte für Gold und Edelsteine verwendet. Heute gibt es für Edelsteine das metrische Karat = 0,2 g.

Das Wort Lot stammt aus dem Keltischen, wo es Blei bedeutet. Es wurde später auch als Gewichtseinheit verwendet.

6.2.5 Leistungsaufgaben

Die ältesten mathematischen Texte handeln von Aufgaben aus dem Wirtschaftsleben. Ein wichtiger Typ dieser Wirtschaftsaufgaben beschäftigte sich mit Problemen, bei denen Menschen, Tiere oder Geräte verschiedener Leistung zusammenwirkten und so eine Gesamtleistung erbrachten.

Einen Sonderfall dieses Aufgabentyps stellen die **Zisternenaufgaben** dar. Sie handeln von Zisternen, Brunnen, Bädern, Teichen, Fässern und dergleichen mehr, die jeweils mehrere Zu- und Abflüsse besitzen. Betrachten wir die älteste uns überlieferte Zisternenaufgabe. Sie stammt aus dem chinesischen Rechenbuch **九章算術** *Chiu Chang Suan Shu* (= *Neun Bücher arithmetischer Technik*), das vermutlich zu Beginn der Han-Zeit entstanden ist, die von 202 v. Chr. bis 9 n. Chr. dauerte (siehe auch Seite 85):

Beispiel:

Jetzt hat man einen Teich, 5 Kanäle führen ihm Wasser zu. Öffnet man von ihnen 1 Kanal, dann bekommt man in $\frac{1}{3}$ Tag 1 Füllung, beim nächsten in 1 Tag 1 Füllung, beim nächsten in $2\frac{1}{2}$ Tagen 1 Füllung, beim nächsten in 3 Tagen 1 Füllung und beim nächsten in 5 Tagen 1 Füllung. Jetzt öffnet man sie alle gleichzeitig. Frage: In wieviel Tagen füllen sie den Teich?

Lösung:

1. x = Zeit in Tagen, die zur Füllung des Teichs benötigt wird, wenn Wasser aus allen Kanälen zufließt.

2. Der 1. Kanal liefert in 1 Tag 3 Füllungen.

Der 2. Kanal liefert in 1 Tag 1 Füllung.

Der 3. Kanal liefert in 1 Tag $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ Füllungen = $\frac{2}{5}$ Füllungen.

Der 4. Kanal liefert in 1 Tag $\frac{1}{3}$ Füllung.

Der 5. Kanal liefert in 1 Tag $\frac{1}{5}$ Füllung.

Somit gilt: Alle 5 Kanäle liefern in 1 Tag $(3 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ Füllungen = $4\frac{14}{15}$ Füllungen.

Alle 5 Kanäle liefern in x Tagen $4\frac{14}{15} \cdot x$ Füllungen. Das soll aber gerade 1 Füllung sein, weil ja nach x Tagen der Teich durch alle Kanäle gefüllt sein soll. Also erhalten wir die

Bestimmungsgleichung: $4\frac{14}{15}x = 1$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \frac{74}{15}x = 1 \\ & x = \frac{15}{74}. \end{aligned}$$

4. Nach $\frac{15}{74}$ Tagen, das sind etwas weniger als 5 Stunden, wird der Teich durch alle 5 Kanäle gefüllt.

Beachte: 1. Bestimme, was in der Zeiteinheit jedes Gerät liefert oder verbraucht.
 2. Bestimme die einzelnen Lieferungen in der betrachteten Zeit.
 3. Die Summe aller Einzellieferungen ergibt die gewünschte Gesamtlieferung (meistens die Einheit).

Aufgaben

1. Von DIOPHANT (um 250 n. Chr.) stammt die Aufgabe:
 Bin ein Löw aus Erz. Aus den Augen, aus Mund und der Sohle unter dem rechten Fuß springen Fontänen hervor. Daß das Becken sich füllt, braucht rechts das Auge zwei Tage, links das Auge braucht drei und meine Fußsohle vier. Doch meinem Munde genügen sechs Stunden. Wie lange wohl dauert's, wenn sich alles vereint, Augen und Sohle und Mund?
2. Ein byzantinisches Rechenbuch des frühen 14. Jh.s überliefert uns:
 Einer hatte ein Schiff mit 5 Segeln. Mit dem ersten Segel nun wurde es an das beabsichtigte Ziel in der Hälfte eines Tages hingebracht, mit dem zweiten aber in $\frac{1}{3}$ Tag, mit dem dritten in $\frac{1}{5}$ Tag, dem vierten in $\frac{1}{7}$ und mit dem fünften Segel in $\frac{1}{9}$ Tag. Nachdem nun die 5 Segel gleichzeitig gehißt waren, in welchem Teil des Tages wurde das Schiff hingebracht?
3. Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) stellt in seiner *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschaft* 1489 die folgende Aufgabe:
 1 Leb vnd 1 Hunt vnd 1 Wolff
 Die essen mit eynder 1 schoff
 Und der Leb eß das schaff alleyn
 in eyner stund Und der wolff
 ynn 4 stunden Und der hunt in 6
 stunden. Nu ist die frag wen sy
 das schoff all z miteynander essen
 in wie langer zeyt sy das essen.
4. Ein Gasherd mit zwei Brennern wird aus einer Propangasflasche gespeist. Mit einer Füllung kann der eine Brenner 30 Std., der andere 20 Std. bei voller Flamme versorgt werden. Wie lange reicht der Flascheninhalt, wenn beide Brenner gleichzeitig in Betrieb sind?

Nu mach auch den dritten Spilch in 3
 stunden das ist 1 2 o minuten rymen 8
 eymer auff wie vil rymen in 3 z minuten
 $\frac{8}{11}$ facit 1 eymer $\frac{1}{11}$ Nu addir das als
 zusam facit gerad 8 eymer vñ ist rechte

Leb·wolff·Hunt·:

¶ Item des gleichñ 1 Leb vnd 1 Hunt
 vnd 1 Wolff Die essen mit eynder 1
 schoff Und der Leb eß das schaff alleyn
 in eyner stund Und der wolff ynn
 4 stunden Und der hunt in 6 stunden .
 Nu ist die frag wen sy das schoff all 3
 miteynander essen in wie langer zeyt sy
 das essen **Wach** also multiplicir 1 stuo
 f

Abb.177.1 Folium 138r der *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschaft* des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) von 1489

5. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußröhren. Mittels der ersten Röhre allein kann der Behälter in 6 Std., mittels der zweiten in 4 Std. gefüllt werden. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Röhren gleichzeitig in Betrieb sind?
86. Zum Ausheben einer Baugrube wird ein Bagger verwendet, der die gesamte Arbeit in 8 Tagen erledigen würde. Um schneller voranzukommen, wird nach 3 Tagen noch ein zweiter Bagger eingesetzt, der den gesamten Aushub in 12 Tagen allein bewältigen könnte. Wieviel Tage müssen beide Maschinen noch gemeinsam in Betrieb sein?

6.2.6. Aufgaben aus der Geometrie

1. Verkleinert man eine Seite eines Quadrats um 1 m, so entsteht ein um 11 m^2 kleineres Rechteck. Wie lang ist die Quadratseite?
2. Vergrößert man eine Seite eines Quadrats um 2 cm, so entsteht ein um $1,22 \text{ dm}^2$ größeres Rechteck. Wie lang ist die Quadratseite?
3. Die zwei Seiten eines Rechtecks unterscheiden sich um 5 cm. Die Fläche dieses Rechtecks ist um 64 cm^2 kleiner als die Fläche eines Rechtecks, dessen eine Seite um 13 cm größer ist als die kleinere Seite des gegebenen Rechtecks, während die andere Seite so lang wie diese ist.
4. Der Umfang eines Dreiecks ist 20 cm. Die erste Seite ist um 1 cm länger als die zweite, die dritte um 2 cm kürzer. Wie lang sind die drei Seiten?
5. In einem Rechteck mit dem Umfang 30 cm ist die Länge $1\frac{1}{2}$ mal so groß wie die Breite. Berechne die Seiten.
6. In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis 8 cm ist der Umfang das $3\frac{2}{3}$ fache der Schenkellänge. Wie groß ist diese?
87. In einem Dreieck mit den Seiten a , b , c und dem Umfang 12 m ist die Mittellparallelle zu b um 5 dm länger als diejenige zu a ; die Mittellparallelle zu c beträgt das $1\frac{1}{4}$ fache derjenigen zu b . Berechne die drei Seiten des Dreiecks.
8. In einem Trapez ist die Mittellinie um 4 cm länger als die eine der parallelen Seiten, von denen eine 5mal so lang wie die andere ist. Wie lang ist die Mittellparallelle?
9. In einem Dreieck ist der Winkel β um $54^\circ 54'$ größer als α , ferner γ um $103^\circ 30'$ kleiner als α und β zusammen. Berechne die drei Winkel.
10. In einem gleichschenkligen Dreieck ist das Doppelte des Winkels an der Spitze um 4° kleiner als $\frac{2}{3}$ eines Basiswinkels. Berechne die Winkel.
811. In einem Dreieck ABC ist der Außenwinkel bei A $\frac{8}{3}$ mal so groß wie der Innenwinkel bei B, während der Innenwinkel bei C 5mal so groß ist wie derjenige bei A. Berechne die Dreieckswinkel.

- **12.** In einem Viereck ABCD ist der Winkel bei B um 30° kleiner als der bei A, der Winkel bei C 3mal so groß wie der bei B und der Winkel bei D das $\frac{7}{12}$ fache der Summe aus den Winkeln bei B und C. Berechne die vier Winkel.
- 13.** Wie groß ist die Eckenzahl eines Vielecks ohne einspringende Ecken, bei dem die Summe der Innenwinkel
 - a) 7mal b) $5\frac{1}{2}$ mal so groß ist wie die Summe der Außenwinkel?

Zum Wort **Term**:

Aus dem indogermanischen Wortstamm *ter-* = *überschreiten, an ein jenseitiges Ziel gelangen* entstanden das griechische τέμα (terma) und die lateinischen Wörter *termo*, *termen* und *terminus*, die alle die Bedeutung von *Ende, Grenzstein, Grenze* haben. Im Französischen und im Englischen wird *terminus* noch heute im Sinne von Endstation benützt. Auch unser Fremdwort Termin für einen noch vor uns liegenden Zeitpunkt kommt daher. Da auch eine Definition eine Sache, einen Begriff gegen alles andere abgrenzt, wurde *terminus* im Sinne von Definition in frühen Konzilsakten verwendet. Auch BOETHIUS (um 480–524/25) benützt *terminus* in diesem Sinne in einem philosophischen Kommentar, der später weite Verbreitung gefunden hat. Immer mehr nimmt *terminus* dann die Bedeutung von *Ausdruck* an, wofür sich im Französischen *terme* und im Englischen *term* gebildet haben. In der *Algebra* des deutschen Jesuiten Christoph CLAVIUS (1537 Bamberg–1612 Rom) ist *terminus* ständiger Fachausdruck für Teil einer Gleichung, René DESCARTES (1596–1650) verwendet *terme* wie wir *Term* auch für Glieder eines Aggregats.

7 Schwierigere Termumformungen



7 Schwierigere Termumformungen

7.1 Multiplikation von Aggregaten

Nach dem allgemeinen Distributivgesetz (Satz 90.2) weißt du bereits, wie du ein Aggregat mit einer Zahl multiplizierst. Unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln wirst du also beispielsweise so rechnen:

$$a(b + c - d) = ab + ac - ad.$$

Was machst du aber, wenn du zwei Aggregate miteinander zu multiplizieren hast? Betrachten wir als **Beispiel** das Produkt

$$(-a + b)(c - d - e).$$

Stell dir vor, du könntest die erste Klammer ausrechnen und erhieltest als Wert die Zahl z . Dann hättest du nur noch $z(c - d - e)$ zu berechnen. Das kannst du aber nach dem Obigen leicht ausführen:

$$z(c - d - e) = zc - zd - ze.$$

Nun setzt du an Stelle von z wieder die ursprüngliche Klammer $(-a + b)$; dann nimmt die rechte Seite die folgende Form an:

$$zc - zd - ze = (-a + b)c - (-a + b)d - (-a + b)e.$$

Das rechts stehende Aggregat kannst du leicht mit Hilfe von Satz 108.1 umformen:

$$(-a + b)c - (-a + b)d - (-a + b)e = -ac + bc + ad - bd + ae - be.$$

Betrachtest du nun den Anfang und das Ende deiner Rechnung und ordnest die erhaltenen Summanden bezüglich des ersten Faktors a bzw. b , so ergibt sich

$$(-a + b)(c - d - e) = -ac + ad + ae + bc - bd - be,$$

und du erkennst die Gültigkeit von

Satz 182.1: Zwei Aggregate werden miteinander multipliziert, indem man unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln jedes Glied des einen Aggregats mit jedem Glied des anderen Aggregats multipliziert und die entstandenen Produkte addiert.

Beachte:

- 1) Damit du die Übersicht nicht verlierst, raten wir dir folgendes Vorgehen: Multipliziere zuerst mit dem 1. Glied des 1. Aggregats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats. Multipliziere dann mit dem 2. Glied des 1. Aggre-

gats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats. Fahre so fort, bis du schließlich mit dem letzten Glied des 1. Aggregats der Reihe nach jedes Glied des 2. Aggregats multipliziert hast.

$$(-\overbrace{a+b})(\overbrace{c-d-e}) = -ac + ad + ae + bc - bd - be$$

- 2) Nehmen wir an, das erste Aggregat bestehe aus m Gliedern und das zweite aus n Gliedern, dann hat das nach der Ausführung der Multiplikation entstandene Aggregat $m \cdot n$ Glieder, weil ja jedes Glied des ersten Aggregats mit jedem Glied des zweiten multipliziert werden muß. Damit kannst du kontrollieren, ob du kein Produkt vergessen hast!

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} (2x^2 - 3x - 4)(5x - 6) &= \\ &= 10x^3 - 12x^2 - 15x^2 + 18x - 20x + 24 = \\ &= 10x^3 - 27x^2 - 2x + 24. \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} (\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y)(\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{4}{9}y^2) &= \\ &= \frac{27}{64}x^3 - \frac{3}{8}x^2y + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{3}{8}x^2y - \frac{1}{3}xy^2 + \frac{8}{27}y^3 = \\ &= \frac{27}{64}x^3 + \frac{8}{27}y^3. \end{aligned}$$

Satz 182.1 läßt sich auch anwenden, wenn das Produkt aus mehr als zwei Aggregaten besteht. Sind es drei Aggregate, dann rechnest du am besten von links nach rechts der Reihe nach. Sind es aber vier oder mehr Aggregate, dann kannst du unter Verwendung des Assoziativgesetzes und unter Umständen auch des Kommutativgesetzes jeweils zwei geeignete Aggregate zu einem Produkt zusammenfassen und darauf Satz 182.1 anwenden. Mit einiger Erfahrung wirst du erkennen, welche Zusammenfassungen günstig sind. Ehe du dann weiterrechnest, mußt du die erhaltenen Aggregate noch vereinfachen. Dazu

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} (2a - 3b)(2a + 3b)(5a - b) &= \\ &\stackrel{\wedge}{=} [(2a - 3b)(2a + 3b)](5a - b) = \\ &= (4a^2 + 6ab - 6ab - 9b^2)(5a - b) = \\ &= (4a^2 - 9b^2)(5a - b) = \\ &= 20a^3 - 4a^2b - 45ab^2 + 9b^3. \end{aligned}$$

Beispiel 4:

$$\begin{aligned} 7b(2a - b)(a - 2b)(-a - 2b)(2a + b) &= \\ &\stackrel{\wedge}{=} 7b[(2a - b)(a - 2b)][(-a - 2b)(2a + b)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 7b(2a^2 - 4ab - ab + 2b^2)(-2a^2 - ab - 4ab - 2b^2) = \\
&= 7b(2a^2 - 5ab + 2b^2)(-2a^2 - 5ab - 2b^2) = \\
&= 7b(-4a^4 - 10a^3b - 4a^2b^2 + 10a^3b + 25a^2b^2 + 10ab^3 - \\
&\quad - 4a^2b^2 - 10ab^3 - 4b^4) = \\
&= 7b(-4a^4 + 17a^2b^2 - 4b^4) = \\
&= -28a^4b + 119a^2b^3 - 28b^5.
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $(p+q)(u+v)$ b) $(x+y)(a-b)$ c) $(3-s)(t+5)$
 d) $(a-b)(c-d)$ e) $(-1+m)(m-n)$ f) $(-x-y)(-u-v)$
2. a) $(27a-3b)(ax+11y)$ b) $(16p-18r)(13q+9)$
 c) $(-1\frac{2}{3}x+y)(\frac{4}{3}x-4\frac{1}{3}y)$ d) $(2,15m-0,7n)(3,5k+20,1l)$
 e) $(0,05-5,3a)(-1,2a-3)$ f) $(1\frac{3}{7}p^2+0,5q)(1,25p+\frac{3}{4}q^3)$
3. a) $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$
 b) $(a-b)(c-d)-(a+b)(c-d)$
 c) $(a+b)(c+d)-(a-b)(c-d)$
 d) $(3-r)(s+2t)-(7s+5t)(3r+8)+(4s-t)(r+1)$
 e) $(2y-7)(5+y^2)+4y(3-5y-2y^2)-(y-6)(9y^2+1)$
4. a) $(17x^2a-3a^4)(x-5a)-(7a^2x^2+2x)(1+5a^4)$
 b) $3m(16m-9n^3)(5m^2-n)-(12m^3-7n)(-2m-mn^3)(-2)$
5. a) $(3x^2+5y)[(27y-8x)-(14x+2y)]$
 b) $(3a-9b)(2b+c)(-c-5a)$
6. a) $(u+v)(x+y+z)$ b) $(3s-2t+1)(p-3q-7r)$
 c) $(m^2-n+1)(n^2+m+1)$ d) $(a-2b+3c-4d)(5e-6f+7g)$
7. a) $(1+x+x^2+x^3)(1-x)$ b) $(1-y+y^2-y^3+y^4)(1+y)$
 c) $(1-a^2)(1+a^2+a^4+a^6)$ d) $(a^2+ab+b^2)(a-b)$
- 8. a) $(1\frac{2}{3}x^2y-\frac{3}{4}xy^2)(17\frac{1}{2}x-\frac{3}{14}-2\frac{2}{7}y)$
 b) $(0,04a^2-0,1ab+0,25b^2)(0,2a+0,5b)$
 c) $(\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y)(\frac{9}{16}x^2+0,3xy+0,16y^2)$
9. a) $(a+b)(a+2b)(a+3b)$ b) $(a-b)(a-2b)(a-3b)$
 c) $(1-x)(x+x^2)(2x-1)$ d) $(2-x)(4-x^2)(8-x^3)$
- 10. a) $(1,2x-0,1y)(1,44x^2+0,01y^2)(0,1y+1,2x)$
 b) $(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x)(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}x^2)(\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{4})$
11. a) $(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)$ b) $(1-x)(2+x)(3-x)(4+x)$
 c) $(2-y)(4+y^2)(4+2y+y^2)(-y+2)$

12. $(x^2 - x + 1)(x - 1) - (x^2 + x - 1)(x + 1)$
13. $(1 + 2x + x^2)(x - 2) + 4(x + 1) - (x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
14. $(3x^2 - 2x + 1)(1 - 2x) - 11x^2 - 4(3 + 2x - x^2) + 6x(x^2 + 4)$
15. $(x^2 + ax + 2a^2)(2a - x) - (x^2 - 2ax + a^2)(x - 2a) - 2(3a^3 - x^3)$
16. $(3ab + 4ac - 7bc)(5ab - 6ac) - (4ab - 8ac + 7bc)(5ac - 7bc)$
17. $(x^2y - 2xy^2 + 3y^3)(2x^2 - 3xy) - (3x^3 + 2x^2y + xy^2)(4xy - 5y^2)$
18. $(x + y + z)(x - y) - (x + y - z)(x - z) - (x - y + z)(z - y) -$
 $- (z - x - y)(x + y)$
19. $(o - p - q)(p + q) + (p - o - q)(o + q) - (q - o - p)(o + p)$
20. $(xy + xz - yz)(x + y) - (xy + yz - xz)(y - z) -$
 $- (xz - xy + yz)(x + z)$
21. $(6x^4 - 9x^2y + 11y^2)(8x^2 - 7y) - (13y^2 + 21x^2y - 17x^4)(11x^2 + 13y)$
22. $(64a^6b^3 + 48a^3b^5 + 36a^4b^7 + 27a^3b^9)(4a^2b - 3ab^3)$
23. $(a^2b^4x - 2a^4b^3x^4 - 3a^6b^2x^7 + a^8bx^{10})(a^3b^2x^2 - 2a^5bx^5)$
24. $3a(2b - 5a)(3b + 4a) - 4b(7a^2 - 12ab) - (5b + 4a)(3a - 6b) \cdot 4a$
25. $x^2(1 - x) + x(1 + x)(1 - 2x) - 2(2 - x)(1 - 2x + 3x^2)$
26. $9(14 + 11a + 17a^2)(10 - 12a) - 13a(15 - 19a)(17 + 20a) +$
 $+ 14a^2(17a - 11) - 44a^3$
27. $2(x - 2)(x - (2 - 3x)) - 3(2 + (x - 1))(4(x - 1) - 3(x - 2))$
28. $([2x(x - 4) - 3(x - 2)(2x + 3)](4x - 2) \cdot 3 + 48x^3)(3x - 5) -$
 $- 540(x^2 - 3x + 1)$
29. $3[2(y - 4) + 5][(y - 2) \cdot 3 - 2(y - 4)] -$
 $- 4[7 - 3(y + 2) + y][5 - y - 3(2 - y)]$
30. $([(x - 1)(x - 2) - 2] \cdot 2 - 2(2 - x)) \cdot 2 - [2 - 2(x - 2)(1 + x) +$
 $+ 2(1 - 2x)]$

Gleichungen und Ungleichungen

31. a) $(x - 3\frac{1}{7})(x + 7) = (x - \frac{1}{7})(x - 7)$
 b) $2(x + 0,1)(0,5x + 2) - (3 + \frac{1}{3}x)(3x - \frac{1}{3}) = 0$
32. $3x(x + 7) - x(3x + 7) + 70 = 0$
33. $4x(6 - 3x) + 6x(2x + 1) = 15$
34. $(\frac{3}{7}x - \frac{7}{3}) \cdot 21x - (33x + 5) \cdot \frac{3}{11}x = 277$

35. $0,32x(1,25x - 10) + (6,3 - 0,8x) \cdot 0,5x + 1 = 0$

36. $(x + 1)(x - 14) - (x + 1)(x - 15) = 17$

37. $(x - 16)(3x + 1) - (3x - 1)(x - 15) \leq -35$

38. $(\frac{2}{15}x + \frac{1}{3})(25 - 3x) + (\frac{x}{6} - 15)(\frac{12}{5}x + 2) > 0$

39. $(2,1x - 1,5)(0,6x - 1,1) - (2,5 - 0,9x)(0,8 - 1,4x) + 5,4 \geq 0$

40. Verlängert man in einem Quadrat ABCD die Seite [AB] über B hinaus um 2 cm, und [AD] über D hinaus um 5 cm und ergänzt zu einem Rechteck, so ist dessen Fläche um $1,22 \text{ dm}^2$ größer als die des Quadrats. Wie lang ist die Quadratseite?

41. Verlängert man eine Seite der Grundfläche eines Würfels um 3 cm und verkürzt die andere um 2 cm, während man die Höhe beibehält, so entsteht ein Quader gleichen Inhalts. Wie groß ist die Kantenlänge des Würfels?



um 1546

Niccolò Tartalea

Abb. 186.1 Niccolò TARTAGLIA
(1499 Brescia – 13.12.1557 Venedig)



Simon Stevin

Abb. 186.2 Simon STEVIN
(1548 Brügge – 20.2./8.4.1620 Leiden)*

* i betont. Niederländischer Mathematiker und Ingenieur. Anfänglich in der Finanzverwaltung tätig, ab 1593 Berater des Prinzen Moritz von Oranien. In seinem Buch *De Thiende* „Der Zehnt“ – (1585) behandelt er als erster systematisch die Stellenschreibweise von Zehnerbrüchen und trug damit wesentlich zur Verbreitung der Dezimalbrüche bei. Das bequeme **Komma** hat 1617 der schottische Mathematiker John NAPIER (1550–1617) eingeführt.

7.2. Binomische Formeln

Bei algebraischen Umformungen treten häufig Terme der Art $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$ bzw. $(a + b)(a - b)$ auf. Mit Satz 182.1 können wir sie leicht berechnen:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

In allen drei Fällen waren vier Glieder zu erwarten. Sie ließen sich aber zu weniger zusammenfassen. Daher lohnt es sich, wenn du dir diese drei wichtigen Umformungen als Formeln* merkst. Man nennt sie binomische** Formeln.

Satz 187.1: Die binomischen Formeln

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Beachte: Beim Quadrieren einer Summe oder einer Differenz tritt außer den Quadraten der beiden Glieder auch noch ihr **doppeltes Produkt** auf.

Beispiele:

$$1) \underbrace{\left(\frac{1}{6}x\right)}_a + \underbrace{\left(\frac{3}{5}y\right)}_b = \underbrace{\left(\frac{1}{6}x\right)^2}_{a^2} + 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{6}x}_a \cdot \underbrace{\frac{3}{5}y}_b + \underbrace{\left(\frac{3}{5}y\right)^2}_{b^2} = \frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{5}xy + \frac{9}{25}y^2$$

$$2) \underbrace{(0,1rs^2)}_a - \underbrace{(10r^2s)}_b = \underbrace{(0,1rs^2)^2}_{a^2} - 2 \cdot \underbrace{0,1rs^2}_a \cdot \underbrace{10r^2s}_b + \underbrace{(10r^2s)^2}_{b^2} = 0,01r^2s^4 - 2r^3s^3 + 100r^4s^2$$

* Ein Gebilde der Geometrie bezeichnet EUKLID als σχῆμα (siehe Fußnote auf S. 160), das ins Lateinische als *figura* übersetzt wurde, was zu unserem Lehnwort *Figur* führte. Σχῆμα wurde aber auch mit *forma* übersetzt, das BOETHIUS zu *formula* verkleinerte, ihm dabei aber einen neuen Sinn gab. Bei LEIBNIZ (1646–1716) gewinnt *formula* dann die heutige Bedeutung von **Formel** als Ausdruck einer Gesetzmäßigkeit.

** Spezielle Summen aus zwei Summanden nannte EUKLID (4./3. Jh. v. Chr.) im Buch X seiner *Elemente* ἐκ δύο ὀνομάτων (*ek dyo onomáton*) = *aus zwei Namen*. GERHARD VON CREMONA (1114–1187) verwendet dafür in seiner Übersetzung der Kommentare des AL-NAYRIZI (lateinisch ANARITIUS, † um 922) zu den ersten zehn Büchern des EUKLID das Wort *binomium*. LUCA PACIOLI (um 1445–1517) verallgemeinerte 1494 *binomio* zu *trinomio* und *multinomio* in seiner *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita*. NICCOLÒ TARTAGLIA (1499–1557) kommt mit seinem *binomio* bzw. *trinomio de dignità algebratica* im 1560 postum erschienenen 2. Teil seines *General trattato di numeri, et misure* – »Allgemeine Abhandlung über Zahlen und Maße« – unserem Gebrauch schon sehr nahe. In der 1585 erschienenen *L'Arithmetique* des Niederländers SIMON STEVIN (1548–1620) werden *binomie* in unserem Sinn für $a + b$ und $a - b$, *trinomie* für einen dreigliedrigen Ausdruck und *multinomie* für ein allgemeines Aggregat verwendet. Letzteres setzt sich nicht durch. In der *In artem analyticem Isagoge* (1591) des François VIÈTE (1540–1603) tauchen ohne weitere Erklärung die Ausdrücke *binomia magnitudo* und *polynomia magnitudo* für eine zweigliedrige bzw. mehrgliedrige Größe auf. Sie waren anscheinend allgemeinverständlicher mathematischer Wortschatz. Im *Mathematischen Lexicon* (1716) des Christian v. WOLFF (1679–1754) liest man schließlich die Beschreibung: *Binomium*, Eine zweifache Größe wird genennet, die aus zwey Theilen bestehet, die mit dem mehr = Zeichen zusammen gesetzt werden, als $a + b$.

$$3) \underbrace{(1,5u + \frac{1}{5}v)}_a \underbrace{(1,5u - \frac{1}{5}v)}_b = \underbrace{(1,5u)^2}_{a^2} - \underbrace{(\frac{1}{5}v)^2}_{b^2} = 2,25u^2 - \frac{1}{25}v^2$$

Die drei binomischen Formeln waren bereits den Babyloniern um 1700 v. Chr. bekannt. Ob und wie sie sie gegebenenfalls bewiesen haben, wissen wir nicht. Der griechische Mathematiker EUKLID (4./3. Jh. v. Chr.) hat diese drei Formeln mit Zeichnungen geometrisch bewiesen. Dieser Beweis setzt allerdings voraus, daß a und b und gegebenenfalls $a - b$ positive Zahlen sind. Seine Zeichnung für die 1. binomische Formel erklärt sich praktisch von selbst:

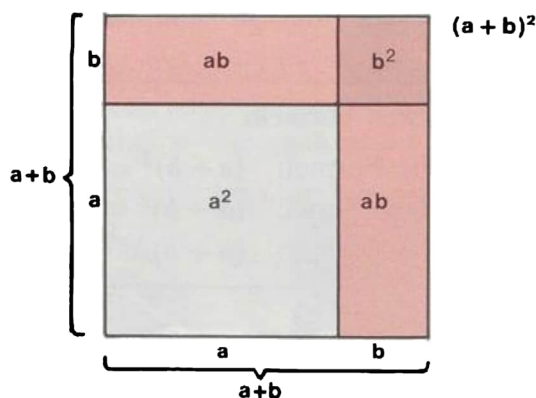


Abb. 188.1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Auch für die beiden anderen Formeln kann man geometrische Veranschaulichungen finden. Sie sind allerdings komplizierter (vgl. Aufgabe 190/24).

Die 2. binomische Formel ist nur ein Sonderfall der 1. binomischen Formel, wenn man $(a - b)^2$ als $(a + (-b))^2$ schreibt. Dann gilt:

$$(a + (-b))^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Genauso kann man bei anderen Vorzeichenverteilungen verfahren:

$$(-a + b)^2 = ((-a) + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a) \cdot b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-a - b)^2 = ((-a) + (-b))^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aufgaben

1. a) $(1 + x)^2$

b) $(x - 1)^2$

c) $(2 + x)^2$

d) $(1 - 2x)^2$

e) $(x^3 - 3)^2$

f) $(3 - x^2)^2$

2. a) $(3a + 4b)^2$

b) $(2x + 5y)^2$

c) $(4x^2 - 9y^2)^2$

d) $(6xy + 5y^2)^2$

e) $(7ab - 9bc)^2$

f) $(11a^2x + 13xy)^2$

3. a) $(17y + 3z)^2$ b) $(13p - 7q)^2$ c) $(14x - 11)^2$
 d) $(21 + 15t)^2$ e) $(\frac{2}{3}a + 1\frac{4}{5}p)^2$ f) $(2,3c - 0,11d)^2$
 g) $(9u - \frac{6}{5}v)^2$ h) $(1,8r + 3\frac{3}{5})^2$ i) $(\frac{3}{7}a - \frac{7}{6}b)^2$
 j) $(\frac{3}{5}x - 3\frac{1}{3}y)^2$ k) $(0,1a^2b + 10ab^2)^2$ l) $(\frac{3}{70}u^3 - 0,07u^4)^2$

4. a) $(4 - x)(4 + x)$ b) $(22x^2 + 33)(22x^2 - 33)$
 c) $(1 - 4x^2)(1 + 4x^2)$

5. a) $(5a - 4x)(5a + 4x)$ b) $(17x^2 - 19y^2)(17x^2 + 19y^2)$

6. a) $(16x + 24y)(16x - 24y)$
 b) $(12p - 23q)(12p + 23q)$
 c) $(7\frac{1}{3} + 2\frac{4}{7}z)(-7\frac{1}{3} + 2\frac{4}{7}z)$
 d) $(-0,25u + 0,07v)(-0,25u - 0,07v)$

7. a) $(a + b)(-a + b)$ b) $(a - b)(-a - b)$
 c) $(x - y)(-x + y)$ d) $(-x - y)(x + y)$

8. a) Beweise die Formel von BRAHMAGUPTA (598–nach 665):

$$n^2 = (n + a)(n - a) + a^2$$

- b) Diese Formel wurde von den Indern zur Berechnung von Zahlenquadraten verwendet; z. B.

$$297^2 = (297 + 3)(297 - 3) + 3^2 = 300 \cdot 294 + 9 = 88\,209.$$

Berechne ebenso:

1) 98^2 2) 395^2 3) 1999^2 4) 2001^2 5) 9999^2

9. Beweise die Formel von NARAYANA (um 1350):

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

10. Die folgende Formel wurde auf einer altbabylonischen Tontafel aus dem 17. Jh. v. Chr. gefunden. Beweise sie!

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$$

11. Beweise die Formeln

a) $(x + y)^2 + (x - y)^2 + (-x + y)^2 + (-x - y)^2 = 4(x^2 + y^2)$

b) $\frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} = x^2 + y^2$

12. a) $(3uv - 2v^2)^2$ b) $(7a^2b + 4ab^2)(7a^2b - 4ab^2)$
 c) $(x^6 + y^3)^2$ d) $(8a^2b^2 - 5c^4)(5c^4 - 8a^2b^2)$
 e) $(1\frac{6}{7}p^2qr^3 - 1)^2$ f) $(1,9c^5d - \frac{7}{8}d^3e^2)(\frac{7}{8}d^3e^2 + 1,9c^5d)$

13. Berechne $(a + b)^2 - (a - b)^2$ auf zwei Arten.

14. Bestimme die Werte von $(a + b)^2$ und $a^2 + b^2$ für

$a = 7$ (-4 ; 21 ; $-4\frac{1}{6}$; $\frac{14}{5}$) und $b = 3$ (11 ; -21 ; $-\frac{4}{3}$; $-2,8$).

15. $(2-x)^2 - (2-x)(2+x) + (2+x)^2$

16. $(4a+3x)^2 + 3(4a+5x)(3a-2x) - 4(3a-4x)^2$

17. $(3a^2 - 16ax)^2 - 4ax(7a-2x)(5x-4a) - 6a^2(2x-3a)(2x+3a)$

18. $17a^3 - 3b(11a+7b)(7b-11a) + 2a(11b-7a)^2 -$
 $- (11b-7a)(11b-6a) \cdot 3b$

19. $x^4 + 2x^2(x-1)^2 - 3x(x^2-x+1)(x+1) - (x^2-2x+1)(1+x)(1-x)$

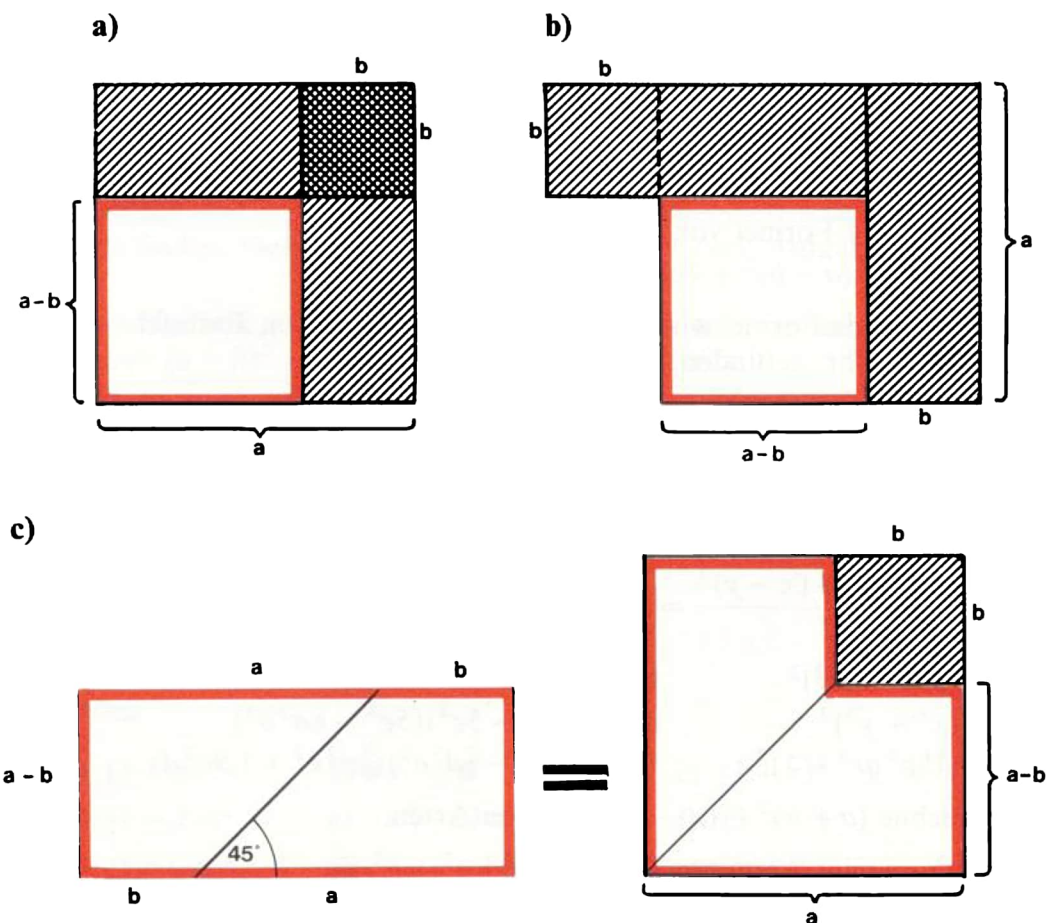
20. $(x^2-y^2)^2 + x(x-y)^2(x-y) - y(x-y)^2(x+y) + xy(x+2y)(2x-y)$

21. $(a+1)^2 \cdot 2a - a(a+1)(1-a)^2 + 2(a-1)(a+1)^2 +$
 $+ a(a^2+2a+1)(a-1)$

• 22. $[(x+y)+z][(x+y)+z] - [(x-y)-z][(x-y)-z] +$
 $+ [(y-x)-z][(y-x)-z] - [x+(y+z)][(y+z)+x]$

23. $[(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b) + 1][(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b) + 1]$

24. Welche Formeln werden durch die Abbildungen veranschaulicht? Begründung!



- 25. $(\frac{9}{5}a + \frac{5}{2}b)(\frac{5}{2}b - \frac{9}{5}a) - (\frac{3}{2}b + \frac{4}{5}a)^2 - (\frac{3}{2}b - \frac{4}{5}a)^2$
- 26. $2(0,4 - 0,3x)^2 - 0,4(1 + 2x)^2 - 3(x - 0,2)(0,2 - x)$

27. Quadrieren zweistelliger Zahlen:

Beispiel:

$$34^2 = (4 + 3 \cdot 10)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 + 3^2 \cdot 100, \text{ also:}$$

16 (16 = Quadrat der Einerziffer)	6 an, 1 gemerkt
240 (24 = doppeltes Produkt der Ziffern)	4 + 1 = 5 an, 2 gemerkt
900 (9 = Quadrat der Zehnerziffer)	9 + 2 = 11 an
<u>34^2 = 1156</u>	1156

Berechne so die Quadrate der Zahlen:

- a) 59; 26; 94; 73; 88; 47; 65; 31
- b) 2,9; 6,7; 0,48; 0,038; 550; 0,00093
- c) $\frac{41}{32}$; $\frac{82}{19}$; $\frac{54}{53}$; $\frac{71}{99}$; $\frac{1,8}{23}$; $\frac{670}{1,2}$; $\frac{0,85}{0,044}$

28. Umwandlung eines Produkts in die Form $(a + b)(a - b)$:

Beispiele:

$$53 \cdot 47 = (50 + 3)(50 - 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$$

$$24 \cdot 26 = (25 - 1)(25 + 1) = 25^2 - 1^2 = 625 - 1 = 624$$

Berechne so folgende Produkte:

- a) $29 \cdot 31$; $65 \cdot 55$; $23 \cdot 27$; $72 \cdot 88$
- b) $99 \cdot 101$; $498 \cdot 502$; $243 \cdot 257$; $1012 \cdot 988$
- c) $3,8 \cdot 42$; $0,74 \cdot 6,6$; $\frac{58}{75} \cdot \frac{62}{85}$; $\frac{49}{58} \cdot \frac{49}{62}$

29. Das Quadrat einer Zahl mit der Einerstelle 5, zum Beispiel 65, berechnet Peter folgendermaßen:

» $6 \cdot (6 + 1) = 6 \cdot 7 = 42$; 25 angehängt; Ergebnis 4225.«

Er erhält also den richtigen Wert von 65^2 .

Prüfe dieses Verfahren an einigen ähnlichen Beispielen. Beweise, daß man nach dieser Methode das Quadrat jeder Zahl mit der Einerstelle 5 berechnen kann. (Tip: Schreibe die Zahl als Summe mit 5 als zweitem Summanden und wende die Formel für $(a + b)^2$ an.)

Gleichungen und Ungleichungen

- 30. $(2x + 3)(2x - 3) = (2x + 3)^2$
- 31. $(x + 3)^2 + 2(2x + 1)(2x - 1) = (5 - 3x)^2$
- 32. $(x - 3)^2 - x^2 = 3 - 3(x + 2)$
- 33. $(x + 1)^2 > (x + 1)(x - 1) + x + 7$
- 34. $(x - 1)^2 \leq x^2 - 2$

35. $(x + 2)^2 - (x - 4)^2 \geq 2(x - 4) + 9x$
36. $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 + 3x + 5 < 2(x - 1)(x + 1) + 2$
37. $(x + 1)^2 - (x + 2)^2 = (x + 3)^2 - (x + 4)^2$
38. $(x + 3)(x - 3) + (x + 3)^2 = (x - 3)(x + 3) + (x - 3)^2$
39. $(2x - 1)^2 + x^2 = (3x + 1)^2 - (2x - 5)^2$
40. $x^2 - 1 + (x - 1)^2 + (x - 1)(x + 1) > 3x^2 - 2x$
41. Verkleinert man die Seiten eines Quadrats um je 10 m, so entsteht ein um 1,4 a kleineres Quadrat. Wie lang ist die Seite des ursprünglichen Quadrats?
42. Die eine Seite eines Rechtecks ist um 5 cm größer als die andere. Die Fläche ist um 64 cm^2 kleiner als die Fläche eines Quadrats, dessen Seite um 4 cm größer als die kleinere Rechtecksseite ist. Berechne die Seiten des Rechtecks.
43. Wenn in einem Quadrat die eine Seite um 2 cm verkleinert und die andere um ebensoviel vergrößert wird, so erhält man ein ebenso großes Rechteck wie bei Verkürzung der einen Quadratseite um 4 cm und Verlängerung der anderen um 10 cm. Wie groß ist die Quadratseite?
44. Der Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten sich um 11 cm unterscheiden, ändert sich nicht, wenn man die größere Seite um 6 cm verkleinert und die kleinere um 5 cm vergrößert. Berechne Länge und Breite des ursprünglichen Rechtecks.
45. Wird bei einem Würfel die erste Kante um 2 dm vergrößert und die zweite um ebensoviel verkleinert, während man die dritte beibehält, so entsteht ein Quader, dessen Volumen um 12 dm^3 kleiner ist als dasjenige des Würfels. Wie lang ist die Würfelkante?
46. Bei einem Quader ist die zweite Kante um 1 cm größer als das Doppelte der ersten, die dritte um 2 cm kleiner als die zweite. Der Rauminhalt dieses Quaders ist um 5 cm^3 kleiner als das vierfache Volumen eines Würfels, dessen Kante mit der ersten Quaderkante übereinstimmt. Berechne die Kanten des Quaders.
47. Vergrößert man bei einem Würfel alle Kanten um 1 dm, so nimmt seine Oberfläche um $0,3 \text{ m}^2$ zu. Wie groß ist der Rauminhalt dieses Würfels?

7.3 Quadrate von Aggregaten

Analog zum **Binom** als zweigliedrigem Aggregat $a + b$ bezeichnet man mit dem Kunstwort **Trinom** ein dreigliedriges Aggregat der Form $a + b + c$. Quadriert man dieses Trinom, so erwartet man $3 \cdot 3 = 9$ Glieder, von denen man wie beim Quadrat eines Binoms hoffen kann, daß sich einige zusammenfassen lassen. Wir probieren es:

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b + c)(a + b + c) = \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.\end{aligned}$$

Das Ergebnis des Quadrierens eines Trinoms entspricht dem Ergebnis des Quadrierens eines Binoms, also der 1. binomischen Formel; man erhält nämlich die Summe aller Quadrate und die Summe aller möglichen doppelten Produkte.

Besteht nun ein Aggregat aus mehr als 3 Summanden, so ergeben sich beim Quadrieren wieder alle Quadrate und alle möglichen doppelten Produkte, da jedes Produkt mit zwei verschiedenen Faktoren genau zweimal auftritt. Die Pfeile sollen es dir zeigen:

$$\begin{aligned}&\begin{array}{c} a \cdot b \\ \overbrace{(a + b + c + \dots + z)(a + b + c + \dots + z)} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ a \cdot b \end{array} = \\ &\dots \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + \dots + z^2 + 2ab + 2ac + \dots + 2az + 2bc + \dots\end{aligned}$$

Kommen im Aggregat nicht nur Plus-, sondern auch Minuszeichen vor, dann muß man bei der Bildung der doppelten Produkte die Vorzeichenregeln beachten. Wir zeigen es dir an

$$\begin{aligned}(a - b + c)^2 &= (a - b + c)(a - b + c) = \\ &= a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc.\end{aligned}$$

Wir fassen die gewonnenen Erkenntnisse zusammen in

Satz 193.1: Das Quadrat eines Aggregats besteht aus der Summe der Quadrate aller seiner Glieder und der Summe aller möglichen doppelten Produkte unter Berücksichtigung der Vorzeichenregeln.

Beachte: Damit du kein doppeltes Produkt vergißt, mußt du systematisch vorgehen. Du beginnst am besten vorne und arbeitest dich nach hinten durch, wie es dir die Pfeile zeigen:

$$\begin{array}{c} \text{1. Schritt} \\ \overbrace{(a + b + c + d + \dots)^2} \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ \text{2. Schritt} \end{array}$$

Dazu ein

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{3}{2}x + 2y - xz - 4\right)^2 = \\ & = \frac{9}{4}x^2 + 4y^2 + x^2z^2 + 16 - 6xy + 3x^2z + 12x - 4xyz - 16y + 8xz \end{aligned}$$

Kehren wir zurück zu $(a + b + c)^2$. Wir hätten das Quadrat auch anders als oben ausrechnen können, nämlich mit Hilfe der 1. binomischen Formel. Dazu müßte man beispielsweise $a + b$ mittels einer Klammer zusammenfassen:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc. \end{aligned}$$

Einen kleinen Vorteil bringt dieses Verfahren, da wir keine 9 Produkte ausrechnen mußten. Aber Satz 193.1 ist natürlich am schnellsten.

Einen großen Vorteil bringt der Trick des Klammerns aber, wenn man ein Produkt von zwei Aggregaten dadurch auf eine Form bringen kann, bei der sich die 3. binomische Formel anwenden läßt.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} & (2a + 3b + 4c)(2a + 3b - 4c) = \\ &= [(2a + 3b) + 4c][(2a + 3b) - 4c] = \\ &= (2a + 3b)^2 - (4c)^2 = \\ &= 4a^2 + 12ab + 9b^2 - 16c^2. \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$(2a - 3b + 4c)(2a + 3b - 4c)$$

Das sieht recht schwierig aus! Zwar kann man in der zweiten Klammer $3b - 4c$ zusammenklammern. Was soll aber in der ersten Klammer geschehen? Wir bräuchten ebenfalls $(3b - 4c)$, aber ein Minuszeichen davor.

Satz 106.2 macht's möglich:

$$\begin{aligned} & (2a - 3b + 4c)(2a + 3b - 4c) = \\ &= [2a - (3b - 4c)][2a + (3b - 4c)] = \\ &= (2a)^2 - (3b - 4c)^2 = \\ &= 4a^2 - (9b^2 - 24bc + 16c^2) = \\ &= 4a^2 - 9b^2 + 24bc - 16c^2 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $(u + v + w)^2$ **b)** $(u + v - w)^2$ **c)** $(u - v - w)^2$ **d)** $(-u - v - w)^2$
2. **a)** $(3x + 5y + 1)^2$ **b)** $(2x + 3y + 4z)^2$
c) $(2x - 3y + 4z)^2$ **d)** $(0,7a - 1,1b - 0,9c)^2$
e) $(5x^2 - 3y - 1)^2$ **f)** $(1\frac{3}{4}a - 2\frac{2}{3}b + 1\frac{1}{4}c)^2$
g) $(0,8x - 1,2y + 1,6xy)^2$ **h)** $(0,1x - 0,2xy + 0,3y)^2$

3. **a)** $(u + v + w)^2 + (v - u + w)^2$
b) $(2a - 4b + 6c)^2 - (-8a + b + 2c)^2$
c) $100(0,4r + 0,3s - \frac{1}{2}t)^2 - 4(2a + \frac{3}{2}b - 2,5c)^2$
4. Stelle die Formel für $(a + b + c)^2$ durch eine Zeichnung dar.
5. **a)** $(5u - 8v + 6w - 2)^2$ **b)** $(3x^3 - 2x^2 + x - 1)^2$
• c) $(17a^2 - 14ab + 13b^2 - 11b)^2$ **• d)** $(1,2x^2 + 1,3y^2 - 0,25x - 0,15y)^2$
• e) $(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2 - \frac{3}{4}a + \frac{2}{3}b)^2$
6. **a)** $(u + v + w)(u + v - w)$ **b)** $(u + v + w)(u - v - w)$
c) $(u - v + w)(u + v - w)$ **d)** $(2p + q + 7r)(2p + q - 7r)$
e) $(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y + z)(\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y - z)$ **f)** $(0,5a - \frac{1}{3}b - 2c)(2c - \frac{1}{3}b - 0,5a)$
7. **a)** $(a + b + c)(a + b - c)$ **b)** $(a + b - c)(a - b + c)$
8. **a)** $(1 - x - y)(1 + x + y)$ **b)** $(1 - x + x^2)(1 - x - x^2)$
- 9. a)** $(7a - 9x + 11y^2)(7a + 9x - 11y^2)$
b) $(6x^2 - 13y^2 + 15xy)(6x^2 - 13y^2 - 15xy)$
- 10. a)** $(9ax^2 - 11a^2 + 4x^4)(9ax^2 + 11a^2 - 4x^4)$
b) $(9ax^2 + 11a^2 + 4x^4)(9ax^2 - 11a^2 + 4x^4)$
- 11. a)** $(a + b + c + d)(a + b - c - d)$
b) $(1 - x - x^2 + x^3)(1 - x + x^2 - x^3)$
- 12. a)** $(8x^3 + 7x^2y + 6xy^2 - 5y^3)(8x^3 + 7x^2y - 6xy^2 + 5y^3)$
b) $(19a^6b - 4a^4b^2 - 5a^2b^3 - 18b^4)(19a^6b - 4a^4b^2 + 5a^2b^3 + 18b^4)$
- 13. a)** $(a - 2b + 2c - x)(a - 2b - 2c + x)$
b) $(x^2 - 2 + y^2 - b)(x^2 - y^2 - b + 2)$
- 14. a)** $(b^2 - x + a^2 - y)(a^2 + y - x - b^2)$
b) $(x + 1 - x^2 - x^3)(1 - x^2 + x^3 - x)$
c) $(1 - a - x - ax)(a - x + ax + 1)$
d) $(a^3 + ab^2 - a^2b - b^3)(b^3 - ab^2 - a^2b + a^3)$

** 7.4 Höhere Potenzen von Binomen

In manchen komplizierteren Rechnungen kommen nicht nur Quadrate, sondern auch höhere Potenzen von Binomen vor. Auch für sie kennt der Mathematiker Formeln, die den Umgang mit ihnen erleichtern. Betrachten wir zunächst die dritte Potenz $(a + b)^3$. Nach Definition der Potenz müßtest du $(a + b)(a + b)(a + b)$ rechnen, was zunächst 8 Summanden lieferte. Geschickter ist die Anwendung der 1. binomischen Formel:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = \\
 &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\
 &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{aligned}$$

Statt der 8 Summanden enthält das Ergebnis nur noch 4!

Auch für $(a - b)^3$ können wir eine solche Rechnung durchführen. Einfacher geht's, wenn wir in dem Ergebnis von eben $(-b)$ statt b setzen:

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Wegen des häufigen Vorkommens lohnt es sich, diese Ergebnisse als Formeln auswendig zu lernen:

Satz 196.1: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Beispiel:

$$\begin{aligned}(3x - 5y)^3 &= 27x^3 - 3 \cdot 9x^2 \cdot 5y + 3 \cdot 3x \cdot 25y^2 - 125y^3 = \\ &= 27x^3 - 135x^2y + 225xy^2 - 125y^3.\end{aligned}$$

Durch eine räumliche Darstellung läßt sich die erste dieser Formeln auch mit Quadern veranschaulichen.

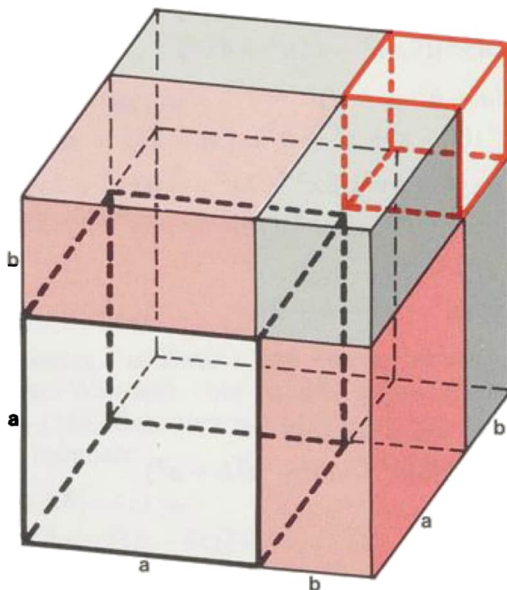


Abb. 196.1 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Die Mathematiker gaben sich natürlich nicht mit den Formeln für die Quadrate und die dritten Potenzen zufrieden und untersuchten auch höhere Potenzen des Binoms $(a + b)$. Diese höheren Potenzen lassen sich schrittweise auf niedrigere zurückführen und damit berechnen. Wir führen dies für $(a + b)^4$ einmal vor:

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= (a + b)(a + b)^3 = \\ &= (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \\ &= 1a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + 1ab^3 + \\ &\quad + 1a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + 1b^4 = \\ &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4.\end{aligned}$$

Das Koeffizientenmuster $1 - 3 - 3 - 1$ wiederholt sich beim Ausmultiplizieren, um eine Stelle verschoben, in der zweiten Zeile. Das neue Koeffizientenmuster $1 - 4 - 6 - 4 - 1$ ergibt sich somit recht einfach, indem man nebeneinanderstehende Koeffizienten des vorhergehenden Musters $0 - 1 - 3 - 3 - 1 - 0$ addiert. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine dreieckige Anordnung von Koeffizienten. Sie ist auch als **Arithmetisches Dreieck** oder **PASCAL-STIFELsches Dreieck** bekannt.

		1										
$(a + b)^1$		1	1			$1a + 1b$						
$(a + b)^2$			1	2	1	$1a^2 + 2ab + 1b^2$						
$(a + b)^3$				1	3	3	1	$1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$				
$(a + b)^4$					1	4	6	4	1	$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$		
$(a + b)^5$						1	5	10	10	5	1	$1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
.....												

Das Arithmetische Dreieck war bereits den Indern des 2. vorchristlichen Jh.s und den Arabern des 11. Jh.s bekannt. Die früheste erhaltene Darstellung dieses Dreiecks enthält die *Untersuchung der Arithmetischen Regeln der Neun Bücher* von YANG Hui aus dem Jahre 1261, die auf den chinesischen Mathematiker QIA Hsian [sprich: Tschia Hsien] (um 1100) zurückgeht (siehe Abbildung 197.1). Die erste gedruckte Darstellung in Europa schmückt das Titelblatt des *Neuen Rechenbuchs* von 1527 des Peter APIAN (1495–1552) (siehe Abbildung 197.2). Benannt ist das Arithmetische Dreieck nach dem deutschen Mathematiker Michael STIFEL (1487–1567) und dem französischen Mathematiker und Philosophen Blaise PASCAL (1623–1662), die die interessanten Eigenschaften dieses Dreiecks erforscht haben.

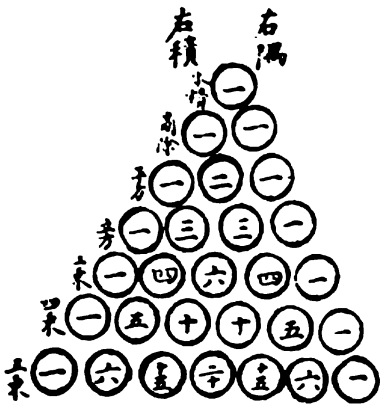


Abb. 197.1 Das Arithmetische Dreieck des YANG Hui (1261)

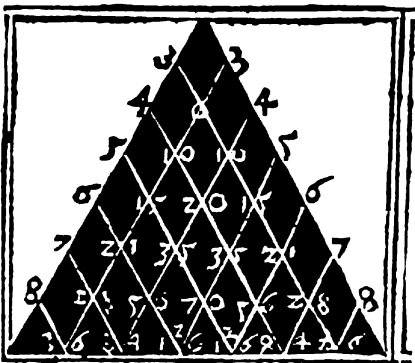


Abb. 197.2 Das Arithmetische Dreieck des Peter APIAN (1527)

Aufgaben

1. a) $(2x + 1)^3$
d) $(3a - 5b)^3$
- b) $(1 - 3a)^3$
e) $(-a + 4b)^3$
- c) $(2a + 5b)^3$
f) $(-a - 2b)^3$

2. a) $(0,1 + u)^3$ b) $(-1,2r + 5s)^3$ c) $(1\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{3}b)^3$
 3. a) $(\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}a)^3$ b) $(\frac{5}{7}x - 2\frac{4}{3}x^2)^3$ c) $(0,2x - 0,5y)^3$
 4. a) $(xy^2 + 2x^2y)^3$ b) $(\frac{5}{9}a^3b^2 - \frac{3}{5}a^2b^3)^3$
 5. Berechne $(a + b)^5$ auf zwei Arten, einmal als $(a + b)(a + b)^4$ und einmal als $(a + b)^2(a + b)^3$.
 6. a) $(2a + 1)^4$ b) $(x - 3y)^5$ c) $(x - y)^7$

7.5 Die Kunst des Faktorisierens

7.5.1 Einfaches Ausklammern

Beim weiteren Eindringen in die Mathematik im Laufe der nächsten Jahre wirst du feststellen, daß man mit Produkten viel mehr anfangen kann als mit Summen. Daher muß du Bescheid wissen, wie man Aggregate in Produkte verwandeln kann. Dieses Verwandeln nennt man auch **Faktorisieren** eines Aggregats.

Die einfachste Art des Faktorisierens kennst du bereits als eine Anwendung des verallgemeinerten Distributivgesetzes (Satz 90.2) in der Form des Ausklammerns. Wir vertiefen deine Kenntnisse durch einige

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 6uv + 3u^2 - 9uw = \\ & = 3u \cdot 2v + 3u \cdot u - 3u \cdot 3w = \\ & = 3u(2v + u - 3w). \end{aligned}$$

Der Faktor $3u$ wurde ausgeklammert.

2) Man kann auch Aggregate ausklammern:

$$3(a + b) - a(a + b) + 4b^2(a + b) = (a + b)(3 - a + 4b^2).$$

3) Manchmal muß man ein Glied des Aggregats erst in ein Produkt umschreiben, indem man den Faktor 1 hinzufügt:

$$\begin{aligned} & 3a^2 + a = \\ & = a \cdot 3a + a \cdot 1 = \quad \text{Trick: } a = a \cdot 1 \\ & = a(3a + 1). \end{aligned}$$

4) Mit Gewalt kann man jeden gewünschten Faktor ausklammern! Wir wollen aus dem Aggregat $\frac{2}{3}x^2 - 7xy + x$ den Term $\frac{1}{3}x$ ausklammern, damit in der Klammer keine Brüche mehr vorkommen.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}x^2 - 7xy + x = \\ & = \frac{1}{3}x \cdot 2x - \frac{1}{3}x \cdot 21y + \frac{1}{3}x \cdot 3 = \\ & = \frac{1}{3}x(2x - 21y + 3). \end{aligned}$$

- 5) Besonders aufpassen mußt du, wenn du in Potenzen von Aggregaten ausklammerst.

$$\begin{aligned}
 (8a^2b - 12a)^2 &= \\
 &= (4a[2ab - 3])^2 = \\
 &= (4a)^2(2ab - 3)^2 = \\
 &= 16a^2(2ab - 3)^2.
 \end{aligned}$$

Mit einiger Übung kannst du bald auf die 2. Zeile unserer Beispiele verzichten, indem du im Kopf jeden Summanden durch den auszuklammernden Term dividierst. Das mußt du aber üben! Dazu dienen die

Aufgaben

1. a) $3st - 4s^2 + s$ b) $ax^2 + bx + x$
 c) $4a^2 - 8a^2 + 12a^5$ d) $\frac{4}{5}ay + \frac{3}{10}by - \frac{2}{15}y^2$
2. a) $\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$ b) $1\frac{1}{5}x - \frac{6}{5}y + 1,2z$
 c) $\frac{3}{8}u - \frac{1}{32}v$ d) $-\frac{111}{46}s - \frac{74}{69}t$
3. Faktorisiere so, daß in der Klammer keine Bruchzahl mehr steht.
 a) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y$ b) $0,4a - 0,5b$
 c) $\frac{1}{2}r + \frac{3}{2}s - t$ d) $-0,01u + 0,1v + w$
 e) $1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{5}z$ f) $-1,2a + \frac{2}{3}b - 1$
4. a) $abc - acd$ b) $a^2b + ab^2 - a^2b^2$
 c) $x^4 - x^3 + x^2$ d) $u^2v^3 + uv^4 - uv^5$
5. a) $6uv + 6uw - 3uz$ b) $3\frac{1}{3}p - 6\frac{2}{3}p^2q$
 c) $-\frac{7}{8}x^4 - \frac{5}{3}x^3$ d) $1\frac{1}{34}u^2v^3z - 2\frac{5}{17}u^3vz^5$
6. Berechne im Kopf nach geeigneter Faktorisierung.
 a) $13 \cdot 9 + 13$ b) $7 \cdot 18 + 13 \cdot 18$
 c) $2,9 \cdot 18 - 1,9 \cdot 18$ d) $27^2 - 17 \cdot 27$
 e) $\frac{17}{49} \cdot 83 + 2\frac{32}{49} \cdot 83$ f) $13^2 + 3 \cdot 13 - 16 \cdot 13$
- 7. a) $108xy - 162x + 216y$
 b) $2\frac{4}{5}xy^4z^2 - 2x^2y^2z^2 - 4\frac{2}{5}x^3y^2z + 1\frac{3}{5}xy^2z^2 - 3\frac{3}{5}x^2y^3z$
- 8. a) $21u^4 - 7u^3 + 23\frac{1}{3}u^2$
 b) $1,3x^3y + 2,35x^2y^2 - 0,9xy^3$
9. Klammere 3 aus.
 a) $18a^2 - 273b$ b) $9x + 4$
 c) $1 - 12x$ d) $a - 1$

10. Klammere -1 aus.

- a) $-3a^2 + b^2$ b) $3 - 5x$ c) $-1 - 8ab$ d) $3a^2b + 5x$

11. Klammere $-\frac{2}{3}$ aus.

- a) $\frac{4}{3}a - 4\frac{2}{3}b$ b) $8a - \frac{2}{3}$ c) $-1 - \frac{3}{2}b$ d) $2x + 3y$

12. a) $u(v + w) - v(v + w) + w(v + w)$

b) $x(a + b - c) - y(c - a - b) + z(a - c + b)$

c) $m(2a - 3b) + n(3b - 2a) - p(-3b + 2a)$

d) $u(2e - f) - 3v(4e - 2f) + w(3f - 6e)$

13. a) $\frac{3}{4}x(a - b) - \frac{21}{8}y(a - b)$ b) $3,2a(x - 3) + 4,8b(x - 3)$

c) $14x(3y + 2z) - 28y(3y + 2z)$

14. a) $12a^2b^3(7x - 1) + 84ab^4(7x - 1)$

b) $6a^3(1 - x) - 27ab^2(x - 1)$

c) $\frac{7}{4}x^2y(3x - y) + 7xy^2(y - 3x)$

d) $1,2a^2(x - y) + 8,4ab(x - y) - 0,72b^2(y - x)$

15. a) $x(a + b) + a + b$ b) $x(a - b) + a - b$

c) $x(a - b) - a + b$ d) $x(a + b) + a - b$

16. a) $(2\frac{1}{2}x - y)(2\frac{1}{2}a - b) - (1\frac{1}{2}x + y)(\frac{5}{2}a - b)$

• b) $(3,7a^2b + c)(7,3ab^2 - c) + (3,7a^2b + c)(2,7ab^2 + c)$

17. a) $4x^2y^2z - 6xyz^2 + 10x^2y^2z^2$

b) $3a^8b^{12}c^{13} + 27a^7b^{15}c^9 - 18(abc)^{11}$

c) $a^3(-b)^4 - (-a)^4b^3 + (-a)^5(-b)^5$

d) $(x + y)^2(x^2 + y^2) - (x + y)(x^3 + y^3)$

7.5.2 Mehrfaches Ausklammern

In manchen Fällen gelingt ein Faktorisieren auch dann, wenn kein *allen* Gliedern gemeinsamer Faktor vorhanden ist, indem man zunächst aus geeigneten *Teilaggregaten* einen gemeinsamen Faktor heraussetzt.

Dabei gibt es oft mehrere Möglichkeiten des Vorgehens.

Beispiele:

1) Faktorisiere $ax - ay + bx - by$.

1. Möglichkeit:

$$\underline{ax - ay} + \underline{bx - by} =$$

$$= a(x - y) + b(x - y) =$$

$$= (x - y)(a + b)$$

2. Möglichkeit:

$$\underline{ax - bx} + \underline{ay - by} =$$

$$= x(a - b) - y(a - b) =$$

$$= (a - b)(x - y)$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & au + b - bv + av - bu - a = \\
 & = (au + av - a) + (b - bv - bu) = \\
 & = a(u + v - 1) + b(1 - v - u) = \\
 & = a(u + v - 1) - b(u + v - 1) = \\
 & = (u + v - 1)(a - b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & 6a^2b - 3ab^2 - 2a + b = \\
 & = 3ab(2a - b) - 2a + b = \\
 & = 3ab(2a - b) - (2a - b) = \\
 & = (2a - b)(3ab - 1)
 \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $ax + ay + bx + by$ b) $xs - ys + xt - yt$
 c) $ab + ac - bx - cx$ d) $xz - yz - ax + ay$
2. a) $2ux + 3vy + 2uy + 3vx$ b) $ab + c + b + ac$
 c) $x^2 + ax + ab + bx$ d) $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$
3. a) $mx + ny + nx + my + rx + ry$ b) $ap - bp - aq + bq + az - bz$
 c) $ar + br + cr - a - b - c$ d) $eh + fh - gh - ei - fi + gi$
4. a) $ax - cx + 2a + 2b + bx - 2c$ b) $pu - pv + ru - qv - rv + qu$
 c) $x - y - xz + yz - 1 + z$ d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$
5. a) $3,3ax + 3,3ay - 4,4bx - 4,4by$
 b) $0,7pq - 0,9pr + 0,7qs - 0,9rs$
 • c) $4,2uv + 3,5uw + 2w + 2,4v$
 • d) $-8ax^2 + 9bx^2 - 3,6by^2 + 3,2ay^2$
6. a) $7ax + 3ay - \frac{7}{5}bx - \frac{3}{5}by$
 b) $az^2 + \frac{3}{2}axz + \frac{5}{7}bz^2 + \frac{1}{14}bxz$
 c) $0,2xyz - 0,3uxy - 0,6y^2z + 0,9uy^2$
 d) $uv^3 - \frac{1}{4}uv^2 + \frac{3}{2}av^3 - \frac{3}{8}av^2$
7. a) $ax - 7bx + 4ay - 28by$
 b) $12ax - 2ay - 18bx + 3by$
 c) $x(a + b - c) - y(a + b - c) + (x - y)$
 d) $y(a - b - c) + x(b + c - a) + (x - y)$
- 8. a) $(a + 2b)(3ux - vy) - (uy - 3vx)(a + 2b)$
 b) $(7xz - 3y)(3a + 4b) - (3a + 4b)(yz - 21x)$
 c) $(2st - 3ru)(5p - q) + (3rt - 2su)(5p - q)$
 d) $(7d - 2)(10eg - 2fh) + (2 - 7d)(5eh - 4fg)$

9. a) $64au + 36eu + 64ax + 36ex - 44bu - 44bx$
 b) $24ap + 54aq - 36bp - 81bq + 60cp + 135cq$
 c) $\frac{1}{3}ay^2 - \frac{1}{2}by^2 + \frac{4}{3}ay - \frac{1}{3}a - 2by + \frac{1}{2}b$
 d) $\frac{1}{2}r^3sv - \frac{7}{10}r^2s^2v + \frac{7}{15}r^2s^2u - \frac{1}{3}r^3su + \frac{1}{5}r^4u - \frac{3}{10}r^4v$

7.5.3. Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Schreibt man die binomischen Formeln von Satz 187.1 in der Form

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{bzw.} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \text{bzw.} \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

so kann man gewisse Aggregate mit ihrer Hilfe auch faktorisieren.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} u^2 + 12u + 36 &= \\ &= \underbrace{u^2}_{a^2} + 2 \cdot \underbrace{u}_a \cdot \underbrace{6}_b + \underbrace{6^2}_{b^2} = (u + 6)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 16x^4 - 8x^2y^3 + y^6 &= \\ &= \underbrace{(4x^2)^2}_{a^2} - 2 \cdot \underbrace{4x^2}_a \cdot \underbrace{y^3}_b + \underbrace{(y^3)^2}_{b^2} = (4x^2 - y^3)^2 \end{aligned}$$

Merke: Bestimme zunächst die beiden Glieder, deren Quadrate im gegebenen Ausdruck vorkommen, und prüfe anschließend, ob ihr doppeltes Produkt mit dem entsprechenden Glied des gegebenen Aggregats übereinstimmt.

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} (3x + 7y)^2 - 25x^2 &= \\ &= \underbrace{(3x + 7y)^2}_a - \underbrace{(5x)^2}_b = (3x + 7y + 5x)(3x + 7y - 5x) = \\ &= (8x + 7y)(7y - 2x) \end{aligned}$$

Eine *Differenz* zweier Quadrate läßt sich *stets* in ein Produkt verwandeln. Dagegen ist dies bei einer *Summe* zweier Quadrate *nicht* möglich.* Bei 3. Potenzen dagegen lassen sich sowohl die Differenz wie auch die Summe faktorisieren. Es gilt nämlich:

* Produktzerlegungen von der Form $x^2 + y^2 = 1 \cdot (x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = \dots$ usw., die immer möglich sind, interessieren in diesem Zusammenhang natürlich nicht.

Satz 203.1: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Die Richtigkeit dieser Formeln siehst du sofort ein, wenn du die rechten Seiten ausmultiplizierst (Aufgabe 204/16).

Beispiel 4:

$$0,027x^3 + 1000y^3 = (0,3x + 10y)(0,09x^2 - 3xy + 100y^2)$$

Aufgaben

1. a) $x^2 - 8x + 16$ b) $u^2 - 6uv + 9v^2$
 c) $4z^2 + 4pz + p^2$ d) $49p^2 - 112pq + 64q^2$
 e) $9y^4 + 30y^2 + 25$ f) $x^{10} + 4x^5 + 4$
2. a) $a^2 + a + \frac{1}{4}$ b) $-84a + 9a^2 + 196$
 c) $0,16x^6 - 0,24x^3y + 0,09y^2$ d) $2,25 - 3x + x^2$
 e) $0,36r^2 - 4,8rs + 16s^2$ f) $4x^2 + 52x + 169$
- 3. a) $\frac{4}{9}s^2 + \frac{16}{15}st + \frac{16}{25}t^2$ b) $\frac{9}{16}u^2 - \frac{5}{4}uv + \frac{25}{36}v^2$
 c) $1,21 + a + \frac{25}{121}a^2$ d) $1,96x^4 - 2,8x^2 + 1$
4. a) $625 - 196a^2$ b) $1 - 81x^2$
 c) $\frac{9}{16}u^2 - \frac{25}{36}v^2$ d) $0,49a^2 - 0,01b^2$
5. a) $2,25 - 0,0256t^2$ b) $\frac{64}{289}p^2 - 3,61q^2$
 c) $400x^2y^2 - 121u^2v^2$ d) $\frac{169}{324}x^4 - 1$
- 6. a) $20x^2 - 45y^2$ b) $3,6x^2 - 4,9y^2$
 c) $175p^4 - 252q^4$ d) $48(xy)^2 - 147u^2v^2$
7. a) $6a^2 + 12ab + 6b^2$ b) $7x^2 - 7x + 1\frac{3}{4}$
 c) $a^3 + 2a^2 + a$ d) $3x^7 - 12x^5 + 12x^3$
8. a) $a^4 - b^4$ b) $x^6 - y^6$ c) $x^8 - y^8$
 d) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ e) $81 - 72u^2 + 16u^4$ • f) $64x^6 - 1$
9. a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ b) $4x^2 - 20x + 25 - 9y^2$
 c) $36a^2 + 48ab + 16b^2 - 81c^2$ d) $196u^2 - 4uv + \frac{v^2}{49} - \frac{1}{121}$
 e) $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 2xy - y^2$ • f) $16u^2 - v^2 + 2v - 1$
10. a) $(2a + 3b)^2 - 16a^2$ b) $(2a - 3b)^2 - 16a^2$
 c) $16a^2 - (2a + 3b)^2$ d) $16a^2 - (2a - 3b)^2$

11. a) $(13x + 14y)^2 - (13x - 14y)^2$
 b) $(0,1x - 0,2y)^2 - (0,1x + 0,2y)^2$
 c) $(\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}y)^2 - (\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y)^2$
 d) $(1\frac{3}{4}x - 2\frac{1}{3}y)^2 - (1\frac{3}{4}x + 2\frac{1}{3}y)^2$
12. a) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$
 • c) $2,89a^2 - 0,64b^2 + 2,08bc - 1,69c^2$
 • d) $3,24x^2 - 2,56y^2 - 3,52yz - 1,21z^2$
- 13. a) $2a^2 - 2b^2 + a^2x - b^2x$ b) $2m^2x - 8n^2x + 3m^2y - 12n^2y$
 c) $12a^2x - 2b^2y - 3b^2x + 8a^2y$
 d) $36p^2x^2 - 9p^2y^2 - 16q^2x^2 + 4q^2y^2$
- 14. a) $9a^2x - 9a^2y - 12abx + 12aby + 4b^2y - 4b^2x$
 • b) $\frac{1}{9}a^2x^2 - \frac{1}{6}a^2xy + \frac{1}{4}a^2y^2 - \frac{1}{9}b^2x^2 + \frac{1}{6}b^2xy - \frac{1}{4}b^2y^2$
15. Verwandle, wenn möglich, in ein Produkt.
 a) $a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2$ b) $36p^2 + 21pq + 64q^2$
 c) $-a^2 - 2ab - b^2 + 1$ d) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$
 e) $u^2 + uv + v^2$ f) $a^4 + b^4$
 g) $4a^2 - 5b^2$ h) $a^2 + 2ab + b^2 + 1$
16. a) Beweise Satz 203.1.
 b) $a^3 - 8b^3$ c) $243 + 216a^6$ d) $\frac{64}{125}x^3 - 1$
 e) $\frac{243}{512}a^3 + 2\frac{10}{27}b^3$ f) $0,001x^3 + y^3z^6$ g) $0,729u^3 - 1000000v^3$

7.5.4 Faktorisieren durch Probieren

Wenn du $a^2 + 5a + 6$ in ein Produkt verwandeln sollst, so erscheint dir dies sicherlich auf den ersten Blick als aussichtslos. Erstaunlicherweise kommt man hier aber mit einigen kleinen Überlegungen und einem geschickten Probieren zum Ziel.

Da das Aggregat mit a^2 beginnt und aus 3 Gliedern besteht, versuchen wir den Ansatz

$$a^2 + 5a + 6 = (a \square ?)(a \triangle ?).$$

Die Symbole $\square$ und $\triangle$ stehen dabei für $+$ oder $-$.

Die für die Fragezeichen zu wählenden Zahlen müssen, miteinander multipliziert, 6 ergeben. 6 läßt sich mit natürlichen Zahlen als $2 \cdot 3$, aber auch als $1 \cdot 6$ schreiben. Wir versuchen es mit $2 \cdot 3$ und setzen also an

$$a^2 + 5a + 6 = (a \square 2)(a \triangle 3).$$

Von den 4 möglichen Kombinationen $++$, $+-$, $-+$ und $--$ scheiden die beiden mittleren aus, da wir sonst -6 für das letzte Glied erhielten. Die Kom-

bination $++$ führt zum richtigen mittleren Glied $5a$. Also gilt die Faktorisierung

$$a^2 + 5a + 6 = (a + 2)(a + 3).$$

Hätten wir 6 als $1 \cdot 6$ zerlegt, so ergäbe $(a \square 1)(a \triangle 6)$ für keine der 4 Rechenzeichenkombinationen das mittlere Glied $5a$. Man muß also ein Gespür dafür haben! Bei $a^2 + 5a - 6$ führt nämlich gerade $6 = 1 \cdot 6$ zum Ziel:

$$a^2 + 5a - 6 = (a - 1)(a + 6).$$

Eine derartige Faktorisierung durch Probieren wird natürlich nicht immer gelingen. Beim Versuch hilft

Regel 205.1: Bei Trinomen der Form $x^2 + bx + c$ mit ganzen Zahlen b und c zerlegt man c in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen und versucht, die Rechenzeichenkombination so zu bestimmen, daß sich die richtigen Rechenzeichen und das mittlere Glied ergeben.
Hat das Trinom die Form $ax^2 + bx + c$, so klammert man erst a aus.

Beispiel: $\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9 = \frac{3}{4}(x^2 - 8x + 12) = \frac{3}{4}(x - 2)(x - 6)$

Aufgaben

- | | |
|--|--|
| 1. a) $x^2 + 7x + 12$ | b) $x^2 - x - 12$ |
| c) $x^2 + 11x + 10$ | d) $x^2 + 9x - 10$ |
| 2. a) $u^2 - 13u + 40$ | b) $a^2 - 20a + 96$ |
| c) $z^2 - 10z + 9$ | d) $x^2 - x - 4$ |
| • 3. a) $x^2 - 5xy + 4y^2$ | b) $y^2 + yz - 56z^2$ |
| c) $a^2 - 9ab + 18b^2$ | d) $u^2 - 4uv - 21v^2$ |
| • 4. a) $x^2 + 2x - 48$ | b) $x^2 - 2x - 48$ |
| c) $x^2 - 2x + 48$ | d) $x^2 + 2x + 48$ |
| 5. a) $2x^2 + 16x + 30$ | b) $7x^2 - 14x - 105$ |
| c) $\frac{3}{4}x^2 + 6x + 9$ | d) $-x^2 + 12x - 35$ |
| • 6. a) $3x^2 - 39x + 108$ | b) $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$ |
| c) $-\frac{1}{2}x^2 + 9x - 18$ | d) $0,1a^2 - 1,1a + 1$ |
| • 7. a) $-0,4z^2 + 2,8z - 4,8$ | b) $\frac{1}{4}p^2 - pq - \frac{21}{4}q^2$ |
| c) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{3}x + 8$ | d) $\frac{5}{4}y^2 + 25y + 120$ |

Register

Absolutbetrag 44, 156
Addition 31
Aggregat 92, 104, 106, 182f., 193, 199, 202
Ägypter 123, 140, 160, 171
AHMOSE 119, 123
AL-CHARIZMI 9, 10, 34, 120f., 124, 138, 141, 160
Algebra 10ff., 17, 121, 138, 160
~ nova 12, 17
algebraische Summe 92
AL-KARADSCHI 11
AL-KASCHI 167
ALKUIN 166
Allaussage 118
allgemeingültig 124, 151
AL-NAYRIZI 187
Altersaufgaben 168ff.
ANANIA 165
ANARITIUS 187
Anordnung der rationalen Zahlen 60
APIAN 197
äquivalent 89, 126, 145
Äquivalenz
~ von Gleichungen 126
~ von Termen 89
~ von Ungleichungen 145
~ umformungen 126, 138, 145
~ zeichen 127
Araber 12, 85, 120f., 141, 197
ARISTOTELES (Ἀριστοτέλης) 170
Arithmetisches Dreieck 197
Ars magna 12
assoziativ 50, 90
Assoziativgesetz
~ der Addition 50f., 83, 88
~ der Multiplikation 64, 68, 83, 88, 90
~, verallgemeinertes 91
ausklammern 89, 91, 198
ausmultiplizieren 89, 91
Aussage 114
~ form 115, 122
B 14
Babylonier 85, 120f., 140, 160, 171, 188
Bamberger Rechenbuch 32
Basis 96
BERNOULLI 33
Bestimmungsgleichung 122
Betrag, absoluter 43
Betragsstriche 43
Binom 187, 193, 195
binomische Formeln 187, 202
BOETHIUS 20, 31, 33f., 37, 87, 187
BOMBELLI 96
BOUGUER 153
BRAHMAGUPTA 85, 121, 189
Bruchstrich 33

CALANDRI 159
CARDANO 86, 171
CARTESIUS → DESCARTES
CHANG Tsan 85
Chinesen 85, 140
CHING Ch'ou-ch'ang 85
Chiu Chang Suan Shu 85, 165f., 176
CICERO 13, 31
CLAVIUS 180
Codex Dresden C 80 40, 121
COLUMELLA 32, 34
cosa 121
Coß 121
DAGOMARI 165
definierender Doppelpunkt 95
Definition 14
~ smenge eines Terms 27, 28
DESCARTES 33, 86, 96, 102, 120f., 170, 180
Differenz 31
~ zweier rationaler Zahlen 54
DIOPHANT (Διόφαντος) 42, 85, 96, 121, 138, 166, 177
distributiv 78
Distributivgesetz 78, 83, 89
~, verallgemeinertes 91, 198
Division 32
~ sdoppelpunkt 33
Doppelpunkt 33
~, definierender 95
doppeltes Produkt 187
Doppelungleichung 154
eindeutig 124
EPICARMOS (Ἐπίχαρμος) 13
EUKLID (Εὐκλείδης) 13, 16, 20, 66, 187f.
EULER 96, 102
Existenzaussage 118
Exponent 96
Faktor 32
faktorisieren 198, 202, 204
Feingehalt 175
FIBONACCI 16, 20, 31, 33, 42, 85, 92, 141, 165
fl. 161
Formel 187
FRONTINUS 31, 34
ganz 42
GAUSS 141
Gegenzahl 41, 57
Geometriaufgaben 178, 192
gerade 13
GERBERT VON AURILLAC 32
GERHARD VON CREMONA 9, 12, 187
GERNARDUS 32
Gleichheitszeichen 60
Gleichung 116, 122, 185f., 191
~, lineare 133

Griechen 13, 140f., 171
Größer-Ungleichung 151f.
Grundmenge 14, 28, 89, 115
Grundzahl 96
Gulden 161
HAMILTON 50, 90
HANKEL 86
HARRIOT 17, 33, 60
Haufen 120
HERON (Ἡρόων) 96
Hieroglyphen 120
HIPPOKRATES (Ἱπποκράτης) 96
Höchstens-Ungleichung 152
Hochzahl 96
HUDE 86
Hyksos 119
Imam 10
Inder 85, 120f., 140f., 171, 197
Information 124, 157, 162
Intervall 148
invers 56
~ bzgl. der Addition 57, 83, 88
~ bzgl. der Multiplikation 73, 83, 88
isolieren der Unbekannten 128, 138
JÖCHER 171
JOHANNES HISPALENSIS 31, 34
JOHANNES DE SACRO BOSCO 31f., 34
Kalif 10
Karat 175
Kehrwert 73
Klammer als Fachbegriff 102
Klammern 22, 96, 101, 108, 111
Kleiner-Ungleichungen 151f.
KLÜGEL 92
Koeffizient 91
Komma 186
kommutativ 50
Kommutativgesetz
~ der Addition 50f., 83, 88f.
~ der Multiplikation 64, 67, 83, 88
~, verallgemeinertes 90
Leerstelle 15, 115
LEIBNIZ 33, 187
Leistungsaufgaben 176
LEONARDO VON PISA → FIBONACCI
LEON VON BYZANZ 16, 20, 94
linear 133
linke Seite 123
LIU Hui 85
Lösung 115, 122
~ smenge 116, 122, 151, 155, 157
Lot 175

- Malpunkt 33
 ~, weglassen 23, 33
 Maya 140f.
 mehrdeutig 124
 Mindestens-Ungleichung 152
 Minuend 31
 Minusklammer 105
 Minuszeichen 32
 Mischungsaufgaben 173
 Monotonie
 ~ der Addition 61f., 145
 ~ der Multiplikation 81, 83, 146
 ~ ~ ~, Umkehrung der 147
 Moskauer Papyrus 122
 MÜLLER 33, 60
 Multiplikation 31
 ~, ägyptische 31

 NAPIER 17, 186
 NARAYANA 189
 natürlich 37
 negativ 39f., 85
 negative ganze Zahlen 42
 neutrales Element
 ~ der Addition 50, 52, 83, 88
 ~ der Multiplikation 64, 68, 83, 88
 NEWTON 96
 NIKOMACHOS (Νικόμαχος)
 VON GERASA 37
 Normalform einer Ungleichung 151
 Normalnull 36
 null 139f.
 Null 139f.
 Nullform 62

 Oder-Aussage 139
 Ohne-Symbol 39, 157

 PACIOLI 121, 187
 Papyrus 119
 Papyrus Rhind 113, 119f., 122f., 160, 174
 PASCAL 197
 ~-STIFELSCHEs Dreieck 197
 PEACOCK 38, 86
 Permanenzprinzip 38, 86
 Perzent 171
 Pfeiladdition 46
 PLATON (Πλάτων) 20, 170
 Platzhalter 14
 Plusklammer 103
 Pluszeichen 32
 Polynom 187
 positiv 40
 postum 17
 Potenz 96, 133, 195
 PRESTET 133
 Primzahl 20

 Probe 123, 162
 Produkt 32
 Promille 171
 ~zeichen 171
 Prozent 171
 ~aufgaben 170ff.
 ~zeichen 171
 PTOLEMAIOS (Πτολεμαῖος) 140f.
 PYTHAGORAS (Πυθαγόρας) 34

 $\mathbb{Q}$ 38
 QIA Hsian 197
 Quadrat 66, 96, 191, 193, 202
 Quadrieren 2stelliger Zahlen 191
 Quadrivium 34
 Quersumme 105, 167f.
 Quotient 32
 ~ zweier rationaler Zahlen 71

 Rabatt 152
 RAIMUND 12
 rational 39
 Rechengesetze
 ~ der Addition 50
 ~ der Multiplikation 64
 ~ in $\mathbb{Q}$ 83, 88f.
 Rechenvorteil 100, 191
 Rechenzeichen 32f.
 rechte Seite 123
 RÉCORD(E) 60
 REGIOMONTANUS 33
 Reihenfolge von Punktrechnungen 23
 REISCH 34
 res 121
 Resultat 31
 RHIND 119
 RIES 160f.
 Römer 140
 RUDOLFF 121

 Schachtelklammern 110
 schai 120f.
 SCHEYBL 20
 SCHRÖDER 96
 SERVOIS 50, 78
 Sieben Freie Künste 34
 SOKRATES (Σωκράτης) 170
 SPEUSIPPOS (Σπεύσιππος) 20
 Stammbruch 123
 Stellenwertsystem 140
 STEVIN 186f.
 STIFEL 32, 85, 96, 101, 197
 Subtrahend 31
 Subtraktion 31, 54, 57
 Summe 31
 ~, algebraische 92
 ~ zweier rationaler Zahlen 47, 49
 Sunya 140
 Symbol 95

 TARTAGLIA 96, 101, 186f.
 teilerfremd 117
 Teilungsdoppelpunkt 33
 Term 21, 87ff., 180ff.
 ~e, gleichartige 91
 ~ersetzung 126
 ~gliederungsbaum 23
 Testament 163
 Textaufgaben 160ff.
 THYMARIDAS (Θυμαρίδας) 120
 Trinom 187, 193, 205
 Typus Arithmeticae 34f.

 Und-Aussage 154
 Und-Symbol 154
 unendlich 149
 Unbekannte 120, 162
 ungerade 13
 Ungleichungen 60, 116, 144ff., 185f., 191
 usch 121

 Variable 12, 14, 15
 vel 139
 VIÈTE 12, 16, 17, 33, 40, 86, 91f., 96, 102, 120, 160, 187
 VITRUVIUS 32, 34
 VOIGT 60
 Vorzeichen 43, 46, 102
 Vorzeichenregeln
 ~ für Produkte 65f., 76
 ~ für Quotienten 73, 77

 Wahrheitswert 114
 WALLIS 149
 WARNER 60
 WEIERSTRASS 43
 widersprüchlich 125, 151
 WIDMANN VON EGER 13, 31f., 92, 177
 WOLFF 31, 40, 86, 141, 187

 YANG Hui 197
 yavat-tavat 121

 $\mathbb{Z}$ 42
 Zahl
 ~, ganze 42
 ~, gemischte 22, 132
 ~, gerade 13
 ~, natürliche 37
 ~, negative 38, 39
 ~, rationale 39
 ~, ungerade 13
 ~, zusammengesetzte 20
 Zahlengerade 39
 Zahlenterm 27
 Zehnerpotenzschreibweise 100
 Zeichenwertsystem 140
 Ziffer 141
 Zisternenaufgaben 176
 zwischen 155

Bildnachweis

Bayerische Staatsbibliothek, München: 9.1, 16.2, 32.1, 33.2, 35, 40.1, 40.2, 85.1, 113, 120.1, 149.1, 177.1, 186.2 – Deutsches Museum, München: 16.1, 33.1, 90.1, 102.1, 121.1, 171.1, 186.1 – Federle, A.: 181 – Haller, R.: 10.1, 143, 161.2, 175.1 – HÖRZU, Werner Mitsch/Rainer Schwarz 114 – Kühner, St.: 87 – Maß, Zahl und Gewicht (Ausstellungskataloge der Herzog-August-Bibliothek; Nr. 60): 159 – Mathematisches Institut der Universität Tübingen: 43.1, 86.2 – Menninger, K., Zahlwort und Ziffer: 140.4, 160.1 – Posener, G., Lexikon der ägyptischen Kunst: 119.1 – Schwenk, B.: 87 – Thüringisches Hauptstaatsarchiv Weimar (Reg li 572, Bl. 1^b): 85.1/Unterschrift – Tropfke, J., Geschichte der Elementarmathematik: 140.1, 140.2, 140.3, 165.1 – Universitätsbibliothek Cambridge: 9.2, 86.1

