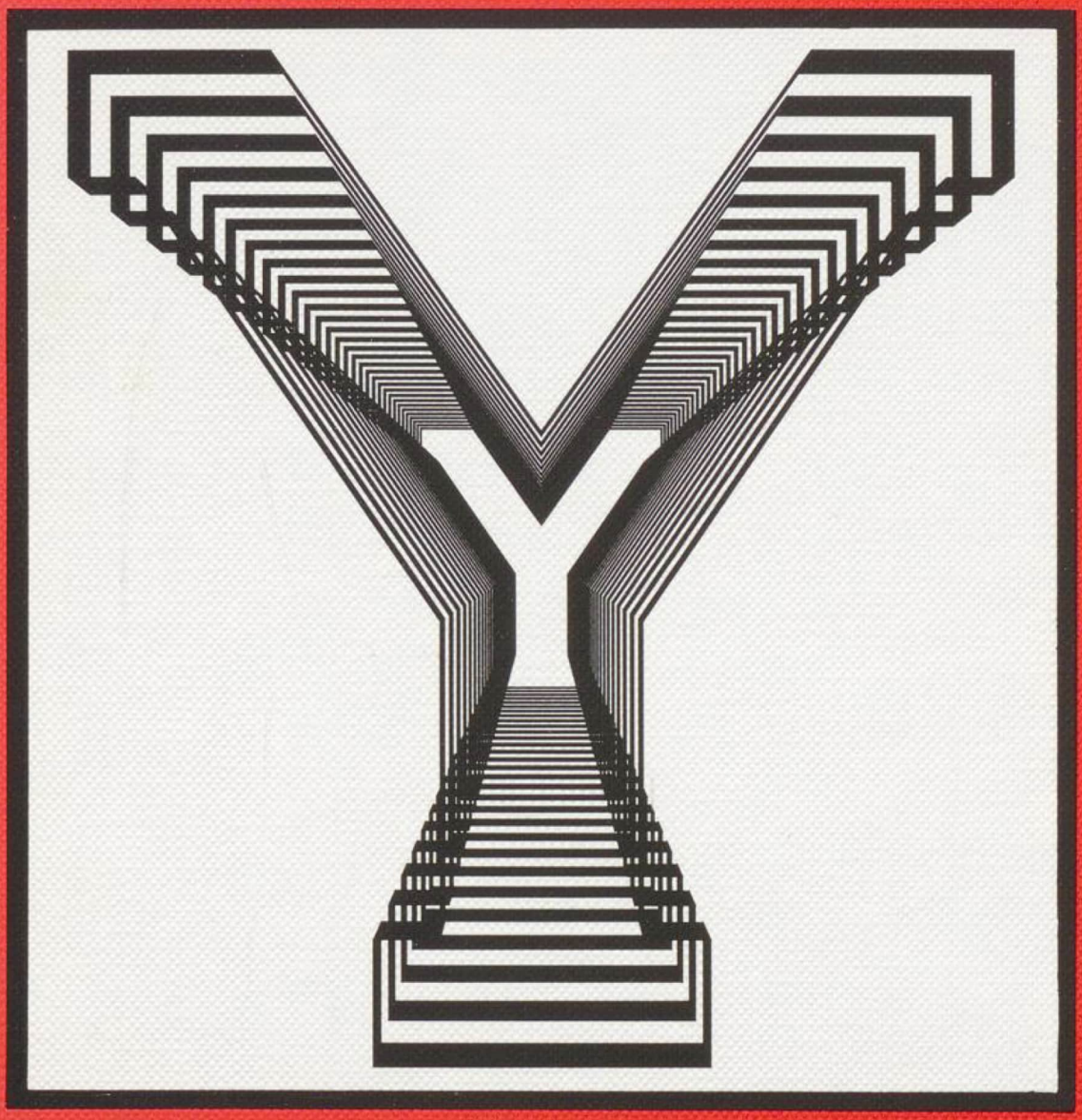
Barth · Federle · Haller

Algebra

8



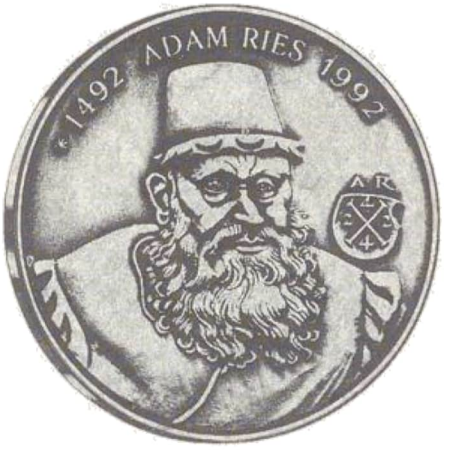
Oldenbourg

Algebra
8

Friedrich Barth · Reinhold Federle
Rudolf Haller

Nichts ist getan, wenn noch
etwas zu tun übrig bleibt.
GAUSS

Oldenbourg



Adam-Ries-Preis
1993

Autoren und Verlag wurden für die Lehrbücher
Algebra 7 bis *Algebra 10*
mit dem Adam-Ries-Preis 1993 ausgezeichnet,
der vom Adam-Ries-Bund e.V.
Annaberg-Buchholz verliehen wird.

Die europäische Währung Euro wird in diesem Werk mit € abgekürzt.

© 1999 R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf deshalb der schriftlichen Einwilligung des Verlags.

6., verbesserte Auflage 1999 R E
Druck 03 02 01 00 99
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Umschlag: Gert Krumbacher
Lektorat: Dr. Willibald Pricha
Herstellung: Karina Hack
Zeichnungen: Peter-Friedrich Kropf, Herrsching
Satz und Druck: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau
ISBN 3-486-**02647**-X

Inhalt

	Bildnachweis	6
	Vorwort	7
1	**Umformen von Bruchtermen**	9
1.1	Definitionsmenge	11
	Aufgaben	13
1.2	Äquivalenz von Bruchtermen	14
	Aufgaben	15
1.3	Erweitern und Kürzen	15
	Aufgaben	18
1.4	Hauptnenner	23
	** Zur Geschichte des Hauptnenners	24
	Aufgaben	25
**1.5	Zur Geschichte der Brüche	27
2	**Rechnen mit Bruchtermen**	33
2.1	Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Bruchterme	34
	Aufgaben	36
2.2	Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Bruchterme	37
	Aufgaben	39
2.3	Multiplizieren von Bruchtermen	44
	Aufgaben	45
2.4	Dividieren von Bruchtermen	48
	** Zur Geschichte der Divisionsregel	49
	Aufgaben	49
2.5	Doppelbrüche	52
	Aufgaben	53
3	**Bruchgleichungen**	55
3.1	Kreuzweises Multiplizieren	56
	Aufgaben	58
3.2	Multiplizieren mit dem Hauptnenner	61
	Aufgaben	63
3.3	Proportionen	69
	** Zur Geschichte der Proportionen	70
	Aufgaben	72

4 Gleichungen mit Parametern 75

4.1 Lineare Gleichungen mit Parametern 76
Aufgaben 80
4.2 Bruchgleichungen mit Parametern 81
Aufgaben 82

5 Funktionen und ihre graphischen Darstellungen 84

5.1 Funktionen 85
Aufgaben 90
5.2 Der Graph einer Funktion 92
**Zur Geschichte der Koordinatensystems 96
Aufgaben 100
5.3 Die direkte Proportionalität 103
Aufgaben 107
5.4 Die lineare Funktion 109
Aufgaben 113
5.5 Die indirekte Proportionalität 116
Aufgaben 118

6 Lineare Gleichungssysteme 121

6.1 Gleichungen mit mehreren Unbekannten 122
**Zur Geschichte 123
Aufgaben 124
6.2 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit mehreren Unbekannten 125
Aufgaben 127
6.3 Lineare Gleichungssysteme 128
Aufgaben 131
6.4 Lösungsverfahren für Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten 132
6.4.1 Bestimmung der Lösungsmenge durch Äquivalenzumformung 132
6.4.2 Spezielle Lösungsverfahren 135
**Zur Geschichte der Lösungsverfahren 142
Aufgaben 144
6.5 Lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen oder Unbekannten 146
Aufgaben 148

6.6 Gleichungssysteme, die auf lineare Gleichungssysteme zurückführbar sind 150
6.7 Textaufgaben 153
6.7.1 Bestimmen von Zahlen 153
6.7.2 Teilen und Verteilen 155
6.7.3 Mischungsaufgaben 156
6.7.4 Bewegungsaufgaben 157
6.7.5 Aufgaben aus der Geometrie 159
6.7.6 Verschiedenes 160

7 Ungleichungen 165

7.1 Ein graphisches Verfahren zur Lösung linearer Ungleichungen 166
Aufgaben 168
7.2 Produktungleichungen 168
Aufgaben 170
7.3 Bruchungleichungen 171
Aufgaben 171
7.4 Ungleichungen mit Absolutbeträgen 173
Aufgaben 176
7.5 Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen 177
7.5.1 Graphische Lösung einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen 177
Aufgaben 179
7.5.2 Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen 179
Aufgaben 181
7.5.3 Lineare Optimierung 182
Aufgaben 186

Register 190

Bildnisse von Mathematikern

Al-Charizmi 29.1 – Beyer 32.1 – Cauchy 143.1 – Cayley 143.2 – Cramer 140.2 – Descartes 93.1 – Fermat 98.1 – Gauß 24.1 – Gemma Frisius 67.1 – Leibniz 99.2 – Melanchthon 10.1 – Napier 32.2 – Newton 99.1 – Oughtred 71.1 – Peano 87.1 – Record(e) 71.2 – Stevin 31.1

Bildnachweis

Bayerische Verwaltung der Staatlichen Schlösser und Seen, München: 55 – Bibliothèque Nationale, Paris: 75 – Bibliothèque publique et universitaire, Genève [Foto: F. Martin, Genf]: 140.2 – Bronowski, J.: The Ascent of Man, 1973: 99.1 – *Chace, A.B.: The Rhind Mathematical Papyrus, Ohio, 1927/29: 27.2 – *Codex latinus monacensis 4377: 84 – *Codex latinus monacensis 14436: 121 – *Dürer, Albrecht: Sämtliche Kupferstiche, Leipzig 1928: 10.1 – Ebrard, Clemens (Hrsg.): Die Stadtbibliothek in Frankfurt am Main, 1896: 32.1 – Elemente der Mathematik, Beiheft Nr. 14, 1974: 87.1 – *Geometria a Renato Des Cartes, ed. Frans van Schooten, Amsterdam, 1659[2]: 93.1 – Haller, Rudolf, München: 29.1; 165 – Herzog-Anton-Ulrich-Museum, Braunschweig: 99.2 – *Kowalewski, Gerhard: Große Mathematiker, Berlin 1938: 143.1 – Lange, Kurt/Hirmer, Max: Äypten, München 1978: 9 – *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Neue Folge, Frankfurt/M. 1965: 31.1; 31.2 – Oughtred, William : Opuscula mathematica, London 1677 (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen): 71.1 – Prähistorische Staatssammlung, München: Der Garten in Eden: 27.1 – *Smith, David Eugene: History of Mathematics, Boston 1923–25: 67.1; 71.2 – Tietze, Heinrich: Gelöste und ungelöste Mathematische Probleme, München 1959: 143.2 – Universitätssternwarte Göttingen: 24.1 – University of Edinburgh: 32.2 – *Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat, Toulouse 1679: 98.1

* aus den Beständen der Bayerischen Staatsbibliothek, München

Vorwort

Das vorliegende Buch soll die *Algebra* 7 in Intention und Stil fortsetzen. Wir wollen also wiederum die Algebra breit genug darstellen, sodass auch ein Schüler den Text lesen und verstehen kann. Vorgerechnete Beispiele sollen das Verständnis erleichtern. Andererseits soll man auch immer wieder spüren, dass die Algebra durchaus anspruchsvolle Überlegungen und Probleme bietet. Die Aufmachung und der breite historische Anteil sollen dem Leser Appetit machen und ihn dazu bewegen, das Buch auch freiwillig in die Hand zu nehmen. Außerdem können die vielfältigen historischen und linguistischen Bezüge aufzeigen, wie tief die Mathematik in das kulturelle Umfeld der jeweiligen Zeit eingebettet ist. Der Schüler soll aus dem Buch auch erfahren, dass Mathematik nicht nur Rechnen, sondern hauptsächlich Denken und Argumentieren ist. Die Vielzahl und die große Variabilität im Schwierigkeitsgrad der angebotenen Aufgaben machen es möglich, jedem Anspruch, auch dem der besonders interessierten Schüler, gerecht zu werden. Eine Kennzeichnung der Pflichtaufgaben und des Schwierigkeitsgrades erleichtert die Auswahl. Die Stoffdarbietung ist so breit gehalten, dass der Lehrer Auswahlmöglichkeiten hat und auch Lesestoff anbieten kann. Wir hoffen, damit einem erkennbaren Trend zur Minimalisierung entgegenwirken zu können und einen Beitrag zum Bildungsauftrag des Gymnasiums zu leisten.

München, im Januar 1988 *Die Verfasser*

Kennzeichnung der in Bayern nicht allgemein verbindlichen Stoffgebiete

Fakultative Abschnitte sind durch zwei vorangestellte Sterne (**) gekennzeichnet.

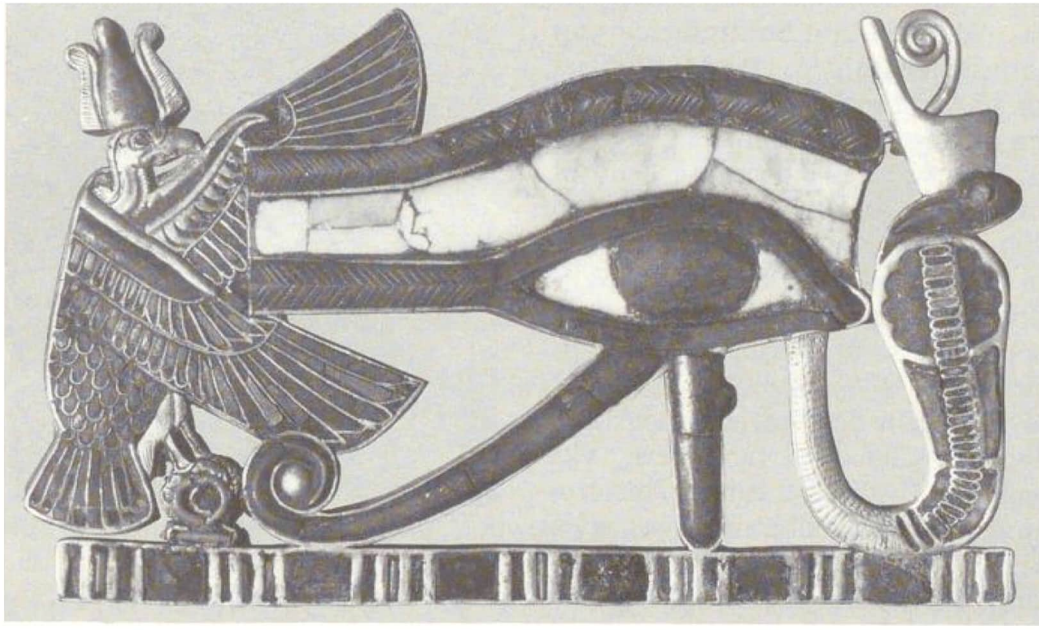
Kennzeichnung der Aufgaben

Rote Zahlen bezeichnen Aufgaben, die auf alle Fälle bearbeitet werden sollen. • bzw. ⁚ usw. bezeichnen Aufgaben, die etwas mehr Ausdauer erfordern, weil sie entweder schwieriger oder zeitraubender oder beides sind. Je mehr Punkte, desto mehr Mühe!
Zitiert werden die Aufgaben unter Angabe der Seite und der Nummer. So bedeutet 21/**17** die Aufgabe **17** auf Seite 21.

Nummerierung von Definitionen, Sätzen, Abbildungen und Tabellen

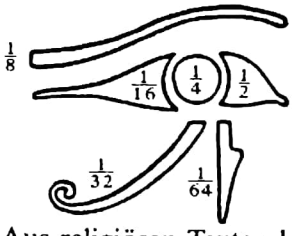
Die Zahl vor dem Punkt gibt die Seite an, die Zahl nach dem Punkt nummeriert auf jeder Seite. Abb. 27.2 bedeutet beispielsweise die 2. Abbildung auf Seite 27.

1 Umformen von Bruchtermen



Das Horusauge aus dem Bruststück einer Kette des Pharaos TUTANCHAMUN (1347 bis 1338 v. Chr.), flankiert links von der mit dem Geierbalg gekrönten Geiergöttin Nechbet von Elkab, der Göttin Oberägyptens, rechts von der Schlangengöttin Uto mit der unterägyptischen Krone. – Höhe 5,7 cm, Breite 9,5 cm.

Bereits auf einem Papyrus der 6. Dynastie (2290–2155 v. Chr.) finden sich besondere Zeichen für gewisse Stammbrüche, nämlich für $\frac{1}{2}$, ○ für $\frac{1}{4}$, für $\frac{1}{8}$, für $\frac{1}{16}$, für $\frac{1}{32}$ und für $\frac{1}{64}$, die in den jüngeren Papyri wie dem *Papyrus Rhind* (um 1550 v. Chr.) nur mehr für die entsprechenden Teile des Getreidehohlmaßes *hekat* (= 4,875 l) verwendet wurden. Diese Zeichen lassen sich, wie nebenstehend gezeigt, zu einem Auge zusammensetzen, dem *Horusauge*, das auch *Udschat-Auge*, heiles Auge, genannt wurde. Dieses Auge war in der ägyptischen Welt nach dem Skarabäus das meistverbreitete Amulett.



Aus religiösen Texten können wir die folgende mythologische Deutung erschließen. Horus, der Sohn des Osiris und der Isis, musste mit seinem Onkel Seth um die Herrschaft in Ägypten kämpfen. In Gestalt eines schwarzen Schweins riss Seth seinem Neffen Horus das Auge heraus und zerstückelte es. Thot, der Gott der Weisheit, der auch die Zahlen und damit die Mathematik erfunden hat, setzte mittels Speichel aus den gefundenen Bruchteilen das Auge wie angedeutet zusammen. Addiert man die Teile auf, so erhält man $\frac{63}{64}$. Das fehlende $\frac{1}{64}$ hat Thot dann auf wundersame Weise hinzugefügt und das Auge so zu einem heilen Auge ergänzt.

1 Umformen von Bruchtermen

Um 1500 lernte man in der Schule nur das Addieren und Subtrahieren von natürlichen Zahlen. Das Multiplizieren und erst recht das Dividieren waren hingegen Lehrstoff der Universität, wie wir aus einer natürlich auf Lateinisch gehaltenen Rede Philipp MELANCHTHONS aus dem Jahre 1536 an die Studenten der Universität Wittenberg anlässlich der Einführung eines Lehrers für Mathematik erfahren:

»Die Regeln des Vervielfachens und Teilens schließlich erfordern viel mehr Fleiß, aber bei einiger Anstrengung können sie doch bald begriffen werden. Wie alle anderen Künste verlangt auch diese Kunst Übung und Gebrauch.«*

1526

philippus melanchton

Abb. 10.1 Philipp MELANCHTHON (1497 bis 1560) Humanist und Reformator. Wegen seiner Gelehrsamkeit und wegen seiner Organisation des Unterrichts an den protestantischen Universitäten und Lateinschulen nannte man ihn *Praeceptor Germaniae*, Lehrer Deutschlands. Kupferstich von Albrecht DÜRER.

Wie weit sind wir heute gekommen! Du hast das Teilen in der Grundschule gelernt.

Nun entstand aber aus dem Teilen, weil es oft nicht aufgeht, das Bruchrechnen, bei dem man leicht ins Schwitzen gerät, wenn man nicht mehr recht weiterweiß. Beim Volke waren daher die Brüche wegen ihrer Schwierigkeit verrufen, und so sagte man von jemandem, der in eine schwierige oder aussichtslose Lage geraten war, er sei »in die Brüche geraten«. Heute ist diese Redensart aus dem deutschen Sprachschatz verschwunden, wahrscheinlich deswegen, weil das Bruchrechnen nicht mehr als schwer empfunden wird.

Aus dem Rechnen mit Brüchen entwickelte sich in der Algebra das Rechnen mit Bruchtermen. Wir wünschen dir, dass du aufmerksam und mit viel Fleiß das Umformen von Bruchtermen lernst, damit du am Ende des Jahres nicht in die Brüche gerätst.

* Deinde multiplicationis et divisionis praecepta aliquanto plus requirunt diligentiae, sed tamen causae cito perspici possunt ab attentis. Exercitationem et usum requirit haec ars, ut aliae omnes. – *Praefatio in arithmeticen*

1.1 Definitionsmenge

Ein Term ist ein Rechenausdruck mit Zahlen und Variablen.

Beispiele für Terme sind: $x^2 - 7$; $\frac{3}{7}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a-b}{c+7}$; $3a(a-b)$.

Keine Terme sind: $a + : 3$; $3 + x -$; $2(-)x) +$.

Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit Bruchtermen befassen:

Definition 11.1: Ein Quotient zweier Terme heißt **Bruchterm**.

Beispiele für Bruchterme sind: $\frac{3}{x}$; $\frac{2+x}{3-x}$; $\frac{1}{(a+b)^2}$; $\frac{5}{y-y}$.

Keine Bruchterme sind: $3x$; $(a+b)^2$; $1 + x + x^2$.

Der Bruchterm $\frac{3}{x-4}$ liefert für fast alle Einsetzungen Zahlenterme. So ergibt sich für $x = 0$ der Zahlenterm $\frac{3}{0-4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

Nur die Einsetzung $x = 4$ macht Schwierigkeiten; man erhält nämlich $\frac{3}{4-4} = \frac{3}{0}$. Das ist aber kein Zahlenterm, weil man durch null nicht teilen kann. Die Zahl 4 gehört demnach nicht zur Definitionsmenge D des Bruchterms $\frac{3}{x-4}$; denn die Definitionsmenge eines Terms besteht ja gerade aus den Einsetzungen, für die der Term zu einem Zahlenterm wird.

Ein Bruchterm wird nur dann nicht zu einem Zahlenterm, wenn beim Einsetzen der Nenner null wird. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur Bruchterme, bei denen nur eine einzige Variable im Nenner auftritt. Für solche Bruchterme gilt:

Satz 11.1: Die Definitionsmenge eines Bruchterms mit einer Variablen ist die Menge der Zahlen, die man für die Variable einsetzen kann, ohne dass der Nenner null wird.

Zur Bestimmung der Definitionsmenge eines Bruchterms muss man also alle Zahlen ermitteln, für die der Nenner null wird. Man nennt diese Zahlen **Nullstellen des Nenners**. Die Definitionsmenge D eines Bruchterms ist also die Grundmenge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ohne die Menge der Nullstellen des Nenners.

Versteht man unter $A \setminus B$ (gelesen »A ohne B«) die Menge der Elemente von A, die nicht zugleich zu B gehören, so kann man schreiben:

$$D = \mathbb{Q} \setminus \text{Menge der Nullstellen des Nenners}$$

Für unser Beispiel sieht das so aus:

Der Term $\frac{3}{x-4}$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$.

Die Menge $\mathbb{Q} \setminus \{4\}$ kann man auch kürzer durch die Ungleichung $x \neq 4$ beschreiben.

Beispiele: **1)** $\frac{-1}{x-1}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

2) $\frac{x-1}{2x-1}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

3) $\frac{2}{(x-1)(2+x)}$; $D = \mathbb{Q} \setminus \{-2; 1\}$

Es ist nicht immer ganz leicht, die Nullstellen des Nenners zu erkennen. In komplizierteren Fällen empfehlen wir folgendes Vorgehen:

- Nenner null setzen
- Nenner faktorisieren (ausklammern, binomische Formeln anwenden)
- Jeden Faktor einzeln null setzen und die Gleichungen lösen

Beispiele: **1)** $\frac{1}{x^2+x}$

NR: $x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$ oder $x + 1 = 0$

$\underline{\underline{x = -1}}$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 0\}$

2) $\frac{1}{0{,}1x^3 - 8x^2}$

NR: $0{,}1x^3 - 8x^2 = 0$

$x^2(0{,}1x - 8) = 0$

$x^2 = 0$ oder $0{,}1x - 8 = 0$

$\underline{\underline{x = 0}}$ $\quad 0{,}1x = 8$

$x = \frac{8}{0{,}1}$

$\underline{\underline{x = 80}}$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 80\}$

3) $\frac{x+1}{x^2+6x+9}$

NR: $x^2 + 6x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0$

$x + 3 = 0$

$\underline{\underline{x = -3}}$

Also: $D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

Aufgaben

Gib die Definitionsmenge an:

1. a) $\frac{2{,}3}{x-2{,}3}$ **b)** $\frac{x}{0{,}1+x}$ **c)** $\frac{1}{2-x}$ **d)** $\frac{x+x^2}{x^2}$

2. a) $\frac{2x+6}{2x-6}$ **b)** $\frac{3}{8-4x}$ **c)** $\frac{0{,}1}{8x+8}$ **d)** $\frac{14}{28+0{,}7x}$

3. a) $\frac{1}{2x-9}$ **b)** $\frac{2}{18+4x}$ **c)** $\frac{3}{0{,}2x-1{,}2}$ **d)** $\frac{4}{3{,}06+0{,}01x}$

4. a) $\frac{8a}{(x-1)(x-3)}$ **b)** $\frac{8b}{(x+2)(4-x)}$

c) $\frac{8c}{(3x+18)(0{,}8x-1)}$ **d)** $\frac{8d}{x(2{,}4x-2\frac{1}{4})}$

5. a) $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ **b)** $\frac{3x+2}{(2x-3)(3x-2)(2x+3)}$

c) $\frac{0{,}1x-1}{x(x+0{,}1)(0{,}1x+0{,}1)}$

6. a) $\frac{x}{x^2+x}$ **b)** $\frac{x^2}{3x-4x^2}$ **c)** $\frac{x^3}{2x+2+x^2+x}$ **d)** $\frac{x^4}{7x^4+8x^5}$

7. a) $\frac{7a}{x^2-9}$ **b)** $\frac{7b}{1-x^2}$ **c)** $\frac{7c}{4x^2-0{,}16}$ **d)** $\frac{7d}{32x^2-2}$

8. a) $\frac{2}{4x^2-1\frac{7}{9}}$ **b)** $\frac{4}{x^4-16}$ **c)** $\frac{8}{x^4+16}$ **d)** $\frac{16}{x^2-x^4}$

9. a) $\frac{1980}{x^2-2x+1}$ **b)** $\frac{1981}{x^2+4x+4}$ **c)** $\frac{1982}{6x+9+x^2}$ **d)** $\frac{1983}{9x^2+4+12x}$

10. a) $\frac{333}{3x^3+6x^2+3x}$ **b)** $\frac{1492}{10x^3-4x^2+0{,}4x}$ **c)** $\frac{1789}{x-25-0{,}01x^2}$

11. a) $\frac{x+6}{(x-6)(x^2-6^2)}$ **b)** $\frac{6x}{(6x-1)(1+2x)(6^2x+6)}$

12. a) $\frac{1}{0{,}0001x^4-1}$ **b)** $\frac{m\cdot 0\cdot n\cdot(s-te+r)}{9^4x^4-0{,}02\cdot 9^2\cdot 6^2x^2+0{,}0001\cdot 6^4}$

13. Gib einen Bruchterm an, bei dem die aufgeführten Zahlen nicht in der Definitionsmenge liegen:

a) 1 **b)** 1; −2 **c)** 0; $-\frac{1}{3}$

1.2 Äquivalenz von Bruchtermen

Zwei Brüche können denselben Wert haben, obwohl sie verschiedene Zähler und Nenner haben. So gilt z. B. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Bei komplizierteren Zahlen ist die Gleichheit aber nicht mehr so einfach zu sehen. Sind etwa $\frac{34}{51}$ und $\frac{38}{57}$ gleich?

Die Gleichheit zweier Brüche erkennt man leicht, wenn sie gleichen Nenner haben; dann müssen nämlich auch die Zähler gleich sein, damit die Brüche gleich sind. Erweitern wir also $\frac{34}{51}$ und $\frac{38}{57}$ jeweils mit dem Nenner des anderen Bruchs, so erhalten wir $\frac{34 \cdot 57}{51 \cdot 57}$ bzw. $\frac{38 \cdot 51}{57 \cdot 51}$. Die Zähler ergeben jedesmal die Zahl 1938. Also gilt $\frac{34}{51} = \frac{38}{57}$, weil $34 \cdot 57 = 38 \cdot 51$.
Weiß man umgekehrt von zwei Brüchen, dass sie gleich sind, wie z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$, dann ergibt sich mit derselben Überlegung, dass dann auch die Produkte $3 \cdot 8$ und $6 \cdot 4$ gleich sein müssen.
Damit haben wir die Untersuchung der Gleichheit zweier Brüche durch die gleichwertige Untersuchung der Gleichheit zweier Produkte ersetzt.
Genauso können wir die Untersuchung der Äquivalenz von zwei Bruchtermen durch die Untersuchung der Äquivalenz von zwei Produkten ersetzen. Dabei müssen wir allerdings bedenken, dass die Äquivalenz nur auf der gemeinsamen Definitionsmenge der betrachteten Bruchterme sinnvoll ist!
Auf Grund der obigen Überlegungen gilt also

Satz 14.1: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ Bruchterme, dann gilt in der gemeinsamen Definitionsmenge: $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc}$

Beispiel: $T_1(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-1\},$

$T_2(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}, \quad D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}.$

Die gemeinsame Definitionsmenge ist $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$.

Annahme: $\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

Prüfung der Annahme:
$$\begin{aligned} x(x^2 - 1) &= (x^2 - x)(x + 1) \\ x^3 - x &= x^3 + x^2 - x^2 - x \\ x^3 - x &= x^3 - x \end{aligned}$$

Links und rechts vom Gleichheitszeichen steht derselbe Term, also sind die Bruchterme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ in D äquivalent, d. h., bei jeder Belegung aus D liefern T_1 und T_2 dieselben Werte.

Aufgaben

1. Sind folgende Brüche einander gleich?
   a) $\frac{37}{51}$ und $\frac{481}{663}$ b) $\frac{912}{1377}$ und $\frac{48}{73}$ c) $\frac{107}{43}$ und $2\frac{751}{1333}$
   d) $(\frac{17}{16})^2$ und $1+\frac{297}{48^2}$
2. Für welchen Wert von x sind folgende Brüche einander gleich und wie lauten sie dann?
   a) $\frac{18}{x}$ und $1\frac{2}{7}$ b) $\frac{5x}{16}$ und $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2x+7}{9}$ und $\frac{5}{3}$ d) $\frac{3x}{7}$ und $\frac{x}{9}$
3. Für welchen Wert von x sind folgende Brüche einander gleich und wie lauten sie dann?
   a) $\frac{5}{3}=\frac{x}{5}$ b) $\frac{45}{x}=18$ c) $\frac{3x-4}{25}=\frac{1}{5}$ d) $\frac{9-7x}{3}=\frac{-1}{2}$
4. Wann sind Brüche mit gleichem Nenner einander gleich?
5. Wann sind Brüche mit gleichem Zähler einander gleich?
6. Ist es möglich, dass zwei Brüche mit gleichem Zähler und verschiedenen Nennern einander gleich sind?
7. Sind die folgenden Bruchterme äquivalent?
   a) $\frac{x}{x+1}$ und $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ b) $\frac{x+1}{x-1}$ und $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$
   c) $\frac{\frac{1}{2}x^2-4{,}5}{x+3}$ und $\frac{x-3}{2}$ d) $\frac{x-4}{2x}$ und $\frac{x^2-16}{2x^2-8}$

1.3 Erweitern und Kürzen

Die dir vom Rechnen mit Brüchen bekannten Operationen *Erweitern* und *Kürzen** lassen sich auch auf Bruchterme übertragen.

* Das Fachwort **erweitern** wurde vermutlich von dem preußischen Gymnasiallehrer Johann Friedrich KROLL in seinem 1839 erschienenen *Grundriß der Mathematik für Gymnasien und andere höhere Lehranstalten* geprägt.
Eine interessantere Geschichte hat das Fachwort **kürzen**, das erst zu Anfang dieses Jahrhunderts aufgekommen zu sein scheint. Der aus Norddeutschland stammende Theologe und Mathematiker JORDANUS NEMORARIUS (um 1180–1237), der 1222 zum zweiten Ordensgeneral der Dominikaner gewählt wurde, auf dessen Anregung die Universität in Toulouse gegründet wurde und dessen mathematische Schriften lange Zeit in Gebrauch waren, sagte dafür *ad minorem denominationem reducere = auf eine kleinere Benennung zurückführen*. Sein Zeitgenosse GERNARDUS sprach von *subtiliores minutias in grossiores reducere = feiner gebaute Brüche auf gröbere zurückführen*. Der Rechenmeister Christoff RUDOLFF (um 1500 – vor 1543) und andere überschrieben die betreffenden Kapitel mit »Prüch kleiner machen«; für kürzen sagte er *aufheben*, worunter man beim mittelalterlichen Linienrechnen verstand, so viele Rechenpfennige wegzunehmen, dass eine Zahl durch möglichst wenige von ihnen ausgedrückt wurde. (Befanden sich 5 auf einer Linie, so nahm man 4 weg und setzte einen in den Zwischenraum zur nächsthöheren Linie.) Aus *aufheben* wurde zu Beginn des 19. Jh.s *heben*, das sich bis in unser Jh. noch in den Rechenbüchern fand.

Definition 16.1: Ein Bruchterm wird mit einem Term T **erweitert**, indem man sowohl den Zähler wie auch den Nenner des Bruchterms mit diesem Term T multipliziert.
Ein Bruchterm wird mit einem Term T **gekürzt**, indem man sowohl den Zähler als auch den Nenner des Bruchterms durch diesen Term T dividiert.

Den Zusammenhang zwischen dem ursprünglichen Term und dem erweiterten bzw. gekürzten Term klärt

Satz 16.1: Beim Erweitern und Kürzen entstehen äquivalente Bruchterme, nämlich $\frac{a}{b} = \frac{T \cdot a}{T \cdot b}$ d.h., $\frac{a}{b}$ wird mit T erweitert

bzw. $\frac{a \cdot T}{b \cdot T} = \frac{a}{b}$ d.h., $\frac{aT}{bT}$ wird mit T gekürzt.

Beachte: Weil beim Erweitern bzw. Kürzen Faktoren im Nenner hinzukommen bzw. wegfallen, kann sich die Definitionsmenge des Bruchterms ändern. Die Äquivalenz gilt natürlich nur in der gemeinsamen Definitionsmenge. Dazu die

Beispiele:

1) Erweitert man $\frac{3-x}{3+x}$, $D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$, mit dem Term $3-x$, so entsteht der Bruchterm $\frac{(3-x)^2}{(3+x)(3-x)}$, $D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$. Also gilt $\frac{3-x}{3+x} = \frac{(3-x)^2}{(3+x)(3-x)}$ in der gemeinsamen Definitionsmenge $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 3\}$.

2) Will man den Bruchterm $\frac{3x^2 - 3x^3}{9x + 27x^2}$ kürzen, so muss man zuerst Zähler und Nenner faktorisieren. Man erhält $\frac{3x^2 - 3x^3}{9x + 27x^2} = \frac{3x^2(1-x)}{9x(1+3x)}$. Jetzt erkennt man die Definitionsmenge $D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}; 0\}$. Wir können den Bruchterm mit $3x$ kürzen und erhalten $\frac{x(1-x)}{3(1+3x)}$ mit $D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$. Also gilt $\frac{3x^2 - 3x^3}{9x + 27x^2} = \frac{x(1-x)}{3(1+3x)}$ in der gemeinsamen Definitionsmenge $D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}; 0\}$.

3) Enthalten die Terme mehr als eine Variable, dann ist die Angabe der Definitionsmenge recht kompliziert; wir wollen daher in solchen Fällen darauf verzichten. Als Muster diene

$$\frac{a+b}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)\cdot 1}{(a+b)(a-b)} = \frac{1}{a-b}.$$

Beim Rechnen mit Potenzen haben wir die Division zweier Potenzen mit gleicher Basis (z. B. $a^5 : a^3$) ausgespart. Jetzt erkennen wir, dass es sich dabei um einen speziellen Bruchterm handelt. Schreibt man die Potenzen in Zähler und Nenner als Produkte, dann lassen sich die gemeinsamen Faktoren wegkürzen:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = a\cdot a = a^2.$$

Weil $a^2 = a^{5-3}$ gilt, kann man auch schreiben

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2.$$

In gleicher Weise erhält man etwa

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}.$$

Das führt zu

Satz 17.1: Ist $m > n$, dann gilt $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Ist $m < n$, dann gilt $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$.

Dabei muss $a \neq 0$ sein.

Sind im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren a, dann hat der Bruch den Wert 1, z. B. $\frac{a^4}{a^4} = 1$.

Rechnet man $\frac{a^5}{a^5}$ genauso wie $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$, dann erhält man $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$. Da wir aber schon wissen, dass $\frac{a^5}{a^5}$ den Wert 1 hat, legt man allgemein fest

Definition 17.1: $a^0 := 1$ für $a \neq 0$.

0^0 wird ebenso wie $\frac{0}{0}$ nicht definiert.

Aufgaben

1. Erweitere:

a) $\frac{3}{4}$ mit 17 **b)** $\frac{2a}{5b}$ mit -21 **c)** $17:13$ mit x

d) $5p:(2q)$ mit pq **e)** $\frac{9a+1}{a-3}$ mit $2a^2$ **f)** $\frac{5cd^2}{3}$ mit $2c+d$

g) $\frac{3u+v}{3u-v}$ mit $-(3u-v)$ **h)** $[3n(2+m^2)]:(7m^2-n^2)$ mit $4-2m^2$

i) $\frac{7x-24}{3x+y}$ mit $5x+4y$ **k)** $(7a^2-5ab-b^2):(3-2ab)$ mit -1

2. a) Schreibe 1 als Bruch mit dem Nenner 29.
b) Schreibe 5 als Bruch mit dem Nenner -7.
c) Schreibe $-a$ als Bruch mit dem Nenner b.
d) Schreibe $3x^2y$ als Bruch mit dem Nenner y^2.
e) Schreibe $5u^2-20uv$ als Bruch mit dem Nenner $u+4v$.
f) Schreibe 0 als Bruch mit dem Nenner $(3+z)^2$.

3. a) Schreibe 64 als Bruch mit dem Zähler 1024.
b) Schreibe $-8a^2b$ als Bruch mit dem Zähler $16(ab)^2$.
c) Schreibe $4p-3q$ als Bruch mit dem Zähler $3q-4p$.
d) Schreibe $3-7n$ als Bruch mit dem Zähler $9-49n^2$.

4. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{5}{2a+b}$; $\frac{7a+b}{2a-b}$; $\frac{b-a}{b-2a}$; $\frac{2a+b}{1}$; Nenner $4a^2-b^2$

b) $\frac{q+2}{p}$; $\frac{3p}{q+1}$; $\frac{7p-3q}{q-1}$; $\frac{q-1}{p(q+1)}$; Nenner pq^2-p

c) $\frac{5m^2n}{3}$; $\frac{6m+4n}{3m-2n}$; $\frac{1}{9m-6n}$; $\frac{a-8b}{(3m-2n)^2}$; Nenner $27m^2-36mn+12n^2$

5. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{a+b}{a-b}$ Nenner a^2-b^2 **b)** $\frac{x-y}{x+y}$ Nenner x^2-y^2

c) $\frac{2a-3b}{5a-4b}$ Nenner $25a^2-16b^2$ **d)** $\frac{4p-q}{2p+3q}$ Nenner $4p^2-9q^2$

e) $\frac{r+s}{3r-2s}$ Nenner $9r^2-4s^2$ **f)** $\frac{2a+3}{a-1}$ Nenner a^2-1

g) $\frac{2x-3}{x-3}$ Nenner $9-x^2$ **h)** $\frac{4x+5}{5-2x}$ Nenner $4x^2-25$

6. Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner N.

a) $\frac{a+b}{a-b}$ $N = a^2 - 2ab + b^2$ **b)** $\frac{x-y}{x+y}$ $N = x^2 + 2xy + y^2$

c) $\frac{2a-3b}{a+2b}$ $N = a^2 + 4ab + 4b^2$ **d)** $\frac{p+q}{p-3q}$ $N = p^2 - 6pq + 9q^2$

e) $\frac{5r-7s}{2a-3}$ $N = 4a^2 - 12a + 9$ **f)** $\frac{2x-5}{3x-1}$ $N = 9x^2 - 6x + 1$

•**7.** Bringe die folgenden Brüche auf den angegebenen Nenner N.

a) $\frac{4x-9}{x-7}$ $N = x^2 - 16x + 63$ **b)** $\frac{2a+7}{a-3}$ $N = a^2 + 5a - 24$

$\frac{3u-11}{u+5}$ $N = u^2 - 4u - 45$ **d)** $\frac{6z-1}{z-7}$ $N = z^2 - 5z - 14$

e) $\frac{2a-9}{7a+3}$ $N = 42a^2 - 10a - 12$ **f)** $\frac{6x-5}{7x-5}$ $N = 21x^2 + 13x - 20$

g) $\frac{11x-9}{2x-5}$ $N = 16x^2 - 46x + 15$ **h)** $\frac{3u+8}{5u-6}$ $N = 40u^2 - 53u + 6$

i) $\frac{7r^2-3}{8r^2-3}$ $N = 56r^4 + 19r^2 - 15$ **j)** $\frac{3a^2+7}{6a^2+5}$ $N = 48a^4 - 2a^2 - 35$

k) $\frac{2a-7b}{7a-9b}$ $N = 56a^2 - 51ab - 27b^2$ **l)** $\frac{7x-5y}{4x-3y}$ $N = 36x^2 - 7xy - 15y^2$

8. Bestimme die fehlenden Zähler und Nenner.

a) $\frac{11x-7}{5x+3} = \frac{\dots}{3+5x}$ **b)** $\frac{11x-7}{5x+3} = \frac{7-11x}{\dots}$

c) $\frac{(2x)^2}{3} = \frac{\dots}{12-3x}$ **d)** $\frac{z-2}{12z+1} = \frac{5z^2-20}{\dots}$

e) $\frac{x+1}{x+2} = \frac{\dots}{x^2+3x+2}$ **f)** $\frac{x-4}{5-x} = \frac{x^2+x-20}{\dots}$

g) $\frac{7s-t}{4s+3} = \frac{\dots}{8s^2+6s} = \frac{\dots}{16s^2+24s+9} = \frac{2t^2-98s^2}{\dots}$

9. Löse folgende Gleichungen für die Unbekannte x.

a) $\frac{x}{5} = 0$ **b)** $\frac{6x^2}{x+3} = \frac{5u^2 \cdot 0}{x^2-9}$ **c)** $7x : (3a) = 0$

d) $2x : (a^2+1) = 0 : 7$ **e)** $\frac{2x-3}{9} = 0$ **f)** $\frac{(9x-6)^2 a^3}{4b} = \frac{0}{36b}$

10. Erweitere den Bruch

a) $\dfrac{7r-9s}{5p-3q}$ auf den Nenner $10pr-15ps-6qr+9qs$

b) $\dfrac{2x+3y}{7m-4n}$ auf den Nenner $35mx-28my-20nx+16ny$

c) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{2a-3b}$ auf den Nenner $8a^3-12a^2b+18ab^2-27b^3$

d) $\dfrac{5p-6q}{4p-5q}$ auf den Nenner $24ap-36bp-30aq+45bq$

e) $\dfrac{7x^2-9y^2}{5u-3z}$ auf den Nenner $35x^2u-21x^2z-40y^2u+24y^2z$

f) $\dfrac{2x-3y}{7x^2y-4xy^2}$ auf den Nenner $14x^5y^3-63x^3y^2-8x^4y^4+36x^2y^3$

g) $\dfrac{4x^2-3y}{23a^2-35b}$ auf den Nenner $92a^2x^2-69a^2y-140bx^2+105by$.

11. Erweitere den Bruch

a) $\dfrac{a-b}{a^2+ab+b^2}$ auf den Nenner a^3-b^3

b) $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}$ auf den Nenner a^3+b^3

c) $\dfrac{a}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$ auf den Nenner a^4-b^4

d) $\dfrac{a}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}$ auf den Nenner a^4-b^4.

Kürze die in den Aufgaben **12** bis **16** angegebenen Quotienten so weit wie möglich!

12. a) $\dfrac{93}{124}$ b) $\dfrac{-16a}{12b}$ c) $\dfrac{45(x+1)}{5}$ d) $\dfrac{18p}{-9}$

13. a) $\dfrac{6uvw}{3uw}$ b) $\dfrac{14xyz}{21xy}$ c) $\dfrac{49pq}{28pq}$ d) $\dfrac{3(a+2b)}{9(a+2b)}$

14. a) $x^4:x$ b) $y^2:y^5$ c) $3z^9:(12z^8)$ d) $[16(u-v)^3]:[8(u-v)^2]$

15. a) $\dfrac{24a^2bc^3}{9a^3b^2c}$ b) $\dfrac{69p^5q^2r^4}{46(pr)^3}$ c) $\dfrac{15(a^2b)^2c^3}{(5a)^3(bc)^2}$ d) $\dfrac{44(uv)^2u^3}{12(u^2v)^3}$

16. a) $(4u-v)^2:[2(4u-v)]$ b) $(4u-v):[2(4u-v)]^2$
c) $[xy(5x-2y)^2]:[x(2y-5x)]$ d) $(7p-4q)^3:(35p-20q)^2$

17. Vereinfache durch Kürzen:

a) $\frac{a^7}{a^3}$ b) $a^{11}:a$ c) $\frac{a^4}{a^4}$ d) $\frac{a^2}{a^9}$ e) $a^6:a^7$

18. Kürze den Bruch

a) $\frac{abc}{bcd}$ b) $\frac{axy}{bxy}$ c) $\frac{pq^2r}{pq}$ d) $\frac{a}{ax}$ e) $\frac{abc}{4abcd}$

f) $\frac{a^2x^3}{7a^2x^3y^2}$ g) $\frac{12x^4}{8x^3}$ h) $\frac{7a^3b^2}{56a^2b^3}$ i) $\frac{24a^5b^7}{36a^8b^4}$

k) $\frac{75x^4y^3z^5}{105x^4y^3z^5}$ l) $\frac{165r^2s^3t^7}{187r^5s^6t^4}$ m) $\frac{147a^4p^3x^6}{189a^4bcx^8}$.

• **19.** Kürze den Bruch

a) $\frac{ax+bx}{cx}$ b) $\frac{12ax-18ay}{24ap+30aq}$ c) $\frac{25rx-35ry}{35sx-49sy}$

d) $\frac{65a^2x^2+91ax^3}{85a^2x+119ax^2}$ e) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ f) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$

g) $\frac{15xy-25y^2}{9x^2-30xy+25y^2}$ h) $\frac{21a^2+9a}{49a^2+42a+9}$ i) $\frac{50a^3-72ab^2}{25a^2-60ab+36b^2}$.

Zerlege in den Aufgaben **20** bis **30** Zähler und Nenner in Faktoren und kürze.

20. a) $\frac{3m+6n}{8m+16n}$ b) $\frac{6x-24y}{6x-18y}$ c) $\frac{4a+6b}{3b+2a}$ d) $\frac{4a-6b}{3b-2a}$

21. a) $\frac{1{,}5n-4{,}5m}{6n-18m}$ b) $\frac{6u-2{,}4v}{5u-2v}$ c) $\frac{4a-12ab}{8a^2+20ab}$ d) $\frac{18c^3d+6c^2d^2}{14cd^3+42c^2d^2}$

22. a) $\frac{2x+1}{4x^2+4x+1}$ b) $\frac{9y^2-12yz+4z^2}{9y-6z}$

c) $\frac{4a+1}{32a^2-2}$ d) $\frac{45p^2-20q^2}{21p-14q}$

23. a) $\frac{64-25a^2}{64-80a+25a^2}$ b) $\frac{0{,}16b^2+2b+6{,}25}{160b^2+2000b+6250}$

c) $\frac{1600x^2-1000y^2}{25y^2-40x^2}$ d) $\frac{18d^2-48d+32}{2{,}25d^2-4}$

24. a) $\frac{ax-bx+ay-by}{5a-5b}$ b) $\frac{3a+2ab-9b-6b^2}{3+2b}$

c) $\frac{7ab-35a^2-10a+2b}{-10a+2b}$ d) $\frac{1-x+x^2-x^3}{1+x^2}$

•**25.** a) $\dfrac{16m^2-9n^2}{8m^2-6mn+4m-3n}$ b) $\dfrac{5p^2+p+q+5pq}{25p^2+10p+1}$

c) $\dfrac{8a+9b-12ab-6}{8a^2b-12a^2b^2}$ d) $\dfrac{10u^2-8uv+5uw-4vw}{5u^2-4uv+10uw-8vw}$

26. a) $\dfrac{(x-y)x+y(x-y)}{x^2-y^2}$ b) $\dfrac{(x-y)^2x+(x-y)^2y}{x^3-xy^2}$

•c) $\dfrac{x^4-1}{x(x^2+1)+x^2+1}$ d) $\dfrac{x^4-x^2}{x^3+2x^2+x}$

•**27.** a) $\dfrac{u^2+v^2-w^2+2uv}{u+v+w}$ b) $\dfrac{4p^2-4pq+q^2-25r^2}{4p-2q+10r}$

c) $\dfrac{m^2+2mn+n^2-1}{m^2-n^2-2m+1}$ d) $\dfrac{a^4-8a^2+16}{a^3-4a^2-4(a-4)}$

e) $\dfrac{75my^2+50ny^2-30myz-20nyz+3mz^2+2nz^2}{-45m^2y+9m^2z-60mny+12mnz-20n^2+4n^2z}$

28. Vereinfache so weit wie möglich.

a) $\dfrac{25a^2-100b^2}{5a+10b}$ b) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

•c) $\dfrac{z^2-4z+3}{z^2-2z-1}$ •d) $\dfrac{z^2-2z-3}{z^2+2z+1}$

29. a) $\dfrac{a^2+ab-12b^2}{a^2-ab-20b^2}$ b) $\dfrac{p^2+pq-20q^2}{p^2+2pq-15q^2}$

c) $\dfrac{r^2+4rs-21s^2}{r^2+12rs+35s^2}$ d) $\dfrac{x^2-8xy+15y^2}{x^2+xy-30y^2}$

e) $\dfrac{a^2+5ab-14b^2}{a^2+12ab-28b^2}$ f) $\dfrac{p^2-4pq-45q^2}{p^2-pq-30q^2}$

g) $\dfrac{15r^2+rs-6s^2}{12r^2+5rs-2s^2}$ h) $\dfrac{4x^2+20xy+25y^2}{6x^2+23xy+20y^2}$

i) $\dfrac{15p^2-19pq-56q^2}{15p^2-58pq+48q^2}$ j) $\dfrac{18u^2-3uv-10v^2}{53uv-40v^2-6u^2}$

k) $\dfrac{64x^3y-136x^2y^2+42xy^3}{48x^3y-140x^2y^2+98xy^3}$ l) $\dfrac{48a^3-2a^2b-35ab^2}{36a^2b+60ab^2+25b^3}$

m) $\dfrac{72x^2z+7xyz-2y^2z}{40x^3y-29x^2y^2+3xy^3}$ n) $\dfrac{6x^3z-24xy^2z}{2x^3y-8x^2y^2+8xy^3}$

30. a) $\dfrac{14a^2x^2 - 63a^2y^2 - 8b^2x^2 + 36b^2y^2}{49a^4 - 56a^2b^2 + 16b^4}$

b) $\dfrac{8a^2u^2 - 3b^3 - 6abu + 4ab^2u}{12a^3u^2 - 9a^2bu + 20abu - 15b^2}$

c) $\dfrac{15a^2 - 21bc - 35ab + 9ac}{9ab - 15ac - 21b^2 + 35bc}$ d) $\dfrac{48ax - 42bx + 40ay - 35by}{16au - 14bu - 24av + 21bv}$

1.4 Hauptnenner

Bruchterme mit gleichem Nenner heißen **gleichnamig**; haben sie verschiedene Nenner, dann heißen sie **ungleichnamig***. So sind zum Beispiel die Bruchterme $\dfrac{b}{a^2+ac}$ und $\dfrac{d}{a(a+c)}$ gleichnamig, die Bruchterme $\dfrac{b}{a^2+ac}$ und $\dfrac{d}{a(a-c)}$ ungleichnamig.

Ungleichnamige Bruchterme lassen sich ebenso wie Brüche, deren Zähler und Nenner Zahlen sind, durch Erweitern gleichnamig machen. Man muss dazu als gemeinsamen Nenner einen Term finden, in dem jeder einzelne Nenner als Faktor enthalten ist. Zum Beispiel ist das Produkt aller vorkommenden Nenner ein gemeinsamer Nenner. In vielen Fällen ist es jedoch möglich, einen einfacheren gemeinsamen Nenner anzugeben. Man zerlegt dazu jeden Nenner so weit wie möglich in Faktoren und ermittelt wie bei Zahlen das kleinste gemeinsame Vielfache (kurz: kgV) der Nenner. Den so bestimmten gemeinsamen Nenner bezeichnet man als *Hauptnenner* (kurz: HN).

Definition 23.1: Unter dem **Hauptnenner** von Bruchtermen versteht man das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner dieser Bruchterme.

Beispiel: $\dfrac{u}{4a^2-9b^2}$; $\dfrac{v}{10a+15b}$; $\dfrac{w}{2ac-3bc}$

Nenner	Faktorisierung	Erweiterungsfaktoren (EF)
$4a^2-9b^2$	$= (2a+3b)(2a-3b)$	$5c$
$10a+15b$	$= 5(2a+3b)$	$c(2a-3b)$
$2ac-3bc$	$= c(2a-3b)$	$5(2a+3b)$
HN	$= 5c(2a+3b)(2a-3b)$	

* Bernardo BARLAAM (um 1290–nach 1348), Mönch, später Bischof von Gerace in Kalabrien, verwendet in seiner griechisch verfassten *logistica* die Ausdrücke *συνώνυμος* (synónymos) und *ἑτερώνυμος* (heterónymos), die wörtlich übersetzt **gleich-** bzw. **ungleichnamig** ergeben. Im Deutschen des 15. und 16. Jh.s gibt es dafür allerlei Ausdrücke; *gleichnamig machen* verwendet der zu seiner Zeit bekannte Rechenmeister Simon JACOB (1510(?) Coburg – 1564 Frankfurt) in seinem *Ein New vnd Wolgegründt Rechenbuch* (1565).

Mithilfe der Erweiterungsfaktoren können wir die gegebenen Brüche gleichnamig machen:

$$\frac{u}{4a^2-9b^2}=\frac{5cu}{5c(2a+3b)(2a-3b)}$$

$$\frac{v}{10a+15b}=\frac{cv(2a-3b)}{5c(2a+3b)(2a-3b)}$$

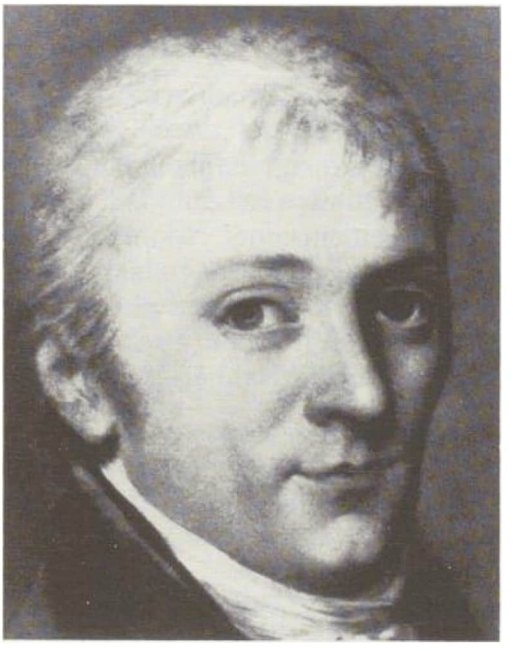
$$\frac{w}{2ac-3bc}=\frac{5w(2a+3b)}{5c(2a+3b)(2a-3b)}.$$

**Zur Geschichte des Hauptnenners

Im 九章算術 (*Chiu Chang Suan Shu*)* – »Neun Bücher arithmetischer Technik« – der Han-Zeit (202 v. Chr.–9 n. Chr.) wird der Hauptnenner als Produkt aller Nenner eingeführt, bei den Aufgaben von Buch IV wird meist jedoch das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner als Hauptnenner genommen, ohne dass angegeben wird, wie man es findet. Die Araber wie z. B. AL-KARADSCHI (†1019/29) und auch LEONARDO VON PISA (um 1170 – nach 1240) bestimmten den Hauptnenner mehrerer Nenner schrittweise, indem sie zuerst das Produkt von zwei Nennern durch deren größten gemeinsamen Teiler teilten; genauso verfuhren sie mit der so erhaltenen Zahl und dem dritten Nenner usw.

Auch BHĀSKARA II (1115 – nach 1178), ein indischer Astronom und Mathematiker, der das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammenfasste, sagte im *Lilavati* – »Die Schöne« – (das Werk ist tatsächlich einer schönen Frau gewidmet, die öfters angesprochen wird), dass der intelligente Rechner nicht immer das Produkt aller Nenner als Hauptnenner nehme.

Das Zerlegungsverfahren zum Aufsuchen des Hauptnenners, das du schon in der 6. Klasse gelernt hast, hat 1801 der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) in seinen *Disquisitiones arithmeticae* – »Untersuchungen über höhere Arithmetik« – beschrieben.



1803

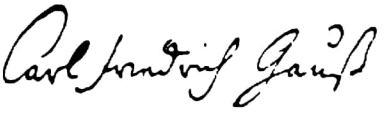


Abb. 24.1 Carl Friedrich GAUSS [Gauß] (30. 4. 1777 Braunschweig – 23. 2. 1855 Göttingen) – Pastell von Johann Christian August SCHWARTZ (1756–1814). *Mathematicorum princeps* – »Fürst der Mathematiker« – stand auf der Gedenkmedaille, die der König von Hannover 1855 prägen ließ.

* gesprochen tschiu tschang suan schu

Der Ausdruck **kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches** erscheint 1825 in *Die reine Elementar-Mathematik* des Gymnasiallehrers und späteren Professors Martin OHM (1792 Erlangen – 1872 Berlin). Wer den Ausdruck **Hauptnenner** einführte, konnten wir nicht herausfinden. Im *Algorismus Ratisbonensis* hieß er noch der *gemain nenner*.

Aufgaben

1. Sind folgende Brüche gleichnamig?

a) $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{4^2-3^2}$ **b)** $\frac{1}{5\cdot 7-6^2}$ und $\frac{1}{3^4-5\cdot 2^4}$

c) $\frac{3^2\cdot 2^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ und $\frac{10}{11^2-1}$ **d)** $\frac{7}{(a+2)(a-1)}$ und $\frac{3a}{a^2+a-1}$

e) $\frac{5x^2+1}{3x^2-12}$ und $\frac{7x-2}{(x+2)(x-2)\cdot 3}$ **f)** $\frac{2a-3b}{a^3-b^3}$ und $\frac{5}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

2. Für welche Werte von x sind folgende Brüche gleichnamig?

a) $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{x-2}$ **b)** $\frac{a}{2x+3}$ und $\frac{b}{18}$ **c)** $\frac{y}{4x}$ und $\frac{z}{x^2}$

d) $\frac{m}{(2x+3)(2x-3)}$ und $\frac{n}{x(4x+3)-3(x+3)}$

3. Mache gleichnamig

a) $\frac{7}{24}$; $\frac{3}{64}$ **b)** $\frac{2}{7\cdot 11-5\cdot 13}$; $\frac{34}{3^2\cdot 14-6\cdot 23}$

c) $\frac{a}{-2}$; $\frac{3}{2a}$ **d)** $\frac{5}{x^2}$; $\frac{1}{3x}$

e) $\frac{2u}{3}$; $\frac{5u}{3u-3}$ **f)** $\frac{1}{3p}$; $\frac{7}{4q}$

g) $\frac{a}{7c^2d^3}$; $\frac{b}{2c^3d^2}$ **h)** $\frac{y}{10(x+1)}$; $\frac{y^2}{5(x^2-1)}$.

4. Bringe auf gleichen Nenner

a) $\frac{c-d}{a+b}$; $\frac{a+b}{c+d}$ **b)** $\frac{5-x}{2x^2-8}$; $\frac{x+3}{3x^2-12}$

c) $\frac{1}{6x-3}$; $\frac{x^2+5}{8x^3-4x^2}$ **d)** $\frac{b}{a^2-9}$; $\frac{c}{3a-9}$

e) $\frac{1+2z}{4-z^2}$; $\frac{3z}{z^2-4z+4}$ **f)** $\frac{1}{n^4-9m^2n^2}$; $\frac{1}{n^2+3mn}$

g) $\frac{p+1}{p^2q+p^2}$; $\frac{p-1}{pq^2-pq}$; $\frac{2}{q^3-q}$

h) $\frac{a}{(xy)^2-y^2}$; $\frac{b}{2x^2y+2y}$; $\frac{c}{x^4-1}$

i) $\frac{ab}{2a+3b}$; $\frac{2a}{12a^2+36ab+27b^2}$; $\frac{(2a-3b)^2}{2a}$; $\frac{1}{3b}$.

5. Bestimme den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren.

a) $\frac{1}{4a}$; $\frac{1}{2a^3+3a^2}$; $\frac{1}{8a^2-12a}$

b) $\frac{a}{5x^2-5x}$; $\frac{b}{x^2y^2+xy^2}$; $\frac{c}{x-x^3}$

c) $\frac{x}{144m^2-144mn+36n^2}$; $\frac{y}{3n^2+12mn+12m^2}$; $\frac{z}{2m^2-0{,}5n^2}$

d) $\frac{1}{x+5}$; $\frac{2}{4x-28}$; $\frac{3}{x^2-2x-35}$

e) $\frac{a}{ax^2+3bx^2+a+3b}$; $\frac{b}{-4a+4ax^2+12bx^2-12b}$

f) $\frac{p}{m^3-405n^3+5m^2n-81mn^2}$; $\frac{q}{-m^3-225n^3+9m^2n+25mn^2}$

6. Kürze zuerst und mache dann gleichnamig. Berechne zum Vergleich auch den Hauptnenner der ungekürzten Brüche.

a) $\frac{15ab}{6a-3b}$; $\frac{2a^2+ab}{4a^2+4ab+b^2}$; $\frac{6ab-3b^2}{4a^2-b^2}$

b) $\frac{9x}{3x+12}$; $\frac{2x^3}{8x^2+x^3}$; $\frac{-4x-x^2}{x^2+12x+32}$

c) $\frac{3x+6}{2x^2+8x+8}$; $\frac{10-5x}{4x^2-16x+16}$; $\frac{x^2-2x}{196-49x^2}$

**1.5 Zur Geschichte der Brüche

Um 3000 v. Chr. entstand die Schrift fast gleichzeitig bei den SUMERERN, wie Tontafelfunde aus Uruk am Euphrat zeigen, und bei den Ägyptern, wobei wir nicht ausschließen können, dass die Ägypter von der Entdeckung der Schrift durch die Sumerer gehört hatten.

So verschieden, wie die Schrift dieser beiden Völker war, so verschieden war auch die Entwicklung der Schreibweise für Brüche und damit erst recht der dazugehörigen Rechentechnik. Im Wesentlichen drückten die ÄGYPTER beliebige Brüche durch Stammbrüche, also durch Brüche mit dem Zähler 1 aus. Gewöhnlich schrieben sie einen Stammbruch so, dass sie über das Zahlzeichen die Hieroglyphe setzten, die neben Mund auch Teil bedeutete; $\frac{1}{4}$ schrieb man also . Interessanterweise ist unsere Nachsilbe *-tel*, mit der wir Brüche bezeichnen, auch aus dem Wort *Teil* entstanden. So finden wir z. B. 1514 im *Ain New geordnet Rechenbiechlin auf den linien mit Rechenpfeningen* des Jakob KÖBEL (1460/65 Heidelberg – 1533 Oppenheim) den Bruch $\frac{\text{XX}}{\text{XXXI}}$ als zwentzigſt aimundreyſigſt tail erklärt.

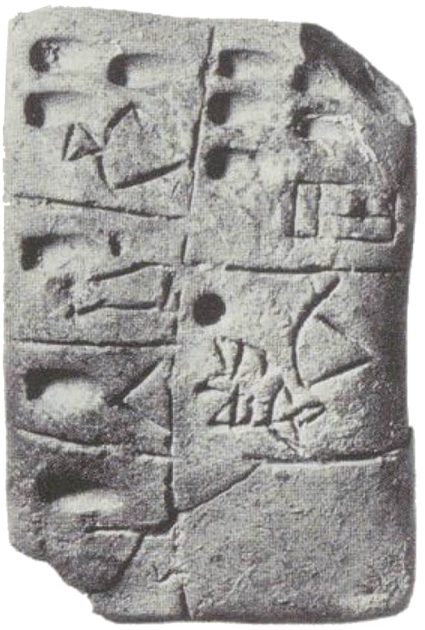


Abb. 27.1 Tontafel aus Uruk, etwa 3300 bis 3200 v. Chr., Höhe 6,4 cm, Breite 4,7 cm, eine Warenliste darstellend. ○ bedeutet vermutlich 10, ▷ 1 oder 60.

Obwohl die Ägypter außer $\frac{2}{3}$ nur Stammbrüche durch Zeichen darstellten, rechneten sie natürlich mit anderen Brüchen; schreiben mussten sie sie aber als Summe von Stammbrüchen (Abbildung 27.2).

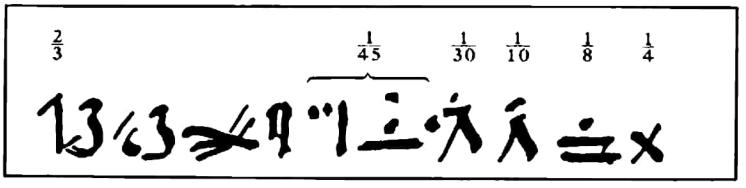
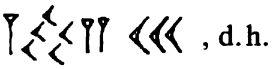


Abb. 27.2 Aufgabe 23 des *Papyrus Rhind* (um 1550 v. Chr.), ägyptisch von rechts nach links gelesen: Ergänze $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{45}$ zu $\frac{2}{3}$. In der hier verwendeten hieratischen Schrift wurde die Hieroglyphe zu einem Punkt über dem Zahlzeichen*. – Welcher Bruch wird durch die Summe der Stammbrüche dargestellt? Was ergibt sich als Lösung?

Im Gegensatz zu den Ägyptern, die mit dem konstanten Zähler 1 arbeiteten, entwickelten im Zweistromland um 2000 v. Chr. die Gelehrten der BABYLONIER aus der sumerischen Zahlenschreibung ein Stellenwertsystem mit der Grundzahl 60, in dem sich ähnlich wie in unserem Dezimalsystem auch Brüche darstellen lassen; wir könnten bei den

* lies hi-eratisch und Hi-eroglyphe. In beiden Wörtern steckt das griechische *ἱερός* (hi-erós) = *heilig*. Hieroglyphen sind die eingemeißelten (*γλύφειν* [glýphein] = *einmeißeln*) heiligen Zeichen, aus denen die abgekürzten Schreibzeichen der Papyri wurden, die man hieratisch nennt.

Babyloniern gewissermaßen von einem Bruchrechnen mit konstantem Nenner sprechen, würde die 60er-Teilung nicht immer weiter fortgesetzt. Geschrieben werden nur die Zähler, nicht die Nenner. Unser $\frac{1}{32}$ stellt sich dar als  , d.h. als $\frac{1}{60} + \frac{52}{3600} + \frac{30}{216000}$. Im 3. Jh. v. Chr. begann das babylonische Sexagesimalsystem seinen Siegeszug als Handwerkszeug für Mathematik und Astronomie und wurde erst ab dem 15. Jh. im Abendland vom Dezimalsystem verdrängt. Es wirkt aber heute noch nach in der Einteilung des Winkelgrades in 60′ und 3600″ und der Stunde in 60 Minuten und 3600 Sekunden.

Von den Ägyptern haben die GRIECHEN gelernt. Die Stammbruchdarstellung der Brüche findet sich bei ihnen bis in die spätbyzantinische Zeit. Parallel dazu schreiben sie aber allgemeine Brüche mit ihren Zahlzeichen, nämlich ihren Buchstaben, die zur Unterscheidung von ihnen entweder überstrichen werden oder einen Akzent erhalten. Da δ die Zahl 4 und ε die Zahl 5 bezeichnet, schreiben sie $\frac{4}{5}$ als $\bar{\delta}\,\varepsilon'$ oder als $\delta'\,\varepsilon''$. Da dies aber auch als $4\frac{1}{5}$ gelesen werden könnte, erzielen sie Eindeutigkeit durch Verdoppelung des Nenners, schreiben also $\bar{\delta}\,\varepsilon'\,\varepsilon'$ bzw. $\delta'\,\varepsilon''\,\varepsilon''$, wie wir bei HERON VON ALEXANDRIA (um 62 n. Chr.) lesen können. Aber bereits in einem Papyrus des 1. vorchristlichen Jahrhunderts finden wir für $\frac{4}{5}$ die Schreibweise $\frac{\varepsilon}{\delta}$, also den Zähler unter dem Nenner!

Vergessen wir die mathematisch nicht sehr begabten RÖMER, deren Behandlung der Brüche ungenießbar ist. Der Kuriosität halber erwähnen wir nur, dass bei den frühen CHINESEN der Zähler als »Sohn« und der Nenner als »Mutter« des Bruches bezeichnet wurden.

Die INDER dehnten ihr dezimales Stellenwertsystem nicht auf Brüche aus, sondern verwendeten in ihren astronomischen Schriften, den *Siddhantas* (5. Jh.) die babylonischen Sexagesimalbrüche. Für die gemeinen Brüche* ist eine Ziffernschreibweise erst bei SCHRĪDHARA (um 900) belegt, und zwar wird der Zähler über den Nenner geschrieben; bei gemischten Zahlen stehen die Ganzen noch darüber: $\begin{array}{c}6\\1\\7\end{array} = 6\frac{1}{7}$.

Die ARABER bringen durch die Verschmelzung griechischer und indischer Wissenschaft die Mathematik zu neuer Blüte. Und hier ist es wieder ABU ABDALLAH MUHAMMAD IBN MUSA AL-CHARIZMI (um 780 – nach 847 (?)), der nach seiner *Algebra* eine Abhandlung über das dezimale Stellenwertsystem der Inder geschrieben hat. Dieses Werk, das vermutlich *al-Kitab al-hisab al-Hind* – »Buch über die indische Rechenweise« – hieß, ist die Quelle, von der aus sich die neuartige Zahlenschreibweise und das Rechnen mit diesen Zahlen über die ganze Welt verbreiteten. Leider ist uns der arabische Text nicht erhalten, ebenso wenig wie die erste lateinische Übersetzung aus der 1. Hälfte des 12. Jh.s, sondern nur eine recht fehlerhafte bruchstückhafte Abschrift dieser Übersetzung aus dem 13. Jh. Eine sehr genaue Vorstellung vom Werk AL-CHARIZMIS bekommen wir aber aus einer Abhandlung des JOHANNES HISPALENSIS (wirkte um 1135 bis 1153), deren ersten Abschnitt er ausdrücklich *liber alghoarismi de practica arismetrice* – »Buch des AL-CHARIZMI über den kundigen Umgang mit der Lehre von den Zahlen« – nennt. Ihm entnehmen wir, dass AL-CHARIZMI sowohl die Stammbrüche der Ägypter wie auch die Sexagesimalbrüche der Babylonier und dazu die gemeinen Brüche der Griechen neben-

* Der Ausdruck geht zurück auf *fractiones vulgares*, womit der französische Astronom und Mathematiker JOHANNES DE LINERIIS (= Lignières bei Amiens; † zwischen 1350 und 1355) sie von den Sexagesimalbrüchen unterschied. – *vulgaris* (lat.) = *allgemein, allen gemein, allbekannt.*

einander verwendet, aber sie alle mithilfe der indischen Ziffern schreibt, und zwar wie die Inder Zähler über dem Nenner und die Ganzen noch drüber. Bis ins 16. Jh. rechnete man dann in Europa so, wie es AL-CHARIZMI vorgemacht hatte.

Zähler und Nenner durch einen waagrechten Strich zu trennen geht in Europa auf LEONARDO VON PISA, genannt FIBONACCI, (um 1170– um 1240) zurück. In seinem *liber abaci** schreibt er 1202:

Cum super quemlibet numerum quedam uirgula protracta fuerit, et super ipsam quilibet alius numerus descriptus fuerit, superior numerus partem uel partes inferioris numeri affirmat; nam inferior denominans, et superior denominatus appellatur.

Wenn über irgendeine Zahl ein Strich gezogen ist und über diesen eine andere Zahl geschrieben ist, dann bezeichnet die obere Zahl den Teil oder die Teile der unteren Zahl; und daher wird die untere Zahl der Nenner und die obere der Zähler genannt.

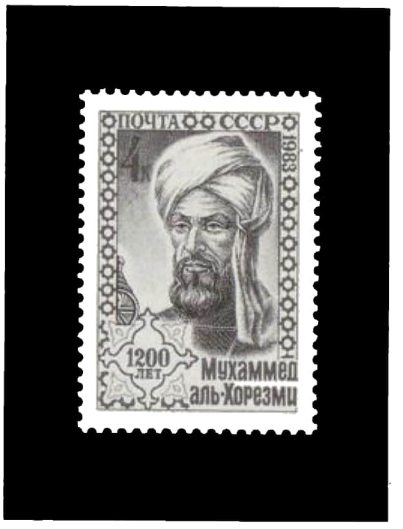


Abb. 29.1 4-Kopeken-Marke der Post der UdSSR (1983) zum 1200. Jahrestag der Geburt AL-CHARIZMIS

LEONARDO wuchs in der damals wichtigen Handelsstadt Budschaja** auf, wo er in der dort üblichen Kunst der indischen Ziffernschreibweise unterrichtet wurde. Wir dürfen daher annehmen, dass er bei den Arabern auch den Bruchstrich gesehen hat, wie wir ihn bei dem westarabischen Mathematiker AL-HASSAR (12./13. Jh.) finden. Genau wie dieser schreibt LEONARDO bei gemischten Zahlen die Ganzen noch rechts vom Bruch, also in der arabischen Schreibrichtung! Der französische Mathematiker, Ingenieur, Staatswissenschaftler und Bischof NIKOLAUS VON ORESME*** (1320/25 bei Caen–11.7.1382 Lisieux) setzt in seinem *Algorismus proportionum*** (nach 1351, vermutlich vor 1360 geschrieben) schließlich die Ganzen links vom zugehörigen Bruch, wie es unserer Schreibrichtung auch entspricht.

Durchgesetzt hat sich der **Bruchstrich**, der unser ältestes Rechenzeichen ist, nur langsam. Erstaunlicherweise fehlt er in den ältesten gedruckten Rechenbüchern gänzlich, wohl deswegen, weil er drucktechnisch zu kompliziert war. Doch seit dem 1489 gedruckten Rechenbuch des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500) ist er meist vorhanden. Ganz klar gibt 1514 Jakob KÖBEL (1460/65–1533) in seinem *Ain New geordnet Rechenbiechlin* die Anweisung (Moderne Fassung im Lösungsheft):

Du solt mercken / das ayn yeglicher bruch geschriben / unnd außgesprochen virt / durch tzwaierley / tzale und wirt die erst zale oben gesatzt / und hayst der Zäler / dan durch die selb zale wirt gezelt / wie vil man tayl hat uñ wirt under die selb zale übertzwerch ain strichlein gemacht / unnd under das selb strichleyn / die ander

* *liber abaci*, auch *liber abbaci* – »Buch vom Rechenbrett«. Im Mittelalter bezeichnet man aber mit *abacus* ganz allgemein die Rechenkunst.

** 180 km östl. von Algier; frz. Bougie. Von dort bezogen die Franzosen ihre Wachskerzen, und so kam es, dass *die Kerze* im Französischen *la bougie* heißt.

*** gesprochen wie Oräm (ɔˈ rɛ m)

**** *algorismus* ist eine Verballhornung des Namens AL-CHARIZMI, der in Vergessenheit geraten war, sodass man unter *algorismus* die *Lehre vom Rechnen* verstand. Daraus wurde unser Algorithmus. Erst 1849 hat der Orientalist Joseph-Toussaint REINAUD den Ursprung dieses Wortes erkannt.

Du ſolt mercken / das ayn yeglicher bruch geſchriben / vnnd auß geſprochen virt/durch zwaierley/ zale vnd wirt die erſt zale oben geſatzt/vnd hayſt der Zäler/ dan durch die ſelb zale wirt gezelt/wie vil man tayl hat vñ wirt vnder die ſelb zale übertzwerch ain ſtrichlein gemacht/vnnd vnder das ſelb ſtrichleyn / die ander zale geſchriben/die ſelbig zale hayſt der Nenner /wan ſie nendt/was tayl das ſein/oder was namens die tayl haben die durch dye öberſt zale/das iſt den zeler gezeldt worden ſein/

Abb. 30.1 KÖBELS Anweisung zur Bruchschreibweise aus dem Jahre 1514

tzale geschrieben / die selbig tzale hayst der Nenner / wan sie nendt / was tayl das sein / oder was namens die tayl haben die durch dye öberst tzale / das ist den tzeler getzeldt worden sein /

Der schräg stehende Bruchstrich / scheint neueren Datums und aus drucktechnischen Gründen erfunden worden zu sein. Unser Wort *Bruchstrich* ist neueren Datums; bis ins 18. Jh. sagte man kurz *Strich*.

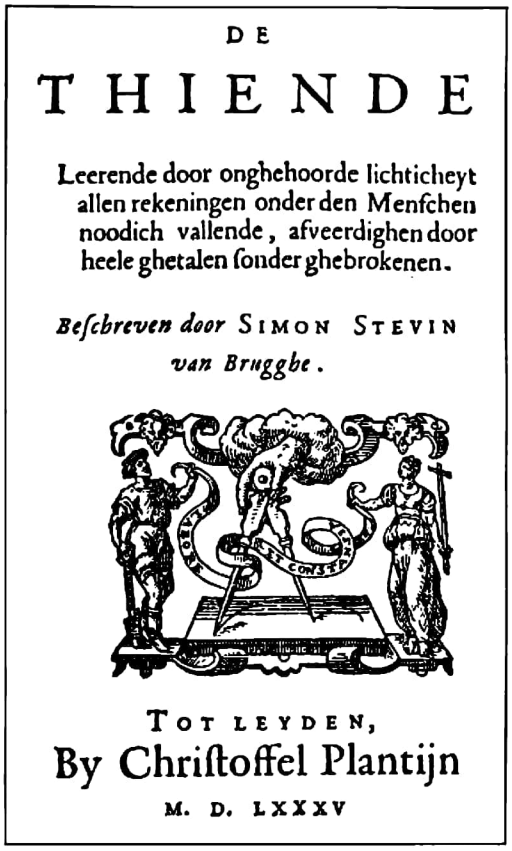
Unsere Fachwörter wie **Bruch**, **Zähler** und **Nenner** gehen auf die lateinischen und späteren deutschen Übersetzungen und Weiterbearbeitungen des *al-Kitab al-hisab al-Hind* des AL-CHARIZMI zurück. Eine kleine tabellarische Übersicht zeigt dir, wie man für die mathematischen Begriffe nach lateinischen Fachwörtern suchte.*

	JOHANNES HISPALENSIS	LEONARDO VON PISA	JOHANNES DE LINERIIS
Bruch	fractio	numerus fractus; ruptus; minutum	minutia; fractio
Nenner	numerus denominationis; denominatio	numerus denominans	denominator
Zähler		numerus denominatus	numerator; numerus numerans; numerus fractionis

Im ausgehenden Mittelalter tauchen dann schließlich die deutschen Ausdrücke auf. So finden wir in der *Geometria Culmensis* (um 1400) *czeler der teyle* und *benumunge der teyle*, was als *Benennung der Teile* noch 1716 im *Mathematischen Lexicon* des Christian VON WOLFF (1679–1754) erscheint. Der *ruptus* des LEONARDO wird im *Algorismus Ratibonensis*, einem vor 1450 in Regensburg entstandenen Text, mit *pruch* übersetzt; die Fachwörter *zeler* und *nenner* werden dort auch verwendet.

* *denominare* = benennen; *fractus* = gebrochen, zerbrochen, geteilt; *minutus* = kleiner gemacht, in kleine Teile zerlegt; *nominare* = nennen, benennen; *numerus* = Zahl; *ruptus* = gebrochen, zerbrochen, zerteilt

Abb. 31.1 Simon STEVIN [i betont] (1548 Brügge – zwischen 20.2. und 8.4.1620 Leiden) niederländischer Mathematiker und Ingenieur. Anfänglich in der Finanzverwaltung tätig, ab 1593 Berater des Prinzen MORITZ von Oranien.



DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menſchen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen ſonder ghebrokenen.

Beſchreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*

TOT LEYDEN,

By Chriſtoffel Plantijn

M. D. LXXXV

Abb. 31.2 Titelblatt von Simon STEVINS De Thiende von 1585*. – Titelblätter gibt es erst seit Beginn des 16. Jh.s. Das erste vollständige Titelblatt druckte Wolfgang STÖCKEL 1500 in Leipzig.

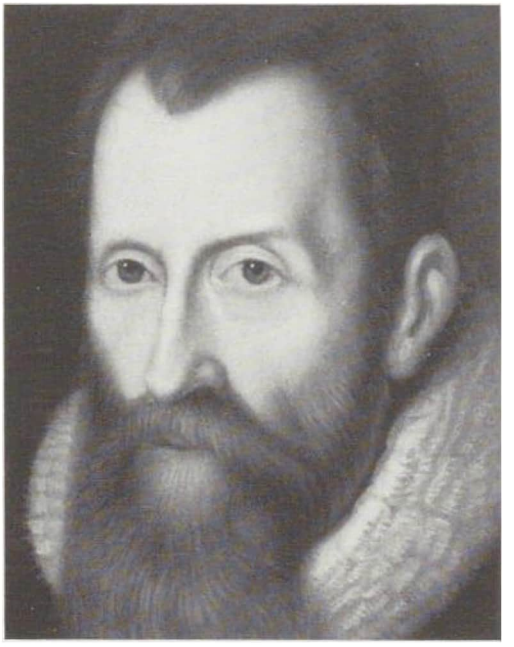
Wie oben schon angedeutet, blieb es dem Abendland vorbehalten, das indische dezimale Stellenwertsystem auf die Bruchrechnung auszudehnen und das babylonische Sexagesimalsystem aus dem praktischen Rechnen zu verdrängen. Anfänge eines dezimalen Bruchrechnens mit Zehnteln, Hundertsteln usw. finden sich zwar bereits im *Chiu Chang Suan Shu* aus dem Beginn der Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.) und bei AL-CHARIZMI und einigen anderen arabischen Mathematikern.
Ganz nahe an die heutigen Dezimalbrüche kam 1579 François VIÈTE (1540–1603) in seinem *Canon mathematicus***, in dem er die Dezimalteile durch Kleindruck von den Ganzen abhob, z. B. 653, 638, 057, 33, oder gar als zusätzliches Trennungszeichen einen senkrechten Strich setzte wie bei 86, 602 | 540, 37. (Das Komma dient nur zur Einteilung in Dreiergruppen.)

* Der Zehent, welcher lehrt, mit unerhörter Leichtigkeit alle Rechnungen, die unter den Menschen nötig werden, durch ganze Zahlen ohne Brüche zu erledigen. Beschrieben von SIMON STEVIN aus Brügge. Zu Leyden/Bei Christoffel Plantijn M.D.LXXXV – Das Motto lautet: Durch Arbeit und Beständigkeit.

** ὁ κανών = der gerade Stab, das Richtscheit, die Regel

Johannis Hartmanni Beyeri

Abb. 32.1 Johann Hartmann BEYER (1563 Frankfurt/Main – 1625 Frankfurt/Main) Rechenmeister, Arzt, Ratsherr und Schöffe der Stadt Frankfurt am Main



1616

Abb. 32.2 John NAPIER, auch NEPER, Laird [= Gutsherr] of Merchiston (1550 Merchiston Castle bei Edinburgh bis 4.4.1617 ebd.)

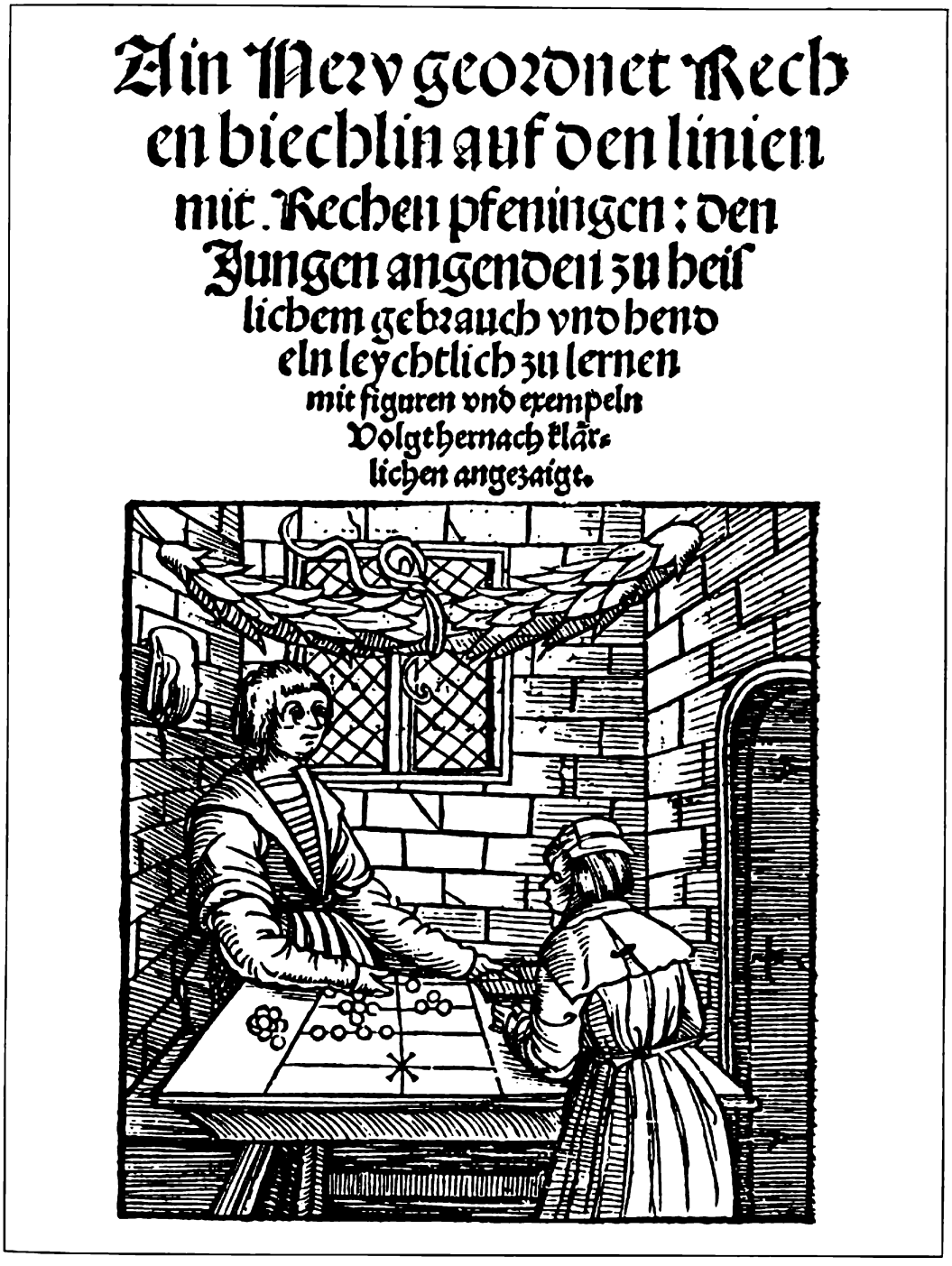
Als Erster hat jedoch erst 1585 Simon STEVIN (1548–1620) in seinem Werk *De Thiende* – »Der Zehent« – Dezimalbrüche exakt definiert und die Rechengesetze für sie aus den Gesetzen des Bruchrechnens hergeleitet. Ab 1630 sind Dezimalbrüche dann in allen einschlägigen Lehrbüchern zu finden. Die Ausdrücke **Dezimalbruch** und **Dezimalrechnung** gehen auf die *Logistica decimalis: Das ist Kunstrechnung der Zehentheyligen Brüchen** (1603) des Rechenmeisters Johann Hartmann BEYER (1563–1625) zurück. Dessen und auch STEVINS Schreibweise waren viel zu kompliziert. Schrieb letzterer doch für 8,937 noch 8⓪9①3②7③. Erst die Einführung des Kommas als Trennzeichen durch den schottischen Mathematiker John NAPIER**, auch NEPER, (1550–1617) in seiner *Rabdologia**** (1617) brachte die heutige Darstellungsweise.

* ἡ λογιστική = die Rechenkunst; *decimus* (lat.) = der zehnte

** gesprochen ˈneɪpɪə

*** Lehre von den Rechenstäbchen. – ῥάβδος (rhábdos) = Stab

2 Rechnen mit Bruchtermen



Titelblatt des Augsburger Raubdrucks (1514) des *Rechenbüchleins* von Jakob KÖBEL (1460/65–1533), das 1514 in Oppenheim erschienen war. Rechenbücher sind die ersten volkstümlichen Druckschriften, die im 16. Jh. in allen Ländern erscheinen. Das älteste, mit Einzelbuchstaben gesetzte Rechenbuch ist der um 1475 in Trient gedruckte in baierischem späten Mittelhochdeutsch geschriebene *Algorismus*.

2 Rechnen mit Bruchtermen

2.1 Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Bruchterme

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass gleichnamige Brüche addiert bzw. subtrahiert werden, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält. So ist z. B.

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3+5}{7}=\frac{8}{7} \quad \text{bzw.} \quad \frac{3}{7}-\frac{5}{7}=\frac{3-5}{7}=\frac{-2}{7}=-\frac{2}{7}.$$

Aus diesem Grunde ergeben die Terme $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ und $\frac{a+b}{c}$ bei jeder Einsetzung den gleichen Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man gleichnamige Bruchterme addiert:

Satz 34.1: Gleichnamige Bruchterme werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner beibehält; kurz:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Beispiel:

$$\frac{4a^2-6ab}{4a^2-b^2}+\frac{b^2+2ab}{4a^2-b^2}=\frac{(4a^2-6ab)+(b^2+2ab)}{4a^2-b^2}=$$

$$=\frac{4a^2-4ab+b^2}{4a^2-b^2}=$$

$$=\frac{(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)}=$$

$$=\frac{2a-b}{2a+b}.$$

Auch bei der Subtraktion gleichnamiger Bruchterme ergeben die Terme $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$ und $\frac{a-b}{c}$ nach dem obigen bei jeder Einsetzung den gleichen Zahlenwert. Sie sind also äquivalent und es gilt

Satz 34.2: Gleichnamige Bruchterme werden voneinander subtrahiert, indem man die Zähler voneinander subtrahiert und den Nenner beibehält; kurz

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Beachte: Da der Bruchstrich eine Klammer ersetzt, muss der Zähler des Minuenden, falls er ein Aggregat ist, *unbedingt* in eine Klammer gesetzt werden, wenn die beiden Zähler auf den gemeinsamen Bruchstrich kommen.

Beispiel:
$$\begin{aligned}\frac{3x^2-6}{x^2+x}-\frac{x^2-4x-8}{x^2+x} &= \frac{(3x^2-6)-(x^2-4x-8)}{x^2+x} = \\ &= \frac{3x^2-6-x^2+4x+8}{x^2+x} = \\ &= \frac{2x^2+4x+2}{x^2+x} = \\ &= \frac{2(x^2+2x+1)}{x^2+x} = \\ &= \frac{2(x+1)^2}{x(x+1)} = \\ &= \frac{2(x+1)}{x}.\end{aligned}$$

Sind mehr als zwei Bruchterme durch Plus- und Minuszeichen miteinander verknüpft, so erhält man ein Aggregat von Bruchtermen, für das die dir bekannten Regeln über das Rechnen mit Aggregaten gelten. Speziell für Aggregate aus gleichnamigen Bruchtermen gilt

Satz 35.1: Ein Aggregat von gleichnamigen Bruchtermen wird berechnet, indem man den Nenner beibehält und in den Zähler das entsprechende Aggregat aus den Zählern der einzelnen Glieder setzt.

Beispiel:
$$\begin{aligned}\frac{3r+s}{r^2-s^2}-\frac{7-2r}{r^2-s^2}+\frac{4s+7}{r^2-s^2} &= \frac{(3r+s)-(7-2r)+(4s+7)}{r^2-s^2} = \\ &= \frac{3r+s-7+2r+4s+7}{r^2-s^2} = \\ &= \frac{5r+5s}{r^2-s^2} = \\ &= \frac{5(r+s)}{(r+s)(r-s)} = \\ &= \frac{5}{r-s}.\end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{7a}{5x}+\frac{9a}{5x}-\frac{6a}{5x}$ **b)** $\frac{13a}{7b}-\frac{17a}{7b}+\frac{19a}{7b}-\frac{11a}{7b}$

c) $\frac{2a-3b}{5}+\frac{5a-6b}{5}-\frac{4b-3a}{5}-\frac{2b}{5}$

d) $\frac{7x-9y}{18}-\frac{12x-13y}{18}-\frac{14x+15y}{18}+\frac{x-7y}{18}$

e) $\frac{5m-6n}{13}+\frac{8n-9m}{13}-\frac{7n-6m}{13}+\frac{5n-2m}{13}$

f) $\frac{2a^2+3ab}{a+b}-\frac{3a^2+2ab}{a+b}-\frac{a^2+3b^2}{a+b}+\frac{5a^2+ab+2b^2}{a+b}$

g) $\frac{x^2+4xy+y^2}{x-y}-\frac{3xy-2x^2+4y^2}{x-y}-\frac{2y^2+2x^2-3xy}{x-y}$

h) $\frac{5a^2+2ab-3b^2}{a^2-b^2}-\frac{3a^2-5ab+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2-ab+7b^2}{a^2-b^2}$

i) $\frac{2x^2-4xy+5y^2}{x^2-y^2}-\frac{7xy-4x^2+3y^2}{x^2-y^2}-\frac{5x^2-9xy+y^2}{x^2-y^2}$

2. a) $\frac{(a+b)^2}{2ab}-\frac{(a-b)^2}{2ab}$

b) $\frac{(3p-2q)^2}{2pq}-\frac{(5p+3q)^2}{2pq}-\frac{(5q-4p)(4p-q)}{2pq}$

c) $\frac{(5r-8s)^2}{12rs}-\frac{(3r+10s)^2}{12rs}+\frac{(4r+6s)^2}{12rs}$

d) $\frac{(7a-8b)(5a+2b)}{4a-5b}-\frac{(2a-b)(5a-4b)}{4a-5b}-\frac{(9a+b)(a+5b)-59ab}{4a-5b}$

e) $\frac{(5x+4y)(2x-3y)}{x^2-4y^2}-\frac{(4x-3y)^2}{x^2-4y^2}-\frac{(2x-5y)(2x+5y)}{x^2-4y^2}+$
$+\frac{11x^2-13xy}{x^2-4y^2}$

•**3. a)** $\frac{(6a-5b)^2}{7\ \ +3b}-\frac{15ab-11b^2}{7a+3b}+\frac{(4a-3b)(a+17b)}{7a+3b}+$
$+\frac{9a^2+10ab+6b^2}{7a+3b}$

b) $\frac{(2x-3y)^2}{3x-8y} - \frac{(5x+7y)(3x-y)}{3x-8y} + \frac{(4x-3y)(5x-9y)}{3x-8y} + \frac{21y^2+31xy}{3x-8y}$

c) $\frac{(u+4v)^2}{5u-6v} + \frac{(2u-5v)^2}{5u-6v} - \frac{(2u-7v)(3v-5u)}{5u-6v} - \frac{110v^2-75uv}{5u-6v}$

d) $\frac{(4r-3s)^2}{4r-7s} - \frac{(2r-7s)(3s-8r)}{4r-7s} + \frac{9s(2r-s)}{4r-7s}$

*4. a) $\frac{(x+1)(x+2)(x-1)}{x-3} - \frac{2(x+2)(x+1)(x-2)}{x-3} + \frac{x^3-6x-9}{x-3}$

b) $\frac{(a+5)(a+3)(a-2)}{2a+3} - \frac{(a-3)^2(a+4)}{2a+3} -$

$- \frac{(a+2)^3-a^2(a-2)-71}{2a+3}$

c) $\frac{(3x+4y)(2x-y)(2x+3y)}{6y^2} - \frac{(x+3y)(3x-2y)(2x+y)}{6y^2} -$

$- \frac{x^2(6x+11y)}{6y^2}$

d) $\frac{(2p-3q)(p-4q)(4p-5q)}{3pq} + \frac{(4p-3q)(5p-2q)(p+10q)}{3pq} -$

$- \frac{4p(5q^2+7p^2)}{3pq}$

2.2 Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Bruchterme

Genauso wie bei Zahlen kann man ungleichnamige Bruchterme addieren bzw. subtrahieren, nachdem man sie mithilfe des Hauptnenners gleichnamig gemacht hat. Wir merken uns

Satz 37.1: Ungleichnamige Bruchterme werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann die Sätze für gleichnamige Bruchterme anwendet.
Ebenso stellt man aus einem Aggregat ungleichnamiger Bruchterme zuerst ein Aggregat gleichnamiger Bruchterme her und berechnet dann dieses.

Beispiele:

1) $\frac{a+2b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2}{3a+3b}$

Wir bilden unter Angabe der Erweiterungsfaktoren EF den Hauptnenner HN:

	EF
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$	3
$3a + 3b \quad = 3(a+b)$	$(a+b)$

$\mathrm{HN} = 3(a+b)^2$

Also
$$\frac{a+2b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2}{3a+3b} = \frac{3(a+2b)}{3(a+b)^2} - \frac{2(a+b)}{3(a+b)^2} =$$
$$= \frac{3(a+2b) - 2(a+b)}{3(a+b)^2} =$$
$$= \frac{3a+6b-2a-2b}{3(a+b)^2} =$$
$$= \frac{a+4b}{3(a+b)^2}.$$

2) $$\frac{1}{2x^3+4x^2} + \frac{2}{15-3x} - \frac{15-19x-8x^2}{12x^3-36x^2-120x}$$

Wir bilden durch Faktorisieren den Hauptnenner und multiplizieren die Erweiterungsfaktoren EF so weit wie möglich aus:

	EF
$2x^3 + 4x^2 = 2x^2(x+2)$	$2 \cdot 3(x-5) = 6x - 30$
$15 - 3x = 3(5-x)$	$-2^2x^2(x+2) = -4x^3 - 8$
$12x^3 - 36x^2 - 120x = 12x(x^2-3x-10) =$	
$= 2^2 \cdot 3x(x+2)(x-5)$	x

$\mathrm{HN} = 2^2 \cdot 3 \cdot x^2(x+2)(x-5)$

Beim Zusammenfassen der gleichnamig gemachten Brüche ersparen wir uns viel Schreibarbeit, wenn wir für den Hauptnennerterm, solange wir nur im Zähler rechnen, einfach kurz HN schreiben:

$$\frac{1}{2x^3+4x^2} + \frac{2}{15-3x} - \frac{15-19x-8x^2}{12x^3-36x^2-120x} =$$
$$= \frac{1 \cdot (6x-30) + 2 \cdot (-4x^3-8x^2) - (15-19x-8x^2) \cdot x}{\mathrm{HN}} =$$
$$= \frac{6x - 30 - 8x^3 - 16x^2 - 15x + 19x^2 + 8x^3}{\mathrm{HN}} =$$
$$= \frac{3x^2 - 9x - 30}{\mathrm{HN}} = \frac{3(x^2-3x-10)}{2^2 \cdot 3 \cdot x^2(x+2)(x-5)} =$$
$$= \frac{(x+2)(x-5)}{2^2 \cdot x^2(x+2)(x-5)} = \frac{1}{4x^2}.$$

Nun weißt du, wie du Aggregate aus Bruchtermen berechnen kannst. Was machst du aber mit dem Term $3x + \frac{6x}{7x-2}$? Wir erinnern uns, dass man jede Zahl als Bruch mit dem Nenner 1 schreiben kann, z. B. $5 = \frac{5}{1}$. Genauso kann man jeden Nicht-Bruchterm als Bruchterm mit dem Nenner 1 schreiben. Machen wir's!

$$3x + \frac{6x}{7x-2} = \frac{3x}{1} + \frac{6x}{7x-2} = \frac{3x(7x-2)+6x\cdot 1}{7x-2} =$$
$$= \frac{21x^2-6x+6x}{7x-2} = \frac{21x^2}{7x-2}$$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{10}+\frac{2a}{5}$ **b)** $\frac{5p}{9}-\frac{3p}{4}$ **c)** $\frac{a}{5}-\frac{b}{3}$ **d)** $\frac{3p}{14}+\frac{11q}{21}$

2. a) $\frac{7}{a}+\frac{3}{b}$ **b)** $\frac{6}{a}-\frac{2}{3a}$ **c)** $\frac{11}{8m}+\frac{3}{4n}$ **d)** $\frac{-1}{7z}+\frac{27}{196z}$

3. a) $\frac{6n}{7m}-\frac{5}{4m}$ **b)** $\frac{11u}{13vw}-\frac{8u}{3vw}$ **c)** $\frac{7b}{a^2}+\frac{3}{b}$ **d)** $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$

4. a) $\frac{b^2+1}{3a^2}+\frac{a}{6b}$ **b)** $\frac{4a+b}{16a^2b}+\frac{a-3b}{12ab^2}$

c) $\frac{7y-1}{x^2}-\frac{1}{4x^4}$ **d)** $\frac{2m+1}{4m^2n}-\frac{3n^2-m}{6mn^3}$

5. a) $1+\frac{a}{b}$ **b)** $a-\frac{b}{a}$ **c)** $\frac{1}{x^2}-x$ **d)** $\frac{w^2}{u^2v}+v$

6. a) $\frac{a^2+b^2}{ab}+2$ **b)** $\frac{c^2+d^2}{cd}-2$ **c)** $\frac{(m+n)^2}{4mn}-1$ **d)** $\frac{(x-y)^2}{4}+xy$

7. a) $\frac{(a+b)^2}{a-b}-(a-b)$ **b)** $\frac{(x-y)^2}{x+y}+(x+y)$ **c)** $\frac{(u+v)^2}{u-v}+(u+v)$

8. a) $\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a-b}$ **b)** $\frac{3a}{4a-1}-\frac{2b+1}{3b}$ **c)** $\frac{3x-1}{2x^2-xy}-\frac{3y-2}{2xy-y^2}$

9. a) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$ **b)** $\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}$

c) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$ **d)** $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$

10. a) $\frac{3a+5b}{2a+3b}-\frac{2a-3b}{3a-5b}$ **b)** $\frac{4u-7v}{6u-v}+\frac{6u+v}{4u+7v}$

11. a) $\frac{4a-5b}{6a+7b}-\frac{5b+4a}{6a-7b}$ **b)** $\frac{2a(a-b)}{a^2-2ab+b^2}-\frac{a+b}{a-b}$

12. a) $\frac{2a}{9}-\frac{b}{9}+\frac{4c}{9}$ **b)** $\frac{-7m}{23}+\frac{3n}{-23}-\frac{8m-n}{23}$

c) $\frac{5p}{18}+\frac{-3q}{45}+\frac{4}{21}$ **d)** $\frac{a-b}{16}-\frac{2a+b}{36}+\frac{-a+b}{-24}$

13. a) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a+b}{ab}$ **b)** $\frac{m-2}{2m}+\frac{1}{3mn}+\frac{3n+2}{-6n}$

c) $\frac{a^2+3b}{a^2b}+\frac{1-3a}{3ab}-\frac{5b-3}{5b^2}$ **d)** $\frac{3x-1}{7x^3y}-\frac{x^2+y}{2x^2y^2}+\frac{y^2-1}{3y^4}$

14. a) $\frac{4x-3y}{a+b}-\frac{6x-5y}{2a+2b}+\frac{2y-3x}{3a+3b}$ **b)** $\frac{3z-1}{15a-9}+\frac{1-4z}{20a-12}+\frac{-3}{21-35a}$

• 15. a) $\frac{4p-7q}{7m-4n}+\frac{p+5q}{-7m-4n}-\frac{3p+q}{7m+4n}$ **b)** $\frac{3a-b}{x-2y}-\frac{4a+b}{2y-x}+\frac{2a-b}{2x-y}$

• 16. a) $\frac{1}{4p-7q}+\frac{49q}{21pq-12p^2}-\frac{8p+3q}{12pq-21q^2}$

b) $\frac{3}{32yz^2+28y^2}-\frac{4}{-24z^3-21yz}-\frac{y^2+z^2}{8y^2z^3+7y^3z}$

17. a) $\frac{4a+1}{4a+7}-\frac{7}{16a^2-49}$ **b)** $\frac{x}{45x^2-5}+\frac{3x+1}{3x-1}$

18. a) $\frac{x+b}{a^2-b^2}-\frac{x+b}{a^2-ab}$ **•b)** $\frac{5m+2n}{125m^2-20n^2}-\frac{4m-5n}{16m^2-20mn}$

19. a) $\frac{3}{24x-4}-\frac{6x-1{,}25}{36x^2-12x+1}$ **b)** $\frac{z+4}{8+40z+50z^2}+\frac{1}{-22-55z}$

20. a) $\frac{-13x}{y^2-26yz+169z^2}+\frac{13x}{169z^2-13yz}$ **b)** $\frac{3a-b}{243a^2-3b^2}+\frac{b-3a}{27ab-3b^2}$

21. a) $\frac{5s+7}{t^2-4t+4}-\frac{6s-7}{4-t^2}$ **b)** $\frac{5r+12s}{4r^2-64s^2}-\frac{r-4s}{-r^2-8rs-16s^2}$

22. a) $\frac{x}{2x-6}-\frac{x^2}{x^2-4x+3}$ **b)** $\frac{y}{2y^2+4y-6}+\frac{1}{y-1}$

23. a) $\frac{2a^2-a+21}{12a^2-27}+\frac{2a-7}{6a-9}-1$ **b)** $\frac{m^2}{m^2-4n^2}-\frac{7m+4n}{10m+20n}+\frac{1}{5}$

24. a) $5-\frac{5x+9}{x+2}+\frac{8}{x^4-16}$ **b)** $\frac{16y^4+60y+9}{16y^4-81}+\frac{5}{4y^2+9}-1$

25. a) $\dfrac{a^2}{16a^2+40ab+25b^2}-\dfrac{31a^2-50b^2}{16a^2-25b^2}+2$

b) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2}+\dfrac{a^2-2ab-b^2}{ab}+\dfrac{a^2-ab+b^2}{b^2}-2$

26. a) $\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{b}-\dfrac{5a-12b}{a^2-4ab+4b^2}$ **b)** $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2x-3y}{4x^2+12xy+9y^2}-\dfrac{1}{3y}$

27. a) $\dfrac{m-1}{m^2}-\dfrac{4}{6m-4}+\dfrac{15m}{4-9m^2}$ **b)** $\dfrac{u+5v}{uv}-\dfrac{10u}{u^2-25v^2}+\dfrac{5}{u-5v}$

28. a) $\dfrac{8x^2-0{,}5a}{2x^2-ax}-\dfrac{7x+0{,}5a-1}{2x-a}+\dfrac{x-1}{2x}$ **b)** $\dfrac{6m^2+9}{7m^3-63m}+\dfrac{m}{9-m^2}+\dfrac{1}{7m}$

29. a) $\dfrac{1}{2-b}+\dfrac{1}{2+b}-\dfrac{b^2}{4-b^2}$ **b)** $\dfrac{x-a}{5x+3}-\dfrac{x+a}{5x-3}+\dfrac{(4a+6)x}{25x^2-9}$

30. a) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ **b)** $\dfrac{2a-3b}{2a+3b}-\dfrac{2a+3b}{2a-3b}+\dfrac{8a^2+18b^2}{4a^2-9b^2}$

c) $\dfrac{3p+4q}{3p-4q}+\dfrac{3p-4q}{3p+4q}-\dfrac{48pq}{9p^2-16q^2}$

d) $\dfrac{2(4a-b)}{4a+b}-\dfrac{3(4a+b)}{4a-b}+\dfrac{32a^2+32ab+2b^2}{16a^2-b^2}$

e) $\dfrac{5(2x-3y)}{4x-5y}-\dfrac{4(2x+3y)}{4x+5y}-\dfrac{4x^2-25xy}{16x^2-25y^2}$

f) $\dfrac{-3a+4}{4a-32}-\dfrac{2a-1}{6a+48}-\dfrac{64-64a-26a^2}{24a^2-1536}$

31. a) $\dfrac{2(3m+4n)}{6m+9n}-\dfrac{2{,}5m-n}{10m-15n}-\dfrac{3m^2-1{,}5mn-7n^2}{4m^2-9n^2}$

b) $\dfrac{a}{(a+b)^2}-\dfrac{b}{(a-b)^2}+\dfrac{2b}{a^2-b^2}-\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2+3b^3}{(a^2-b^2)^2}$

c) $\dfrac{a}{a+b-c}-\dfrac{b}{a-b+c}+\dfrac{2ab-c(a+b)}{a^2-(b-c)^2}$

32. a) $\dfrac{6x+1}{4x-6}+\dfrac{8x-3}{6x+9}-\dfrac{20x^2-4x+9}{8x^2-18}$ **b)** $\dfrac{4-5y}{4+5y}+\dfrac{4+5y}{5y-4}-\dfrac{12-145y}{32-50y^2}$

•33. a) $\dfrac{12a+5b}{0{,}9a+0{,}6b}+\dfrac{9a+4b}{0{,}6a+0{,}4b}-\dfrac{2(27a^2+33ab-4b^2)}{2{,}7a^2-1{,}2b^2}$

b) $\dfrac{3a^2+6ab}{15a-20b}-\dfrac{ab}{3a-4b}-\dfrac{5ab-4b^2}{6a-8b}-\dfrac{5a-14b}{30}$

34. a) $\dfrac{3a-b}{3x-6y}+\dfrac{4a-b}{-4x+8y}+\dfrac{b(x+y)}{2x^2-8y^2}$

b) $\dfrac{3z}{6u+12v}-\dfrac{y+2z}{4u+8v}+\dfrac{y}{(2u+4v)^2}$

35. a) $\dfrac{22x^2-27x-49}{735-15x^2}-\dfrac{-2x+4}{3x-21}+\dfrac{4x-1}{5x+35}$

b) $\dfrac{2a-3b}{4a^2+2ab}-\dfrac{6a+4b}{6ab+3b^2}+\dfrac{5a+8b}{6ab}-\dfrac{8a-b}{8a^2+4ab}$

36. a) $\dfrac{a^4+1}{a^4-1}+\dfrac{a^2+1}{a^2-1}-\dfrac{a+1}{a-1}$ **b)** $\dfrac{x^2}{1-x^4}+\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x}$

•37. a) $\dfrac{3ab}{9a^2-b^2}+\dfrac{a+b}{2b-6a}+\dfrac{3a^2-4ab-b^2}{18a^2-2b^2}$

b) $\dfrac{3a-5b}{6a^2-9ab}-\dfrac{2a+7b}{4ab+6b^2}-\dfrac{5ab-15b^2}{12a^3-27ab^2}+\dfrac{4a^2-23b^2}{8a^2b-18b^3}$

•38. a) $\dfrac{-2x+3}{3x+9}-\dfrac{11x^2+51x-54}{6x^2-54}-\dfrac{11x-12}{x^2-9}$

b) $\dfrac{7x+2y}{6xy-2y^2}-\dfrac{3x-4y}{9x^2+3xy}-\dfrac{6x^2-4y^2}{27x^3-3xy^2}-\dfrac{6x^2+7y^2}{9x^2y-y^3}$

39. a) $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{x-3}{x^2-1}-\dfrac{x}{x^2-2x+1}$ **b)** $\dfrac{1}{3y-2z}-\dfrac{24y}{36y^2-16z^2}+\dfrac{2z}{(3y+2z)^2}$

•40. a) $\dfrac{1}{3a-4b}+\dfrac{2a-b}{-9a^2+24ab-16b^2}-\dfrac{a-3b}{9a^2+24ab+16b^2}$

b) $\dfrac{4a^2}{6ab+9b^2}-\dfrac{2a}{3b}+\dfrac{3b}{2a}-\dfrac{9b^2}{4a^2+6ab}$

•41. a) $\dfrac{m}{2n}+\dfrac{m^2}{m^2-2mn+n^2}-\dfrac{m(m^2+n^2)}{2m^2n-4mn^2+2n^3}$

b) $\dfrac{4a^2}{10ab-25b^2}+\dfrac{25b^2}{4a^2-10ab}-\dfrac{2a}{5b}+\dfrac{5b}{2a}$

•42. $\dfrac{x-y}{3ax-2by+3ay-2bx}+\dfrac{1}{3a-2b}-\dfrac{x}{x^2-y^2}$

•43. $\dfrac{ax-a}{2ax+2x-a-1}+\dfrac{2ax^2+ax}{4ax^2+4x^2-a-1}-1$

•**44.** $\dfrac{2a-3b}{6ab}+\dfrac{3}{4a-6b}-\dfrac{2b}{6a^2-9ab}-\dfrac{3a}{8ab-12b^2}+\dfrac{5a^2+6ab-19b^2}{24a^2b-36ab^2}$

45. $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

46. $\dfrac{1}{x^2-6x+9}+\dfrac{1}{x^2+8x+16}-\dfrac{2}{x^2+x-12}$

•**47.** $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}-\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{y^4-x^4+4x^3y}{2(x^3y-xy^3)}$

48. $\dfrac{p}{p-q}-\dfrac{q^2}{p^2+pq+q^2}-\dfrac{p^2q}{p^3-q^3}$ **49.** $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}-\dfrac{x(x-y)}{x^3+y^3}$

•**50.** $\dfrac{5}{4x^2-4x+1}-\dfrac{2}{4x^2+4x+1}+\dfrac{4x^2-28x-7}{16x^4-8x^2+1}$

•**51.** $\dfrac{a+b}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{a-b}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{2a-b}{a^2-b^2}-\dfrac{4(ab^2-b^3)}{(a^2-b^2)^2}$

•**52.** $\dfrac{x^2}{4x^2-4xy+y^2}-\dfrac{y^2}{4x^2+4xy+y^2}-\dfrac{x^2+y^2}{4x^2-y^2}+\dfrac{xy(6xy-5y^2)}{(4x^2-y^2)^2}$

•**53.** $\dfrac{7a^2-4b^2}{a^2+6ab+9b^2}-\dfrac{5a^2-9ab}{a^2-6ab+9b^2}-\dfrac{2a^2-3ab+4b^2}{a^2-9b^2}+$
$+\dfrac{462ab^3-82a^2b^2}{a^4-18a^2b^2+81b^4}$

•**54.** $\dfrac{2a-3b}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{2a+3b}{a^2-2ab+b^2}+\dfrac{10a^3+10a^2b}{a^4-2a^2b^2+b^4}-\dfrac{6b}{a^2-b^2}$

•**55.** $\dfrac{2x-1}{4x^2+4x+1}-\dfrac{2x+1}{4x^2-4x+1}+\dfrac{4x^2+7}{16x^4-8x^2+1}$

56. $\dfrac{a}{a^2+3ab+2b^2}+\dfrac{b}{a^2+4ab+3b^2}-\dfrac{a+b}{a^2+5ab+6b^2}$

•**57.** **a)** $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

b) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

c) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

d) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

2.3 Multiplizieren von Bruchtermen

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass Brüche miteinander multipliziert werden, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. So ist z. B. $\frac{3}{7} \cdot \frac{8}{13} = \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 13} = \frac{24}{91}$.

Aus diesem Grund ergeben die Terme $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ und $\frac{ac}{bd}$ bei jeder Einsetzung denselben Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man Bruchterme miteinander multipliziert:

Satz 44.1: Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert; kurz:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}.$$

Beachte: 1) Produkte sind meist bequemer zu verarbeiten als Summen, deshalb multiplizieren wir nicht aus, sondern versuchen im Gegenteil so weit wie möglich zu faktorisieren, um gegebenenfalls kürzen zu können.
Übrigbleibende Zahlenfaktoren multiplizieren wir aus.

2) Vergiss die Klammern nicht, wenn du *einen* Bruchstrich machst.

Beispiel:

$$\frac{10x^2 - 60x + 90}{x^2 - 4} \cdot \frac{4x^2 + 4x - 8}{5x - 15} =$$

$$= \frac{10(x^2 - 6x + 9) \cdot 4(x^2 + x - 2)}{(x^2 - 4) \cdot 5(x - 3)} = \frac{10 \cdot 4(x-3)^2 (x+2)(x-1)}{5(x-2)(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 4(x-3)(x-1)}{x-2} = \frac{8(x-3)(x-1)}{x-2}.$$

Nun weißt du, wie du Bruchterme miteinander multiplizieren kannst.

Was machst du aber mit dem Produkt $12x \cdot \frac{1+x}{6x^2 - 18x}$?

Wir schreiben $12x$ als Bruchterm $\frac{12x}{1}$ und wenden Satz 44.1 an:

$$12x \cdot \frac{1+x}{6x^2 - 18x} = \frac{12x}{1} \cdot \frac{1+x}{6x^2 - 18x} = \frac{12x(1+x)}{1 \cdot (6x^2 - 18x)} = \frac{12x(1+x)}{6x(x-3)} = \frac{2(x+1)}{x-3}$$

Es gilt also $\boxed{\boldsymbol{a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}}}$

Aufgaben

1. a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ **b)** $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ **c)** $\frac{7p}{3q} \cdot \frac{2p}{5q}$ **d)** $\frac{7p}{3q} \cdot \frac{2q}{5p}$

2. a) $\frac{64k}{25l} \cdot \frac{125}{128k}$ **b)** $\frac{121b}{91a} \cdot \frac{169c}{156d}$ **c)** $\frac{13x}{70yz} \cdot \frac{35y}{52x^2}$ **d)** $\frac{98m^2n}{39} \cdot \frac{65m}{147n^3}$

3. a) $\left(\frac{7ax}{13by}\right)^2$ **b)** $\frac{11m}{15n} \cdot \left(\frac{15n}{11m}\right)^2$ **c)** $\frac{(u^2v)^2}{w} \cdot \frac{w^2}{(uv)^3}$ **d)** $\frac{4ac}{3b^3d^2} \cdot \frac{(3ab^2d^2)^2}{10c^3}$

4. a) $\frac{5a}{3b} \cdot 7c$ **b)** $3mn \cdot \frac{14m}{11n}$ **c)** $16xy \cdot \frac{5y}{12}$ **d)** $\frac{13u^2}{12v^2} \cdot 4v^3$

5. a) $\frac{1}{a+b} \cdot (b+a)$ **b)** $(2p-q) \cdot \frac{2}{q-2p}$

c) $\frac{5x}{3x-6y} \cdot (4x-8y)$ **d)** $(7ab-3b^2) \cdot \frac{b}{6b-14a}$

6. a) $\frac{a-b}{a+b} \cdot (a^2-b^2)$ **b)** $(a^2-b^2) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ **c)** $\frac{a+b}{a-b}(a-b)^2$

d) $\frac{a-b}{a+b} \cdot (b^2-a^2)$ **e)** $(b^2-a^2) \cdot \frac{a+b}{a-b}$ **f)** $\frac{a+b}{a-b}(b-a)^2$

7. a) $\frac{8-24z}{3x-y} \cdot \frac{18x-6y}{8z-24}$ **b)** $\frac{20m-12n}{55mn} \cdot \frac{22m^2n-33mn}{5m-3n}$

c) $\frac{6uv-14v^2}{u^2+u} \cdot \frac{3u^2-3}{7v^2-3uv}$ **d)** $\frac{48a^2c-28ab}{28abc+24bc^2} \cdot \frac{21ac+18c^2}{14b^2-24abc}$

8. a) $\frac{3x-1}{x^2-4} \cdot \frac{2x+4}{9x^2-3x}$ **b)** $\frac{(5m-n)^2}{13mn} \cdot \frac{78m^2+39m}{25m^2-n^2}$

9. a) $\frac{36a^2-84ab+49b^2}{(3ab)^2} \cdot \frac{27(ab)^3}{14a^2-12ab}$

b) $\frac{3(a+b)^2}{4x^2-y^2} \cdot \frac{4x+2y}{2ax-ay+2bx-by}$

•10. a) $\frac{15x-5x^2}{x^2+x-6} \cdot \frac{4-x^2}{18-2x^2} \cdot \frac{2x^2+12x+18}{5x^2+10x}$

b) $\frac{2x-5}{6x^2-x-12} \cdot \frac{3x+4}{8x^2-14x-15}$

•11. a) $\frac{40x^2-29x+3}{9x+2} \cdot \frac{45x^2-17x-6}{8x-1}$

b) $\frac{2a^2-5ab+3b^2}{3a^2+ab-2b^2} \cdot \frac{3a^2-5ab+2b^2}{2a^2-ab-3b^2}$

12. a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{x}\right)\cdot 2x$ **b)** $\left(\frac{1}{m}-\frac{3}{2n}\right)\cdot\frac{mn}{3m-2n}$ **c)** $\left(\frac{6}{y}-\frac{3}{4z}\right)\cdot\frac{8yz}{8z-y}$

13. a) $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\frac{x+y}{x-y}$ **b)** $(7z^5-5z^7)\left(\frac{7}{z^7}+\frac{5}{z^5}\right)$

14. a) $x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$ **b)** $\frac{8u^2}{9u-30v}\cdot\left(\frac{5}{3uv}-\frac{1}{2v^2}\right)\cdot 18v$

15. a) $\left(\frac{1}{p^2}+\frac{2}{pq}+\frac{1}{q^2}\right)\cdot\frac{pq}{p+q}$ **b)** $\left(\frac{1}{4}-\frac{n}{4m}-\frac{m}{16n}\right)\cdot\frac{2^4mn}{m-2n}$

16. a) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ **b)** $\frac{1}{a+b}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

c) $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(a-b)$ **d)** $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{a-b}$

17. a) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{2}{3x}-\frac{5}{7y}\right)^2$

18. a) $\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}\right)\left(\frac{3}{a}-\frac{2}{b}\right)$ **b)** $\left(\frac{5}{2x}+\frac{2}{7y}\right)\left(\frac{2x}{7}-\frac{5y}{2}\right)$

•19. a) $\left(\frac{u}{u+v}+\frac{v}{u-v}\right)\left(u-\frac{v^2}{u}\right)$ **b)** $\left(\frac{r}{4s}-\frac{s}{9r}\right)\left(\frac{s}{r}-\frac{3s}{3r+2s}\right)$

c) $\left(8x+\frac{9y^2}{2x-3y}\right)\left(\frac{12xy-4x^2}{4x-3y}-3y\right)$ **d)** $\left(\frac{4q}{7p}-2\right)\cdot\left(1-\frac{21p^2}{20q^2}\right)$

20. a) $\left(9x-\frac{15x}{14y}\right)\cdot\left(7y+\frac{28y}{27x}\right)$ **b)** $\left(\frac{12}{25}a+\frac{16a^2}{15b}\right)\cdot\left(\frac{35b^2}{8a}-3\tfrac{3}{4}b\right)$

•21. a) $\left(\frac{7c+d}{4c+3d}-1\right)\left(4+\frac{10d-13c}{4c-3d}\right)$ **b)** $\left(\frac{a-3b}{3a-9b}+\frac{a+2b}{2a-6b}\right)^2$

c) $\left(\frac{p}{2p+10q}+\frac{2{,}5q}{p+5q}\right)\left(\frac{p}{2p+10q}-\frac{2{,}5q}{p+5q}\right)$

d) $\left(\frac{a}{2b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{4a}\right)^2$

22. a) $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{4b}{3a}\right)^2+\left(\frac{3a}{4b}-\frac{2b}{3a}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{p}{5q}+\frac{3q}{2p}\right)^2-\left(\frac{2p}{3q}-\frac{5q}{2p}\right)^2$

c) $\left(\frac{2a}{3b}-\frac{3b}{4a}\right)\cdot\left(\frac{3a}{4b}-\frac{2b}{3a}\right)-\left(\frac{a}{3b}-\frac{b}{4a}\right)\cdot\left(\frac{a}{4b}-\frac{b}{6a}\right)$

23. a) $\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x+y}-1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ b) $\left(\frac{y^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x-y}-1\right)\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)$

•**24.** a) $\left(\frac{m}{3n}+\frac{3m+11n}{6m-3n}+1\right)\left(\frac{13m-4n}{2m+4n}-\frac{n}{m}+\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(\frac{2x+3y}{3x-4y}-\frac{2x-3y}{3x+4y}\right)\cdot\frac{9x^2-16y^2}{4x^2-9y^2}$

25. a) $\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)(1+z+z^2)$ b) $\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$

•**26.** a) $\left(\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3x-2y}-\frac{2xy}{9x-6y}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{3x-2y}+\frac{2xy}{9x-6y}\right)$

b) $\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{ab}{xy}+\frac{b^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$

c) $\left(\frac{x^3}{r^3}-\frac{2x^2}{r^2}+\frac{3x}{r}-4\right)\cdot\left(\frac{r^2}{x^2}+\frac{2r}{x}+3\right)$

d) $\left(\frac{2a^2x}{27b^2y}+\frac{4ay}{9bx}-\frac{8by^2}{3ax^2}\right)\cdot\left(\frac{3b^2y}{8a^2x}+\frac{9bx}{4ay}-\frac{27ax^2}{2by^2}\right)$

•**27.** a) $\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{4ab}{a^2-b^2}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{a+b}{a-b}\right)$

b) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\left(\frac{3}{5a^2+1}+\frac{(1-a)^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^4}\right)$

c) $\frac{x}{y}\cdot\left(\frac{2y^2+1}{xy}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{2x-y}{x-1}+\frac{6x+y}{x+3}+\frac{4y-8x^2}{x^2+2x-3}\right)$

•**28.** LEONARDO VON PISA, genannt FIBONACCI, (um 1170 – nach 1240) schreibt: Die Zahl a sei in zwei Teile [= Summanden] b, g geteilt. Man teile a durch b, das Ergebnis sei e; und man teile a durch g, das Ergebnis sei d. Ich behaupte, dass das Produkt von d und e gleich der Summe von d und e ist. Zeige, dass LEONARDO Recht hat.

2.4 Dividieren von Bruchtermen

Vom Rechnen mit Zahlen kennen wir die Regel, dass durch einen Bruch dividiert wird, indem man mit seinem Kehrwert* multipliziert. So ist z. B.

$$\frac{3}{7} : \frac{8}{13} = \frac{3}{7} \cdot \frac{13}{8} = \frac{3 \cdot 13}{7 \cdot 8} = \frac{39}{56}.$$

Aus diesem Grund ergeben die Terme $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ und $\frac{ad}{bc}$ bei jeder Einsetzung denselben Zahlenwert. Also sind sie äquivalent. Damit wissen wir, wie man durch einen Bruchterm dividiert:

Satz 48.1: Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert; kurz:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \quad \text{bzw.} \quad a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c}.$$

Beispiele:

1) $$\frac{42(x-y)^2}{85(a^2-b^2)} : \frac{56(x^2-y^2)}{51(a+b)^2} = \frac{42(x-y)^2 \cdot 51(a+b)^2}{85(a-b)(a+b) \cdot 56(x-y)(x+y)} =$$
$$= \frac{3 \cdot 3(x-y)(a+b)}{5 \cdot 4(a-b)(x+y)} = \frac{9(x-y)(a+b)}{20(a-b)(x+y)}$$

2) $$25a^5 : \frac{15a^2}{4b^2} = 25a^5 \cdot \frac{4b^2}{15a^2} = \frac{25a^5 \cdot 4b^2}{15a^2} = \frac{5 \cdot 4a^3b^2}{3} = \frac{20a^3b^2}{3} =$$
$$= \tfrac{20}{3}\, a^3b^2$$

Weil jeder Term c als Bruchterm $\frac{c}{1}$ geschrieben werden kann, lässt sich Satz 48.1 auch auf Divisionen vom Typ $\frac{a}{b} : c$ anwenden. Es gilt also:

$$\boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}}$$

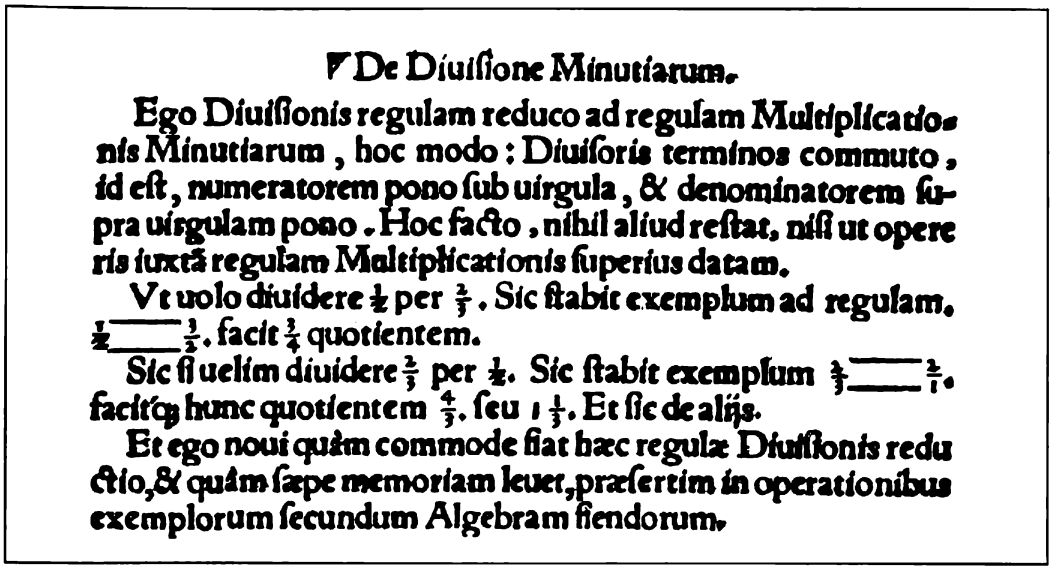
Beispiel: $$\frac{63uv}{41x} : (42uv^2) = \frac{63uv}{41x} \cdot \frac{1}{42uv^2} = \frac{63uv}{41x \cdot 42uv^2} = \frac{3}{82vx}$$

* Statt Kehrwert sagt man auch **reziproker Wert**, entstanden aus dem lateinischen *reciprocus* = *auf demselben Weg zurückkehrend*, dessen ursprüngliche Bedeutung aber *rückwärts und vorwärts* ist.

**Zur Geschichte der Divisionsregel

In den alten Schriften ging man beim Dividieren durch einen Bruch anders vor als in Satz 48.1. Hatte man nämlich gleichnamige Brüche, z. B. $\frac{7}{4} : \frac{3}{4}$, so konnte man die Nenner wie eine Benennung auffassen und dann die Division wie bei benannten ganzen Zahlen durchführen, also 7 Viertel : 3 Viertel = $7 : 3 = \frac{7}{3}$, d. h., man dividierte die Zähler durcheinander. Ungleichnamige Brüche machte man erst gleichnamig. So findet man in Aufgabe 36 des *Papyrus Rhind* $1 : (3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{30}{30} : \frac{106}{30} = 30 : 106$. Ebenso rechneten die Griechen, die Chinesen, die Araber und daher lange Zeit auch das Abendland, wo man wegen $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$ in vielen Büchern ohne weitere Erklärung das Dividieren als *Über-Kreuz-Multiplizieren* an Hand der Figur $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$ $\frac{16}{15}$ einführte.

Unsere Regel vom Umkehren des Divisorbruchs lehrte in Indien SCHRĪDHARA (um 900). Im Abendland scheint sie 1544 Michael STIFEL (1487(?)–1567) in seiner *Arithmetica integra* erfunden zu haben; denn 1553 nennt er sie stolz »meyn Regel vom diuidiren der brüch«. Abbildung 49.1 gibt sie wieder.



De Diuiſione Minutiarum.

Ego Diuiſionis regulam reduco ad regulam Multiplicationis Minutiarum, hoc modo: Diuiſoris terminos commuto, id eſt, numeratorem pono ſub uirgula, & denominatorem ſupra uirgulam pono. Hoc facto, nihil aliud reſtat, niſi ut operaris iuxtã regulam Multiplicationis ſuperius datam.

Vt uolo diuidere $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}$. Sic ſtabit exemplum ad regulam. $\frac{1}{2}\frac{3}{2}$. facit $\frac{3}{4}$ quotientem.

Sic ſi uelim diuidere $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$. Sic ſtabit exemplum $\frac{2}{3}\frac{2}{1}$. facitq; hunc quotientem $\frac{4}{3}$. ſeu $1\frac{1}{3}$. Et ſic de aliis.

Et ego noui quãm commode fiat hæc regulæ Diuiſionis reductio, & quãm ſæpe memoriam leuet, præſertim in operationibus exemplorum ſecundum Algebram fiendorum.

Abb. 49.1 Die Divisionsregel für Brüche aus Michael STIFELS *Arithmetica integra* (folium 6r) von 1544 – Übersetzung im Lösungsheft.

Aufgaben

1. a) $\frac{x}{5} : x$ **b)** $\frac{x}{5} : 5$ **c)** $3 : \frac{y}{3}$ **d)** $21y : \frac{3y}{14}$

2. a) $\frac{a}{2} : \frac{a}{3}$ **b)** $\frac{a}{2} : \frac{b}{4}$ **c)** $\frac{5x}{12} : \frac{x}{3}$ **d)** $\frac{9x}{25} : \frac{5y}{3}$

3. a) $\frac{2}{a^2} : (6a)$ **b)** $8xy : \frac{4}{x}$ **c)** $\frac{16u^2}{9v} : (12w)$ **d)** $21ab^2 : \frac{7a}{3b}$

4. a) $\frac{4x}{5y} : \frac{5y}{4x}$ **b)** $\frac{18m}{35n} : \frac{7m}{9n}$ **c)** $\frac{108}{25pq} : \frac{135p}{q^2}$ **d)** $\frac{72ab^2}{27c} : \frac{16a^2b}{45c^2}$

•5. a) $\frac{147(uv^2w)^2}{1024ab^3} : \frac{196u^3w}{640(ab)^3}$ **b)** $\left(\frac{12m^3n}{55xyz^2}\right)^2 : \frac{27m^4x^2}{242ny^2z}$

6. a) $\frac{5(2a-b)}{9} : \frac{4a-2b}{15}$ **b)** $\frac{5m}{3n-5} : \frac{m^2}{5-3n}$

7. a) $\frac{rs}{24r-32s+20t} : \frac{st}{30r-40s+25t}$ **b)** $\frac{8x-28y}{5yz-3y} : \frac{21y-6x}{20z-12}$

8. a) $(a^2-9b^2) : \frac{a+3b}{a-3b}$ **b)** $\frac{6x-6y}{5x+5y} : (3x^2-3y^2)$

9. a) $(2m^2+20m+50) : \frac{m-5}{15+3m}$ **b)** $\frac{x-3}{3x+15} : (x^2+2x-15)$

10. a) $\frac{25a^2-20ab+4b^2}{4c^2+56c+196} : \frac{5a-2b}{3c+21}$ **b)** $\frac{8u-20v}{9+3w} : \frac{4u^2-25v^2}{w^2+6w+9}$

11. a) $\frac{9p^2-36q^2}{3-r} : \frac{2p-4q}{r^2-9}$ **b)** $\frac{18s-2}{81s^2+18s+1} : \frac{2}{1-81s^2}$

•12. a) $\frac{x^2-1}{1-y^2} : \left(\frac{x-1}{1-y}\right)^2$ **b)** $\frac{(x-1)^2+4x}{x^2+4y^2} : \frac{3x^2+6x+3}{4xy-(x+2y)^2}$

13. a) $\left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b}\right) : \frac{1}{c}$ **b)** $\frac{1}{a} : \left(\frac{1}{b} : \frac{1}{c}\right)$ **c)** $\frac{1}{b} : \left(\frac{1}{c} : \frac{1}{a}\right)$

14. a) $\left(\frac{u}{v} : \frac{v}{w}\right) : \frac{w}{x}$ **b)** $\frac{u}{v} : \left(\frac{v}{w} : \frac{w}{x}\right)$ **c)** $\left(\frac{v}{u} : \frac{w}{v}\right) : \frac{x}{w}$

15. a) $\left(\frac{1}{y} : y^2\right) : \frac{1}{y^3}$ **b)** $\left[\frac{1}{z} : \left(\frac{1}{z^2} : \frac{1}{z^3}\right)\right] : \frac{1}{z^4}$

•16. a) $\frac{x^2-9}{6y} : \left(z : \frac{xyz}{x+3}\right)$ **b)** $\left(\frac{(2m+1)^2}{n-2} : \frac{3n+6}{4m-2}\right) : \frac{4m^2-1}{4-n^2}$

17. a) $\frac{51(x^2-y^2)}{7xy} : [68(x-y)^2]$ **b)** $\frac{54(a^2-b^2)}{13a} : [81(ab+b^2)]$

c) $\frac{5ab(x-y)}{6xy(x+y)} : \frac{10ax(x-y)}{3by(x+y)}$ **d)** $\frac{38a(a-b)}{51b(x-y)} : \frac{57b(a^2-b^2)}{68a(x^2-y^2)}$

18. a) $\left(\frac{7ab}{2c}+\frac{4bc^2}{a}\right):(14abc)$ **b)** $\left(\frac{5m^2}{2n}-\frac{7mn}{12}\right):\frac{m^2n^3}{4}$

c) $\left(\frac{-3x^4y^2}{4z^3}-\frac{12(xy)^2}{5z}+\frac{9x^3y}{10z^5}\right):\frac{21x^2y^3}{20z^4}$

•19. a) $\left(\frac{2s-5r}{5r+2s}+\frac{5r+2s}{5r-2s}\right):\frac{5r^2s}{4s^2-25r^2}$

b) $\left(\frac{1-p}{3q-8p}-\frac{p-1}{3q+8p}\right):\left(\frac{1}{8p^2+3pq}\cdot\frac{6p}{q}\right)$

c) $\left(\frac{2x+8}{3a-5b}-\frac{x^2+8x+16}{9a^2-25b^2}+\frac{4+x}{9a+15b}\right):\frac{x^2-16}{9a^2-25b^2}$

20. a) $\frac{21a^2b}{10c^2}:\left(\frac{5ab}{3c}+\frac{ab}{5c}\right)$ **b)** $\frac{7p+4q}{40pq}:\left(\frac{2q}{7p}-\frac{7p}{8q}\right)$

•21. a) $\frac{u^2-2u+1}{4u^2-36}:\left(\frac{2u-2}{u-3}-\frac{3-3u}{u+3}+\frac{1-u^2}{u^2-9}\right)$

b) $\left(\frac{26a^3b^3}{5c^2d}+\frac{8a^4b^2}{5cd^2}\right):\left(\frac{3a^2b^3}{8c^2d^2}-\frac{5a^3b^2}{2cd^3}\right)$

c) $\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{1-x^2}+\frac{2x+1}{1-x^4}\right):\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x+7}{1+x^2}\right)$

•22. a) $\left(x^4-\frac{1}{y^4}\right):\left(x+\frac{1}{y}\right)$ **b)** $\left(x^4-\frac{1}{y^4}\right):\left(x-\frac{1}{y}\right)$

•23. a) $\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{bc}{d^2}+2\cdot\frac{a}{d}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$ **b)** $\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{1}{12}-\frac{y^2}{2x^2}\right):\left(\frac{3x}{2y}+\frac{y}{x}\right)$

••24. a) $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}+\frac{(a+b)^2}{b}-\frac{(a-b)^2}{b}\right):(a^2-b^2)$

b) $\left(\frac{-2r-5t}{3r}-\frac{2r+5t}{5t}+\frac{4r^2-25t^2}{3}\right):(4r^2-25t^2)$

c) $\left(\frac{6xy+9y^2}{2x}-\frac{4x^2+6xy}{3y}+\frac{8x^3+27y^3}{6xy}-2x-3y\right):(4x^2-9y^2)$

2.5 Doppelbrüche

Ein Bruchterm, in dessen Zähler oder Nenner wieder Bruchterme auftreten, heißt **Doppelbruch.** So sind $\dfrac{\frac{3x}{2y}}{\frac{2x}{3y}}$ und $\dfrac{1+\frac{a}{b}}{1-\frac{a}{b}}$ Beispiele für Doppelbrüche.

Damit klar erkennbar ist, was Zähler und was Nenner ist, muss der Hauptbruchstrich deutlich länger sein als die Nebenbruchstriche.

So ist z. B. $\dfrac{\frac{3x}{2y}}{2x}$ etwas anderes als $\dfrac{3x}{\frac{2y}{2x}}$!

Zur Umformung eines Doppelbruchs könnte man den Hauptbruchstrich durch den Divisions-Doppelpunkt ersetzen und Satz 48.1 anwenden. Besser ist es aber, den Doppelbruch so zu erweitern, dass er zu einem einfachen Bruch wird. Wir führen es zunächst an einem Zahlenbeispiel vor:

$\dfrac{1+\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{5}{3}}$ erweitern wir mit dem Hauptnenner 12 der Nebenbrüche:

$$\frac{\left(1+\frac{3}{4}\right)\cdot 12}{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot 12}=\frac{12+9}{18-20}=-\frac{21}{2}.$$

Bei Doppelbrüchen mit Bruchtermen geht es genauso:

$$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}=\frac{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)xy}{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\right)xy}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y}.$$

Merke dir die

Regel: Doppelbrüche werden vereinfacht, indem man sie mit dem Hauptnenner der Brüche im Zähler und Nenner erweitert.

Aufgaben

1. **a)** $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}}$ **b)** $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}}$ **c)** $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}$ **d)** $\dfrac{\frac{a}{b}}{a}$ **e)** $\dfrac{\frac{a}{b}}{b}$

f) $\dfrac{a}{\frac{b}{a}}$ **g)** $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ **h)** $\dfrac{\frac{a^2}{b}}{\frac{a}{b^2}}$ **i)** $\dfrac{\frac{a^2}{b}}{ab}$ **j)** $\dfrac{a^2}{\frac{b}{ab}}$

2. **a)** $\dfrac{\frac{3a^2}{14x^2}}{\frac{9a}{7x}}$ **b)** $\dfrac{\frac{24a^2b^3}{35x^3y^2}}{\frac{36ab}{49x^2y}}$ **c)** $\dfrac{\frac{25p^5y^3}{21r^4s^6}}{\frac{35p^3y^5}{12r^5s^5}}$ **d)** $\dfrac{\frac{125a^4x}{111p^2q^3}}{\frac{175ax^4}{148p^3q^2}}$

3. **a)** $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{d}$ **b)** $\dfrac{a}{b-\frac{c}{d}}$ **c)** $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{a-\frac{b}{c}}$

d) $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{a-\frac{c}{d}}$ **e)** $\dfrac{2+\frac{a}{3}}{b}$ **f)** $\dfrac{3a}{5b-\frac{4c}{5}}$

4. **a)** $\dfrac{\frac{9a^2}{2b}-2b}{\frac{3a}{2b}-1}$ **b)** $\dfrac{3a-\frac{4x^2}{3a}}{1+\frac{2x}{3a}}$ **c)** $\dfrac{\frac{a}{5}+4x}{\frac{a}{4}+5x}$

5. **a)** $\dfrac{\frac{a^3-ab^2}{b}}{\frac{a^3-a^2b}{b^2}}$ **b)** $\dfrac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a}{b}}$ **c)** $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}$

6. **a)** $\dfrac{a-\frac{a(b^2-a)}{b^2}}{b-\frac{b^3-a}{b^2}}$ **b)** $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}$ **c)** $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}$

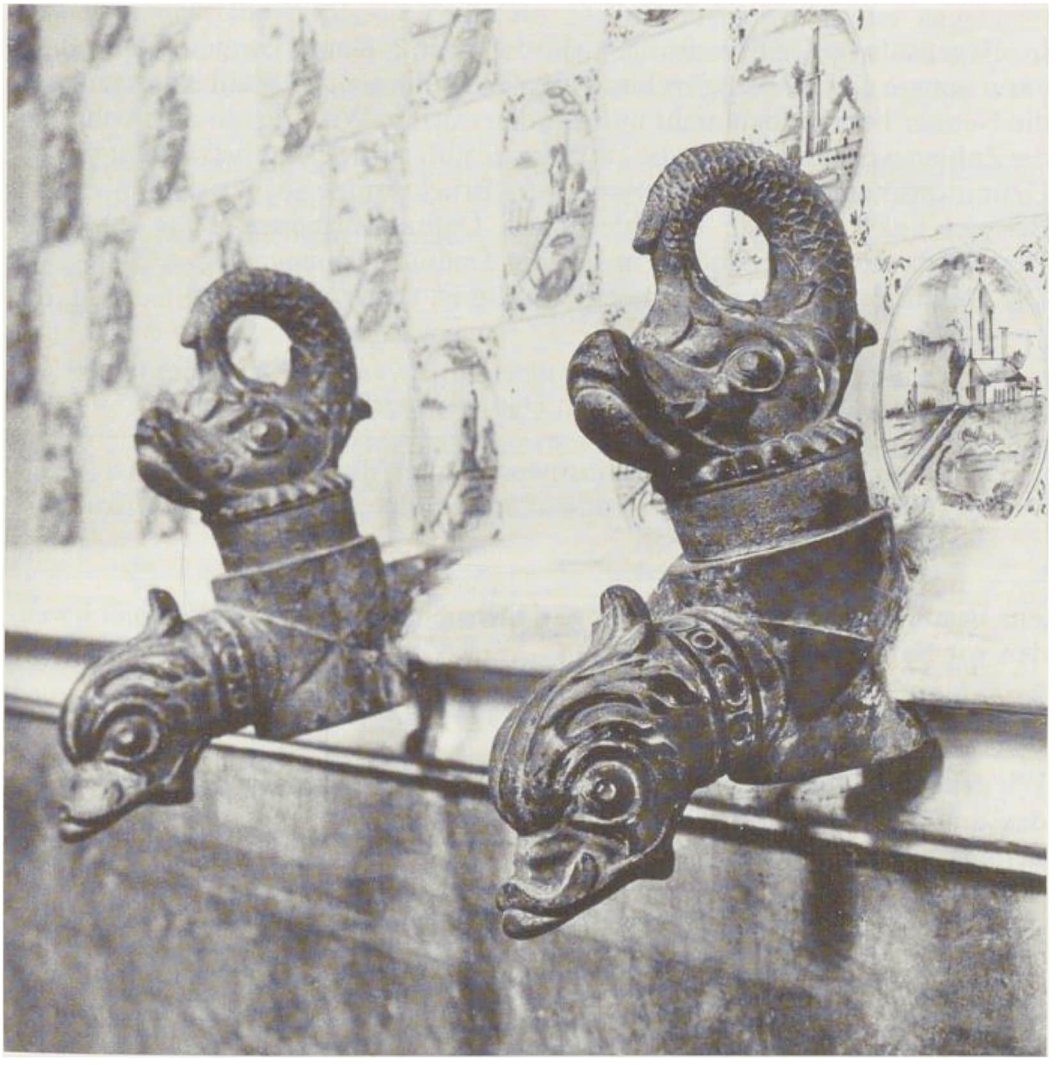
7. **a)** $\dfrac{\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}}$ **b)** $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}}$ **c)** $\dfrac{\dfrac{2a-3b}{2a+3b}+\dfrac{2a+3b}{2a-3b}}{\dfrac{2a+3b}{2a-3b}-\dfrac{2a-3b}{2a+3b}}$

8. **Kettenbrüche** in ihrer einfachsten Form verwendet Raffaele BOMBELLI (1526 Bologna–1572 ebd.) in seiner *L'Algebra* (1557/60 niedergeschrieben, 1572 erschienen). Pietro Antonio CATALDI (1552 Bologna–1626 ebd.) bildet im *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri* (1597 verfasst, 1613 erschienen) sogar unendliche Kettenbrüche.
Verwandle die folgenden Kettenbruchterme in die übliche Bruchform, d. h. in Bruchterme, bei denen weder im Zähler noch im Nenner Bruchstriche vorkommen.

a) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$ **b)** $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}$ **c)** $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}}$

d) $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}$ **e)** $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}}$ **f)** $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}}}$

3 Bruchgleichungen



Wasserhähne in Form vergoldeter Delphine im Badebecken der Badenburg im Schlosspark zu Nymphenburg (München), die 1718–1722 von dem kurfürstlichen Hofbaumeister Joseph EFFNER (1687–1745) für Kurfürst MAX EMANUEL erbaut wurde.

3 Bruchgleichungen

3.1 Kreuzweises Multiplizieren

Eine Gleichung, in der Bruchterme vorkommen, bei denen wenigstens ein Nenner eine Unbekannte enthält, nennen wir kurz **Bruchgleichung**. Die einfachste Form einer Bruchgleichung liegt vor, wenn auf der linken und auf der rechten Seite je ein Bruchterm steht. Hierzu

Beispiel 1: $\dfrac{2x-1}{x+3} = \dfrac{6x-13}{3x+11}$.

Im Gegensatz zu den Gleichungen, die du in der 7. Klasse kennen gelernt hast, kann man in einer Bruchgleichung für x nicht immer jede Zahl einsetzen, weil die Nenner bekanntlich nicht null werden dürfen. Wir müssen also von $\mathbb{Q}$ all die Zahlen wegnehmen, für die ein Nenner null wird. Dazu betrachten wir die Definitionsmengen der vorkommenden Bruchterme. So hat der im obigen Beispiel links stehende Bruchterm die Definitionsmenge $D_1 = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$. Der rechts stehende Bruchterm hat die Definitionsmenge $D_2 = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{11}{3}\}$. Die Definitionsmenge der Bruchgleichung ist daher die Menge

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{11}{3}; -3\}$.

Das ist aber genau die Menge $D_1 \cap D_2$. Wir merken uns

> **Definition 56.1:** Die Definitionsmenge einer Bruchgleichung ist die Schnittmenge der Definitionsmengen aller vorkommenden Bruchterme.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge der Bruchgleichung vom Beispiel 1 wenden wir Satz 14.1 an:

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{6x-13}{3x+11} \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)(3x+11) = (x+3)(6x-13)$$

Wir erkennen, dass jeweils der Zähler des einen Bruchterms mit dem Nenner des anderen Bruchterms multipliziert wird. Diese Äquivalenzumformung nennen wir kreuzweises Multiplizieren.

> **Kreuzweises Multiplizieren**
>
> $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$

Die so entstandene Gleichung $(2x-1)(3x+11) = (x+3)(6x-13)$ lösen wir nun nach den aus der 7. Klasse bekannten Methoden. Dabei müssen wir aber bei allen Äquivalenzumformungen, die wir ausführen, bedenken, dass sie nur in der Definitionsmenge D gültig sind, d. h., dass nur Zahlen aus der Defi-

nitionsmenge D eingesetzt werden dürfen. Die gesamte Rechnung sieht dann so aus:

$$\frac{2x-1}{x+3} = \frac{6x-13}{3x+11}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{-\tfrac{11}{3}; -3\}$$

$$\begin{aligned}
(2x-1)(3x+11) &= (x+3)(6x-13) \\
6x^2 + 22x - 3x - 11 &= 6x^2 - 13x + 18x - 39 && \| -6x^2 \\
19x - 11 &= 5x - 39 && \| -5x + 11 \\
14x &= -28 && \| :14 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu früher können wir aus der letzten Zeile noch nicht schließen, dass $\{-2\}$ die Lösungsmenge unserer Ausgangsgleichung ist. Es könnte nämlich sein, dass die Zahl -2 nicht zur Definitionsmenge D der gegebenen Bruchgleichung gehört. Ein Blick auf D zeigt uns aber, dass $-2 \in D$ und dass somit tatsächlich $L = \{-2\}$ gilt. Unsere Bruchgleichung ist eindeutig lösbar.

Wir erinnern uns, dass wir aber auch schon nicht eindeutig lösbare Gleichungen kennen gelernt haben. Auch unter den Bruchgleichungen gibt es solche, wie einige der folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 2: $\dfrac{2-4x}{6-2x} = -\dfrac{2x+1}{3-x}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$

Beachte: Du musst das Minuszeichen der rechten Seite beim kreuzweisen Multiplizieren entweder zum Zähler oder zum Nenner nehmen! Wir entscheiden uns für den Zähler und denken uns die rechte Seite als $\dfrac{-2x-1}{3-x}$ geschrieben.

$$\begin{aligned}
(2-4x)(3-x) &= (6-2x)(-2x-1) \\
6 - 2x - 12x + 4x^2 &= -12x - 6 + 4x^2 + 2x && \| -4x^2 \\
6 - 14x &= -10x - 6 && \| +10x - 6 \\
-4x &= -12 && \| :(-4) \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Da $3 \notin D$ ist, gilt $L = \{\ \}$. Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist also widersprüchlich.

Beispiel 3: $\dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{x-2}{x-3}; \quad D = \mathbb{Q} \setminus \{2; 3\}$

$$\begin{aligned}
(x-1)(x-3) &= (x-2)^2 \\
x^2 - 3x - x + 3 &= x^2 - 4x + 4 && \| -x^2 \\
-4x + 3 &= -4x + 4 && \| +4x - 3 \\
0 \cdot x &= 1
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist widersprüchlich, also ist es auch die Bruchgleichung; somit gilt $L = \{\ \}$.

Beispiel 4: $\frac{2}{x^2} = -\frac{3}{2x}; \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned} 4x &= -3x^2 \quad \| +3x^2 \\ 3x^2 + 4x &= 0 \\ x(3x+4) &= 0 \\ x = 0 \vee 3x + 4 &= 0 \\ x = 0 \vee x &= -\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Da $0 \notin D$ ist, gilt $L = \{-\frac{4}{3}\}$.

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist eindeutig.

Beispiel 5: $\frac{x}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}; \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-1; 1\}$

Auf das Anschreiben der Zwischenzeile mit den Produkten kann man verzichten und gleich kreuzweise ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} x^3 - x &= x^3 - x^2 + x^2 - x \quad \| -x^3 \\ -x &= -x \end{aligned}$$

Da diese Gleichung für alle Zahlen aus D erfüllt wird, ist

$L = \mathbb{Q}\setminus\{-1; 1\}$.

Die durch die Bruchgleichung gegebene Information ist also mehrdeutig.

Beispiel 6: $\frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}} = -3; \quad D = \mathbb{Q}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$

Hier scheint die kreuzweise Multiplikation nicht möglich zu sein. Wir denken uns aber -3 als $\frac{-3}{1}$ geschrieben und können dann kreuzweise multiplizieren:

$$\begin{aligned} x - \tfrac{1}{3} &= -3(x + \tfrac{1}{3}) \\ x - \tfrac{1}{3} &= -3x - 1 \quad \| +3x + \tfrac{1}{3} \\ 4x &= -\tfrac{2}{3} \quad \| :4 \\ x &= -\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

Da $-\frac{1}{6} \in D$ ist, gilt $L = \{-\frac{1}{6}\}$.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{x} = 1$ **b)** $\frac{1}{x} = 2$ **c)** $\frac{1}{x} = 0$ **d)** $\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$

2. a) $\frac{3}{2x} = 5$ **b)** $\frac{7}{3x} = -\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{12}{5x} = \frac{8}{7}$ **d)** $\frac{32}{15x} = \frac{16}{45}$

3. a) $\frac{1}{2x-1} = 2$ **b)** $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2}$ **c)** $\frac{3}{5x-1} = 0$

4. a) $3:(4x+5) = 6:7$ **b)** $-5:(9-2x) = -1$ **c)** $3{,}43:(x-1) - 3:8 = 0{,}5$

5. a) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2x-5}$ **b)** $\frac{13}{1+x} = \frac{1}{7x}$ **c)** $\frac{23}{2x} = \frac{17}{x}$

6. a) $\frac{38}{8x-11} = \frac{2}{x-11}$ **b)** $\frac{16}{8x-16} = \frac{8}{4x-3}$ **c)** $\frac{5}{9-6x} = \frac{3}{2x-3}$

7. a) $\frac{5x+6}{3x-8} = 1$ **b)** $\frac{16-23x}{11-5x} = 5$

c) $\frac{13x}{7+8x} = -1$ **d)** $\frac{2x-1}{-11x} = \frac{1}{2}$

8. a) $\frac{0{,}5x-3}{4{,}5-8x} = \frac{3}{4}$ **b)** $1{,}2 = \frac{15-0{,}1x}{x-20}$

c) $\frac{24x-1}{1-36x} = -\frac{3}{5}$ **d)** $\frac{7x+5}{3x-5} = 2\frac{4}{7}$

9. a) $(2x+6):x = 4$ **b)** $(18x+5):(3x+2) = 7$

c) $(5x-4):(4x+5) = 0$ **d)** $(4x-3):(0{,}75-x) = 0$

e) $(14x+5):(6x-1) = 7:3$ **f)** $\frac{3}{7}x:(5x-4) = \frac{3}{25}$

10. a) $\frac{2x+4}{3x-5} = \frac{5}{2}$ **b)** $\frac{5x+7}{8x+4} = \frac{7}{10}$

c) $\frac{9x+4}{6x+1} = \frac{8}{5}$ **d)** $\frac{13x+3}{7x+1} = \frac{15}{8}$

e) $\frac{32x-27}{5x+3} = \frac{3}{2}$ **f)** $\frac{17x+2}{23x-8} = \frac{18}{19}$

11. a) $\frac{16}{3x-4} = \frac{22}{2x+3}$ **b)** $\frac{19}{5x+4} = \frac{23}{8x-1}$

c) $\frac{13}{2x-3} = \frac{11}{x+3}$ **d)** $\frac{25}{4x+1} = \frac{17}{3x-1}$

e) $\frac{34}{5x+9} = \frac{21}{4x+1}$ **f)** $\frac{19}{5x-6} = \frac{37}{7x+2}$

12. a) $\frac{3}{x-1} = \frac{5}{2-2x}$ **b)** $\frac{x+7}{x-5} = \frac{x-1}{x+3}$

13. a) $\frac{3x^2-5x+23}{4x^2+3x-8} = \frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5x^2-7x+8}{3x^2+2x-20} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{8x^2-3x+4}{12x^2+5x-13} = \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{12x^2-7x+5}{18x^2-11x+9} = \frac{2}{3}$

14. a) $\frac{5x^2-5x+8}{4x^2+3x+12} = \frac{2}{3}$ **b)** $\frac{7x^2-3x-15}{9x^2+x-25} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{13x^2-5x+28}{3x^2+7x+35} = \frac{4}{5}$ **d)** $\frac{17x^2-x-28}{13x^2+12x-36} = \frac{7}{9}$

15. a) $\frac{3x-5}{7-4x} = \frac{6x-11}{15-8x}$ **b)** $\frac{7x+5}{15x-11} = \frac{7x-5}{15x-27}$

c) $\frac{12x+3}{5x-3} = \frac{24x-9}{10x-11}$ **d)** $\frac{8x-7}{6x+7} = \frac{12x-19}{9x+2}$

16. a) $\frac{9x-25}{5x-10} = \frac{7x-5}{4x-2}$ **b)** $\frac{6x-18}{7x+24} = \frac{11x-3}{13x+4}$

c) $\frac{9x-51}{5x-9} = \frac{7x+17}{4x+3}$ **d)** $\frac{5x-24}{3x+32} = \frac{7x+6}{9x-8}$

17. a) $\frac{x}{2x+3} = \frac{x}{2x-3}$ **b)** $\frac{6x}{7x-3} = \frac{6x-3}{7x}$

c) $\frac{x+1}{x+2} = \frac{x+3}{x+4}$ **d)** $\frac{x-5}{5x+3} = \frac{17-x}{1-5x}$

18. a) $\frac{5x+13}{2x+8} = \frac{15x+1}{6x}$ **b)** $\frac{3x-6}{x+5} = \frac{9x+1}{3x-2}$

c) $\frac{11x-8}{21-2x} = \frac{5-22x}{4x-2}$ **d)** $\frac{18x}{2x-27} = \frac{9x+7}{x-10}$

e) $\frac{0{,}8x+2}{2{,}5x+1} = \frac{4{,}8x+0{,}1}{15x-22}$ **f)** $\frac{\frac{x}{3}-1{,}1}{2x-3{,}75} = \frac{0{,}25-1{,}5x}{11-9x}$

19. a) $\frac{x}{3-x} = \frac{x}{x-3}$ **b)** $\frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x-2}$ **c)** $\frac{x}{x-2} = \frac{x}{4-2x}$

20. a) $\frac{13x}{5-8x} - \frac{5x}{2x-1} = 0$ **b)** $\frac{5x}{3x-1{,}2} + \frac{3x}{5x-2} = 0$

21. a) $\frac{2x-6}{x-3}=\frac{4x-4}{3x+1}$ **b)** $\frac{x+3}{3x-5}-\frac{8x-3}{3x+5}=0$

22. a) $\frac{6-2x}{x-3}=\frac{3x-6}{2-x}$ **b)** $\frac{3x+20}{2x+5}+\frac{15x-35}{5-x}=0$

23. a) $\frac{2x+1}{3}\cdot\frac{2}{x}=\frac{5}{2x}\cdot\frac{3+2x}{4}$ **b)** $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2x}{x^2-1}=1$

24. a) $\frac{4x-x^2}{x-1}\cdot\frac{2-2x}{3x}=6$ **b)** $\left(\frac{3x+1}{2x}+\frac{3x+1}{3x}\right)\cdot\frac{x-1}{6x+2}=\frac{5}{x}$

25. a) $\frac{3x^2-5x}{x+1}\cdot\frac{1-x^2}{x}=0$ **b)** $\frac{2x+1}{2x}\cdot\frac{x^2+x}{4x^2-1}=1$

26. a) $\frac{2x+4}{x^2+2x}\cdot\frac{5x}{8-2x^2}=-1$ **b)** $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{x-2}{x+2}=\frac{x}{2}\left(\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}\right)$

27. $\dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}=\dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

28. $\dfrac{\frac{x-1}{x^2-4}}{\frac{x}{x+2}-\frac{x}{x-2}}=\dfrac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}}$

29. $\dfrac{2}{\frac{3x+2\frac{1}{4}}{2x-\frac{1}{4}}+2}=\dfrac{3}{\frac{6x+4\frac{1}{2}}{2x-\frac{1}{4}}+2\frac{1}{2}}$

3.2 Multiplizieren mit dem Hauptnenner

Nun wenden wir uns schwierigeren Bruchgleichungen zu, bei denen das kreuzweise Multiplizieren nicht mehr so ohne weiteres möglich ist. Hier können wir die Bruchterme dadurch beseitigen, dass wir die Gleichung mit dem Hauptnenner multiplizieren. Damit erhalten wir eine nennerfreie Gleichung. Hierzu

Beispiel 1: $1+\frac{2x^2}{25-4x^2}=\frac{5x+17}{10x+25}-\frac{16+3x}{8x^2-50}$

Hier macht schon die Bestimmung der Definitionsmenge einige Schwierigkeiten. Am einfachsten geht es, wenn wir zuerst den Hauptnenner bestimmen:

$25-4x^2=(5-2x)(5+2x)$	$2\cdot 5(-1)=-10$
$10x+25=5(2x+5)$	$2(2x-5)=4x-10$
$8x^2-50=2(4x^2-25)=2(2x-5)(2x+5)$	5

$\text{HN}=2\cdot 5(2x-5)(2x+5)$

Da alle Nenner als Faktoren im Hauptnenner enthalten sind, kann man aus ihm die gefährlichen Zahlen ersehen, die wir aus $\mathbb{Q}$ entfernen müssen, um die Definitionsmenge zu erhalten:

$D=\mathbb{Q}\setminus\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\}$.

Nun multiplizieren wir die Gleichung mit dem Hauptnenner und erhalten:

$$\begin{aligned}
1\cdot 2\cdot 5(2x-5)(2x+5)+2x^2(-10)&=(5x+17)(4x-10)-(16+3x)\cdot 5\\
40x^2-250-20x^2&=20x^2-50x+68x-170-80-15x\\
20x^2-250&=20x^2+3x-250 \qquad \|-20x^2+250\\
0&=3x\\
0&=x
\end{aligned}$$

Da $0\in D$, gilt $L=\{0\}$.

Wenn sich jemand die Arbeit ersparen will, den Hauptnenner zu bestimmen, dann multipliziert er gleich mit dem Produkt der Nenner und erreicht damit auch eine nennerfreie Gleichung. Diese Gleichung ist aber meist schwieriger oder gar nicht zu lösen, weil sie höhere Potenzen von x enthält, die dadurch entstehen, dass man nicht mit dem kleinstmöglichen gemeinsamen Nenner multipliziert hat. Zur Warnung diene

Beispiel 2:

$$\frac{15}{x-2}-\frac{4}{x+2}=\frac{5}{x^2-4} \quad \|\cdot(x-2)(x+2)(x^2-4);\ D=\mathbb{Q}\setminus\{-2;2\}$$

$$\begin{aligned}
15(x+2)(x^2-4)-4(x-2)(x^2-4)&=5(x-2)(x+2)\\
15x^3+30x^2-60x-120-4x^3+8x^2+16x-32&=5x^2-20\\
11x^3+38x^2-44x-152&=5x^2-20 \quad \|-5x^2+20\\
11x^3+33x^2-44x-132&=0 \quad \|:11\\
x^3+3x^2-4x-12&=0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kannst du noch nicht lösen. Vergleiche dazu jedoch Aufgabe 63/**1**.

Aufgaben

1. Löse Beispiel 2 mithilfe des Hauptnenners.

2. a) $\frac{3}{x}+2=\frac{9}{x}-2$ **b)** $2\left(\frac{1}{x}-7\right)+\left(\frac{5}{x}+7\right)=0$

c) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+7=\frac{8}{x}-3$ **d)** $\frac{5}{x}-\frac{6}{x}+1=\frac{1{,}2}{x}$

3. a) $\frac{4}{x}-\frac{1}{2x}+2=\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{3}{5x}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3x}-\frac{4}{9}$

c) $\frac{1}{3}-\frac{13}{x}+\frac{1}{13x}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$

d) $\frac{3}{8}+\frac{2}{3x}-\frac{5}{6x}-\frac{13}{15}+\frac{8}{5x}+\frac{11}{12x}=\frac{31}{40}$

4. a) $\frac{6}{x-2}-\frac{3}{x-2}+3=0$ **b)** $\frac{18}{2x-3}+\frac{3}{3-2x}=5$

5. a) $\frac{2}{1-x}-\frac{3}{5(1-x)}+\frac{5}{4(x-1)}=\frac{3}{10}$

b) $\frac{1}{5x+2}+\frac{3}{6+15x}=\frac{7}{25x+10}$

c) $\frac{4{,}5}{1-14x}-\frac{7{,}5}{0{,}5-7x}=\frac{69}{28x-2}-0{,}5$

d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3x-7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{14-6x}=\frac{3}{7-3x}$

6. a) $\frac{8}{x+3}-\frac{1}{7-x}=\frac{4}{x+3}$ **b)** $\frac{15}{8-x}-\frac{7}{8+x}-\frac{6}{8-x}=0$

c) $\frac{7}{2x+3}+\frac{11}{3x+2}-\frac{33}{2(2+3x)}=0$ **d)** $\frac{68}{3(2x-5)}+\frac{51}{5-2x}+\frac{30}{x}=0$

7. a) $\frac{8}{6x-9}-\frac{35}{10x+4}=\frac{2}{2x-3}$ **b)** $\frac{21}{15x-4}-\frac{42}{8-30x}=\frac{138}{45x-6}$

c) $\frac{27}{2x+11}-\frac{1}{2x-11}-\frac{72}{11+2x}=\frac{2}{11-2x}$

8. a) $\frac{18}{5x+6}+\frac{1}{10x-3}-\frac{8}{x+1{,}2}+\frac{1}{x-0{,}3}=0$

b) $\frac{13}{3x-11} - \frac{13}{4x+5} - \frac{13}{12x+15} = 0$

c) $\frac{1}{x-7} + \frac{2}{14-2x} + \frac{3}{2x-5} = \frac{21}{14x-35}$

d) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{30}{x^2-1}$

9. a) $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x-3} + \frac{2}{4x^2-9} = 0$

b) $\frac{5}{5x+4} + \frac{2}{5x-4} + \frac{2}{16-25x^2} = 0$

c) $\frac{46}{9x^2-121} + \frac{1}{3x+11} = \frac{23}{11-3x}$

d) $\frac{3}{3x-6} + \frac{1}{2x-4} - \frac{15}{4(x-2)^2} = 0$

10. a) $\frac{38}{x^2+16x+64} - \frac{7}{4x+32} = \frac{3}{x+8}$

b) $\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+5} + \frac{2}{x^2+4x-5} = 0$

11. a) $\frac{1}{3x-2} + \frac{7}{2x+3} = \frac{35}{6x^2+5x-6}$ b) $\frac{3x-5}{x} - \frac{2x}{x+5} = 1$

c) $\frac{5x}{x+3} - \frac{8x}{x+2} + 3 = 0$

12. a) $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = 2$ b) $\frac{x-2}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} = 3$

c) $\frac{3x-7}{3x+1} - \frac{6x+4}{x+1} + 5 = 0$ d) $\frac{13x+26}{x+2} + \frac{6-2x}{x-3} = 11$

13. a) $\frac{7-6x}{4x+1} + \frac{9x+4}{3x+7} - 1{,}5 = 0$ b) $\frac{5x+7}{3+x} - \frac{12x-4}{9x+3} = \frac{11}{3}$

c) $\frac{x+5}{x} - \frac{4}{1-x} = \frac{x+7}{x-1}$ d) $\frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x-2} + \frac{3x+1}{3x-6} = 0$

14. a) $\frac{x}{x-3} - \frac{3x+2}{6-2x} = \frac{5x}{2x-1}$ b) $\frac{5x+1}{5x-3} - \frac{3x+16}{2x+18} + \frac{0{,}5x}{x-0{,}6} = 0$

15. $\frac{2x-11}{7x+35}+\frac{4-3x}{2x+3}+\frac{3x+4}{2x+10}=\frac{2}{7}$

•16. $\frac{x-2}{x+3}+\frac{4x-3}{2-x}-\frac{7-6x}{2x-4}+\frac{x+5}{0{,}2x+0{,}6}=5$

17. a) $\frac{0{,}5x}{2x-3}+\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x}{4x-6}$ **b)** $\frac{x+4}{x+2}+\frac{8}{x^2-4}=\frac{2x-2}{x-2}$

18. a) $\frac{2}{2x-3}+\frac{2x+4}{2x+3}-\frac{6}{9-4x^2}=0$

b) $\frac{11}{x^2-25}+\frac{3x-9}{5-x}+\frac{2x+28}{3x+15}=0$

•19. $\frac{x}{4x+10}+\frac{10x^2-30x+6}{4x^2-25}-\frac{3x-2}{x+2{,}5}+\frac{x^2+1}{x^2-6{,}25}=\frac{3}{4}$

20. $\frac{3x+2}{2x-1}+\frac{x+1}{6x+3}=2-\frac{4x^2-22x-11}{12x^2-3}$

21. a) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-1}{x+2}=\frac{18}{x^2-4}$ **b)** $\frac{x-2}{x+3}+\frac{25-x}{x-3}+\frac{55}{x^2-9}=0$

22. a) $\frac{9-x}{2x-3}+\frac{3x+4{,}5}{9+6x}+\frac{195}{9-4x^2}=0$

b) $\frac{5x-3}{x-5}-\frac{5x+26}{x-3}=\frac{25}{x^2-8x+15}$

23. a) $\frac{3x+1}{x-7}+\frac{3-3x}{x+7}=\frac{177x+7}{4x^2-196}$

b) $\frac{9x+4}{3x-12}-\frac{12x-3}{4x+16}-\frac{50x+25}{2x^2-32}=0$

24. a) $\frac{7-7x}{9x^2-30x+25}+\frac{8-3x}{9x-15}=\frac{4-5x}{15x-25}$

b) $\frac{4x+3}{5x-7}-\frac{3x+1}{5x+7}=\frac{5x^2+x-28}{25x^2-49}$

25. $\frac{2x-13}{x-1}+\frac{5x+3}{x-8}-\frac{7x^2+8}{x^2-9x+8}=0$

26. $\frac{6x^2-23x-3}{x^2-2x-15}-\frac{10x-15}{x+3}=\frac{30-4x}{x-5}$

27. $\dfrac{7x}{3x-8} - \dfrac{20+4x}{3x+8} + \dfrac{3x-35}{18x^2-128} = 1$

28. $\dfrac{\dfrac{x-1}{x-3} + \dfrac{x-3}{x-1} - 2}{\dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-1}} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{x-2}$

29. $\left(\dfrac{\dfrac{3x}{2} - \dfrac{2}{3x}}{\dfrac{3x-2}{3}} - \dfrac{3x-5}{2x-3}\right) \cdot 2x = 1 + \dfrac{6x}{2x-3}$

30. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - 2}{\dfrac{x}{3} + 1} + \dfrac{x-1}{x+3} = 1 - \dfrac{2x+5}{x^2+3x}$

31. $\dfrac{\dfrac{2-3x}{x}}{\dfrac{x}{x-1}} + \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+2}{2}} = \dfrac{4+5x}{x^2} - 3$

32. $\dfrac{x}{x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}} : \dfrac{1}{x^2+2} = x^2 + 1$

33. Aus der *Algebra* des AL-CHARIZMI: Die Differenz zweier Zahlen ist 2. Teilt man die kleinere durch die größere, so erhält man $\frac{1}{2}$. Wie groß sind die Zahlen?

34. Die Summe zweier Zahlen ist 425. Dividiert man die größere durch die kleinere, dann erhält man 2, und es bleibt der Rest 92. Wie heißen die Zahlen?

35. Der Zähler eines Bruchs ist um 12 größer als der Nenner. Zieht man die Ganzen heraus, dann ergibt sich die gemischte Zahl $3 + \frac{2}{x}$. Bestimme x.

36. Hans möchte wissen, wie alt Renate ist. Weil sie weiß, dass er schwach im Rechnen ist, sagt sie: »Wenn du den Kehrwert meines Alters in 15 Jahren vom Kehrwert meines heutigen Alters subtrahierst, dann erhältst du den Kehrwert meines Alters in 15 Jahren.« Wie alt ist Renate heute?

37. Ein Gasherd mit zwei Brennern wird aus einer Propangasflasche gespeist. Mit einer Füllung kann der eine Brenner 30 Std., der andere 20 Std. bei voller Flamme versorgt werden. Wie lange reicht der Flascheninhalt, wenn beide Brenner gleichzeitig in Betrieb sind?

38. Der holländische Arzt und Mathematiker Reinerus GEMMA FRISIUS (1508–1555) stellte in seinem 1544 in Wittenberg gedruckten *Arithmeticae practicae methodus facilis** folgende Aufgabe (Teil 3, Beispiel 6):
Potator quidam solus exhaurit cadum vini in 20 diebus, verum si uxor eum iuverit servata proportione bibendi 12 diebus vini tantundem absumunt, quanto ergo tempore sola uxor totum vas exhauriet?
Ein Trinker leert einen Krug Wein in 20 Tagen. Wenn seine Ehefrau ihm aber hilft, dann verbrauchen sie ebenso viel Wein in 12 Tagen, falls sie das Verhältnis, in dem sie trinken, beibehalten. In welcher Zeit würde also die Ehefrau allein das ganze Gefäß austrinken?

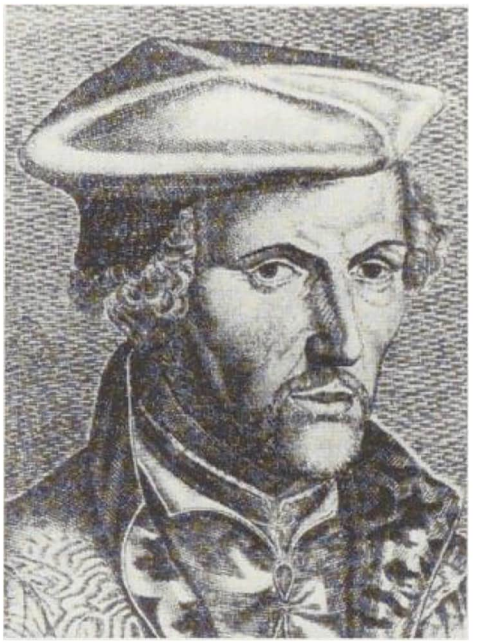


Abb. 67.1 Reinerus GEMMA FRISIUS, eigentlich Rainer VAN DEN STEEN (8.12.1508 Dockum/Ostfriesland – 25.5.1555 Löwen) 1541 Professor der Medizin an der Universität von Löwen

39. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflussröhren. Mittels der ersten Röhre allein kann der Behälter in 6 Std., mittels der zweiten in 4 Std. gefüllt werden. Wie lange dauert das Füllen, wenn beide Röhren gleichzeitig in Betrieb sind?

40. Der Kaltwasserhahn füllt eine Badewanne in 10 min. Dreht man zusätzlich den Warmwasserhahn auf, dann dauert es nur 6 min, bis die Wanne voll ist. Wie lange würde es dauern, wenn man die Wanne nur mit dem Warmwasserhahn füllen wollte?

•41. Ein Teich wird durch einen Zufluss in 10 Stunden und durch einen zweiten in 5 Stunden gefüllt. Der Abfluss leert ihn in 4 Stunden. Nun werden alle zwei Zuflüsse und der Abfluss gleichzeitig geöffnet. Wie lange dauert es jetzt, bis der Teich voll ist?

•42. Ein Dampfkraftwerk ist mit zwei Kesseln von verschiedener Leistungsfähigkeit ausgestattet. Der Inhalt des vollen Kohlenbunkers reicht aus, um den ersten Kessel allein 18 Tage bzw. beide Kessel zusammen $7\frac{1}{5}$ Tage zu beheizen. Wie lange könnte mit derselben Kohlenmenge der zweite Kessel allein betrieben werden?

* »Ein leichter Weg zur Beherrschung der Arithmetik«, geschrieben um 1536, veröffentlicht 1540 in Antwerpen. Das Büchlein war so beliebt, dass es im 16. Jh. mindestens 59 Auflagen erlebte.

43. Zum Ausheben einer Baugrube wird ein Bagger verwendet, der die gesamte Arbeit in 8 Tagen erledigen würde. Um schneller voranzukommen, wird nach 3 Tagen noch ein zweiter Bagger eingesetzt, der den gesamten Aushub in 12 Tagen allein bewältigen könnte. Wieviel Tage müssen beide Maschinen noch gemeinsam in Betrieb sein?

44. Ein Arbeiter würde eine Arbeit in 18 Tagen allein fertigstellen. Nach 8 Tagen erhält er eine Hilfskraft, deshalb ist die Arbeit schon nach insgesamt 14 Tagen fertig. Wie lange hätte die Hilfskraft allein für den Rest der Arbeit gebraucht, wenn der Arbeiter nach 8 Tagen krank geworden wäre?

45. Aus dem *Trattato di aritmetica* (1491) des Filippo CALANDRI (geb. um 1430):
Es sind 3 Männer in einem Gefängnis, die ausbrechen wollen; der erste sagt, dass er in 6 Stunden das Gefängnis aufbrechen werde, der zweite sagt, dass er es in 12 Stunden aufbrechen werde, und der dritte sagt, dass er es in 18 Stunden aufbrechen werde. Die Frage ist, wenn alle 3 zusammenarbeiten, in welcher Zeit sie dann das Gefängnis aufbrechen werden.

46. **a)** Welche Zahl muss zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{17}{25}$ addiert werden, damit er den Wert $\frac{3}{4}$ erhält?

b) Welche Zahl muss von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{11}{16}$ subtrahiert werden, damit er den Wert $\frac{1}{2}$ erhält?

c) Welche Zahl muss zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{12}{19}$ addiert werden, damit er das arithmetische Mittel zu $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{3}$ wird?

•**d)** Um welche Zahl muss man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ **1)** vermehren, **2)** vermindern, um $\frac{c}{d}$ zu erhalten?

•**e)** Welche Zahl muss von dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ subtrahiert und zu dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{c}{d}$ addiert werden, damit zwei gleich große Brüche entstehen?

•**47.** **a)** Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{7}$ um 16 und vermindert seinen Nenner um 5, so erhält man seinen reziproken Wert. Wie heißt der Bruch?

b) Vermehrt man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{2}{3}$ um 4 und seinen Nenner um 3, so erhält er den Wert $\frac{3}{4}$. Wie heißt der Bruch?

c) Vermindert man den Zähler eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{5}$ um 8 und vermehrt seinen Nenner um 2, so erhält er den Wert $\frac{1}{2}$. Wie heißt er?

d) Ein Bruch mit dem Wert $\frac{5}{6}$ wird doppelt so groß, wenn man seinen Zähler um 5 vermehrt und seinen Nenner um 6 vermindert. Wie heißt der Bruch?

•**48.** **a)** Vermehrt man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Wert $\frac{4}{5}$ um 9 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{37}{30}$ ab, so erhält man $\frac{2}{5}$. Wie heißt der Bruch?

b) Vermindert man den Zähler und Nenner eines Bruches mit dem Wert $\frac{5}{6}$ um 5 und zieht den entstandenen Bruch von $\frac{22}{15}$ ab, so erhält man $\frac{2}{3}$. Wie heißt der Bruch?

c) Ein Bruch hat den Wert $\frac{5}{8}$. Vermehrt man seinen Zähler um 3 und vermindert seinen Nenner um 4, so erhält man dasselbe, wie wenn man seinen Zähler um 10 und seinen Nenner um 5 vermehrt. Wie heißt der Bruch?

49. a) Die Zahl 240 wird so in zwei Teile zerlegt, dass der Quotient aus
1) den beiden Teilen gleich $\frac{3}{7}$ ist,
2) dem größeren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{13}{6}$ ist,
3) dem kleineren Teil und der Differenz der Teile gleich $\frac{5}{6}$ ist.
Wie groß sind die Teile?

b) Die Zahl 68 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{1}{3}$ des ersten um 12 größer ist als $\frac{1}{5}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

c) Die Zahl 100 wird so in zwei Teile zerlegt, dass $\frac{2}{5}$ des ersten um 6 kleiner ist als $\frac{3}{4}$ des anderen. Wie groß sind die Teile?

d) Die Zahl 123 wird so in drei Teile zerlegt, dass der erste um 5 größer ist als der zweite und $\frac{1}{3}$ des ersten mit $\frac{1}{4}$ des zweiten zusammen 6 mehr betragen als die Hälfte des dritten. Wie groß ist der erste Teil?

3.3 Proportionen

Den Bruch $\frac{a}{b}$ bezeichnet man auch als das **Verhältnis von *a* zu *b***. Eine Gleichung, die die Gleichheit zweier Verhältnisse zum Ausdruck bringt, nennt man **Verhältnisgleichung** oder **Proportion***. In Verhältnisgleichungen schreibt man die beiden Quotienten statt mit Bruchstrich meist mit Doppelpunkt, also

$$a : b = c : d \quad \text{an Stelle von} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Die Gleichung $a : b = c : d$ liest man

»a verhält sich zu b wie c zu d«.

a und d heißen **Außenglieder**, b und c **Innenglieder** der Proportion:

Innenglieder

$$a : b = c : d$$

Außenglieder

* proportio (lat.) = Verhältnis, Ebenmaß

Selbstverständlich müssen b und d von null verschieden sein. – Die Glieder einer Proportion können natürlich auch Terme mit Variablen sein.

Mit den oben eingeführten Namen gewinnt man aus Satz 14.1 eine Regel zur Umformung von Proportionen, die wir uns merken wollen als

Satz 70.1: In einer Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder,* d.h.,

$$a : b = c : d \quad \Rightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Beispiel:
$$\begin{aligned} 3x^2 : (x-1) &= (x+1) : (2x^3) \\ 3x^2 \cdot 2x^3 &= (x-1)(x+1) \\ 6x^5 &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

**Zur Geschichte der Proportionen

Verhältnisse kommen bereits bei den Ägyptern im *Papyrus Rhind* und auch bei den Babyloniern vor, eine Theorie der Verhältnisse entwickelten jedoch erst die Griechen. Angeblich soll PYTHAGORAS (um 570–497/6 v. Chr.) die Lehre von den Verhältnissen erfunden haben. Er und seine Schüler, die Pythagoreer, waren der Ansicht, dass sich alle Erscheinungen der Natur auf Verhältnisse von natürlichen Zahlen zurückführen ließen. So erklingen zwei Saiten, deren Längen sich wie 2 : 1 verhalten, im Grundton und der Oktave. Bis in die Neuzeit hinein dienten und dienen Verhältnisgleichungen dazu, funktionale Zusammenhänge zweier Größen zu beschreiben. So lernt man noch heute in der Fahrschule, dass bei Verdoppelung der Geschwindigkeit der Bremsweg viermal so lang, bei Verdreifachung aber neunmal so lang wird, dass sich also allgemein die Bremswege wie die Quadrate der zugehörigen Geschwindigkeiten verhalten, kurz, dass $s_1 : s_2 = v_1^2 : v_2^2$ gilt. Den genauen Zusammenhang zwischen Bremsweg und Geschwindigkeit drückt man heute aber durch eine Funktionsgleichung aus, die du in der 11. Klasse lernen wirst. Erst mit der Erfindung der Buchstabenrechnung durch François VIÈTE (1540–1603) wurde es möglich, solche Funktionsgleichungen aufzustellen, und seitdem haben Verhältnisse immer mehr an Bedeutung verloren.
Die Lehre von den Proportionen brachte EUDOXOS aus Knidos (um 400–um 347 v. Chr.) zu einem mustergültigen Abschluss. EUKLID (um 340–um 270 v. Chr.) benützte dessen Darstellung als Vorlage für Buch V seiner *Elemente*.
Das Verhältnis zweier Größen nannten bereits die Pythagoreer *λόγος* (lógos), und wenn zwei Paare dem Verhältnisse nach (= *ἀνὰ λόγον* [aná lógon]) gleich waren, so nannten sie dieses Gleichsein der Verhältnisse *ἀναλογία* (analogía). Die klassische lateinische Übersetzung für *λόγος* (Verhältnis) ist *ratio*; die *ἀναλογία* (Verhältnisgleichheit) übersetzt Marcus Tullius CICERO (106–43 v. Chr.) mit dem seltenen lateinischen Wort *proportio*. BOETHIUS (um 480–524(?)) hingegen verwendet *proportio* für das Verhältnis und bezeichnet die Verhältnisgleichung mit *proportionalitas*. Dieses Übersetzungsdurcheinander spiegelt sich in der lateinischen mittelalterlichen Literatur wider und geht auch ins Deutsche ein, bis sich schließlich in der 2. Hälfte des 18. Jh.s die Aus-

* Diesen Sachverhalt formuliert EUKLID als Satz 19 in Buch VII seiner *Elemente* (= *στοιχεῖα* [stoicheia]).

1644
Abb. 71.1 William OUGHTRED
(5.3.1574 Eton – 30.6.1660 Albury)

1566
Abb. 71.2 Robert RECORD(E)
(1510(?) Tenby – 1558 London)

drücke **Verhältnis** und für Verhältnisgleichung **Proportion** durchsetzen; Verhältnis tritt 1667 bei Johann Christoph STURM (1635–1703) in seiner Übersetzung von ARCHIMEDES' *Sandrechnung* erstmals auf, Proportion 1694 bei Anton Ernst Burckhart von PIRCKENSTEIN. **Äußeres** und **inneres Glied** verbreiten sich im 18. Jh. vor allem durch Johann Andreas VON SEGNERS (1704–1777) *Deutliche und vollständige Vorlesungen über Rechenkunst und Geometrie* (1747) und durch Abraham Gotthelf KÄSTNERS (1719 bis 1800) *Anfangsgründe* (1758).

Die erste brauchbare Schreibweise für Proportionen, nämlich A.B::C.D, schuf 1631 der englische Landpfarrer William OUGHTRED (1574–1660), der in seiner *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio: Quae tum logisticae, tum analyticae, atque adeo totius mathematicae, quasi clavis est* an die 150 mathematische Symbole erfand, u.a. auch das schräg liegende Multiplikationskreuz $\times$. Seine Frau soll eine Geizhälsin gewesen sein und ihm nicht erlaubt haben, nach dem Abendessen Kerzen anzuzünden, sodass so manch guter Einfall verloren gegangen und so manches Problem ungelöst geblieben sei.

1651 schreibt der englische Mathematiker und Astronom Vincent WING (1619–1668) in seinem *Harmonicon coeleste* A:B::C:D, wobei der Doppelpunkt keineswegs als Divisionszeichen aufgefasst werden darf; denn ein Verhältnis und eine Division waren zwei ganz verschiedene Operationen! WINGS Schreibweise breitet sich rasch über Europa aus und hat sich in Großbritannien und den USA bis ins 20. Jh. gehalten. Das 1557 von dem Engländer Robert RECORD(E) (1510(?)–1558) erfundene Gleichheitszeichen verwendet 1639 als erster auf dem Kontinent der Holländer Jan Jansse STAMPIOEN DE JONGHE (1610– nach 1685); für die Proportion schreibt er A„B = C„D. 1678/79 benützt Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) den Doppelpunkt sowohl als Divisionszeichen wie auch als Zeichen für das Verhältnis. 1684 verwendet er den Doppelpunkt als Divisionszeichen in einer Veröffentlichung, und 1693 lehnt er Sonderzeichen für die Proportion ab. Es genüge, so meint er, die Schreibweise $a : b = c : d$, die sich schnell im kontinentalen Europa durchsetzt.

Aufgaben

1. Oft gelingt es, ein Verhältnis großer Zahlen, das sehr unanschaulich ist, in ein Verhältnis kleinerer Zahlen umzuformen, nämlich dann, wenn man den Bruch kürzen kann. Dazu ein

   Beispiel: $1029:1911 = \frac{1029}{1911} = \frac{7}{13} = 7:13.$

   Gekürzt wurde mit 147.

   Drücke ebenso folgende Verhältnisse durch Verhältnisse teilerfremder ganzer Zahlen aus:

   a) $102:153$ **b)** $0{,}05:0{,}7$ **c)** $2{,}25:0{,}18$ **d)** $1\frac{2}{3}:3{,}5$
   e) $\frac{2}{3}:\frac{5}{12}$ **f)** $\frac{17}{64}:\frac{68}{256}$ **g)** $(-3):15{,}9$ **h)** $\frac{-7}{11}:(-2\frac{6}{11})$

2. Welchen Wert muss x in den folgenden Proportionen haben?

   a) $x:8 = 3:2$ **b)** $15:(2x) = 2{,}4:5$
   c) $25:45 = (4x+3):27$ **d)** $7x^2:99 = 0:999$
   e) $(5-7x):(2x) = (-19):4$ **f)** $5:(x+1) = 1:(1-x)$
   g) $0:(x-1) = (x+1):(x+2)$ **h)** $(2x+3):(7-x) = (3-2x):(x+7)$

3. Berechne diejenigen Zahlen, für die gilt:

   a) $x:y = 2:3;\quad x+y = 45$
   b) $x:y = 3:5;\quad x+y = -16$
   c) $x:y = (-1):3;\quad x+y = 14$
   d) $x:y = 1:(-3);\quad x+y = -14$
   e) $x:y = 11:5;\quad x-y = 6$
   f) $x:y = 10:7;\quad x-y = 6$

4. Berechne zu a, b, c die so genannte **4. Proportionale**; das heißt, löse die Gleichung $a:b = c:x$.

   a) $a = 8;\ b = 3;\ c = 24$ **b)** $a = -1;\ b = 5;\ c = 3$
   c) $a = \frac{2}{3};\ b = 1\frac{3}{5};\ c = \frac{1}{2}$ **d)** $a = 0{,}27;\ b = 2{,}43;\ c = 16{,}2$

5. **Umformen von Proportionen.** Beweise für $a, b, c, d \neq 0$ die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

   a) In einer Proportion dürfen die Innenglieder miteinander vertauscht werden, d.h.,

   $\boldsymbol{a:b = c:d \Leftrightarrow a:c = b:d}$; z.B.: $7:5 = 35:25 \Leftrightarrow 7:35 = 5:25$.

   (EUKLID: *Elemente*, V, Satz 16 und VII, Satz 13)

   b) In einer Proportion dürfen die Außenglieder miteinander vertauscht werden, d.h.,

   $\boldsymbol{a:b = c:d \Leftrightarrow d:b = c:a}$; z.B.: $7:5 = 35:25 \Leftrightarrow 25:5 = 35:7$.

   c) In einer Proportion dürfen die Innenglieder mit den Außengliedern vertauscht werden, d.h.,

   $\boldsymbol{a:b = c:d \Leftrightarrow b:a = d:c}$; z.B.: $7:5 = 35:25 \Leftrightarrow 5:7 = 25:35$.

•6. Korrespondenz-Umformungen*

a) Beweise die Richtigkeit folgender Behauptungen, vorausgesetzt, alle Nenner sind von null verschieden:

1) Korrespondierende Addition:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow (a + b) : b = (c + d) : d$$

(EUKLID: *Elemente*, V, Satz 18)

2) Korrespondierende Subtraktion:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow (a - b) : b = (c - d) : d$$

(EUKLID: *Elemente*, V, Satz 17)

3) $a : b = c : d \Leftrightarrow (a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$

b) Leichter lassen sich diese Umformungen merken, wenn man sie in Bruchform anschreibt. Mach's!

•7. Mit den Umformungen aus Aufgabe **5** und **6** lassen sich Proportionen vereinfachen, wenn man es geschickt anfängt.

Beispiel:

$(a - x) : (b - x) = (a + x) : x$	
$(a - b) : (b - x) = a : x$	korrespondierende Subtraktion
$(a - b) : a = (b - x) : x$	Vertauschung der Innenglieder
$(2a - b) : a = b : x$	korrespondierende Addition
$x : b = a : (2a - b)$	Vertauschung der Innen- und der Außenglieder und der beiden Seiten

Vereinfache auf entsprechende Art und Weise:

a) $(19 + x) : x = 4 : 3$ **b)** $(15 - a) : a = 2 : 3$

c) $(a - b) : b = (c - d) : d$ **d)** $(a + b) : b = (d + c) : d$

e) $(24 + 3a) : a = 63 : 5$ **f)** $(8 - 3a) : 2 = 3a : 9$

g) $(2a + 3b + x) : (2a + 3b - x) = 4a : (6b)$

8. In einem rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die beiden spitzen Winkel wie 7 : 11. Wie groß sind sie?

9. a) Zwei Zahlen verhalten sich wie 6 zu 7. Vermindert man die erste um 4 und vermehrt die andere um 2, so verhält sich die Differenz zu der Summe wie 2 zu 3. Wie heißen die Zahlen?

b) Vermehrt man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{5}{16}$ um Zahlen, die sich wie 3 zu 4 verhalten, so erhält man $\frac{5}{9}$. Wie heißen diese Zahlen?

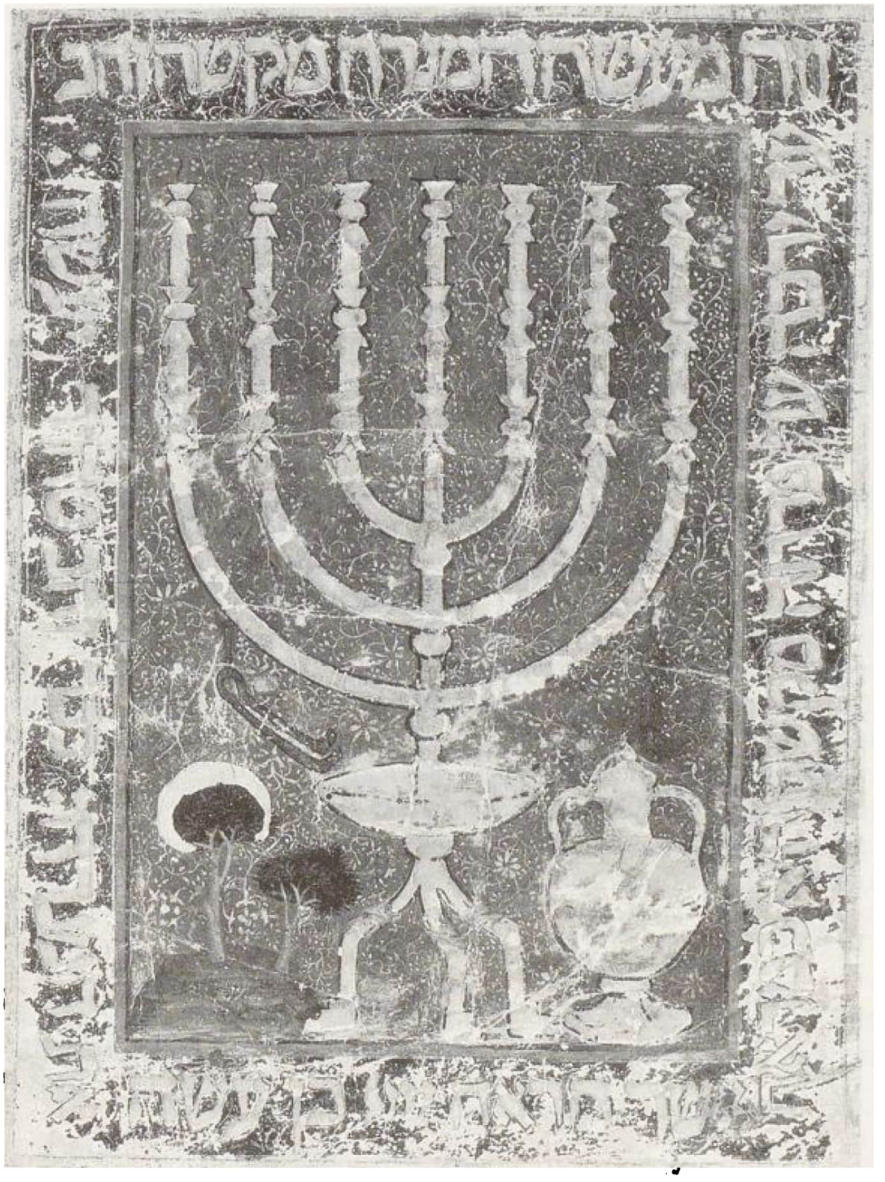
c) Vermindert man den Zähler und Nenner des Bruches $\frac{33}{40}$ um Zahlen, die sich wie 3 zu 4 verhalten, so erhält man $\frac{7}{8}$. Wie heißen diese Zahlen?

d) Welche Zahl muss man vom Zähler und Nenner des Bruches $\frac{119}{142}$ subtrahieren, damit der entstandene Bruch sich zu $\frac{5}{8}$ wie $3\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$ verhält?

* correspondēre (lat.) = miteinander in Einklang stehen

10. Im Kochbuch *Das gelingt* aus dem Ehrenwirth Verlag steht ein Rezept für »König Ludwigs Lieblingskuchen«: Für den Teig benötigt man 200 g Butter, 250 g Mehl, 80 g Zucker und 4 Esslöffel (EL) Weißwein. Der Belag entsteht aus 600 g Äpfeln, 1 EL Zucker, etwas Zitronenschale und $1\frac{1}{2}$ EL Wasser. Wie viel von den Zutaten muss man nehmen, wenn man nur 125 g Butter hat?

4 Gleichungen mit Parametern



Menora – der siebenarmige Leuchter

Die Menora ähnelt einem Baum. Ihre genaue Beschreibung im Alten Testament (2. Mose 25, 31–40) bedient sich vieler pflanzlicher Symbole. Nach der Eroberung Jerusalems 70 n. Chr. durch TITUS wurde sie als eines der bedeutenden Kultsymbole des Tempels nach Rom gebracht, wie das Relief auf dem Titusbogen zeigt. Die dort dargestellte Menora ist heute Bestandteil des Wappens des Staates Israel.
Titelseite einer hebräischen Bibel aus Nordspanien, Ende 13. Jh. Am Leuchter hängen Zange und Lichtputzerschere, links erkennt man den Ölberg, rechts steht der traditionelle Weinkrug. Der Leuchter brennt mit roten Flämmchen.

4 Gleichungen mit Parametern

4.1 Lineare Gleichungen mit Parametern

Wenn man sehr oft Probleme von derselben Art lösen muss, kann man sich die jedes Mal auftretende Rechenarbeit ersparen, wenn man eine Formel entwickelt, aus der man die Lösung schnell entnehmen kann.
Hätte man nacheinander z. B. die Gleichungen $3x + 5 = 0$, $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = 7$ und $0{,}91x - 3 = 1\frac{5}{9}$ zu lösen, so weiß man, dass der Rechenweg jedes Mal derselbe sein wird; denn diese 3 Gleichungen haben dieselbe Bauart. Man sagt auch, sie sind vom selben Typ oder haben dieselbe Form. Man beschreibt nun in der Mathematik Gleichungen derselben Form, indem man an Stelle der speziellen Zahlen Buchstaben setzt. Um aber einen klaren Unterschied zur Unbekannten x zu machen, verwendet man zur Kennzeichnung der Form meist die ersten Buchstaben des Alphabets, wie es 1637 René DESCARTES (1596–1650) in *La Géométrie* eingeführt hat. Unsere oben angegebenen drei Gleichungen haben also die Form $ax + b = c$. Im Gegensatz zur Unbekannten x, die in diesem Zusammenhang auch **Gleichungsvariable** heißt, nennt man die Variablen a, b und c, da sie die Form der Gleichung bestimmen, **Formvariable** oder auch **Parameter***.
Um dir zu zeigen, wie man Gleichungen mit Parametern behandelt, betrachten wir in diesem Abschnitt den einfachsten Typ, der dadurch gekennzeichnet ist, dass x nur in der ersten Potenz und nicht im Nenner vorkommt. Eine solche Gleichung nennt man **lineare Gleichung****.
Wir entwickeln nun die Lösungsformel für die lineare Gleichung $ax + b = c$. Dazu gehen wir genauso vor, wie wir es bei Gleichungen mit Zahlen getan haben, stehen die Formvariablen doch für Zahlen.

$$\begin{aligned} ax + b &= c \qquad \| -b \\ ax &= c - b \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Nun müssen wir durch a teilen. Das geht aber nur, wenn a für eine von null verschiedene Zahl steht. Wir schreiben dafür kurz $a \neq 0$. Dann erhalten wir $x = \dfrac{c-b}{a}$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $\left\{\dfrac{c-b}{a}\right\}$.

Was ist aber los, wenn $a = 0$ ist? In diesem Fall sieht unsere Gleichung **(1)** folgendermaßen aus:

$$0 \cdot x = c - b \qquad \textbf{(2)}$$

Jetzt kommt es offensichtlich darauf an, was $c - b$ ist.

* der Parameter, betont auf dem zweiten *a*, entstanden aus *παρά* (pará) = *neben* und *τὸ μέτρον* (to métron) = *Maß*, eine durch ein Maß bestimmte *Größe*, sodass man auf Deutsch *Nebengröße* sagen könnte, 1631 von Claude MYDORGE (1585–1647) eingeführt bei der Lehre von den Kegelschnitten, 1692 von Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) im heutigen Sinn verwendet.

** Zum ersten Mal 1694 belegt als *égalité linéaire* bei Jean PRESTET (1652–1690) in seinen *Nouveaux Élémens des Mathématiques ou Principes généraux de Toutes les Sciences, qui ont les grandeurs pour objet.*

Gilt nämlich $c - b = 0$, d.h., $b = c$, dann lautet die Gleichung **(2)** $0 \cdot x = 0$. Diese Gleichung wird von jeder Zahl aus $\mathbb{Q}$ gelöst, d.h., sie ist allgemein gültig; ihre Lösungsmenge ist also $\mathbb{Q}$.
Gilt aber $c - b \neq 0$, d.h., $b \neq c$, dann steht auf der rechten Seite der Gleichung **(2)** eine von 0 verschiedene Zahl; die linke Seite liefert aber für jede Einsetzung den Wert 0. Die Gleichung ist also widersprüchlich; es gibt keine Zahl, die sie löst, somit ist $L = \{\ \}$.
Wir erkennen: Die Schwierigkeit beim Lösen von Gleichungen mit Parametern besteht darin, dass verschiedene Fälle auftreten können, je nachdem, welche Zahlen man an Stelle der Parameter einsetzen will. Man muss also während des Rechenvorgangs Unterscheidungen vornehmen, die verschiedene Fälle erzeugen. Man spricht daher von **Fallunterscheidungen**.

> **Merke:** Eine Fallunterscheidung ist nötig, wenn man durch einen Term dividiert, der auch null werden kann.

Bei der praktischen Durchführung der Fallunterscheidung geht man am besten so vor, dass man zunächst die Fälle behandelt, bei denen alle Divisoren von null verschieden sind. In einem zweiten Durchgang untersucht man dann die Sonderfälle, die vorher ausgeschlossen werden mussten. Dazu muss man bis zu der Zeile zurückgehen, bei der die Fallunterscheidung nötig wurde. Man erhält dann meist Gleichungen vom Typ $0 \cdot x = 0$ bzw. $0 \cdot x = A$, wobei $A \neq 0$ ist. Die erste Gleichung ist allgemein gültig mit $L = \mathbb{Q}$, die zweite ist widersprüchlich mit $L = \{\ \}$.
In unserem Ausgangsbeispiel $ax + b = c$ läuft die Fallunterscheidung so ab:

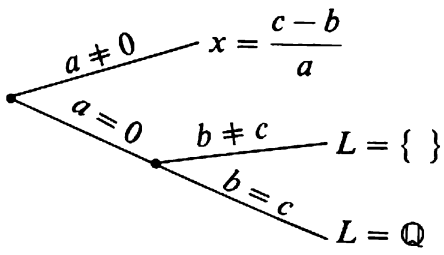
$$ax + b = c \qquad \| -b$$
$$ax = c - b \qquad \| : a, \quad \text{falls} \quad a \neq 0$$

$\boxed{a \neq 0}$ $\quad x = \dfrac{c-b}{a}$

$\boxed{a = 0}$ $\quad 0 \cdot x = c - b$

Für $\boxed{c - b \neq 0}$ ist $L = \{\ \}$.

Für $\boxed{c - b = 0}$ ist $L = \mathbb{Q}$.

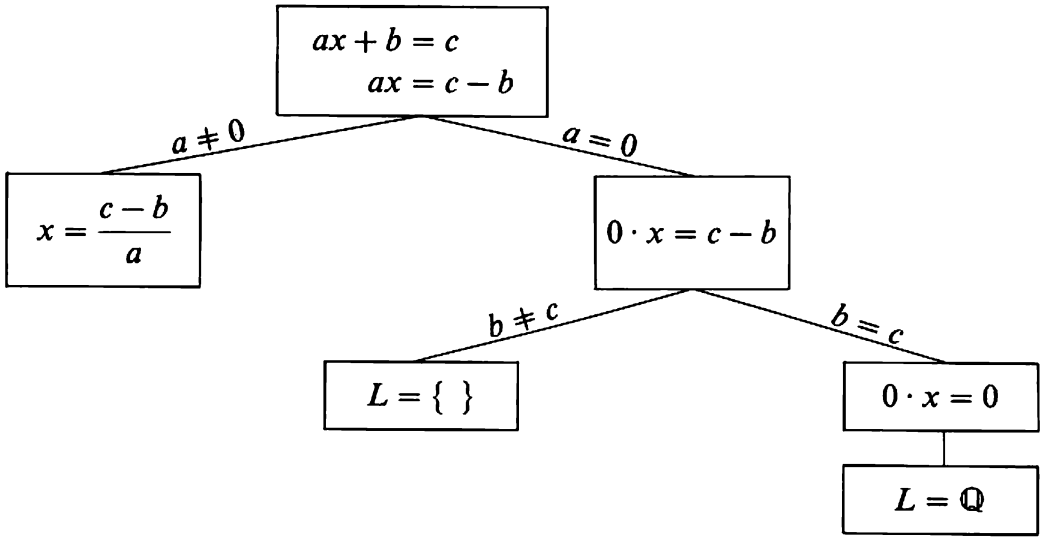


Eine Übersicht über die aufgetretenen Lösungen bietet der **Lösungsbaum**, auf dessen Äste man die Bedingungen schreibt, die die jeweiligen Fälle kennzeichnen. Der Lösungsbaum stellt also die eingangs gesuchte Formel dar. Unser Lösungsbaum steht rechts neben der Rechnung.

Wollen wir die Gleichung $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = 7$ lösen, dann können wir wegen $-\frac{1}{2} \neq 0$ aus dem oberen Ast sofort die Lösung angeben zu

$$x = \frac{7 - \frac{3}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{56 - 3}{-4} = -\frac{53}{4}.$$

Für $0 \cdot x + 7 = -2$ müssen wir im Baum zuerst nach unten und dann nach oben gehen und erhalten $L = \{\ \}$.
Für $0 \cdot x + \frac{3}{8} = 0{,}375$ müssen wir jedes Mal nach unten gehen und erhalten $L = \mathbb{Q}$.
Rechnung und Lösung lassen sich auch zusammenfassen zu einem **Rechenbaum**. Hier arbeitet man zweckmäßig von oben nach unten. Wie beim Lösungsbaum schreibt man auf die Äste die Bedingungen für die verschiedenen Fälle und setzt die jeweils entstandenen Gleichungen in einen Rahmen, von dem aus man weiterrechnet. Der Rechenbaum für unser Beispiel sieht so aus:



Kommen bei einer Gleichung Parameter im Nenner vor, dann muss man von Anfang an gewisse Parameterwerte ausschließen. Ist nämlich ein Nenner null, dann ist die Gleichung nicht definiert und die Lösungsmenge daher leer. Hierzu ein

Beispiel: $\dfrac{ax-b}{a-b} = \dfrac{ax}{a+b}$

Diese Gleichung ist nur definiert für $a \neq b$ und $a \neq -b$. Multiplizieren wir mit dem Hauptnenner, so gilt

$$(ax-b)(a+b) = ax(a-b)$$
$$a^2x + abx - ab - b^2 = a^2x - abx$$
$$2abx = ab + b^2 \qquad \|:(2ab), \quad \text{falls} \quad ab \neq 0$$

$\boxed{ab \neq 0}$ $x = \dfrac{b(a+b)}{2ab}$

$x = \dfrac{a+b}{2a}$

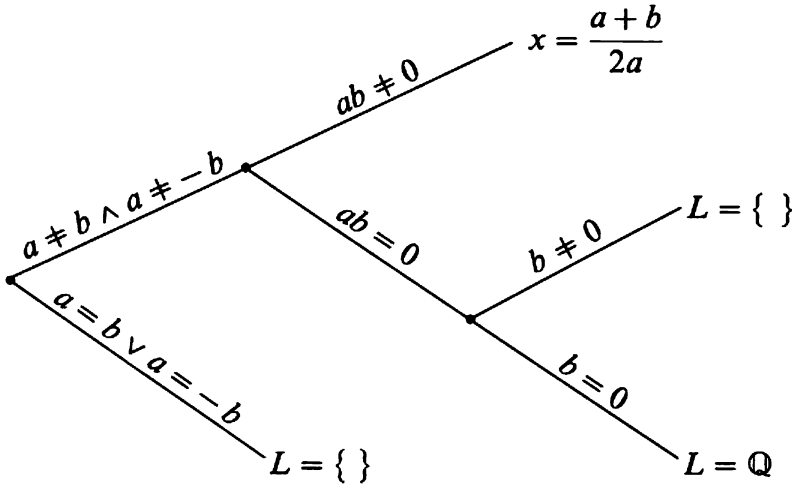
$\boxed{ab = 0}$ $0 \cdot x = b(a+b)$

Für $\boxed{b \neq 0}$ ist $L = \{\ \}$.

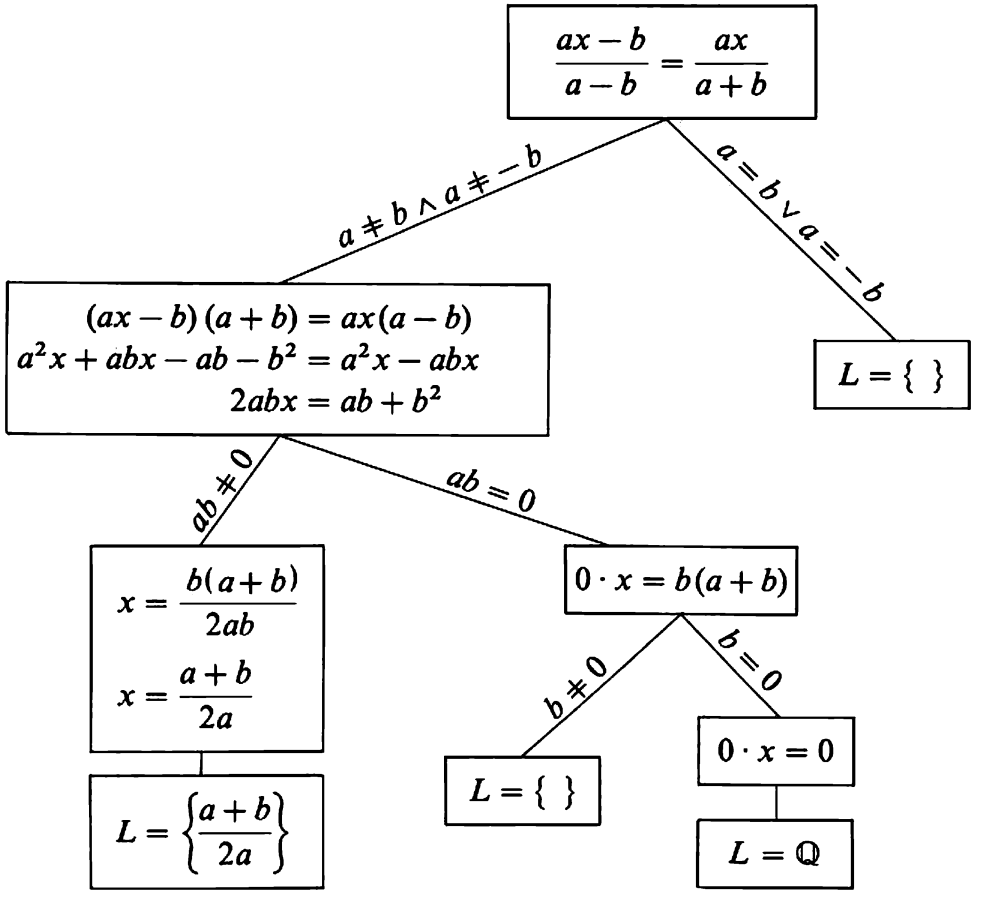
Für $\boxed{b = 0}$ ist $L = \mathbb{Q}$.

Beachte: Wegen der oben gemachten Voraussetzung $a \neq -b$ ist $a + b \neq 0$.

Der Lösungsbaum sieht so aus:



Der Rechenbaum hat die folgende Gestalt:



Wenn du im Heft solche Rechenbäume entwickeln musst, ist es oft zweckmäßig, das Heft quer zu legen.

Aufgaben

1. a) $x + a^2 = 1$ **b)** $x - a - 3b + 2c = 0$
c) $a^2 = x - a(1 + a)$ **d)** $4m^2 - x = 1$
e) $-4p = 2p - q - x$ **f)** $7a - 3b + c - x = 2b - 3c$

2. a) $a^2x = 3a^2 - 2ab$ **b)** $(b + 1)x = 2b^2 - 2$
c) $3u^2v - uvx = 0$ **d)** $\frac{a}{b} \cdot x = c$

3. a) $\frac{x}{1 + a^2} = 1 - a^2$ **b)** $3x : (2m + n) = 6m - 3n$

4. a) $\frac{1 + ax}{b} = a + \frac{1}{b}$ **b)** $\frac{2px - q^2}{p + q} + q = p$ **c)** $\frac{x}{a} + \frac{a}{b} = \frac{x}{c} + \frac{c}{a}$

5. a) $6x + 3a + 5b = 9x - a + 3b$ **b)** $4m - 7x + n = 10m - 5x + 3n$
c) $2ax - 5a^2 = 3ab + ax$ **d)** $7cdx + 16c^2 = 4cd - cdx$

6. a) $px - p^2 - 1 = x - 2p$ **b)** $2mx - 3nx + 5m = 2nx - 3mx + 5n$
c) $ax - 1 = a - a^2x$ **d)** $4a^2x - 4ax = a - x$

7. a) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{a}{b} + 1$ **•b)** $\frac{2x}{m + 1} - \frac{2m - 6}{m - 1} = \frac{x}{m - 1}$

8. a) $3(6x - p) + x(p - 10) = p(9 + x)$
b) $(2a - b)x - b(4 - 3x) = 4a$
c) $3a(x + 2) - 2b(3x - 1) = x(a - 2b)$
d) $(x - 1)(2m - 1) + (m - x)m = 0$

9. a) $(x - r)(r + s) + (x - r - 2s)(r - s) = 2(s - r)(r - x)$
•b) $2\left[\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{b}\right) + \frac{4}{b^2}\right] = \frac{1}{b}\left(6x - \frac{10}{b}\right)$

10. a) $x(ax + b) - ax(x - 1) + a^2 = b^2$
•b) $px(2qx + r) - 2qx(r + px) - 4q^2 = p(p - 4q)$
•c) $(ax - a)(ax - b) - (a^2x + ab)(x - 1) = b^2$
d) $(x - m)(mx + 2) + (1 + mx)(2m - x) + m^4 = 1$

11. a) $\frac{15x}{2m} - \frac{10x - 2}{3m} = \frac{34}{m}$ **b)** $\frac{3nx + 10}{2n^2} + \frac{2x - n + 3}{4n} = \frac{5}{n^2}$

•12. a) $\frac{ax - b^2}{2} + \frac{bx - 8a^2}{4} = ab$

b) $\frac{2p^2 - pq + qx}{3} - \frac{pq - 2q^2 - px}{5} = \frac{p^2 + 22pq - 19q^2}{15}$

•13. a) $\dfrac{x-a}{a} + \dfrac{ax-b^2}{b^2} = \dfrac{a^4+b^4}{(ab)^2}$

b) $\dfrac{2mx+n}{2m+n} + \dfrac{2m-nx}{2m-n} + \dfrac{2n^2(x+1)}{4m^2-n^2} = 0$

4.2 Bruchgleichungen mit Parametern

Bei den im vorigen Abschnitt behandelten linearen Gleichungen war die Definitionsmenge kein Problem: sie war immer gleich $\mathbb{Q}$. Im Gegensatz dazu muss man bei Bruchgleichungen womöglich gewisse Zahlen ausschließen, weil alle vorkommenden Nenner von null verschieden sein müssen. Wie bei den in 3 behandelten Bruchgleichungen muss daher bei der Bestimmung der Lösungsmenge jetzt auch die Definitionsmenge beachtet werden, die natürlich auch noch von den Parametern abhängen kann. Ergibt sich am Ende der Rechnung z. B. die allgemein gültige Gleichung $0 \cdot x = 0$, dann ist die Lösungsmenge nicht unbedingt gleich $\mathbb{Q}$, sondern nur die Definitionsmenge D, die eine echte Teilmenge von $\mathbb{Q}$ sein kann. Im übrigen können wir Bruchgleichungen mit Parametern genauso behandeln wie die ohne Parameter, wenn wir nur an die Fallunterscheidungen denken, die wir machen müssen, damit wir nicht durch null teilen.

Beispiel:

$$\frac{a}{x-c} = b \qquad \| \cdot (x-c) \qquad D = \mathbb{Q} \setminus \{c\}$$

$$a = bx - bc$$

$$a + bc = bx \qquad \| : b, \quad \text{falls} \quad b \neq 0$$

$\boxed{b \neq 0}$ $\dfrac{a+bc}{b} = x$

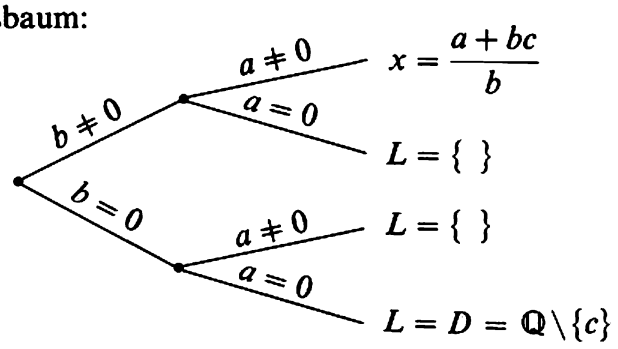
$\dfrac{a+bc}{b}$ ist Lösung, wenn es nicht gleich c ist. Wann aber ist es gleich c? Wir erhalten die Bedingung $\dfrac{a+bc}{b} = c$ und damit $a + bc = bc$, das heißt, $a = 0$. Falls $a = 0$ gilt, ist demnach $L = \{\ \}$, sonst $L = \left\{\dfrac{a+bc}{b}\right\}$.

$\boxed{b = 0}$ $a = 0 \cdot x$

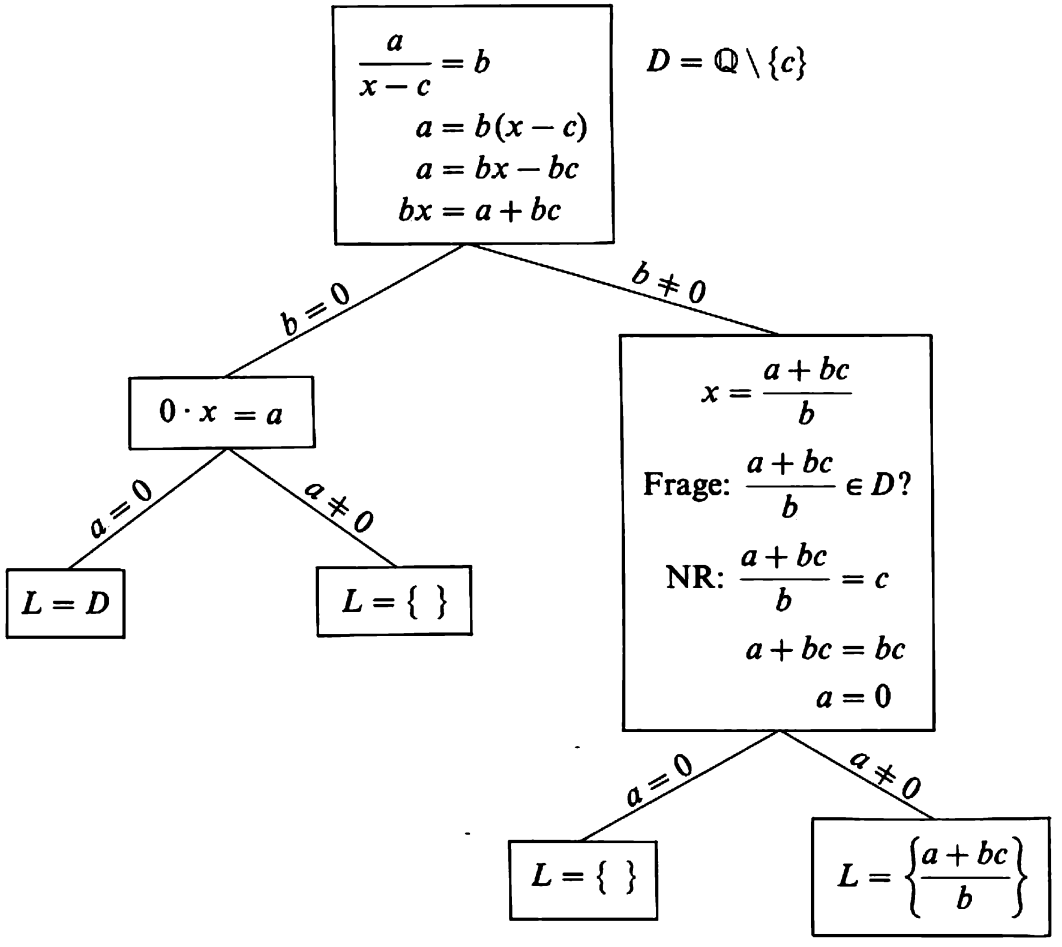
für $\boxed{a \neq 0}$ ist $L = \{\ \}$

für $\boxed{a = 0}$ ist $L = D = \mathbb{Q} \setminus \{c\}$.

Lösungsbaum:



Der Rechenbaum sieht folgendermaßen aus:



Aufgaben

1. a) $\frac{a}{x} = b$ **b)** $\frac{a}{x-1} = b$ **c)** $\frac{a}{x-b} = b$

2. a) $\frac{x-1}{x+1} = a$ **b)** $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = a + b$ **c)** $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{2}{x}$

3. a) $\frac{x-1}{x-a}+\frac{x+1}{x+a}=2$ b) $\frac{x+2}{x-a}-\frac{x-2}{x+a}=0$

4. a) $\frac{x+a}{x-a}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{2a-b}{a-2b}=\frac{x-a}{a-x}$

5. a) $\frac{x-a}{x+a}=2-\frac{x+a}{x-a}$ • b) $\frac{x-2a}{x+2b}-\frac{x+2a}{x-2b}=-\frac{a+b}{x^2-4b^2}$

6. a) $\frac{1+ax}{1+2ax}=2$ b) $\frac{2}{a-x}=\frac{2a}{b(b-x)}$

7. • a) $\frac{a+b}{b-ax}+\frac{b-a}{a+bx}=0$ b) $\frac{a-b}{x-b}+\frac{a+b}{x+b}=\frac{1-2b^2}{x^2-b^2}$

8. a) $\frac{5b}{x-a}+\frac{2b}{a+x}=\frac{4ab}{a^2-x^2}$ • b) $\frac{a}{a^2-x^2}-\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a-x}-\frac{b+1}{a+x}$

9. $\frac{1}{a-2x}-\frac{a-1}{a^2+2ax}=\frac{4a-1}{a^2-4x^2}$ 10. $\frac{1}{1-a^2x^2}=\frac{1}{1+ax}-\frac{1}{1-ax}$

:11. $\frac{4x+b}{4x-b}-\frac{4x-b}{4x+b}=\frac{bx-15}{16x^2-b^2}$

:12. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{4a-x}{x^2-a^2x}+\frac{x-a}{x}=2+\frac{ax+a^2}{x^2-ax}$

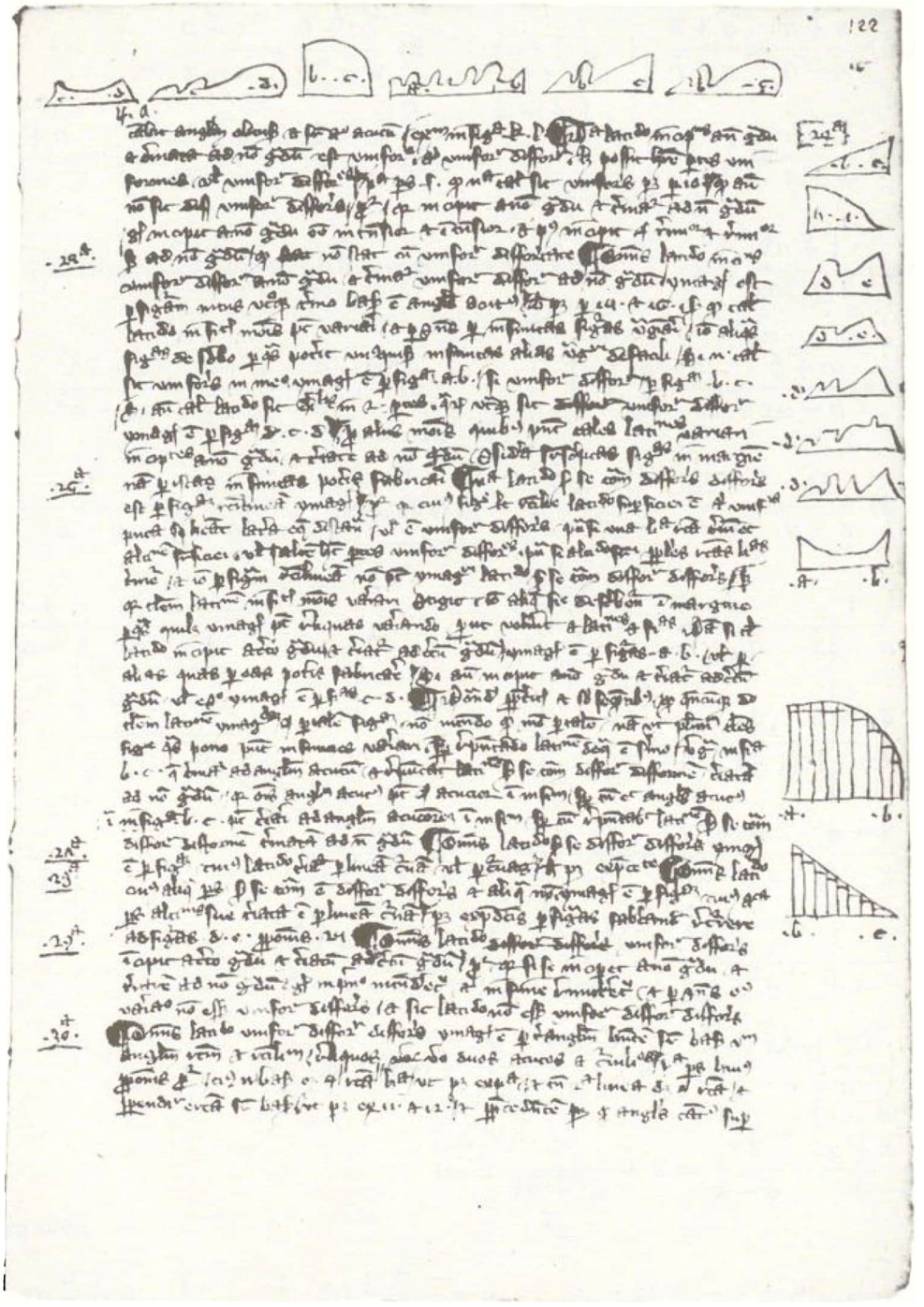
:13. $\frac{a-x}{x}-\frac{2ab^2-2b^2x}{a^2x+b^2x-2abx}=\frac{bx+a^2}{x(a-b)}-\frac{a+b}{a-b}$

•14. $\left(\frac{3x^2-ax}{a+x}+a-3x\right):\frac{3ax-a^2}{x^2-a^2}=(a-x)a$

15. $\frac{x-a}{a}-\frac{2x}{a-x}=2+\frac{1}{\frac{a^2+ax}{x^2}}$

:16. $\frac{1-\frac{a}{a+x}}{1+\frac{a}{a+x}}=\frac{2x+a}{2a+x}$:17. $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+c}}=\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a+x}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a+x}}$

5 Funktionen und ihre graphische Darstellung



Eine Seite aus dem *tractatus de latitudinibus formarum* des NIKOLAUS VON ORESME (um 1320/25–1382) mit graphischen Darstellungen von Funktionen. Handschrift aus dem 14. Jahrhundert (Codex latinus monacensis 4377, folium 122r)

5 Funktionen und ihre graphische Darstellung

5.1 Funktionen

Im Geometrieunterricht hast du schon gelernt, was man unter einer **Abbildung** versteht. Als Beispiele von Abbildungen sind dir sicher die Achsenspiegelung, die Punktspiegelung und die Verschiebung bekannt. Du weißt, dass man in der Geometrie immer dann von einer Abbildung spricht, wenn jedem Punkt P der Ebene *genau ein* Bildpunkt P′ zugeordnet wird.
Solche eindeutigen Zuordnungen kommen auch in anderen Teilgebieten der Mathematik, bei Naturvorgängen und in vielen anderen Zusammenhängen vor. Das zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 1:

Hans bietet Uli ein Würfelspiel nach folgender Regel an: Uli darf würfeln. Bei einer ungeraden Augenzahl erhält er von Hans, bei einer geraden Augenzahl zahlt er an Hans so viele €, wie die Augenzahl jeweils angibt.
Durch diese Spielregel ist tatsächlich Ulis Gewinn bzw. Verlust (= negativer Gewinn) für jede Augenzahl genau festgelegt. Man kann alle möglichen Fälle in einer Tabelle zusammenstellen:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Gewinn in €	1	−2	3	−4	5	−6

Bei diesem Spiel lässt sich die Regel, nach welcher einer Augenzahl x der Gewinn y € zugeordnet wird, auch kurz durch eine Gleichung ausdrücken: $y = (-1)^{x+1} \cdot x$.

Beispiel 2:

Wie viele Primzahlen befinden sich unter den ersten n natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$?
Bezeichnet man die gesuchte Anzahl mit m, so kann man folgende Tabelle aufstellen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
m	0	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	...

Diese Tabelle lässt sich – wenn auch mit wachsendem Rechenaufwand – beliebig weit fortsetzen. Zu jeder natürlichen Zahl n erhält man genau eine Zahl m.

Beispiel 3:

Den Flächeninhalt A eines Quadrats kann man aus der Quadratseite a berechnen: $A = a^2$. Jeder Seitenlänge a ist also eindeutig der Flächeninhalt A zugeordnet.

Beispiel 4:

Am Thermometer einer meteorologischen Station wurden im Laufe eines Tages folgende Temperaturen abgelesen:

Uhrzeit t in Std.	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Temperatur ϑ in °C	7,1	5,0	8,3	14,9	19,0	22,2	18,8	12,5	9,8

Natürlich hätte man das Thermometer auch zu anderen Zeiten ablesen können; es zeigte zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte Temperatur an.

Das Gemeinsame an diesen Beispielen lässt sich folgendermaßen beschreiben: Man hat jeweils zwei Mengen und eine Vorschrift, welche jedem Element der einen Menge genau ein Element der andern Menge zuordnet. In Abbildung 86.1 ist dieser Sachverhalt veranschaulicht; die Zuordnungsvorschrift wird dabei durch die Pfeile dargestellt. Wesentlich ist, dass von jedem Element der ersten Menge nur ein einziger Pfeil ausgeht; denn zu ihm gehört ja *genau ein* Element der zweiten Menge. Wohl aber können zwei oder mehr Pfeile auf dasselbe Element der zweiten Menge zeigen. Vergleiche dazu das Beispiel 2.

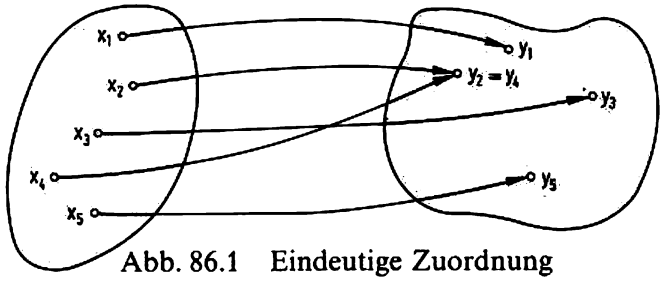


Abb. 86.1 Eindeutige Zuordnung

Da das Wesentliche an einer Abbildung die Eindeutigkeit der Zuordnung ist, spricht man auch in solchen Fällen, wo – wie in unseren Beispielen – nicht Punkten wieder Punkte zugeordnet werden, von einer Abbildung. Man sagt, dass die erste Menge in die zweite Menge abgebildet wird. Für eine solche nicht geometrische Abbildung gibt es aber noch eine andere Bezeichnung; man nennt sie auch **Funktion***.

Als Zeichen für eine Funktion verwendet man im Allgemeinen einen kleinen lateinischen Buchstaben, zumeist f. Die erste Menge heißt **Definitionsmenge** D der Funktion. Ein Element von D wird in der Regel mit der Variablen x bezeichnet. Für das ihm zugeordnete Element der zweiten Menge verwendet man dann das Zeichen $f(x)$, gelesen »f von x«. Man nennt $f(x)$ den zu x gehörenden **Funktionswert**; x bezeichnet man oft als **Argument**** der Funktion f. Alle Funktionswerte einer Funktion fasst man zu ihrer **Wertemenge** W zusammen. Die Zuordnung zwischen den Elementen der Definitions- und der Wertemenge wird durch einen besonderen Pfeil, den Abbildungspfeil oder **Fußpfeil** $\mapsto$, dargestellt. Man schreibt kurz

$$f\colon\ x \mapsto f(x), \quad x \in D.$$

* functio (lat.) = Verrichtung

** argumentum (lat.) = Gegenstand, Inhalt, der Gehalt

Wir fassen die neuen Begriffe zusammen in

Definition 87.1: Unter einer **Funktion** f mit der **Definitionsmenge** D und der **Wertemenge** W versteht man eine Abbildung, die jedem Element x aus D genau ein Element $f(x)$ aus W als Funktionswert zuordnet.
Man schreibt dafür $f\colon x \mapsto f(x),\ x \in D$.

Oft wird auch als Bezeichnung für ein Element der Wertemenge die Variable y verwendet. Man schreibt dann etwas ausführlicher $f\colon x \mapsto y$ mit $y = f(x)$ und $x \in D$. Dabei ist zu beachten, dass den Variablen x und y ganz verschiedene Rollen zugeteilt sind. Für x darf ein beliebiger Wert aus der Definitionsmenge D gewählt werden. Für y muss dann der diesem x zugeordnete Funktionswert genommen werden. Wegen dieses Unterschiedes nennt man x die **unabhängige** und y die **abhängige Variable** der Funktion.

Das Wort *functio* hat 1692 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) bei geometrischen Betrachtungen in die Mathematik eingeführt. Die Bezeichnungen f und $f(x)$ für Funktion und Funktionswert gehen auf Leonhard EULER (1707–1783) zurück, bei dem sie erstmals 1734 in einer Abhandlung vorkommen. Die Schreibweise $y = f(x)$ wurde erstmals 1883 von dem italienischen Mathematiker Giuseppe PEANO (1858–1932) verwendet.

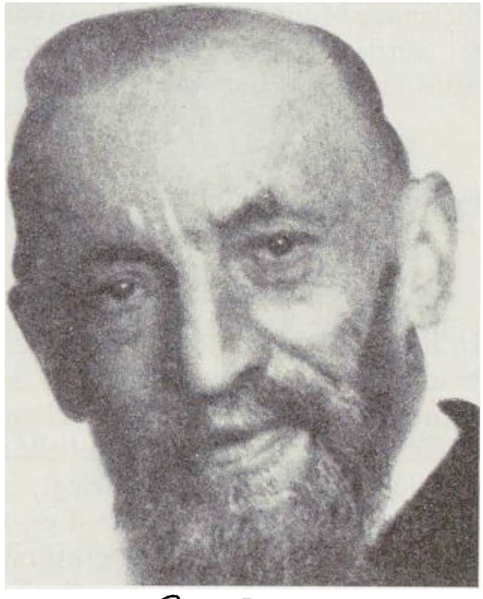


Abb. 87.1 Giuseppe PEANO (27.8.1858 Cuneo – 20.4.1932 Turin) hat das $\in$ als Abkürzung von ἐστί (estí) = *ist* 1889 in *Arithmetices principia* eingeführt.

Betrachten wir noch einmal unsere vier Beispiele, um darauf die neuen Begriffe anzuwenden und einige Ergänzungen zu erläutern.
In **Beispiel 1** handelt es sich um eine Funktion mit der Definitionsmenge $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Der zu $x \in D$ gehörende Funktionswert y kann, wie wir festgestellt haben, mithilfe der Gleichung $y = (-1)^{x+1} \cdot x$ berechnet werden. Eine solche Gleichung heißt **Funktionsgleichung**; sie hat die Form $y = f(x)$.
Der auf ihrer rechten Seite für $f(x)$ stehende Term, hier also $(-1)^{x+1} \cdot x$, heißt **Funktionsterm**. Damit lässt sich die Funktion schreiben als

$$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = (-1)^{x+1} \cdot x \quad \text{und} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

oder kürzer

$$f\colon x \mapsto (-1)^{x+1} \cdot x \quad \text{und} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

In **Beispiel 2** handelt es sich um eine Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$. Die Zuordnungsvorschrift lässt sich hier nur in Worten ausdrücken: Jedem $x \in \mathbb{N}$ wird als Funktionswert $f(x)$ die Anzahl aller Primzahlen p zugeordnet, für welche $p \leq x$ gilt. Der kleinste Funktionswert ist 0. Lässt man x die natürlichen Zahlen durchlaufen, so wird jedes Mal, wenn x eine Primzahl ist, der Funktionswert um 1 größer, sodass $f(x)$ entweder eine Zahlenmenge $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ oder die ganze Menge $\mathbb{N}_0$ durchläuft, je nachdem, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt*.

In **Beispiel 3** können wir für Längen bzw. Flächeninhalte die Maßeinheiten 1 m bzw. 1 m^2 verwenden. Setzt man dann $a = x$ m und $A = y$ m^2, so sind x und y unbenannte Zahlen, und es gilt: $y = x^2$. Diese Gleichung beschreibt die Zuordnungsvorschrift der Funktion; es handelt sich also wieder um eine Funktionsgleichung. Die Definitionsmenge D besteht in diesem Fall aus allen positiven rationalen Zahlen, also $D = \mathbb{Q}^+$. Die Angabe der Wertemenge W ist hier schwierig! Sie enthält sicher nur positive rationale Zahlen. Stellt sie aber die ganze Menge $\mathbb{Q}^+$ dar? Diese schwierige Frage kann erst später beantwortet werden**. Die Funktion f dieses Beispiels lässt sich mithilfe des Funktionsterms x^2 kurz so schreiben:

$$f\colon\ x \mapsto x^2, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$$

Die Wertemenge können wir indirekt in der Form

$$W = \{y \mid y = x^2 \wedge x \in \mathbb{Q}^+\} \text{ angeben.}$$

In **Beispiel 4** stellen, wenn man sich auf die in der Tabelle enthaltenen Werte beschränkt, die Zeitangaben in der ersten Zeile die Definitionsmenge, die Temperaturangaben in der zweiten Zeile die Wertemenge der Funktion dar. Die Zuordnung wird in der Tabelle durch das Untereinanderschreiben zusammengehörender Werte festgelegt.
Wesentlich komplizierter wird es, wenn man sich vorstellt, dass *jedem* Zeitpunkt eine bestimmte Temperatur zugeordnet ist. Für diese Funktion ist D die Menge aller Zeitpunkte des betreffenden Tages. Um W zu bestimmen, müsste man die niedrigste und die höchste Temperatur an diesem Tag ermitteln***. Da die Natur keine Sprünge macht****, gehören auch alle dazwischen liegenden Temperaturwerte zu W.

Eindeutige Zuordnungen zwischen zwei Mengen, also Funktionen bzw. Abbildungen, treten besonders häufig auf und haben in der Mathematik eine sehr große Bedeutung. Es gibt daneben aber auch mehrdeutige Zuordnungen:

* Vgl. dazu Aufgabe 103/15 ** Vgl. Algebra 9

*** Es gibt sog. Minimum-Maximum-Thermometer, auf denen diese beiden Temperaturen angezeigt werden.

**** Natura non facit saluts (lat.) = Die Natur macht keine Sprünge (Karl von LINNÉ 1707–1778, schwedischer Botaniker). Der Gedanke dieses Ausspruchs geht auf ARISTOTELES (384–322 v. Chr.) zurück; er findet sich in ähnlicher Form schon bei anderen Schriftstellern vor LINNÉ.

Beispiel 5:

Jeder Zahl x aus der Menge $\mathbb{Q}^+$ werden diejenigen Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zugeordnet, deren Betrag den Wert x hat.
Man erkennt leicht, dass man hier der Zahl x sowohl x selbst als auch die Zahl $-x$ zuordnen muss. Zu jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ gibt es also zwei verschiedene Zahlen aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, welche die Bedingung erfüllen; diese lässt sich als Gleichung $|y| = x$ schreiben. Wir veranschaulichen den Sachverhalt mithilfe zweier Zahlengeraden für x bzw. y (Abbildung 89.1):

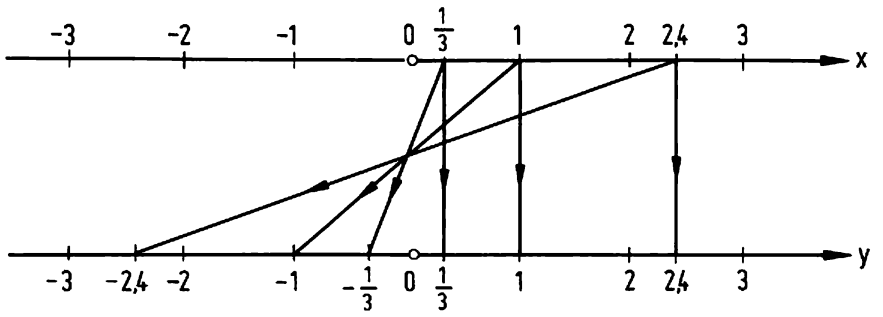


Abb. 89.1 Zuordnung mit der Eigenschaft $|y| = x$

Beispiel 6:

Jeder natürlichen Zahl x werden alle Zahlen y zugeordnet, die Teiler von x sind.
Zu $x = 1$ gehört eindeutig $y = 1$. Jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, besitzt aber mindestens zwei verschiedene Teiler. Abbildung 89.2 zeigt die Zuordnungen für die x-Werte 1, 2, 4 und 8.

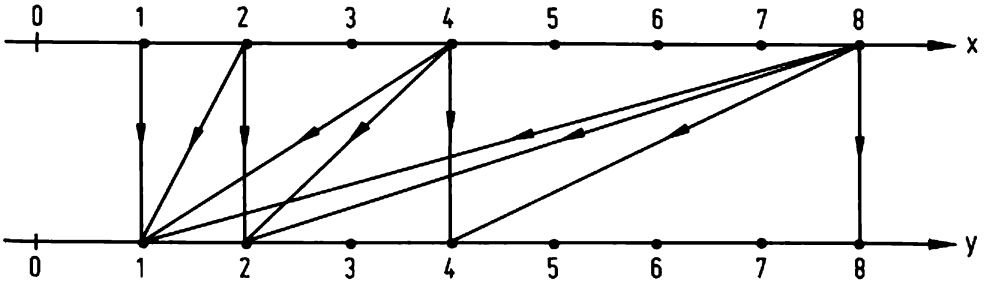


Abb. 89.2 Zur Zuordnung »y ist Teiler von x«

Für eine beliebige Zuordnung zwischen zwei Mengen verwendet man in der Mathematik die Bezeichnung **Relation** *. Funktionen sind besondere Relationen, nämlich solche, bei denen die Zuordnung eindeutig ist. In den Beispielen 5 und 6 sind Relationen beschrieben, die keine Funktionen sind.

* *relatio* (lat.) = ursprünglich *das Zurücktragen*, später auch *die Beziehung, das Verhältnis*

Aufgaben

1. Jeder natürlichen Zahl x wird zugeordnet
   a) ihre Hälfte
   b) ihr Kehrwert
   c) ihr Quadrat
   d) ihr größter Teiler.

   Berechne jeweils für $x \leqq 10$ die zugeordneten Werte und schreibe die Wertetabelle auf.

2. Begründe, dass es sich bei allen Beispielen der Aufgabe **1** um Funktionen handelt. Beschreibe jede dieser Funktionen mithilfe eines Terms.

• 3. Stelle bei den in Aufgabe **1** bzw. Aufgabe **2** betrachteten Funktionen fest, ob es in ihrer Definitionsmenge so genannte **Fixelemente** gibt, d.h. solche, die auf sich selbst abgebildet werden.

4. a) Veranschauliche für die im Beispiel 2 dieses Abschnitts beschriebene Funktion die Zuordnung zwischen den n- und m-Werten mithilfe zweier Zahlengeraden. Vergleiche dazu die Abbildungen 89.1 und 89.2.
   b) Setze die im Beispiel 2 angegebene Wertetabelle bis $n = 30$ fort.

5. Begründe, dass es sich bei den folgenden Zuordnungen um Funktionen handelt, und gib jeweils die Definitions- und die Wertemenge an.
   a) Jedem Dreieck wird die Summe seiner Innenwinkelmaße zugeordnet.
   b) Jedem Dreieck wird die Summe seiner drei Außenwinkelmaße zugeordnet.
   c) Jedem Viereck wird die Summe seiner Innenwinkelmaße zugeordnet.
   d) Jedem konvexen* Viereck wird die Summe seiner vier Außenwinkelmaße zugeordnet.
   • e) Jeder Eckenzahl n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) wird die Summe der Innenwinkelmaße eines n-Ecks zugeordnet. Beschreibe diese Funktion durch einen Term.
   • f) Jeder Eckenzahl n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$) wird die Summe der Außenwinkelmaße eines konvexen* n-Ecks zugeordnet. Beschreibe diese Funktion durch einen Term.

6. Jeder natürlichen Zahl $x > 1$ wird als Funktionswert y der kleinste in x enthaltene Primfaktor zugeordnet. Berechne die Wertetabelle für $15 \leqq x \leqq 25$.

7. Stelle für die folgenden Funktionen jeweils die Wertetabelle mit den x-Werten $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ und 4 auf.
   a) $f\colon x \mapsto 2x + 3,\ x \in \mathbb{Q}$
   b) $f\colon x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+1},\quad x \in \mathbb{Q}$
   c) $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{|x|+1},\quad x \in \mathbb{Q}$
   d) $f\colon x \mapsto (-2)^{1+|x|},\quad x \in \mathbb{Z}$

* *convexus* (lat.) = *kesselförmig, gewölbt*. Ein Vieleck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger innerer Punkte ganz im Inneren des Vielecks liegt.

•**8.** Veranschauliche bei der Funktion von Aufgabe **7d** die Zuordnung zwischen x und $f(x)$ für $-4 \leqq x \leqq 4$. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der Längeneinheit 1 cm für x und eine mit der Längeneinheit 1 mm für $f(x)$.

•**9.** Bestimme die Wertemenge W:

a) $f\colon x \mapsto -x, \quad x \in \mathbb{Q}_0^+$ **b)** $f\colon x \mapsto -x, \quad x \in \mathbb{Q}$

c) $f\colon x \mapsto x+2, \quad x \in \mathbb{Q}_0^+$ **d)** $f\colon x \mapsto x-2, \quad x \in \mathbb{Q}$

e) $f\colon x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{Q}^+$ **f)** $f\colon x \mapsto \frac{1}{1+|x|}, \quad x \in \mathbb{Q}$

10. Dem Basiswinkel α eines gleichschenkligen Dreiecks wird

a) der an der Spitze liegende Innenwinkel γ zugeordnet

b) der an der Spitze liegende Außenwinkel γ^* zugeordnet.

Beschreibe jeweils den Zusammenhang zwischen den Winkelmaßen durch einen Funktionsterm und gib die Definitions- und Wertemenge an.

•**11.** Berechne bei den folgenden Funktionen zuerst die Funktionswerte für $x \leqq 5$. Beschreibe sodann die Wertemengen und bestimme die Fixelemente. (Hinweis zu **c** und **d**: Unterscheide zwischen geraden und ungeraden x-Werten!) [ggT = größter gemeinsamer Teiler]

a) $f\colon x \mapsto \mathrm{ggT}\,(x; 2x), \quad x \in \mathbb{N}$ **b)** $f\colon x \mapsto \mathrm{kgV}\,(x; 2x), \quad x \in \mathbb{N}$

c) $f\colon x \mapsto \mathrm{ggT}\,(2; x), \quad x \in \mathbb{N}$ **d)** $f\colon x \mapsto \mathrm{kgV}\,(2; x), \quad x \in \mathbb{N}$

•**12.** Veranschauliche mithilfe zweier Zahlengeraden für x bzw. $f(x)$ die Zuordnung bei der Funktion von Aufgabe

a) 11a **b) 11b** **c) 11c** **d) 11d**.

13. Welche der im Folgenden beschriebenen Relationen sind keine Funktionen?

a) Jeder Zahl x wird eine Zahl y zugeordnet, für die $|x-y| = 0$ gilt.

b) Jeder Zahl x wird eine Zahl y zugeordnet, für die $|x| - |y| = 0$ gilt.

c) Der Länge u wird der Flächeninhalt A eines Rechtecks vom Umfang u zugeordnet.

d) Der Länge u wird der Flächeninhalt A eines Quadrats vom Umfang u zugeordnet.

e) Jeder zweistelligen natürlichen Zahl x wird ihre Quersumme y zugeordnet.

f) Jeder einstelligen natürlichen Zahl x wird eine zweistellige natürliche Zahl y mit der Quersumme x zugeordnet.

14. Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 900$ km/h.
Beschreibe durch eine Gleichung die Funktion, welche

a) der Flugzeit $t = x$ min den zurückgelegten Weg $s = y$ km zuordnet,

b) der Flugstrecke $s = x$ km die benötigte Flugzeit $t = y$ min zuordnet.

15. Begründe folgende Aussagen durch die Angabe der entsprechenden Funktionsgleichungen:

a) In einem Stromkreis mit konstantem Widerstand R (z. B. $R = 100\,\Omega$) ist jedem Wert der angelegten Spannung U eindeutig ein Wert der Stromstärke I zugeordnet.

b) In einem Stromkreis, der mit einer konstanten Spannung U (z. B. $U = 220$ V) betrieben wird, benötigt man einen ganz bestimmten Widerstand R, um eine gewünschte Stromstärke I zu erreichen.

5.2 Der Graph einer Funktion

Bei sehr vielen Funktionen besteht sowohl die Definitionsmenge D als auch die Wertemenge W aus Zahlen. Da eine solche Funktion jeder Zahl $x \in D$ eine Zahl $y \in W$ zuordnet, kann man sagen: Die Funktion erzeugt **Zahlenpaare** $(x \mid y)$. Ein solches Paar besteht also jeweils aus einem Wert der unabhängigen Variablen an erster Stelle und dem dazugehörenden Wert der abhängigen Variablen an zweiter Stelle. Diese Zahlenpaare erkennt man besonders leicht, wenn die Funktion durch eine Wertetabelle beschrieben ist. Betrachte etwa die Funktion von Beispiel 1 des vorhergehenden Abschnitts; zu ihr gehören die Zahlenpaare $(1 \mid 1)$, $(2 \mid -2)$, $(3 \mid 3)$, $(4 \mid -4)$, $(5 \mid 5)$ und $(6 \mid -6)$. Aber auch bei einer Funktion, die durch einen Term bzw. eine Gleichung definiert ist, lassen sich die entsprechenden Zahlenpaare leicht angeben. So erzeugt die im Beispiel 3 von **5.1** betrachtete Funktion unendlich viele Zahlenpaare $(x \mid x^2)$ mit $x \in \mathbb{Q}^+$.

Mit Zahlenpaaren hast du auch schon bisher im Mathematikunterricht zu tun gehabt, vor allem in der Geometrie. Dort werden sie zur Beschreibung der Lage von Punkten benützt. Man benötigt dazu bekanntlich ein **Koordinatensystem**, also zwei zueinander senkrechte Zahlengeraden mit gemeinsamem Nullpunkt, das so genannte Achsenkreuz.

Die eine Gerade, meist von links nach rechts laufend, bezeichnet man als x-Achse, die andere als y-Achse (Abbildung 92.1). Falls die Längeneinheiten auf beiden Achsen gleich sind, spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem***.

Zu einem Zahlenpaar $(a \mid b)$ erhält man eindeutig einen Punkt P, indem

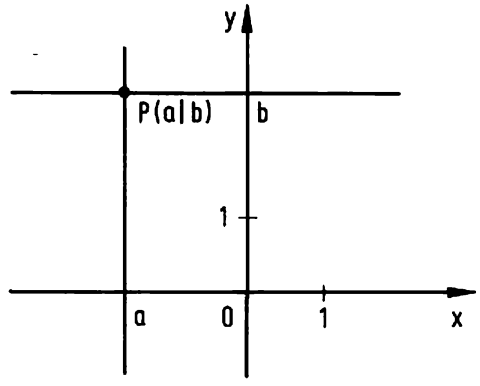
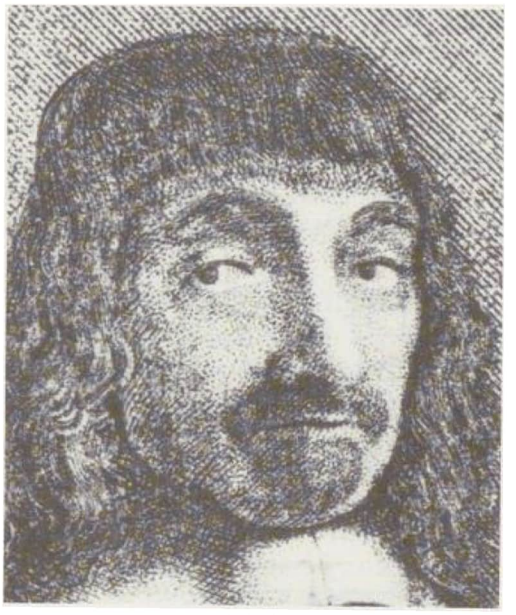


Abb. 92.1 Kartesisches Koordinatensystem; P hat die Abszisse a und die Ordinate b

* Bezeichnet zu Ehren des französischen Philosophen und Mathematikers René DESCARTES (1596–1650). Siehe auch »Zur Geschichte des Koordinatensystems« Seite 96ff.
τὸ σύστημα (tò sýstema) = Zusammenstellung, Gebilde

man durch den Punkt a auf der x-Achse und den Punkt b auf der y-Achse die Parallele zur jeweils anderen Achse zieht. a ist die **x-Koordinate** bzw. **Abszisse**, b die **y-Koordinate** bzw. **Ordinate*** des Schnittpunktes P. Diesen Zusammenhang zwischen dem Punkt und seinen Koordinaten bringt man durch die Schreibweise $P(a|b)$ zum Ausdruck.

Es liegt nun nahe, die von einer Funktion f erzeugten Zahlenpaare als Koordinaten von Punkten zu deuten. Dem Paar $(x|y)$ mit $y = f(x)$ wird damit in der Koordinatenebene der Punkt $(x|y)$ zugeordnet. Da zu jedem $x \in D$ genau ein Funktionswert y existiert, entspricht ihm auch genau ein Punkt. Die Menge aller Punkte, die auf diese Weise einer Funktion zugeordnet werden, heißt **Graph**** der Funktion; man bezeichnet ihn mit G oder auch G_f.



1644

Descartes

Abb. 93.1 René DESCARTES, latinisiert CARTESIUS (31.3.1596 La Haye bis 11.2.1650 Stockholm)***

Definition 93.1: Der **Graph** G einer Funktion f ist die Menge aller Punkte $(x|y)$ der Koordinatenebene, deren Koordinaten die Bedingungen $x \in D$ und $y = f(x)$ erfüllen; kurz:

$$G = \{(x|y) \mid x \in D \text{ und } y = f(x)\}.$$

Der Graph einer Funktion wird oft auch als **Schaubild** bezeichnet. Wir wollen nun die Schaubilder der in den Beispielen von **5.1** besprochenen Funktionen zeichnen.

Zu Beispiel 1: Der Graph besteht aus den sechs Punkten $(1|1)$, $(2|-2)$, $(3|3)$, $(4|-4)$, $(5|5)$ und $(6|-6)$; vgl. Abbildung 93.2.

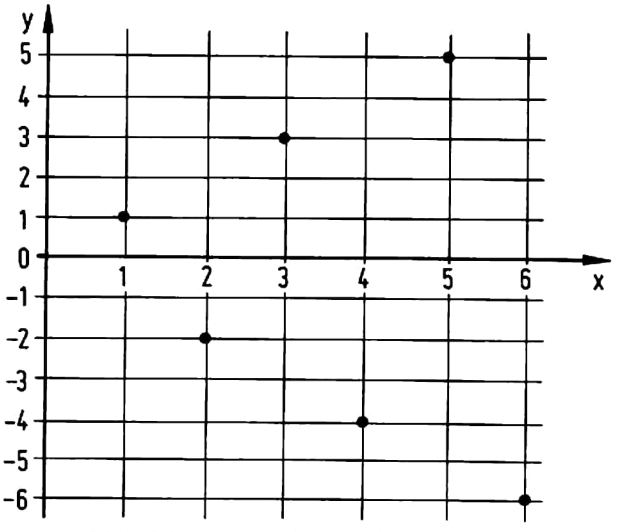


Abb. 93.2 Graph zu Beispiel 1

* abscissa (lat.) = die Abgeschnittene; ordinata (lat.) = die Geordnete (vgl. Seite 98)

** γράφειν (gráphein) = schreiben, zeichnen

*** gezeichnet von dem Mathematiker Frans VAN SCHOOTEN dem Jüngeren (um 1615–1660)

Zu Beispiel 2: Wir zeichnen den Graphen für $1 \leqq x \leqq 11$ (Abbildung 94.1). Die Zeichnung lässt gut erkennen, dass beim Übergang zu einem größeren x-Wert der Funktionswert y entweder gleich bleibt oder zunimmt. Dazu eine interessante Frage: Hört das Zunehmen einmal auf, d. h., liegen die Punkte von einem gewissen x-Wert ab alle in gleicher Höhe, oder trifft dies nicht zu? Mit anderen Worten: Gibt es endlich viele oder unendlich viele Primzahlen? Die richtige Antwort kannst du anhand der Aufgabe 103/**15** finden.

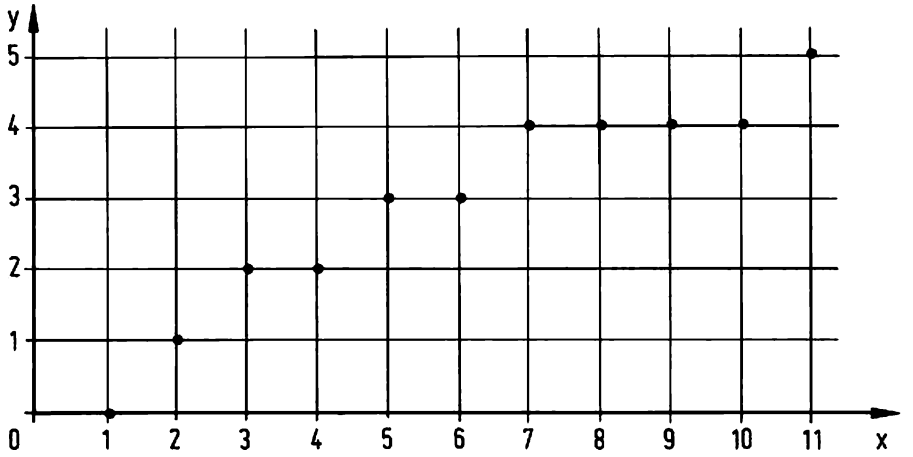


Abb. 94.1 Graph zu Beispiel 2

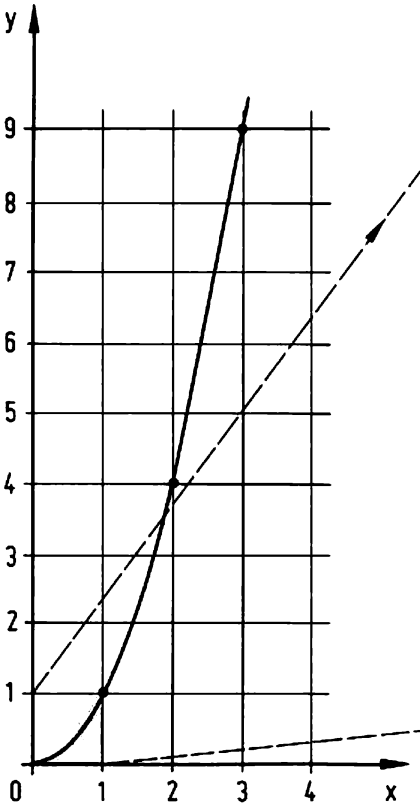


Abb. 94.2 $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{Q}^+$

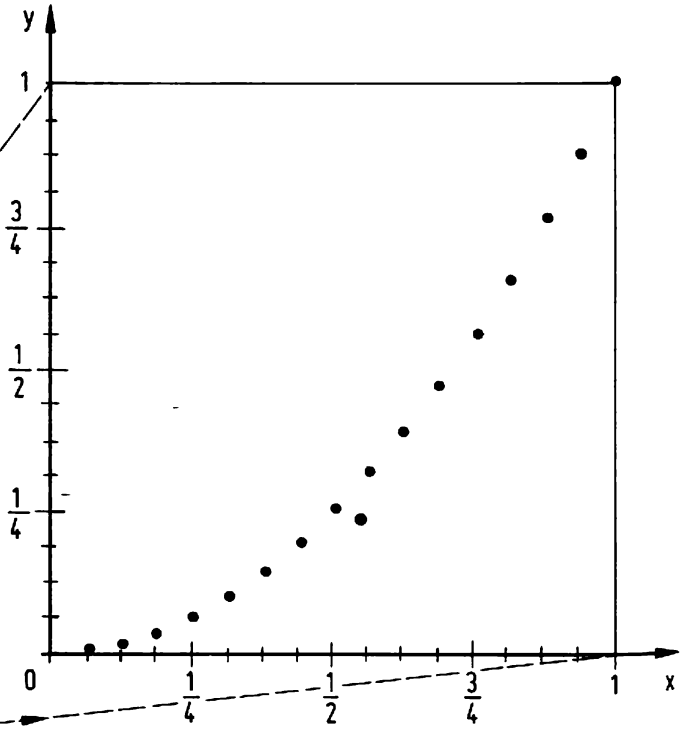


Abb. 94.3 Ausschnittvergrößerung zu Abbildung 94.2

Zu Beispiel 3: Hier wird man zuerst die Punkte (1|1), (2|4), (3|9), (4|16), ... berechnen und, soweit der verfügbare Platz es zulässt, in das Koordinatensystem einzeichnen (Abbildung 94.2). Aber natürlich gibt es zwischen je zwei von ihnen schon unendlich viele Zwischenpunkte, z. B. zwischen (1|1) und (2|4) die Punkte mit den x-Werten $\frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; \frac{9}{8}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}, \frac{15}{8}; \frac{17}{16}, \frac{19}{16}, \ldots$ Auch links von $x = 1$ gibt es noch Punkte des Graphen. Abbildung 94.3 zeigt in 8-facher Vergrößerung einen Ausschnitt aus Abbildung 94.2 mit den zu den x-Werten $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{8}, \ldots, \frac{15}{16}$ und 1 gehörenden Punkten.
Natürlich muss man mit dem Berechnen und Einzeichnen von Zwischenpunkten bald aufhören; es sind ja unendlich viele. Offensichtlich liegen alle Punkte des Graphen auf einer gekrümmten Linie. In solchen Fällen berechnet und zeichnet man eine passende Anzahl von Punkten und verbindet sie dann freihändig oder mit einem Kurvenlineal durch eine möglichst glatte Linie (Abbildung 94.2).

Zu Beispiel 4: Die dick eingezeichneten Punkte in Abbildung 95.1 ergeben sich aus den Tabellenwerten auf Seite 86. Beachte, dass bei einer Funktion die Variablen nicht immer x und y heißen müssen. In diesem Beispiel haben wir die unabhängige Variable mit t (Zeitpunkt in h), die abhängige mit ϑ (Temperatur in °C) bezeichnet und dementsprechend den Graphen in einem (t, ϑ)-Koordinatensystem gezeichnet.
Die Funktion, welche jedem Zeitpunkt seine Temperatur zuordnet, hat als Graphen wieder eine zusammenhängende Linie. Solche Temperaturkurven kann man mit so genannten Thermographen* aufzeichnen (Abbildung 96.1). Kennt man jedoch, wie in unserem Beispiel, nur wenige Punkte der Kurve, möchte aber ihren Verlauf wenigstens grob darstellen, so verbindet man einfach benachbarte Punkte geradlinig. Auf diese Weise entstehen auch die so genannten Fieberkurven (vgl. Aufgabe 101/**8**).

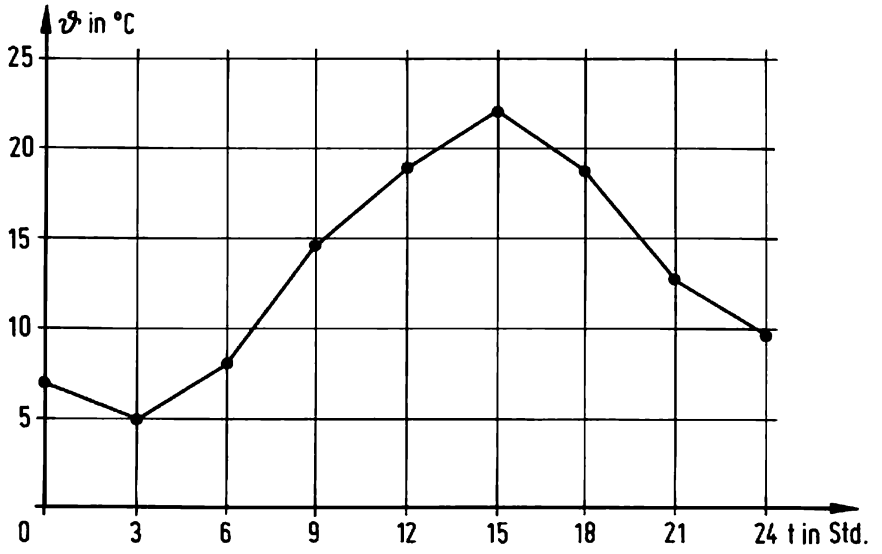


Abb. 95.1 Graph zu Beispiel 4

* Thermograph = Temperaturschreiber; von ϑερμός (thermós) = *warm, heiß*

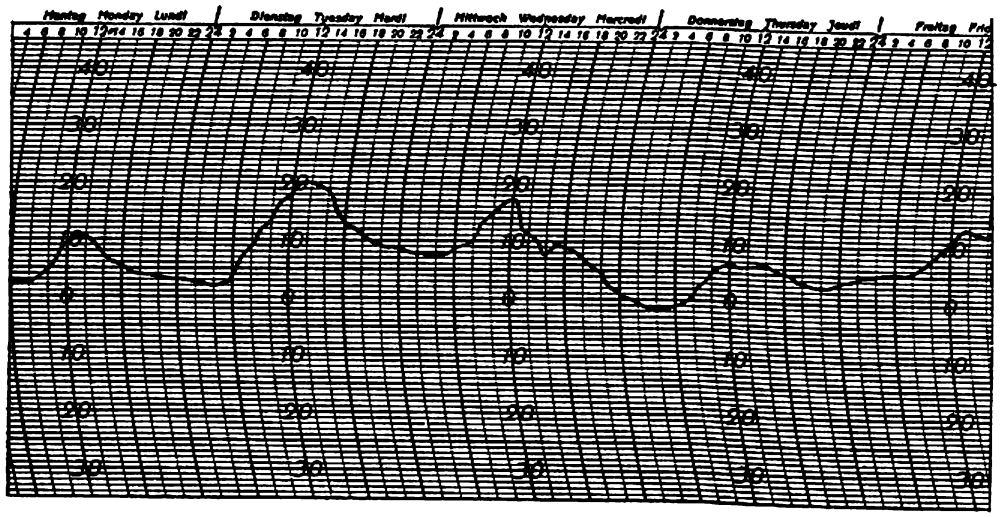


Abb. 96.1 Aufzeichnung des Temperaturverlaufs durch einen Thermographen. Die Schreibspitze befindet sich am Ende eines Hebels, der sich bei Temperaturänderung um einen festen Punkt dreht. Auf ebener Fläche würde die Spitze dabei Kreisbögen beschreiben. Da das Koordinatenpapier aber auf einen Zylinder gespannt ist, handelt es sich bei den Ordinatenlinien (t konstant und $-35\,°C \leqq \vartheta \leqq 45\,°C$) um kompliziertere Kurven, die als Schnittlinien der Zylinderfläche mit einer Kugel entstehen.

Auch bei einer Relation zwischen zwei Zahlenmengen werden Zahlenpaare erzeugt. Die Menge der ihnen in einem Koordinatensystem entsprechenden Punkte heißt dann Graph der Relation. Im Unterschied zu einem Funktionsgraphen können beim Graphen einer Relation auch mehrere Punkte mit derselben x-Koordinate auftreten. Abbildung 97.1 zeigt den Graphen der Relation von Beispiel 6 aus Abschnitt **5.1** für den Bereich $1 \leqq x \leqq 10$.

**Zur Geschichte des Koordinatensystems

Die Idee, Punkte und Linien mithilfe von Gitternetzen festzulegen, hatten bereits die Ägypter, wie uns Funde aus der Zeit um 2800 v. Chr. bezeugen. Griechische Astronomen und Geographen orteten Punkte am Himmel und auf der Erde mittels Gradnetzen, wie wir es auch heute noch machen. Vergleiche dazu das Bild auf Seite 121. Bereits HIPPARCHOS aus Nicäa (um 190 – um 125 v. Chr.) benützte die dir von jedem Atlas her vertrauten Begriffe: Als *Länge** bezeichnete man die Ausdehnung der damals bekannten Welt von Ost nach West entlang des Mittelmeers, als *Breite*** die Ausdehnung von Nord nach Süd. Die Kunst der Landvermessung erreichte ihren Höhepunkt in der Antike bei den Römern, die ihrer Stadtplanung mit dem meist von Ost nach West laufenden *decumanus* und dem dazu senkrechten *cardo* als Hauptstraßen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde legten.
Erstaunlicherweise findet sich in der antiken Mathematik kaum ein Niederschlag dieser Gedankengänge. Zur Weiterentwicklung bedurfte es eines neuen Anstoßes. Dieser kam aus der Naturphilosophie, als sich NIKOLAUS VON ORESME (1320/25 – 1382) fragte,

* *τὸ μῆκος* (to mêkos) = longitudo (lat.) = die Länge
** *τὸ πλάτος* (to plátos) = latitudo (lat.) = die Breite

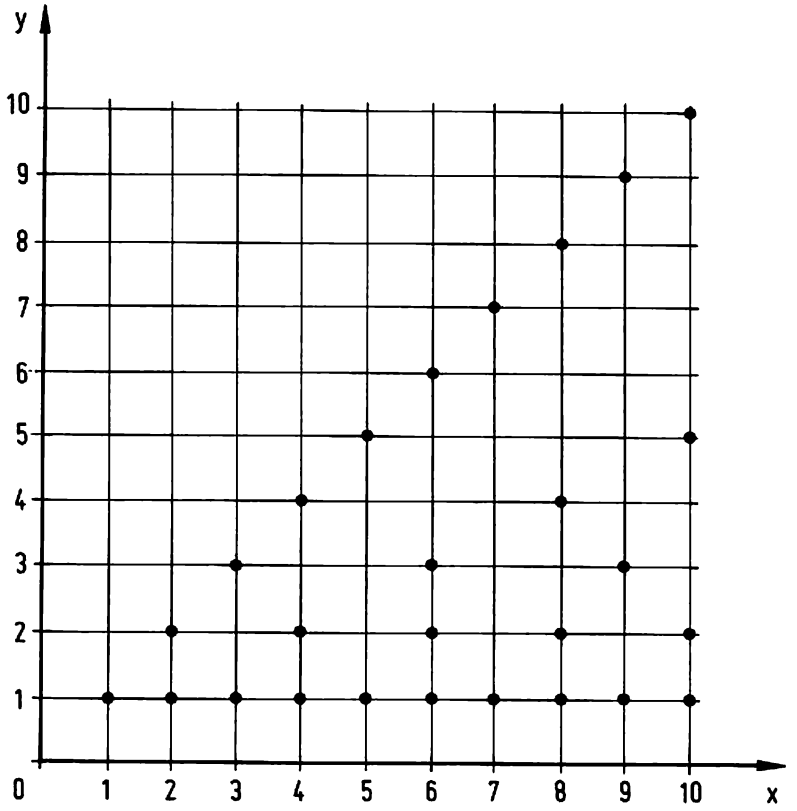


Abb. 97.1 Graph der Relation von Beispiel 6

wie die Veränderungen in der Natur vor sich gingen. »Da [diese]«, so beginnt sein um 1350 entstandener *tractus de latitudinibus formarum**, »vielfältig variieren und diese Vielfalt nur mit größter Schwierigkeit erkannt werden kann, es sei denn, man übertrage sie auf eine Betrachtung durch geometrische Figuren«**, veranschaulichte er sie, indem er über einer Zeitachse als »Länge« die jeweilige Stärke einer Erscheinung als »Breite« auftrug. Damit war gewissermaßen die Idee der Funktion und ihrer graphischen Darstellung in einem Koordinatensystem geboren. Seine Abhandlung – siehe die Abbildung auf Seite 84 – wurde an den Universitäten gelehrt, 130 Jahre später mehrmals gedruckt und beeinflusste noch Galileo GALILEI (1564–1642) und Johannes KEPLER (1571–1630).

Wie so oft, wenn eine Zeit reif ist für eine neue Entdeckung, haben mehrere fast gleichzeitig daran gearbeitet. Pierre de FERMAT (1601–1665) vollendete spätestens 1636 seine Schrift *Ad locos planos et solidos isagoge* – »Einführung in die ebenen und räumlichen Örter«***. Dort schreibt er:

* wörtlich: Abhandlung über die Breiten der Formen – sinngemäß: Abhandlung über die Intensitäten der Variablen

** Quia formarum latitudines multipliciter variantur et multiplicitas difficillime discernitur nisi ad figuras geometricas consideratio referatur

*** Gemeint sind Gerade und Kreis als loci plani und die Kegelschnitte als loci solidi. Die lateinischen Termini sind Übersetzungen der von PAPPOS von Alexandria (300 n. Chr.) eingeführten Ausdrücke *τόποι ἐπίπεδοι* (tópoi epípedoi) und *τόποι στερεοί* (tópoi stereói). *Στερεός* bedeutet eigentlich *fest, hart, starr.*

»Sobald in einer Schlussgleichung zwei unbekannte Größen auftreten, hat man einen Ort, und der Endpunkt der einen Größe beschreibt eine [...] Linie. [...] Die Gleichungen können aber bequem versinnbildlicht werden, wenn wir die beiden unbekannten Größen in einem gegebenen Winkel aneinander setzen, den wir meist als rechten wählen, [...]«

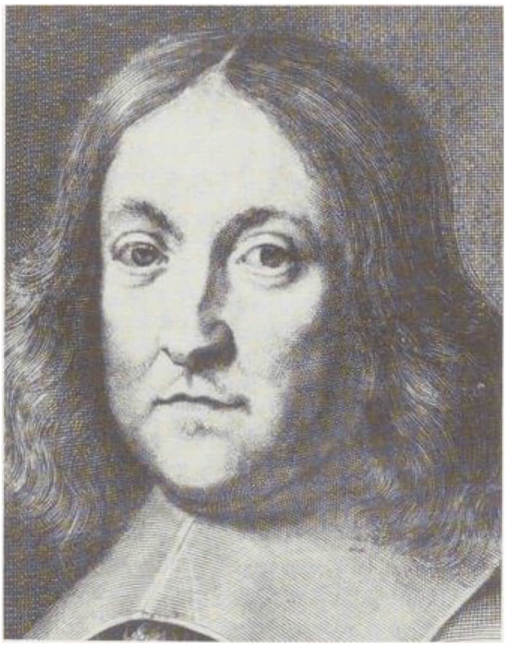


Abb. 98.1 Pierre de FERMAT (17.(?)8.1601 Beaumont de Lomagne/ Montauban – 12.1.1665 Castres [Toulouse])

Aber leider hatte der viel beschäftigte Jurist FERMAT keine Zeit, seine Arbeit zu veröffentlichen; erst sein Sohn Samuel-Clément gab sie 1679 im Druck heraus. Und so gebührt der Ruhm, das Koordinatensystem geschaffen zu haben, dem Mathematiker und Philosophen René DESCARTES, der 1637 seinem *Discours de la Méthode* eine Abhandlung *La Géométrie* anhängte als Beispiel für die neue wissenschaftliche Methode.* Frans VAN SCHOOTEN (1615–1660) übersetzte sie 1649 ins Lateinische und machte sie so erst der Welt der Gelehrten zugänglich! Was war nun die Leistung von DESCARTES? Er verband die Geometrie der Griechen mit der Algebra VIÈTES zu etwas Neuem: Um die Gleichung $y = f(x)$ einer Kurve zu finden, wählte er eine beliebige Gerade a, die »Achse«, auf ihr einen Punkt A und zog dann – meist rechtwinklig zu a – eine Parallelenschar (Abbildung 99.3). Diese parallelen Geraden hatte APOLLONIOS von Perge (etwa 262–190 v. Chr.) eingeführt; er nannte sie *τεταγμένως κατηγμέναι* (tetagménos kategménai), was etwas ungenau mit *ordinatim applicatae* (*lineae*) ins Lateinische übersetzt wurde** und wofür DESCARTES *appliquées par ordre* sagte, zu deutsch *geordnet gezogene* (*Linien*). Darüber hinaus bezeichnete er mit diesem Ausdruck auch die auf einer solchen Linie zwischen einem Kurvenpunkt P und der Achse liegende Strecke, die er mit y abkürzte. Der aus dem Baskischen stammende Pierre HÉRIGONE († um 1643 Paris) prägte dafür in seinem *Cursus mathematicus* (1634/42) das Fachwort **ordinata**. Die Parallele schneidet auf der Achse eine von A aus gemessene Strecke ab, die DESCARTES mit x bezeichnete. Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) nannte sie 1676 **abscissa** = *die Abgeschnittene*, x und y zusammen 1692 **coordinates**. Als Fremdwörter Abszisse, Ordinate und Koordinaten gingen sie ins Deutsche ein. – DESCARTES' großes Verdienst war es, gezeigt zu haben, dass man Kurven durch eine Gleichung zwischen dem Abszissenwert x und dem Ordinatenwert

* Wegen der 1633 erfolgten Verurteilung GALILEIS durch das Heilige Offizium ließ DESCARTES sein Werk nur anonym im protestantischen Leiden (Niederlande) drucken. Nach seinem Tode wurde es auf den päpstlichen Index der verbotenen Bücher gesetzt. Der volle Titel lautet *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* – »Abhandlung über die Methode, die Vernunft richtig zu leiten und die Wahrheit in den Naturwissenschaften zu suchen«.

** korrekt wäre *ordinate* = *regelmäßig geordnet*; denn *ordinatim* bedeutet *der Reihe nach*. (Apolloniosübersetzung von 1566 des Federigo COMMANDINO [1509–1575]).

1689

Abb. 99.1 Isaac NEWTON (4.1.1643 Woolsthorpe – 31.3.1727 Kensington), Gemälde von Godfrey KNELLER

1703

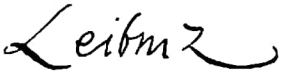


Abb. 99.2 Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1.7.1646 Leipzig – 14.11.1716 Hannover), Gemälde von Andreas SCHEITS

y beschreiben kann. Ein Koordinatensystem mit zwei Achsen findet man aber noch nicht bei ihm. 1679 erkannte zunächst Philippe DE LA HIRE (1640–1718), dass Abszisse und Ordinate gleichwertig sind. Wenngleich sich bereits bei Pierre de FERMAT (1601–1665) Andeutungen von negativen Werten für die Koordinaten finden, so war es dem großen Isaac NEWTON (1643–1727) vorbehalten, mit dem Tabu negativer Koordinaten endgültig zu brechen, und zwar in seiner 1668/69 niedergeschriebenen *Enumeratio linearum tertii ordinis*, die 1704 als Anhang zu seinem großen Werk *Opticks* erschien. Dort gibt es dann auch die zwei Achsen. Gleichwertig in unserem Sinne werden sie aber erst im *Cours de Mathématiques* (Bd. 4; 1798/99) von Sylvester François LACROIX (1765–1843).

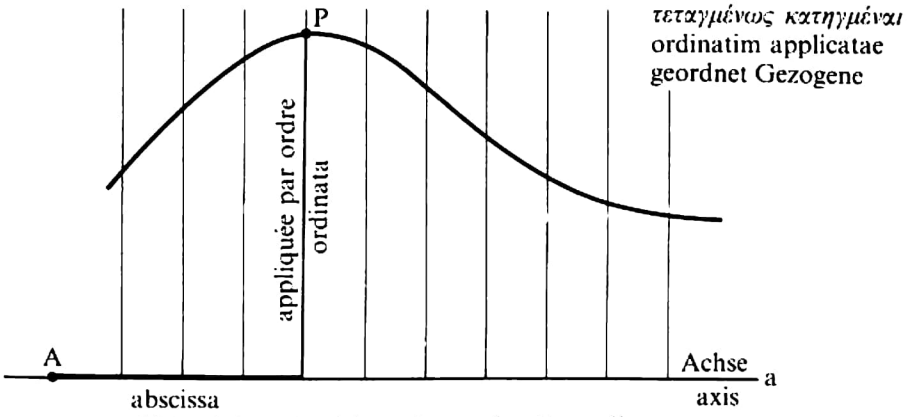


Abb. 99.3 Zur Entstehung des Koordinatensystems

Aufgaben

1. Zeichne in ein kartesisches Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm folgende Punkte ein:

a) A(4|0) **b)** B(−4|0) **c)** C(0|−3) **d)** D(0|3) **e)** E(3|3)
f) F(−3|−3) **g)** G(−2,5|3) **h)** H(2,5|−3) **i)** I(−4|−2) **k)** K(−2|−4)

2. Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Menge aller Punkte $P(x|y)$ mit

a) $1 \leqq x \leqq 5$ und $y = 0$
b) $x = 3{,}2$ und $-2{,}5 \leqq y \leqq 4$
c) $1 \leqq x \leqq 5$ und $-2{,}5 \leqq y \leqq 4$
d) $-3 < x < -1$ und $-4 < y < 2$
e) $x \geqq 2$ und $y = -1$
f) $x = -1{,}8$ und $y \leqq 4{,}5$
g) $x \geqq 2$ und $y \geqq -1$
h) $x > -1{,}8$ und $y < 4{,}5$.

3. Die beiden Koordinatenachsen zerschneiden die Ebene in vier **Quadranten*** (Abbildung 100.1).

a) Begründe, dass der 1. Quadrant aus der Punktmenge
$M_1 = \{(x|y) \mid x > 0 \wedge y > 0\}$
besteht.

b) Gib die entsprechende Beschreibung für die Punktmengen M_2, M_3 und M_4 der übrigen Quadranten an.

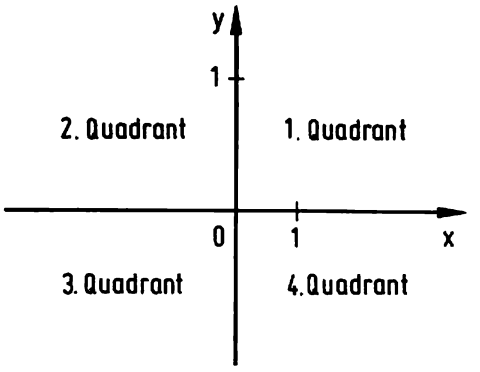


Abb. 100.1 Quadranteneinteilung

4. Zeichne in ein Koordinatensystem ein Rechteck ABCD von 5 cm Breite und 3 cm Höhe so ein, dass die Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind und A(−2|−1) die linke untere Ecke ist.

a) Welche Koordinaten haben die Ecken B, C, D?

b) Gib die Bedingungen an, denen die Koordinaten der auf den einzelnen Seiten liegenden Punkte genügen.

c) Durch welche Bedingungen werden die Punkte im Innern des Rechtecks gekennzeichnet?

d) Wie lauten die Ergebnisse zu **a**, **b** und **c**, wenn ABCD ein Quadrat mit 6 cm Seitenlänge ist?

Zeichne den Graphen der durch die Wertetabelle festgelegten Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	5	−4	3	−2	1	0

* quadrans (lat.) = das Viertel einer Geldschuld, ein Viertel-As (römische Münze). Leonhard EULER (1707 bis 1783) und Gabriel CRAMER (1704–1752) beginnen bei ihren Betrachtungen stets mit dem oberen rechten Quadranten.

b)

x	-3	-2	$-0{,}5$	0	$1{,}5$	2	4
y	3	1	-2	-3	0	1	5

c)

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	2	-1	-2	-1	0	-1

d)

x	-4	$-\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

6. Zeichne mithilfe einer Wertetabelle den Graphen im Bereich $|x| \leqq 5$.

a) $f\colon x \mapsto |x|, \quad D = \mathbb{Z}$

b) $f\colon x \mapsto 2 - |x|, \quad D = \mathbb{Z}$

c) $f\colon x \mapsto \frac{x^2}{5}, \quad D = \mathbb{Z}$

d) $f\colon x \mapsto -\frac{(x-2)^2}{10}, \quad D = \mathbb{Z}$

e) $f\colon x \mapsto -\frac{x^2}{|x|+1}, \quad D = \mathbb{Z}$

f) $f\colon x \mapsto (-1)^{1+|x|} \cdot \frac{2x}{1+|x|}, \quad D = \mathbb{Z}$

7. Jeder natürlichen Zahl n im Bereich $2 \leqq n \leqq 10$ werde

a) der größte Primfaktor, **b)** die Anzahl der Primfaktoren

ihrer Primfaktorzerlegung zugeordnet. Zeichne für jede dieser beiden Funktionen den Graphen (Einheit 1 cm).

8. Im Krankenhaus wurden bei einem Patienten an fünf aufeinander folgenden Tagen jeweils um 6^h und um 18^h folgende Körpertemperaturen gemessen:

Zeitpunkt	1. Tag		2. Tag		3. Tag		4. Tag		5. Tag	
	6^h	18^h	6^h	18^h	6^h	18^h	6^h	18^h	6^h	18^h
Temperatur in °C	38,7	39,5	39,3	39,8	38,9	39,2	38,1	38,0	37,2	37,4

Zeichne die Fieberkurve. Stelle dazu auf der Zeitachse je 12 h durch eine 1 cm lange Strecke dar. Zeichne von der Temperaturskala nur den Bereich von 36 °C bis 40 °C (Abbildung 101.1) und wähle dabei für 1 °C eine Strecke von 2 cm Länge. Verbinde benachbarte Punkte geradlinig.

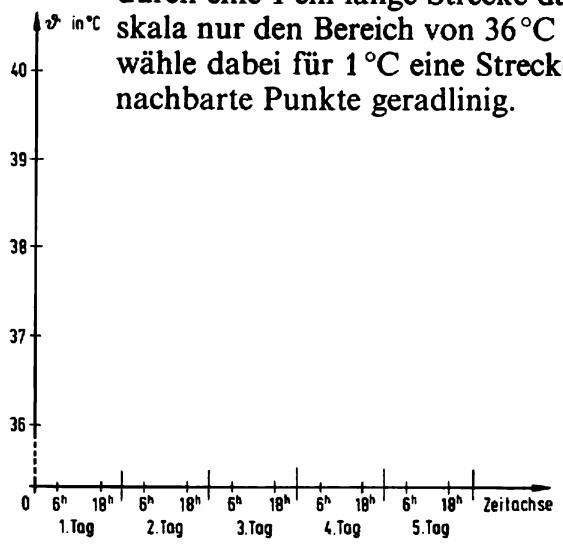


Abb. 101.1 Zu Aufgabe 8

•**9.** Die folgenden Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{Q}$ sind durch ihre Funktionsgleichung $y = f(x)$ definiert. Berechne für $x \in \{-3; -2; -1; -0{,}5; 0; 0{,}5; 1; 2; 3; 5\}$ die Funktionswerte und skizziere den Graphen im Intervall $[-3; 5]$.

a) $y = \dfrac{10}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$

10. Zeichne das Schaubild der Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a) $y = \mathrm{ggT}(x; 2x)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$

b) $y = \mathrm{kgV}(x; 2x)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 5\}$

c) $y = \mathrm{ggT}(x; x+2)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$

d) $y = \mathrm{kgV}(x; 2)$, $x \in \{1, 2, \ldots, 5\}$

11. Begründe folgende Aussagen:

a) Auf einer zur y-Achse parallelen Geraden liegt immer nur höchstens ein Punkt des Graphen einer Funktion.

b) Auf einer Parallelen zur x-Achse können mehrere Punkte des Graphen einer Funktion liegen.

12. Welche der in Abbildung 102.1 gezeigten Kurven **a** bis **h** können als Graphen von Funktionen $f\colon x \mapsto y$ aufgefasst werden? Begründung!

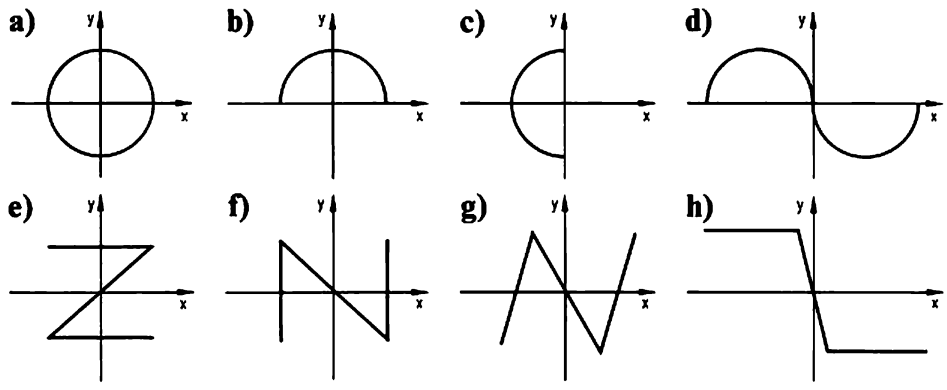


Abb. 102.1 Zu Aufgabe **12**

13. Stelle fest, ob die angegebene Punktmenge der Graph einer Funktion $f\colon x \mapsto y$ sein kann. Wenn ja, welche Definitions- und welche Wertemenge hat die Funktion?

a) $\{(-2|0), (-1|7), (0|0), (\frac{1}{2}|-3), (5|7)\}$

b) $\{(8|-4), (3|0), (-2|-2), (1|6), (3|-2), (6|1)\}$

•**14.** Zeichne im Intervall $[-4; 4]$ den Graphen der Relation

a) $|y| = |x|$, $x \in \mathbb{Z}$ **b)** $|x| + |y| = 2$, $x \in \mathbb{Z}$

c) $|x| + y = 2$, $x \in \mathbb{Z}$ **d)** $x + |y| = 2$, $x \in \mathbb{Z}$

e) $4y = x^2$, $x \in \mathbb{Z}$ **f)** $4|y| = x^2$, $x \in \mathbb{Z}$

g) $y^2 = x^2$, $x \in \mathbb{Z}$ **h)** $4y^2 = 9x^2$, $x \in \mathbb{Z}$.

•15. Die Frage, ob es endlich oder unendlich viele Primzahlen gibt, wurde schon von dem berühmten griechischen Mathematiker EUKLID* im IX. Buch seiner *Elemente* behandelt. Du kannst seine Überlegungen in den folgenden Schritten nachvollziehen:
Man geht aus von der Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, $p_2, p_3, \ldots, p_n$.
Aus ihnen denkt man sich die Zahl $z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ gebildet.
a) Zeige: Wenn z eine Primzahl ist, dann handelt es sich bei ihr um eine neue, d.h. von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahl.
b) Falls z keine Primzahl ist, gilt: In der Primfaktorzerlegung von z kommt keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vor. Weise zur Begründung nach, dass z durch keine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar ist.
c) Erkläre nun, warum die anfangs gemachte Annahme falsch ist.

5.3 Die direkte Proportionalität

Im Mathematikunterricht hast du bereits direkt proportionale Größen kennen gelernt. Zur Wiederholung betrachten wir folgendes

Beispiel:

Inge lässt Wasser in die Badewanne laufen. Der voll aufgedrehte Hahn liefert in 1 Minute 15 Liter Wasser. Inge überlegt, wie viel Wasser in 2 Minuten, 3 Minuten, ..., 10 Minuten in die Wanne läuft.
Da der Hahn in *jeder* Minute 15 l Wasser liefert, muss man lediglich 15 l mit der Zahl der Minuten multiplizieren, um die in dieser Zeit in die Wanne fließende Wassermenge zu erhalten. Bezeichnet man die Zeit mit x Minuten und die Wassermenge mit y l, so gilt $y = 15 \cdot x$.
Da so jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ eindeutig ein y-Wert zugeordnet ist, handelt es sich hier um eine Funktion, nämlich

$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 15x, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$

Sie hat die besondere Eigenschaft, dass der *Quotient* zusammengehöriger Werte von x und y konstant ist; es gilt ja $y : x = 15$. In einem solchen Fall sagt man: x und y sind zueinander *direkt proportional.*

Definition 103.1: Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = a \cdot x$ mit $a \neq 0$ beschrieben werden kann, heißt **direkte Proportionalität**.
Die Konstante a heißt **Proportionalitätsfaktor**.

In unserem Beispiel war $\mathbb{Q}^+$ die Definitionsmenge. Da der Funktionsterm $a \cdot x$ aber für jeden Wert von x definiert ist, kann man als Definitionsmenge

* EUKLID von Alexandria (um 300 v.Chr.); Satz 20 aus Buch IX der *Elemente*: »Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.«

einer direkten Proportionalität jede Zahlenmenge, also auch $\mathbb{Q}$ verwenden. Zu $x = 0$ gehört bei jeder solchen Funktion der Wert $y = 0$. Umgekehrt folgt aus $x \neq 0$ auch $y \neq 0$, da ja der Proportionalitätsfaktor a nicht 0 ist.
Wir betrachten nun zwei Wertepaare einer direkten Proportionalität, die wir in der Form $(x_1 \mid y_1)$, $(x_2 \mid y_2)$ schreiben, also durch sogenannte Indizes* unterscheiden. Es gelte $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Wegen $y_1 = ax_1, y_2 = ax_2$ gilt dann auch

$$\frac{y_1}{x_1} = a, \quad \frac{y_2}{x_2} = a \quad \text{und damit} \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Durch Multiplikation der letzten Gleichung mit $\frac{x_1}{y_2}$ ergibt sich $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$.
Es gilt also

Satz 104.1: Bei einer direkten Proportionalität mit der Gleichung $y = ax$ verhalten sich die y-Werte wie die zugehörigen x-Werte. Der Quotient $y : x$ ist konstant, und zwar gleich dem Proportionalitätsfaktor.

Als nächstes untersuchen wir den Graphen einer direkten Proportionalität.

Beispiel: $f\colon x \mapsto y$ mit $y = 2x$, $x \in \mathbb{Q}$

Wertetabelle:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...

Die Zeichnung (Abbildung 104.1) lässt vermuten, dass die zu den Tabellenwerten gehörenden Punkte auf einer Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems liegen. Ob das zutrifft, ob vielleicht sogar alle Punkte des Graphen auf dieser Geraden liegen und ob eine solche Feststellung für den Graphen einer jeden direkten Proportionalität gilt, muss noch geklärt werden.

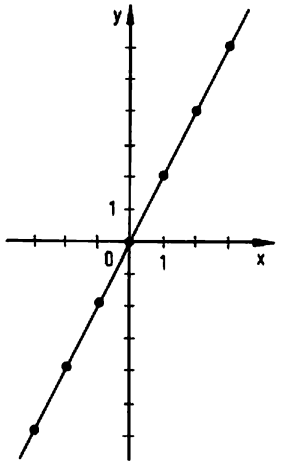


Abb. 104.1

* Die Idee, verschiedene Dinge der gleichen Sorte durch den gleichen Buchstaben zu bezeichnen, aber durch beigefügte Zahlen zu unterscheiden, findet man in *La Géométrie* (1637) von René DESCARTES (1596–1650), wo Punkte mit 2S, 3S und 2T, 3T bezeichnet werden. Da Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) die Gewohnheit hatte, Zahlen nur halb so groß wie große Buchstaben zu schreiben, sah in einer Abhandlung aus den Jahren 1675/1676 die Bezeichnungsweise für verschiedene Punkte einer Kurve so aus: $_1$C, $_2$C, $_3$C. Im Januar 1677 kam ihm die Idee, seine Schreibart zu einem Prinzip zu erheben, indem er expressis verbis vorschlug, die vorangestellten Zahlen wirklich klein zu schreiben. 1678 setzt er im Zusammenhang mit Determinanten (s. S. 139ff.) die kleinen Zahlen rechts: 1_0, 1_1, 1_2. 1684 verwendet er gleich große Zahlen, stellt sie aber tiefer: 1_0, 1_1, 1_2. Nie aber gibt es bei ihm tiefer gestellte kleine Zahlen.
Auch Isaac NEWTON (1643–1727) erkannte die Nützlichkeit dieser Bezeichnungsweise. Wer als Erster rechts tiefer gestellte Zahlen verwendete, konnten wir nicht ermitteln. Bald waren sie aber aus der Mathematik nicht mehr wegzudenken. Sie heißen **Indizes**, in der Einzahl **Index**, was im Lateinischen *Anzeiger* bedeutet.

Wenn man eine beliebige Proportionalität mit der Gleichung $y = ax$, $a \neq 0$, betrachtet, so sieht die entsprechende Wertetabelle so aus:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3 ...
y	...	$-3a$	$-2a$	$-a$	0	a	$2a$	$3a$ ...

Zum Graphen der Funktion gehört also stets der Punkt $O(0|0)$. Von ihm aus gelangt man zum Punkt $P_1(1|a)$, indem man um 1 in x-Richtung und um a in y-Richtung fortschreitet (Abbildung 105.1). Durch denselben Doppelschritt erreicht man von P_1 aus den Punkt $P_2(2|2a)$, von dort aus den Punkt $P_3(3|3a)$ usw.

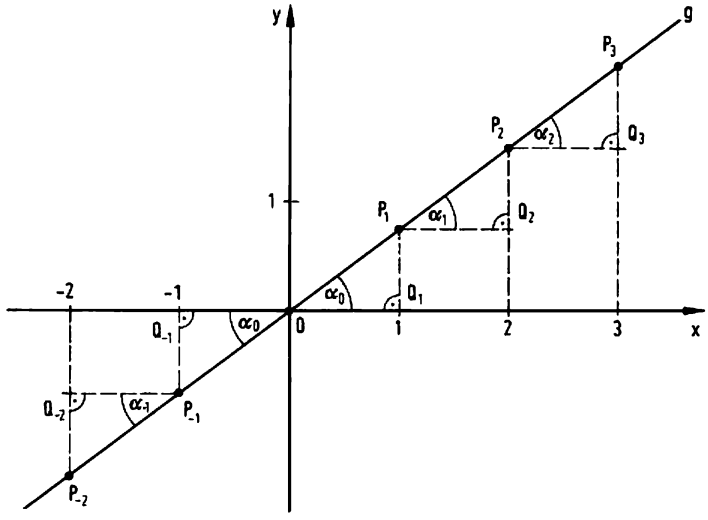


Abb. 105.1 Graph der Proportionalität $y = ax$

Mit den bei dem jeweils 1. Schritt erreichten Zwischenpunkten $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ ergeben sich Dreiecke OQ_1P_1, $P_1Q_2P_2$, $P_2Q_3P_3, \ldots$, die nach dem sws-Satz alle zueinander kongruent sind. Daher gilt für die Dreieckswinkel bei O, P_1, $P_2, \ldots$: $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$

Das bedeutet aber, dass die Strecken $[OP_1]$, $[P_1P_2]$, $[P_2P_3]$, ... gleiche Winkel mit der x-Richtung einschließen und somit parallel sind. Sie liegen daher alle auf einer Geraden g. Indem man von $O(0|0)$ aus jeweils um -1 in x-Richtung und um $-a$ in y-Richtung fortschreitet, erkennt man ganz entsprechend, dass auch die Strecken $[OP_{-1}]$, $[P_{-1}P_{-2}]$, $[P_{-2}P_{-3}]$, ... auf der Geraden g liegen. Dies gilt damit insbesondere auch für die zum Graphen der Funktion gehörenden Punkte ..., $P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, O, P_1, P_2, P_3, \ldots$, also für alle Punkte $P_k(k|ak)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Wo aber liegen die übrigen Punkte des Graphen, also die Punkte $(x|ax)$, bei denen x keine ganze Zahl ist? Auch sie liegen auf derselben Geraden g! Betrachten wir z. B. $x = \frac{1}{3}$, wozu $y = a \cdot \frac{1}{3} = \frac{a}{3}$ gehört. Den Punkt $R_1\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{a}{3}\right)$ erreicht man von $O(0|0)$ aus, indem man um $\frac{1}{3}$ in x-Richtung und um $\frac{a}{3}$ in

y-Richtung marschiert (Abbildung 106.1). Wiederholt man diesen Doppelschritt noch zweimal, so gelangt man über $R_2\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{2a}{3}\right)$ zum Punkt $P_1(1|a)$. Weil die Dreiecke OS_1R_1, $R_1S_2R_2$ und $R_2S_3P_1$ wieder kongruent sind, gilt $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2$. Daraus folgt aber, dass die Punkte O, R_1, R_2, P_1 auf einer Geraden liegen, und zwar wieder auf $OP_1 = g$.

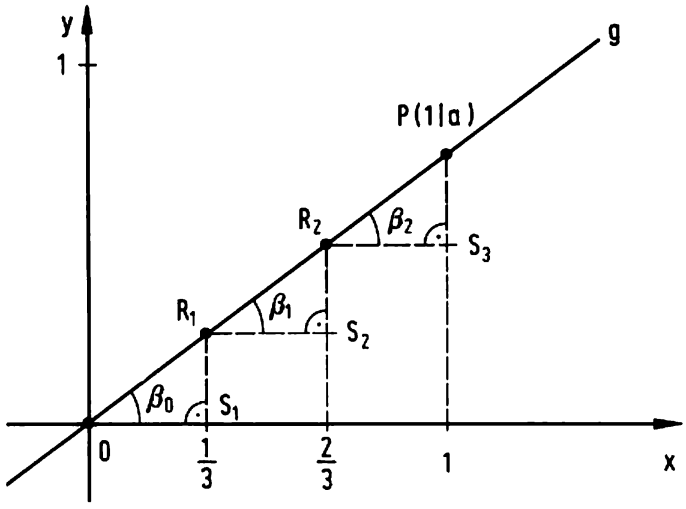


Abb. 106.1 Graph der Proportionalität $y = ax$

Die für $x = \frac{1}{3}$ durchgeführte Überlegung lässt sich auf jede Zahl $x \in \mathbb{Q}$ übertragen. x kann als Bruch $\frac{k}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$) geschrieben werden. Jeden Punkt $\left(\frac{k}{n}\middle|\frac{ak}{n}\right)$ kann man von $O(0|0)$ aus durch Doppelschritte der Form »$\frac{1}{n}$ in x-Richtung und $\frac{a}{n}$ in y-Richtung« (im Fall $k > 0$) bzw. »$-\frac{1}{n}$ in x-Richtung und $-\frac{a}{n}$ in y-Richtung« (im Fall $k < 0$) erreichen. Aus der Kongruenz der zu den Schritten gehörenden Dreiecke folgt, dass alle diese Punkte auf der Geraden g liegen (vgl. auch Aufgabe 107/3). Es gilt also

Satz 106.1: Die Punkte des Graphen einer direkten Proportionalität liegen auf einer Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems.

Um die zu einer Proportionalität gehörende Gerade zeichnen zu können, genügt im Prinzip die Berechnung eines einzigen von $O(0|0)$ verschiedenen Punktes P des Graphen. Zur Kontrolle empfiehlt es sich, einen weiteren Punkt zu berechnen und zu prüfen, ob er auf $g = OP$ liegt.

Aufgaben

1. Gehört die folgende Wertetabelle zu einer direkten Proportionalität? Gib, falls dies zutrifft, den Proportionalitätsfaktor und die Funktionsgleichung an.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	1	-3	-6	-9

b)

x	2	7	3	7	10	11,1
y	2,5	3,125	3,75	8,75	12,5	13,875

c)

x	1,2	1,7	2,5	4,0	9,3
y	8,4	11,9	17,5	28,0	65,1

d)

x	-5	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	5	9
y	$3\frac{1}{3}$	2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	6

2. Übertrage die Tabelle in dein Heft und belege die leeren Stellen so, dass die Wertetabelle einer direkten Proportionalität entsteht. Gib dazu auch die Funktionsgleichung an.

a)

x	0	1	2	3	7	10
y				6		

b)

x	$-2{,}5$	0	1	1,5	4,5
y				$-0{,}3$	

c)

x	-6			0	1,5		5,5
y	9	6	0,5			$-3{,}3$	

d)

x	-4			0,8		6,4
y		$-1\frac{3}{8}$	-1		1,25	4

•3. Weise nach, dass die Punkte P und Q zum Graphen der Funktion f gehören, und begründe mithilfe von kongruenten Dreiecken, dass Q auf der Geraden OP liegt.

a) $f\colon x \mapsto 0{,}5x$ mit $x \in \mathbb{Q}$; $P(-1\,|\,-\frac{1}{2})$, $Q(-\frac{3}{5}\,|\,-\frac{3}{10})$; Zeichnung mit Längeneinheit 1 dm!

b) $f\colon x \mapsto 0{,}8x$ mit $x \in \mathbb{Q}$; $P(1\,|\,0{,}8)$, $Q(1\frac{3}{4}\,|\,1{,}4)$; Zeichnung mit Längeneinheit 4 cm!

4. Zeichne im angegebenen Intervall den Graphen der durch die Gleichung beschriebenen Funktion $f\colon x \mapsto y$.

a) $y = 1 \cdot x$, $x \in [-5; 6]$

b) $y = -x$, $x \in [-5; 6]$

c) $y = 0{,}5x$, $x \in [-5; 6]$

d) $y = -0{,}2x$, $x \in [-5; 6]$

e) $y = 2{,}5x$, $x \in [-2; 3]$

f) $y = -4x$, $x \in [-2; 1{,}5]$

5. Bestimme die Gleichung derjenigen direkten Proportionalität, zu derem Graphen der folgende Punkt gehört. Fertige eine Zeichnung an.

a) $A(4|-2)$ **b)** $B(-1|5)$ **c)** $C(6|1)$
d) $D(-1{,}8|1\frac{4}{5})$ **e)** $E(3{,}5|1{,}5)$ **f)** $F(-4|-3)$

6. y_1 sei der zu x_1 gehörende Funktionswert einer direkten Proportionalität. Berechne den Proportionalitätsfaktor und den zu x_2 gehörenden Funktionswert y_2.

a) $x_1 = 1$; $y_1 = 1{,}5$; $x_2 = -1$ **b)** $x_1 = -10$; $y_1 = 4$; $x_2 = 2$
c) $x_1 = \frac{7}{8}$; $y_1 = 1{,}4$; $x_2 = -2{,}5$ **d)** $x_1 = 3{,}6$; $y_1 = -3$; $x_2 = 1\frac{1}{3}$

7. Ergänze die fehlende Koordinate so, dass die Punkte P und Q zum Graphen derselben direkten Proportionalität gehören. Überprüfe das Ergebnis an einer Zeichnung.

a) $P(-3|2)$, $Q(4{,}5|\ \ )$ **b)** $P(\ \ |-1{,}5)$, $Q(5|6)$
c) $P(\frac{9}{7}|6)$, $Q(\ \ |-2)$ **d)** $P(2{,}8|\ \ )$, $Q(4\frac{2}{3}|-2)$

•8. Welche direkte Proportionalität hat folgende Eigenschaft?

a) Die Summe der zu $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ gehörenden Funktionswerte ist 10.

b) Der Funktionswert $f(5)$ ist um 6 größer als $f(1)$.

c) Die Abstände der Punkte $A(2|f(2))$ und $B(6{,}5|f(6{,}5))$ des Graphen von der x-Achse unterscheiden sich um 1,5. (2 Lösungen!)

9. Eine Quelle liefert stündlich 5 m^3 Wasser.

a) Welche Wassermenge erhält man von dieser Quelle in einer Minute bzw. an einem Tag bzw. in einer Woche?

b) In welcher Zeit liefert diese Quelle den durchschnittlichen täglichen Wasserbedarf einer 4-köpfigen Familie, nämlich 400 l?

c) Wie lange dauert es, bis mit dem Wasser dieser Quelle ein Vorratsbecken von 4,5 m Breite, 7,5 m Länge und 6 m Tiefe gefüllt ist?

10. Ein Arbeiter hebt einen Graben aus, in dem eine Telefonleitung verlegt werden soll. Pro Stunde bewältigt er ein Grabenstück von 2,5 m Länge. Sein Stundenlohn beträgt 20 €.

a) Wie lange (y Std.) dauert es, bis der Mann einen Graben von x m Länge ausgehoben hat?

b) Welcher Arbeitslohn (z €) ist für das Ausheben eines Grabens von x m Länge zu bezahlen?

•c) Beweise: Wenn z zu y direkt proportional ist und ebenso y zu x, dann ist auch z zu x direkt proportional.

11. Ein Auto fährt mit der konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h und benötigt dabei 8,2 Liter Benzin für je 100 km. Beschreibe durch eine Gleichung den Zusammenhang

a) zwischen der Fahrzeit t (in Std.) und dem zurückgelegten Weg s (in km);

b) zwischen der Fahrstrecke s (in km) und dem Benzinverbrauch b (in l);

• **c)** zwischen der Fahrzeit t (in Std.) und dem Benzinverbrauch b (in l).

12. a) Ein Kapital $K = 7500$ € ist zu 4% angelegt. Wie hoch ist der Zins für 180 (210, 300) Tage?

b) Wie hängt allgemein der Zins Z

1) vom Kapital K, **2)** vom Zinsfuß p, **3)** von der Zinszeit T ab?

5.4 Die lineare Funktion

Sehr häufig hat man es mit Funktionen zu tun, deren Funktionsterm die Summe aus dem Term ax einer direkten Proportionalität und einer Zahl b ist, also die Form $f(x) = ax + b$ hat.

Beispiel:

Inge wird von ihrer Mutter ermahnt, nicht unnötig viel Wasser zu verbrauchen. Sie zeigt ihr die letzte Jahresrechnung der städtischen Wasserwerke. Darauf findet Inge folgende Angaben:
Wasserverbrauch 140 m^3; Preis für 1 m^3 Wasser 1,25 €;
Grundpreis 32 €; Rechnungsbetrag 207 €.
Inge erkennt, dass sich der Rechnungsbetrag ergibt, wenn man $140 \cdot 1{,}25$ € + 32 € berechnet.
Allgemein lautet, wenn man die verbrauchte Wassermenge mit x m^3 und den Rechnungsbetrag mit y € bezeichnet, die Berechnungsregel so: $y = 1{,}25 \cdot x + 32$. Durch sie wird jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert zugeordnet. Es handelt sich also um die Funktion

$f\colon x \mapsto 1{,}25 \cdot x + 32,\ x \in \mathbb{Q}^+$.

Definition 109.1: Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = ax + b$ mit $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}$ beschrieben werden kann, heißt **lineare Funktion**.

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $y = ax + b$ nennt man heute oft **affine*** Funktion. Unter einer linearen Funktion versteht man dann nur den Sonderfall mit der Gleichung $y = ax$.

Als Definitionsmenge einer linearen Funktion soll, wenn nichts anderes angegeben ist, stets die ganze Zahlenmenge, also $\mathbb{Q}$, verwendet werden.

* affinis (lat.) = angrenzend, (durch Heirat) verwandt, in etwas verwickelt. Leonhard EULER (1707–1783) führte das Wort *affin* in die Mathematik ein.

Wieso man Funktionen mit der Gleichung $y = ax + b$ als *linear* bezeichnet, wird verständlich, wenn man ihre Graphen untersucht:
Für $a \neq 0$ beschreibt $y = ax$ bekanntlich eine direkte Proportionalität, deren Graph aus Punkten einer Geraden durch den Ursprung $O(0|0)$ besteht. Indem man zu den y-Koordinaten dieser Punkte jeweils b addiert, d. h. die Punkte um den Pfeil b parallel zur y-Achse verschiebt, erhält man den Graphen der linearen Funktion mit der Gleichung $y = ax + b$. Seine Punkte liegen also wieder auf einer Geraden (Abbildung 110.1).
Für $a = 0$ lautet die Gleichung der linearen Funktion $y = 0 \cdot x + b$, kurz $y = b$. Jedem Wert der unabhängigen Variablen x ist in diesem Fall derselbe Funktionswert zugeordnet; man spricht daher von einer **konstanten Funktion**. Offensichtlich liegen die Punkte des Graphen auf einer zur x-Achse parallelen Geraden (Abbildung 110.2). Damit gilt

Satz 110.1: Die Punkte des Graphen einer linearen Funktion liegen auf einer Geraden.

Man sagt dafür kurz: Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Die Kennzeichnung »linear«* soll darauf hinweisen, dass der Graph einer solchen Funktion eine Gerade ist.
Welche Lage die der Funktion $f\colon x \mapsto ax + b$ entsprechende Gerade im Koordinatensystem hat, hängt von den Zahlen a und b ab. Die geometrische Bedeutung des Faktors a haben wir bereits bei der direkten Proportionalität erkannt: Wenn man x um 1 vergrößert, ändert sich y um a. Ist a positiv, so **steigt** die Gerade von links nach rechts an, und zwar umso stärker, je größer a ist. Man nennt die Zahl a das Steigungsmaß oder kurz die **Steigung** der Geraden.

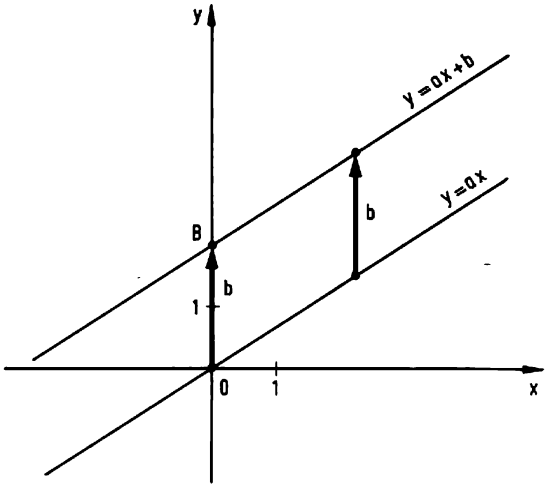


Abb. 110.1 Graph zu $y = ax + b$

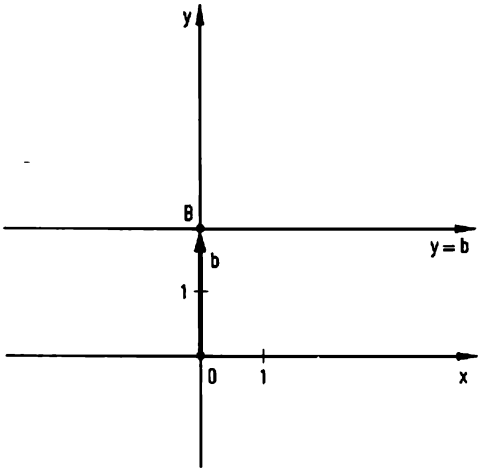


Abb. 110.2 Graph zu $y = b$

* linea (lat.) = Leinenfaden, Linie; »linear« hat hier die Bedeutung »geradlinig« (wie ein gespannter Leinenfaden!)

Im Fall $a < 0$ erhält man eine **fallende** Gerade, die man auch als Gerade mit negativer Steigung bezeichnet. Der Graph einer konstanten Funktion, also eine zur x-Achse parallele Gerade, hat die Steigung 0.
Zur vollständigen Festlegung der Geraden benötigt man außer der durch die Steigung a bestimmten Richtung noch einen Punkt. Besonders leicht findet man die y-Koordinate des zu $x = 0$ gehörenden Punktes: $y = a \cdot 0 + b = b$. Die Gerade muss also den Punkt $B(0|b)$ enthalten; es ist dies ihr Schnittpunkt mit der y-Achse. Man nennt daher die Zahl b den **y-Achsenabschnitt** der Geraden.
Wenn man eine lineare Funktion graphisch darstellen will, genügt es, zwei Wertepaare $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ zu berechnen. Durch die entsprechenden Punkte ist die Gerade eindeutig bestimmt. Im Allgemeinen wird man dabei den Punkt $(0|b)$ bevorzugt benützen. Um eine gute Zeichengenauigkeit zu erreichen, sollte man darauf achten, dass die beiden verwendeten Punkte nicht zu nahe beieinander liegen und möglichst einfache Koordinaten haben.

Beispiel:

Es soll der Graph von f: $x \mapsto 0{,}6x + 1$ gezeichnet werden.
$P(0|1)$ ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Der zu $x = 1$ gehörende Punkt $(1|1{,}6)$ wäre für das Zeichnen der Geraden nicht günstig! Besser eignet sich z. B. $Q(5|4)$. Man gelangt von P nach Q, indem man um fünf Längeneinheiten in x-Richtung zum Punkt $R(5|1)$ und von dort um $5 \cdot 0{,}6 = 3$ Längeneinheiten in y-Richtung weitergeht (Abbildung 111.1). Im Dreieck PRQ gilt $\overline{RQ} : \overline{PR} = 0{,}6$; d. h., das Verhältnis der vertikalen zur horizontalen Kathete ist gleich der Steigung der Geraden PQ.

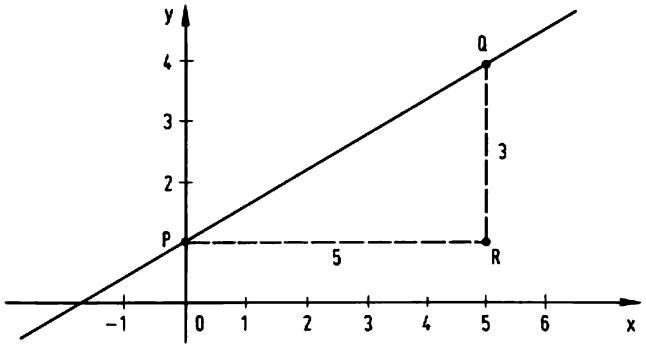


Abb. 111.1 Graph von f: $x \mapsto 0{,}6x + 1$

Sind allgemein $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ zwei verschiedene Punkte des Graphen einer linearen Funktion f: $x \mapsto ax + b$, so folgt aus $y_1 = ax_1 + b$ und $y_2 = ax_2 + b$ die Gleichung $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ und daraus wegen $x_1 \neq x_2$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Man erhält also die Steigung des Graphen, wenn man die Differenz zweier Funktionswerte durch die Differenz der entsprechenden x-Werte dividiert.

Führt man den Punkt $R(x_2 | y_1)$ ein, so entspricht der Differenz $x_2 - x_1$ der Pfeil $\overrightarrow{PR}$ und der Differenz $y_2 - y_1$ der Pfeil $\overrightarrow{RQ}$. Durch die beiden Pfeile und damit durch das Dreieck PRQ ist also die Steigung des Graphen festgelegt. Man nennt deshalb jedes derartige Dreieck ein **Steigungsdreieck** der Geraden. Abbildung 112.1 zeigt Steigungsdreiecke für die Graphen g_1 und g_2 der Funktionen f_1: $x \mapsto \frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$ und f_2: $x \mapsto -0{,}75x + 0{,}5$.

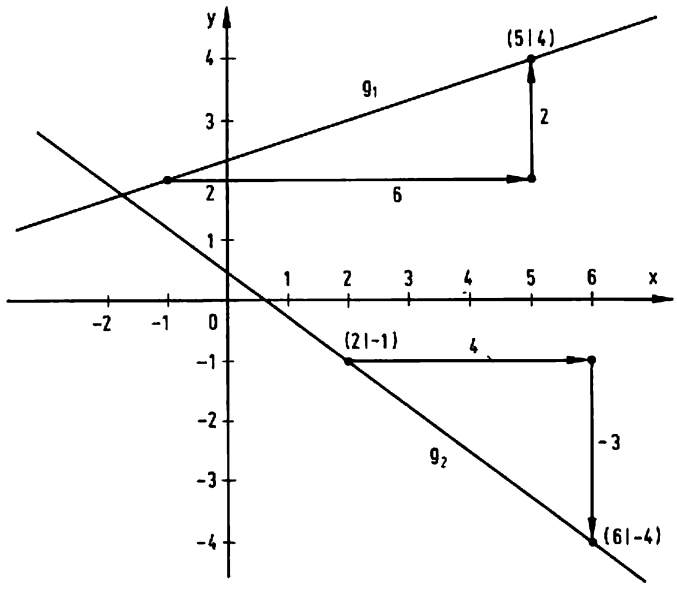


Abb. 112.1 Steigungsdreiecke

Das Ergebnis der vorausgehenden Überlegung lässt sich auch dazu verwenden, zu zwei Punkten $P(x_1 | y_1)$ und $Q(x_2 | y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ die lineare Funktion zu finden, deren Graph die Gerade PQ ist. In der gesuchten Funktionsgleichung $y = ax + b$ muss nämlich $a = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$ sein. Die jetzt noch unbekannte Zahl b erhält man aus der Bedingung, dass die Koordinaten von P (oder Q) die Funktionsgleichung erfüllen müssen.

Beispiel:

Gegeben sind die Punkte $P(-2|1)$ und $Q(3|5)$.
Gesucht ist die Funktionsgleichung $y = ax + b$ der linearen Funktion, deren Graph die Gerade PQ ist.

Für die Steigung a gilt $a = \dfrac{5-1}{3-(-2)} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$; somit erhält man $y = 0{,}8x + b$.

Da P ein Punkt des Graphen ist, müssen die Koordinaten von P, nämlich $x = -2$ und $y = 1$, die Funktionsgleichung erfüllen; es gilt daher

$$1 = 0{,}8(-2) + b \Leftrightarrow b = 2{,}6.$$

Ergebnis: $y = 0{,}8x + 2{,}6$.

Aufgaben

1. Durch welche der folgenden Gleichungen wird eine lineare Funktion $f\colon x \mapsto y$ beschrieben?

   a) $y = 3 - 8x$ **b)** $y = 2 \cdot \frac{1}{x} - 7$ **c)** $y - 9 = 3(x - 3)$

   d) $y = |1{,}5x + 6|$ **e)** $y = \frac{12 - 5x}{12 - 5}$ **f)** $y + 2x = (4x - 5) : 2$

2. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen $f\colon x \mapsto y$ im Intervall $[-5; 5]$.

   a) $y = 2x + 1$ **b)** $y = 2x - 1$ **c)** $y = 2(x + 1)$
   d) $y = -x + 2$ **e)** $y = -x - 0{,}5$ **f)** $y = 0{,}7x$
   g) $y = 0{,}7x - 1{,}5$ **h)** $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$ **i)** $y = -2$

3. Durch $x \mapsto 0{,}5x + b$ ist für jedes $b \in \mathbb{Q}$ eine lineare Funktion definiert. Zeichne die Graphen für $b = 0$, $b = -2$ und $b = 1$.
   Beschreibe die Menge aller Graphen, die man erhält, wenn b alle rationalen Zahlen durchläuft.

•4. Durch $x \mapsto ax + 1$ ist für jedes $a \in \mathbb{Q}$ eine lineare Funktion definiert. Zeichne die Graphen für $a = 0$, $a = -2$ und $a = 1$.
   Beschreibe die Menge aller Graphen, die man erhält, wenn a alle rationalen Zahlen durchläuft.

5. Welche Funktion $f\colon x \mapsto y$ hat als Graphen die Winkelhalbierende
   a) des 1. und 3. Quadranten, **b)** des 2. und 4. Quadranten?
   Gib jeweils die Funktionsgleichung an.

6. Welchen Wert muss man für b wählen, damit der Graph der Funktion $f\colon x \mapsto -x + b$ durch den folgenden Punkt geht? Zeichne das Schaubild.
   a) $P(1|4)$ **b)** $Q(-2\frac{1}{3}|\frac{1}{5})$ **c)** $R(-1{,}8|-2{,}1)$ **d)** $S(1{,}9|-\frac{7}{8})$

7. Bestimme bei der Funktion $f\colon x \mapsto ax + 2$ den Koeffizienten a so, dass ihr Graph durch den angegebenen Punkt geht. Zeichne den Graphen.

   a) $A(4|3)$ **b)** $B(-2|4)$ **c)** $C(3{,}5|2)$
   d) $D(\frac{5}{6}|0)$ **e)** $E(-5|-1)$ **f)** $F(-3|-5)$

•8. Bestimme die Gleichung derjenigen linearen Funktion, deren Graph das folgende Punktepaar enthält:

   a) $P(1|-1)$, $Q(4|5)$ **b)** $P(-4|1)$, $Q(2|-0{,}5)$
   c) $P(-3|0)$, $Q(6|6)$ **d)** $P(-2|-1{,}5)$, $Q(4|-1{,}5)$
   e) $P(0|-0{,}8)$, $Q(4|4)$ **f)** $P(1{,}5|0)$, $Q(6|-2{,}5)$

•**9.** Ergänze die folgende Tabelle so, dass eine Wertetabelle einer linearen Funktion entsteht. Wie lautet die Funktionsgleichung?

a)

x	-3	0		$1{,}2$	6
y	$-3{,}5$		$2\frac{1}{3}$		7

b)

x		1	3	7	11
y	14	0		-21	

c)

x	-13	$-3{,}45$	0	$1{,}89$	$3{,}14$
y	$2{,}125$			$\frac{17}{8}$	

•**10.** Prüfe, ob die folgende Wertetabelle zu einer linearen Funktion passt. Wenn ja, gib die Funktionsgleichung an.

a)

x	1	$1{,}25$	$-2{,}5$	$2{,}25$
y	-2	0	-30	8

b)

x	-2	0	-12	8
y	3	$2{,}8$	4	2

11. Zeichne die Gerade g, deute sie als den Graphen einer Funktion und bestimme die Funktionsgleichung.

a) g geht durch $P(-3|-2)$ und ist parallel zur x-Achse.

b) g läuft fallend durch $Q(1|-2)$ und schließt mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein.

c) g ist parallel zum Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto -\frac{5}{7}x + 1$ und enthält den Punkt $R(0|2{,}7)$.

d) g hat die Steigung 1,5 und schneidet den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto 0{,}9x - 1{,}5$ im Punkt $S(5|?)$.

e) Der y-Achsenabschnitt von g ist -3, der x-Achsenabschnitt 5.

12. g sei die Gerade durch $A(0|1)$ und $B(4|4)$.

a) Trage g und das zu [AB] gehörende Steigungsdreieck in ein Koordinatensystem ein und bestimme die Gleichung der zu g gehörenden linearen Funktion.

•**b)** Spiegle g an der x-Achse. Welche Funktion gehört zur Bildgeraden g'?*

•**c)** Spiegle g an der y-Achse und gib die der Bildgeraden g'' entsprechende Funktion an.

d) g''' entstehe durch Spiegeln von g an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Welche Funktion hat g''' als Graphen?

* Striche statt Indizes zur Unterscheidung verwendet als Erster Roger COTES (1682–1716) in seiner 1707 verfassten Arbeit *De Methodo Differentiali Newtonia*, die seiner aber erst 1722 postum erschienenen *Harmonia mensurarum* – »Harmonie der Maße« – beigefügt wurde, sodass eine 1714 in den *Philosophical Transactions* erschienene Abhandlung von Abraham DE MOIVRE (1667–1754) vermutlich die erste Publikation ist, in der Striche benutzt werden. 1747 benützt sie William JONES (1675–1749) und 1748 Leonhard EULER (1707–1783).

13. In welcher möglichst großen Teilmenge T der Definitionsmenge $\mathbb{Q}$ gilt folgende Aussage?

a) Die Funktion f_1: $x \mapsto 4x + 1$ hat in T nur positive Funktionswerte.

b) Die Funktion f_2: $x \mapsto -2{,}5x + 3$ nimmt in T keinen negativen Wert an.

c) Jeder zu $x \in T$ gehörende Punkt des Graphen der Funktion f_3: $x \mapsto -0{,}8x + 3{,}6$ liegt im 1. (2., 3., 4.) Quadranten des Koordinatensystems.

14. Für eine Taxifahrt zahlte man 1987 in München 2,90 DM Grundgebühr und 1,70 DM je gefahrenen Kilometer.

a) Stelle die Fahrkosten (y DM) als Funktion der Fahrstrecke (x km) dar.

b) Ein Fahrgast zahlte 16,50 DM. Wie weit ist er mit dem Taxi gefahren?

15. Herr Knapp benötigt für einen Tag ein Mietauto. Die Verleihfirma verlangt dafür als Grundgebühr 80 €; dazu kommen noch 15 Cent für jeden gefahrenen Kilometer.

a) Herr Knapp legt mit dem Mietauto 324 km zurück. Wie teuer kommt diese Fahrt?

b) Stelle allgemein die Mietkosten (y €) als Funktion der zurückgelegten Strecke (x km) dar.

c) Die Firma bietet denselben Leihwagen wahlweise auch zum festen Tagessatz von 134 € (also ohne Kilometergebühr!) an. Für welche Fahrstrecken ist dieses zweite Angebot günstiger als das erste?

16. Ein Messzylinder wiegt leer 850 g. Sein Hohlraum hat einen Querschnitt von $12\,\text{cm}^2$ und ist 50 cm hoch.

a) Wie schwer ist der Zylinder, wenn er 35 cm hoch mit Wasser gefüllt ist?

b) Berechne die Gesamtmasse m (in g) für eine beliebige Wasserhöhe h (in cm).

c) Wie hängt die Gesamtmasse von der Füllhöhe ab, wenn man Alkohol $\left(\varrho = 0{,}79\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ einfüllt? Bei welcher Höhe hat man gerade 1 kg?

•17. Eine an einem Stativ aufgehängte Schraubenfeder ist in unbelastetem Zustand 16 cm lang. Wenn man ein Massestück von 100 g anhängt, verlängert sie sich um 8 cm.

a) Stelle die Federlänge l (in cm) als Funktion der Belastung m (in g) dar. Welche Masse kann man höchstens anhängen, wenn die Feder maximal auf 80 cm gedehnt werden darf (Elastizitätsgrenze!)?

b) Das obere Ende der Feder wird genau 80 cm über der Tischplatte befestigt. Welchen Abstand d (in cm) von der Tischplatte hat dann das untere Federende bei einer Belastung m? Die zur Belastung verwendeten Massestücke werden auf einen 10 cm hohen Ständer aufgesetzt, der am unteren Federende hängt. Bei welcher Belastung der Feder berührt dieser Ständer gerade die Tischplatte?

5.5 Die indirekte Proportionalität

Neben direkt proportionalen Größenpaaren hast du auch schon solche kennen gelernt, die man *indirekt proportional* nennt.

Beispiel:

Inge hat den Wasserhahn so weit aufgedreht, dass pro Minute 15 Liter Wasser in die Wanne fließen. Es dauert 10 Minuten, bis die gewünschte Wassermenge eingelaufen ist. Wie lange hätte es gedauert, wenn sie den Hahn nur so weit geöffnet hätte, dass in einer Minute 12 (10, 8, 5, ...) Liter zugeflossen wären?
Da die benötigte Wassermenge $10 \cdot 15\,\text{l} = 150\,\text{l}$ beträgt, muss man jeweils 150 l durch die pro Minute einfließende Wassermenge teilen, um zu erfahren, wie viel Minuten der Hahn geöffnet bleiben muss. Man erhält folgende Tabelle:

Zufluss pro Min. in l	15	12	10	8	5	...
Öffnungszeit in Min.	10	$12\frac{1}{2}$	15	$18\frac{3}{4}$	30	...

Bezeichnet man allgemein die pro Minute zufließende Wassermenge mit x l und die für 150 l benötigte Zeit mit y Minuten, so gilt $y = 150 : x$. Damit ist jedem $x \in \mathbb{Q}^+$ eindeutig ein y-Wert zugeordnet, man hat also folgende Funktion:

$f\colon x \mapsto y \quad \text{mit} \quad y = 150 : x, \quad x \in \mathbb{Q}^+.$

Diese Funktion hat die besondere Eigenschaft, dass das *Produkt* einander entsprechender x- und y-Werte konstant ist; es gilt ja $x \cdot y = 150$. Die Gleichung $y = 150 : x$ kann man auch in der Form $y = 150 \cdot \frac{1}{x}$ schreiben. Das bedeutet aber, dass zwischen y und dem *Kehrwert* von x eine direkte Proportionalität besteht. Man sagt dazu kürzer: x und y sind zueinander *indirekt proportional.* Auch die Sprechweise *umgekehrt proportional* wird oft verwendet.

Definition 116.1: Eine Funktion, deren Zuordnungsvorschrift durch eine Gleichung der Form $y = \frac{a}{x}$ mit $a \neq 0$ beschrieben werden kann, heißt **indirekte Proportionalität**.
Die Konstante a heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Am Funktionsterm erkennt man, dass die Zahl 0 nicht zur Definitionsmenge einer indirekten Proportionalität gehören kann. Wegen $a \neq 0$ gilt stets auch $y \neq 0$.
Für zwei Wertepaare $(x_1 | y_1)$ und $(x_2 | y_2)$ einer indirekten Proportionalität folgt aus der Funktionsgleichung

$$x_1 y_1 = a \quad \text{und} \quad x_2 y_2 = a, \quad \text{also} \quad x_1 y_1 = x_2 y_2$$

und daraus durch Division mit $x_1 y_2$

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1 \quad \text{oder} \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Damit gilt:

Satz 117.1: Bei einer indirekten Proportionalität verhalten sich die y-Werte umgekehrt wie die zugehörigen x-Werte. Das Produkt $x \cdot y$ ist konstant, und zwar gleich dem Proportionalitätsfaktor.

Um den Graphen einer indirekten Proportionalität zu untersuchen, betrachten wir zunächst das

Beispiel: $f\colon x \mapsto y$ mit $y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Wertetabelle:

x	...	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	...	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
y	...	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	...	...	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

Die zu diesen Tabellenwerten gehörenden Punkte sind in Abbildung 117.1 eingezeichnet. Natürlich liegen dazwischen jeweils noch unendlich viele weitere Punkte. Alle Punkte des Graphen sind offensichtlich auf einer gekrümmten Linie angeordnet. Abbildung 117.2 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt mit den Punkten zu den x-Werten 0,5; 0,6; ...; 2,0.

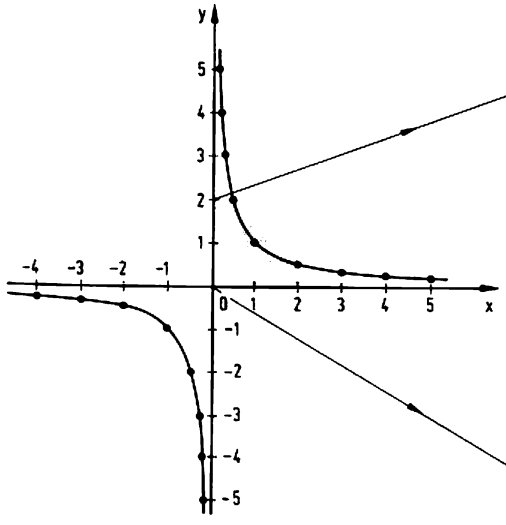


Abb. 117.1 Graph von $y = \frac{1}{x}$

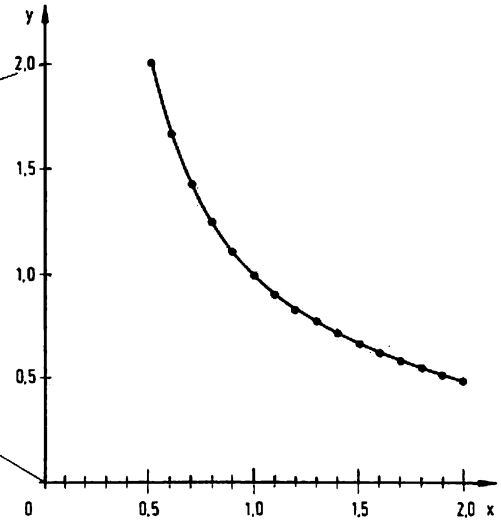


Abb. 117.2 Ausschnittsvergrößerung von Abbildung 117.1

Der Graph einer indirekten Proportionalität mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ unterscheidet sich von dem in Abbildung 117.1 gezeigten nur darin, dass die y-Koordinaten mit dem Faktor a multipliziert sind. Für $a > 0$ liegen die beiden Kurventeile wieder im 1. und 3., für $a < 0$ im 2. und 4. Quadranten. Jeden dieser Graphen bezeichnet man als (gleichseitige) **Hyperbel***, die beiden Teile, in welche er wegen der Definitionslücke 0 zerfällt, als **Äste** der Hyperbel.
Der Graph einer indirekten Proportionalität ist stets punktsymmetrisch zu $O(0|0)$. Aus $y = \frac{a}{x}$ folgt nämlich $-y = \frac{a}{-x}$. Daher ist mit $P(x|y)$ auch $P'(-x|-y)$ ein Punkt des Graphen. Solche Punkte P und P′ liegen aber symmetrisch zu $O(0|0)$ (vgl. Aufgabe 119/**6**). Bei der Spiegelung an $O(0|0)$ werden die beiden Hyperbeläste aufeinander abgebildet.

Aufgaben

1. Gehört die folgende Wertetabelle zu einer indirekten Proportionalität? Gib, falls dies zutrifft, den Proportionalitätsfaktor und die Funktionsgleichung an.

a)

x	3	−6	2	−9	−1	−18
y	−6	3	9	−2	18	1

b)

x	5	3	0,5	−2	−8	−15
y	−2	$-3\frac{1}{3}$	−20	5	1,25	$\frac{2}{3}$

c)

x	4	2,4	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0,3	$-\frac{8}{9}$
y	0,36	0,6	1,08	8,64	−4,8	−1,62

2. Übertrage die folgenden Tabellen in dein Heft und ergänze sie zu Wertetabellen von umgekehrten Proportionalitäten. Gib jeweils auch die Funktionsgleichung an.

a)

x			1	−1	−2
y	3	2	6		

b)

x	0,25	1,2		2,7	
y	−3		1,2	-	450

c)

x	−5	$-3\frac{1}{3}$		$\frac{32}{41}$			$6\frac{2}{3}$
y			−8		1,44	$5\frac{5}{9}$	2,4

3. Zeichne den Graphen der durch die folgende Gleichung gegebenen Funktion f: $x \mapsto y$.

a) $y = -\frac{2}{x}$ **b)** $y = \frac{1}{2x}$ **c)** $y = (-3):(-x)$ **d)** $y = \frac{6 - 2{,}5^2}{0{,}1x}$

* *ὑπερβολή* (hyperbolé) = *Überschuss*. Der Name stammt von APOLLONIOS von Perge (etwa 262 bis 190 v. Chr.).

4. Gib die Gleichung der indirekten Proportionalität an, deren Graph den Punkt P enthält und zeichne den Graphen.

a) $P(2|3)$ **b)** $P(2|-3)$ **c)** $P(-5|0{,}2)$ **d)** $P(-4|-\frac{1}{8})$

•**5.** **a)** Trage in ein Koordinatensystem einen Punkt $P(a|b)$ mit $a > 0$ und dazu den Punkt $P'(-a|-b)$ ein. Beweise, dass der Ursprung $O(0|0)$ der Mittelpunkt der Strecke $[PP']$ ist.
(Verwende, falls $b \neq 0$, z. B. die Dreiecke OPP_0 und $OP'P_0'$ mit $P_0(a|0)$, $P_0'(-a|0)$.)

b) Begründe nun, dass der Graph einer indirekten Proportionalität punktsymmetrisch bezüglich $O(0|0)$ ist.

c) Ist auch der Graph einer direkten Proportionalität punktsymmetrisch zu $O(0|0)$?

6. Zeichne den Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{2}{x}$ und spiegle ihn

a) an der x-Achse, **b)** an der y-Achse.

Zu welcher Funktion gehört jeweils der gespiegelte Graph?

••**7.** **a)** Trage einen Punkt $P(u|v)$ mit $u > v > 0$ sowie den Punkt $P'(v|u)$ in ein Koordinatensystem ein. Beweise, dass P und P′ symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegen.
(Benütze z. B. die Dreiecke OP_0P und $OP_0'P'$ mit $P_0(u|0)$ und $P_0'(0|u)$.)

b) Begründe: Der Graph einer indirekten Proportionalität ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.

c) Auch die Winkelhalbierende des 2. und 4. Quadranten ist Symmetrieachse des Graphen einer umgekehrten Proportionalität. Begründung!

8. **a)** Der Graph einer indirekten Proportionalität hat die besondere Eigenschaft, dass sich jeder seiner Äste sowohl an die x-Achse als auch an die y-Achse *anschmiegt*.

Erkläre diese Ausdrucksweise am Beispiel $y = \frac{1}{x}$ (Abbildung 117.1).

b) Wie groß muss bei einem Punkt des Graphen zu $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$,

1) die Abszisse sein, damit sein Abstand von der x-Achse
2) die Ordinate sein, damit sein Abstand von der y-Achse
kleiner als 0,01 wird?

9. Bei fünf Rechtecken, die alle den Flächeninhalt $A = 12\,\text{cm}^2$ haben, sind die Grundlinien 3 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm und 10 cm lang. Berechne die Höhen dieser Rechtecke. Welche Proportionalität besteht zwischen Grundlinie und Höhe? Gib die Gleichung und die Definitionsmenge der Funktion an.

10. Ein glühender Eisenquader von 2 dm^2 Querschnitt und 1 m Länge wird in einem Walzwerk verformt.

a) Nach mehreren Bearbeitungsschritten ist ein Quader von 2,5 m Länge entstanden. Wie groß ist sein Querschnitt?

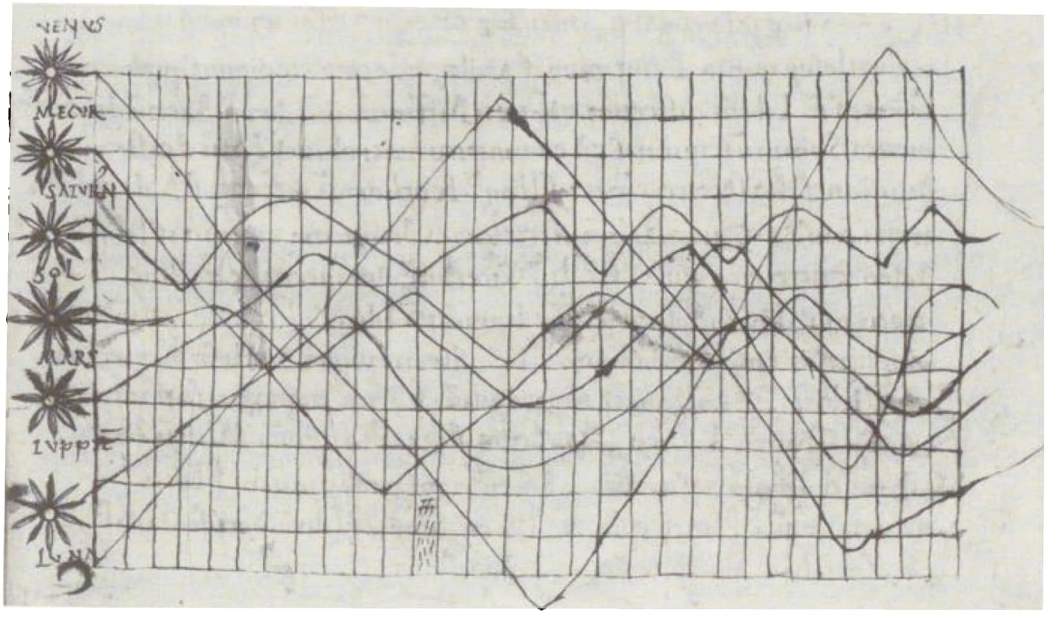
b) Als Endform soll eine Stange von 25 cm^2 Querschnitt hergestellt werden. Welche Länge erhält sie?

11. Ein Verkehrsflugzeug benötigt für eine bestimmte Flugstrecke $1\frac{1}{4}$ h. Für ein Sportflugzeug, dessen Geschwindigkeit um 150 km/h kleiner ist, verlängert sich die Flugzeit für dieselbe Strecke um 20 Minuten.
Wie lang ist die Flugstrecke? Mit welchen Geschwindigkeiten fliegen die Flugzeuge?

12. Das Problem des Pfennigbrotes aus dem *Algorismus Ratisbonensis* (vor 1450): Wenn ein Scheffel Weizen 14 Groschen kostet, dann wird ein Brot, das für 1 Pf verkauft wird, 9 Lot schwer gebacken. Wenn der Scheffel aber teurer wird, nämlich wenn er 30 Groschen kostet, wie schwer, so wird gefragt, muss dann das 1-Pf-Brot gebacken werden?*

* Mit diesem Trick des konstanten Brotpreises kommt dem Käufer die Verteuerung weniger zum Bewusstsein. Eine gesetzliche Regulierung dafür erscheint bereits um 794 in einer karolingischen Anordnung. – Scheffel ist ein altes deutsches Hohlmaß für Trockengüter, das in Oldenburg 22,8 l und in Bayern 222 l betrug. Das Lot schwankte zwischen 15,6 g und 16,6 g.

6 Lineare Gleichungssysteme



Der älteste bekannte Versuch, die zeitliche Veränderung von Werten graphisch darzustellen

Vermutlich handelt es sich um eine Darstellung der Bewegung der 5 damals bekannten Planeten (Venus, Merkur, Saturn, Mars und Jupiter), der Sonne und des Mondes bezüglich der Ekliptik, d. h. des Kreises, in dem die Erdbahnebene die Himmelskugel schneidet*. Nach rechts ist die Zeit abgetragen, wobei für jeden Himmelskörper die Zeiteinteilung eine andere ist. Die Hochwerte stellen die sog. ekliptikale Breite dar; die mittlere waagrechte Linie ist die Ekliptik selbst. Die Darstellung stammt aus dem 10. oder 11. Jh.: sie ist enthalten im *De cursu per zodiacum* – »Über den Lauf durch den Tierkreis«. Das Gitternetz misst im Original 15,3 cm × 8,9 cm. Cod. lat. mon. 14436

* Der Name rührt davon her, dass sich auf diesem Kreis die Eklipsen, d. h. die Sonnen- und Mondfinsternisse ereignen. – ἔκλειψις (ékleipsis) = Ausbleiben, Verschwinden.

6 Lineare Gleichungssysteme

6.1 Gleichungen mit mehreren Unbekannten

Bisher ging es beim Lösen von Gleichungen fast immer darum, den Wert einer einzigen zunächst unbekannten Zahl zu bestimmen. Es gibt aber auch viele Aufgaben, bei denen nach zwei oder mehr Zahlen gefragt wird.

Beispiel 1:

Gesucht sind zwei Zahlen mit der Summe 100.
Es wird dir leicht gelingen, solche Zahlen zu finden, zum Beispiel 50 und 50, aber auch 0 und 100, 1 und 99, $4\frac{1}{7}$ und $95\frac{6}{7}$, – 200 und 300 usw. Es gibt offensichtlich unendlich viele solche Zahlenpaare. Man kann eine der beiden Zahlen völlig willkürlich wählen; die andere liegt dann fest. Bezeichnet man die eine Zahl mit x, die andere mit y, so muss folgende Gleichung gelten:

$x + y = 100.$

Bei Beispiel 1 handelt es sich um eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Ebenso kann man natürlich auch Gleichungen aufstellen, die noch mehr Unbekannte enthalten.

Beispiele:

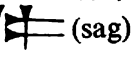
2) $5x - 7y + 3z - 6 = 0$ (Gleichung mit den drei Unbekannten x, y, z)
3) $w + 2x + 3y + z = 7$ (Gleichung mit den vier Unbekannten w, x, y, z)
4) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (Gleichung mit den drei Unbekannten x, y, z)

In allen derartigen Fällen spricht man von Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
Eine Lösung einer Gleichung mit mehreren Unbekannten kann natürlich nicht aus einer einzigen Zahl bestehen. Man muss vielmehr *jede* der auftretenden Unbekannten so durch eine Zahl ersetzen, dass die Gleichung erfüllt ist. Lösungen einer Gleichung mit zwei Unbekannten sind also Zahlenpaare, solche einer Gleichung mit drei Unbekannten Zahlentripel usw.
So sind die Zahlenpaare (50|50), (0|100), (1|99) usw. Lösungen der Gleichung von Beispiel 1.
Die Zahlentripel (0|0|2), (2|1|1) und (1|−1|−2) sind Lösungen der Gleichung von Beispiel 2. Prüfe dies nach und suche noch weitere Lösungen.
Bei einer Lösung kommt es wesentlich auf die Reihenfolge der einzelnen Zahlen an. Zum Beispiel ist (2|1|1) eine Lösung von Beispiel 2, während (1|2|1) keine Lösung darstellt. Denn die Reihenfolge der Zahlen muss genau der (in diesem Fall alphabetischen) Reihenfolge der Unbekannten entsprechen, für

die sie einzusetzen sind. Man spricht daher von geordneten Paaren, geordneten Tripeln usw., allgemein bei n Unbekannten von geordneten n-Tupeln von Zahlen*. Da in der Mathematik die Begriffe Paar, Tripel, ..., n-Tupel nur für geordnete Mengen verwendet werden, verzichten wir in Zukunft auf den Zusatz »geordnet«.

Definition 123.1: Unter einer Lösung einer Gleichung mit n Unbekannten versteht man ein ***n*-Tupel** von Zahlen, das die Gleichung erfüllt, d.h., sie beim Einsetzen zu einer wahren Aussage macht.

**Zur Geschichte

Wie du weißt, ist Algebra vor mehr als 4000 Jahren in Babylon und fast gleichzeitig in Ägypten aus Problemen des Alltags, den sog. Textaufgaben, entstanden. Da nimmt es nicht wunder, dass sich darunter auch Aufgaben finden, zu deren Lösung man mehrerer Unbekannter bedarf. Die Babylonier führten daher zur ersten Unbekannten (usch) = *Länge* noch ein zweite ein, und zwar, was nicht überrascht,  (sag) = *Breite* (Aufgabe 145/**19**). Erstaunlicherweise sind uns von den Ägyptern nur wenige Aufgaben mit 2 Unbekannten überliefert, die überdies von so einfacher Natur sind, dass man die zweite gesuchte Größe sofort durch die erste ausdrücken konnte (Aufgabe 131/**7**), so wie du es auch in der 7. Klasse gemacht hast. Auch die Griechen umgehen fast immer das Rechnen mit mehreren Unbekannten. Zwar spricht DIOPHANT (um 250 n. Chr.) in seinen Aufgaben von der *ersten* (ὁ $\alpha^{o\varsigma}$), der *zweiten* (ὁ $\beta^{o\varsigma}$), der *dritten* (ὁ $\gamma^{o\varsigma}$) usw. – gemeint war immer »Zahl« –, aber er drückt sie alle, oft recht raffiniert, durch seine Unbekannte ς' aus, sodass er doch wieder nur mit einer Gleichung mit einer Unbekannten rechnen muss. Die Idee, für weitere unbekannte Größen eigene Namen und Zeichen einzuführen, hatten $2\frac{1}{2}$ Jahrtausende nach den Babyloniern erst wieder die Inder: Sie gaben ihnen die Namen von Farben. Als Zeichen verwendeten sie die Anfangssilbe. So findet man bei BRAHMAGUPTA (598– nach 665) neben seinem या = *yā* (für die 1. Unbekannte) का = *kā* (von kālika = schwarz), नी = *nī* (von nīlaka = blau), पी = *pī* (von pītaka = gelb) und लो = *lo* (von lohitaka = rot) usw. Das war recht bequem! Umso mehr erstaunt es uns, dass die Araber als gelehrige Schüler der Inder sich fast gar nicht mit Gleichungen mit mehreren Unbekannten beschäftigten. Und da wir Europäer die Schüler der Araber sind, hat es lange gedauert, bis wir aus eigenen Stücken mit mehreren Unbekannten umzugehen lernten. LEONARDO VON PISA, gen. FIBONACCI (um 1170 – nach 1240), benennt sie mit *causa* = *Sache* und *res* = *Ding*. Eine grundlegend neue Idee hatte Michael STIFEL (1487(?)–1567), als er 1544 in seiner *Arithmetica integra* zur Unbekannten 2P noch 1A, 1B, 1C als weitere Unbekannte einführt und mit ihnen sogar rechnet: *3A in 9B, fiunt 27AB*, d.h., 3A · 9B = 27AB. Das bringt den französischen Mönch Johannes BUTEO (1492 Charpey – 1564/72 Romans-

* Diesen Wortbildungen liegen die lateinischen Verhältniszahlen zugrunde. Simplus, duplus, triplus, quadruplus, quintuplus, sextuplus, septuplus und octuplus ... (einmal so groß, zweimal so groß, dreimal so groß, ...) ließen im Deutschen das wenig gebrauchte *Dupel* für ein Paar und die Wörter *Tripel, Quadrupel, Quintupel, Sextupel* usw. entstehen, denen man dann verallgemeinernd das *n-Tupel* anschloss.

sur-Isère) dazu, gleich mit A, B und C zu rechnen (Aufgabe 149/**20**). Simon STEVIN (1548–1620) greift gewissermaßen wieder DIOPHANT auf, wenn er 1585 in seiner *L'arithmétique* die Unbekannten der Reihe nach mit ①, *sec* ①, *ter* ①, *quart* ① bezeichnet. 1591 erzielt jedoch François VIÈTE (1540–1603) mit seiner *In artem analyticem Isagoge* den Durchbruch: Sowohl für bekannte wie auch für unbekannte Größen werden Buchstaben verwendet, und es wird mit ihnen gerechnet! Sein an sich vernünftiger Vorschlag, für die Unbekannten die Vokale A, E, I, O, U und Y, für die Bekannten die Konsonanten zu verwenden, wird durch die bequemere Schreibweise abgelöst, die 1637 René DESCARTES (1596–1650) in seiner *La Géométrie* ohne weitere Begründung einführte, nämlich, bekannte Größen mit $a, b, c \ldots$, unbekannte mit x, y, z zu bezeichnen, wobei er anfänglich noch zur logischen Reihenfolge z, y, x neigte.

Aufgaben

1. Welche der folgenden Zahlenpaare sind Lösungen der Gleichung $2x - 3y + 1 = 0$?
$(0|0)$, $(2|-5)$, $(4|3)$, $(3|4)$, $(0|\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{2}|0)$, $(-\frac{1}{2}|\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2}|0)$.

2. Fülle in den Klammern die leeren Stellen so aus, dass die entstehenden Zahlenpaare Lösungen der Gleichung $y = 3x + 5$ sind.
$(1|\ )$, $(\ |20)$, $(-7|\ )$, $(\frac{1}{3}|\ )$, $(\ |0)$, $(\ |5)$, $(1{,}2|\ )$, $(\ |5{,}7)$.

3. Welche der folgenden Zahlentripel sind Lösungen der Gleichung $5x - 2y = 2z + 4$?
$(0|0|0)$, $(4|3|5)$, $(4|5|3)$, $(5|4|3)$, $(-2|5|-12)$, $(-2|-12|5)$, $(2|12|5)$, $(2|12|-9)$.

4. Fülle die leeren Stellen so aus, dass die entstehenden Zahlentripel Lösungen der Gleichung $7x - 6y - z = 0$ sind.
$(0|\ |0)$, $(0|1|\ )$, $(\ |1|1)$, $(\ |-1|-13)$, $(5|-2{,}5|\ )$, $(\frac{1}{3}|\ |-\frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}|-\frac{2}{3}|\ )$, $(\ |\frac{1}{3}|-\frac{2}{3})$.

5. Bestimme für die Gleichung $w + 2x - 9y + 3z = 6$ eine Lösung,
a) in der keine Null vorkommt, **b)** die nur ganze Zahlen enthält,
c) die nur natürliche Zahlen, **d)** die nur negative Zahlen enthält.

6. Wie lauten sämtliche aus nichtnegativen ganzen Zahlen bestehenden Lösungen der Gleichung $x + y + z = 1$?

7. Bestimme diejenige Lösung der Gleichung $4x - 11y - 3z = 20$, die aus drei gleichen Zahlen besteht.

8. Bestimme sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen:
a) $(x-1)^2 + y^2 = 0$ **b)** $(x-3)^4 + (y+1)^2 + (z-0{,}5)^6 = 0$

•**9.** Untersuche die Lösbarkeit der folgenden Gleichungen, wobei als Grundmenge zuerst die Menge der ganzen, dann die Menge der rationalen Zahlen gewählt sei.
a) $3x = 7$ **b)** $\dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{2}{5}$ **c)** $x^2 + 1 = 0$ **d)** $2x + 4y = 1$ **e)** $7x - 11y = 1$

6.2 Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit mehreren Unbekannten

In den Gleichungen der Beispiele 1, 2 und 3 des vorausgehenden Abschnitts kommen die Unbekannten jeweils nur in der ersten Potenz vor. Solche Gleichungen bezeichnet man bekanntlich als linear. Allgemein hat also eine lineare Gleichung mit zwei Unbekannten die Gestalt $ax + by = c$, mit drei Unbekannten die Gestalt $ax + by + cz = d$, usw. Man nennt a, b, c bzw. a, b, c, d die Koeffizienten der Gleichung.
Eine Gleichung stellt die Aufgabe, ihre sämtlichen Lösungen zu bestimmen. Diese bilden die Lösungsmenge L.

Beispiele:

$$3x - 5y = 1 \qquad L = \{(x|y)|3x - 5y = 1\}$$
$$5x - 7y + 3z - 6 = 0 \qquad L = \{(x|y|z)|5x - 7y + 3z - 6 = 0\}$$

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung überblickt man am besten, wenn man die Gleichung nach einer der Unbekannten auflöst. Dazu benötigt man nur die Addition eines Terms und die Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Zahl. Bei diesen Schritten handelt es sich, wie wir schon wissen, um Äquivalenzumformungen, bei denen sich also die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 5x - 3y + 2z &= 7 && \| -5x + 3y \\ 2z &= -5x + 3y + 7 && \| \cdot \tfrac{1}{2} \\ z &= -\tfrac{5}{2}x + \tfrac{3}{2}y + \tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, dass man für x und y beliebige Zahlen wählen darf; der dazugehörige Wert für z ist dann durch die Gleichung eindeutig bestimmt. So ergibt sich etwa
für $x = 2$ und $y = 4$ der Wert $z = \frac{9}{2}$, also die Lösung $(2|4|\frac{9}{2})$,
für $x = -1$ und $y = 10$ der Wert $z = 21$, also die Lösung $(-1|10|21)$,
für $x = 0$ und $y = \frac{1}{6}$ der Wert $z = \frac{15}{4}$, also die Lösung $(0|\frac{1}{6}|\frac{15}{4})$, usw.
Man kann die Lösungsmenge dieser Gleichung also auch so schreiben:
$L = \{(x|y|z)|x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q} \wedge z = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\}$

In ganz entsprechender Weise lässt sich die Lösungsmenge jeder linearen Gleichung schreiben.
Bei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten kann man die Lösungsmenge in einfacher Weise geometrisch veranschaulichen. Man deutet jede Lösung $(x|y)$ als Punkt $(x|y)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die so erhaltene Punktmenge ist der Graph der durch die Gleichung $ax + by = c$ beschriebenen Relation. Falls der Koeffizient b von null verschieden ist, kann man die Gleichung nach y auflösen und die Lösungsmenge in der Form

$L = \left\{(x|y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \wedge y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right\}$ darstellen. Daraus erkennt man, dass L aus allen Wertepaaren der linearen Funktion f: $x \mapsto -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ besteht, die sich als Punkte einer Geraden graphisch darstellen lassen.
Im Falle $b = 0 \wedge a \neq 0$ kann man die Gleichung nach x auflösen und erhält $x = \frac{0}{a}y + \frac{c}{a}$, also $x = \frac{c}{a}$. Die ausführlichere Schreibweise zeigt, dass man für y jede beliebige Zahl wählen kann; der davon unabhängige x-Wert liegt eindeutig fest. Es gilt also $L = \{(x|y) \,|\, x = \frac{c}{a} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$. Man erkennt leicht, dass die entsprechenden Punkte auf einer Parallelen zur y-Achse, also wieder auf einer Geraden liegen.
Der Vollständigkeit halber wollen wir noch den praktisch unbedeutenden Fall $a = b = 0$, also die Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ betrachten. Die linke Seite ist für beliebige Werte von x und y stets null. Falls $c \neq 0$ gilt, liegt also immer eine falsche Aussage vor. Ist jedoch $c = 0$, so ist jedes Paar $(x|y)$ eine Lösung.
Der Lösungsbaum von Abbildung 126.1 veranschaulicht diese Fallunterscheidung.

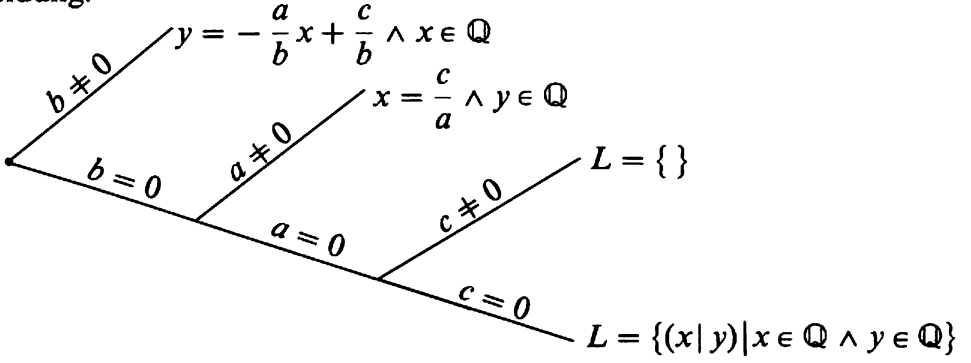


Abb. 126.1 Lösungsbaum zu $ax + by = c$

Wir halten fest:

Satz 126.1: Eine lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $(a|b) \neq (0|0)$ beschreibt eine Relation, deren Graph aus Punkten einer Geraden besteht.

Dieser Satz bedeutet, dass zu jeder Gleichung $ax + by = c$, bei der mindestens einer der Koeffizienten bei x und y von 0 verschieden ist, im Koordinatensystem eine Gerade g gehört. Man sagt auch, die Gerade g habe die Gleichung $ax + by = c$. Abbildung 127.1 zeigt die Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 4 = 0$, also die Gerade mit dieser Gleichung. Um sie zu zeichnen, genügt es, zwei Lösungen zu berechnen und die entsprechenden Punkte in das Koordinatensystem einzutragen. Zweckmäßigerweise bestimmt man zur Kontrolle noch einen dritten Punkt.

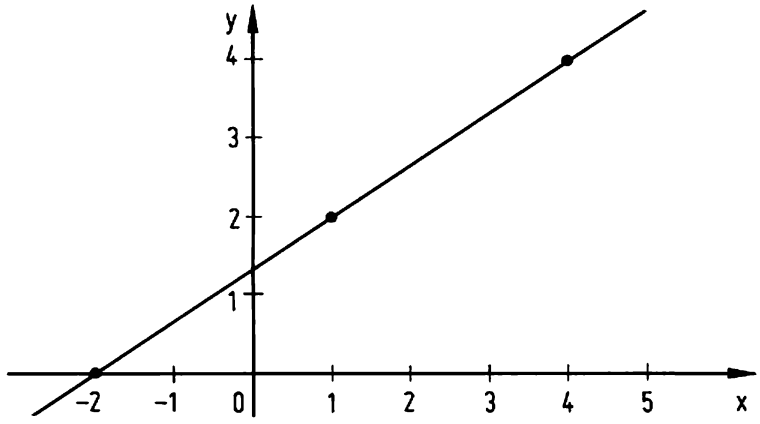


Abb. 127.1 Veranschaulichung der Lösungsmenge der Gleichung $2x - 3y + 4 = 0$

Aufgaben

1. Veranschauliche die Lösungsmengen folgender Gleichungen in einem kartesischen Koordinatensystem:
   a) $x + 2y - 3 = 0$ **b)** $5x - 3y = 0$ **c)** $x - 5y - 5 = 0$
   d) $10x + 3y = 20$ **e)** $1{,}2x + 0{,}5y = 0{,}7$ **f)** $3x + 1\frac{5}{7} \cdot y = -6$

2. Unter den Lösungen einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kommen im Allgemeinen solche von der Form $(s\,|\,0)$ bzw. $(0\,|\,t)$ vor. Welche besondere Lage im Koordinatensystem haben die zugehörigen Punkte?

3. Was kann man über die Koeffizienten der Gleichung $ax + by + c = 0$ aussagen, wenn ihre Lösungsmenge das Paar $(0\,|\,0)$ enthält?

4. Veranschauliche die Lösungsmenge der Gleichung $x + y = 1$. Gibt es Lösungen dieser Gleichung mit der Eigenschaft
   a) $x > 0 \wedge y > 0$ **b)** $x < 0 \wedge y < 0$
   c) $x \geqq 1 \wedge y \geqq 1$ **d)** $|x| > 1 \wedge |y| > 1$?

5. Es besteht ein begrifflicher Unterschied zwischen der Gleichung $x = 1$ (Gleichung mit *einer* Unbekannten) und der Gleichung $x + 0 \cdot y = 1$ (Gleichung mit *zwei* Unbekannten). Wie zeigt sich dieser Unterschied in den Lösungsmengen? Veranschauliche die Lösungsmengen der Gleichungen $x + 0 \cdot y = 1$ und $0 \cdot x + y = 2$.

6. Zeige, dass die folgende Gleichung zu einer linearen Gleichung äquivalent ist, und stelle die Lösungsmenge graphisch dar.
   a) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = (5 - y)^2$
   b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x^2 + 2) + (y^2 + 3)$

7. Beschreibe die Lösungsmengen möglichst übersichtlich:
   a) $x + y + z = 0$ **b)** $x + 3y - 7z = 8$ **c)** $2x + y = 3y + 4z$
   d) $2(x - 3) + 4(x + y) = 7(2x - y)$ **e)** $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2$

8. Für wie viele Unbekannte muss man bei den folgenden Gleichungen Zahlen vorschreiben, damit eine Lösung eindeutig bestimmt ist?

a) $4x - 2{,}7y + 13z = 0$ **b)** $11w - 3x - 0{,}1y - 12z = 17$

•**9.** Um die Lösungsmenge L_1 der Gleichung $\frac{2x + y + 1}{x - y} = 1$ zu bestimmen, ist es nahe liegend, sie auf die Form $2x + y + 1 = x - y$ zu bringen. Da jede Lösung der ersten Gleichung auch die zweite Gleichung erfüllt, ist L_1 in der Lösungsmenge L_2 der zweiten Gleichung enthalten. Lösungen der zweiten Gleichung sind aber nur dann auch Lösungen der ersten, wenn für sie der Nenner $x - y$ von null verschieden ist. Man erhält also L_1 aus L_2, indem man alle Lösungen mit $x - y = 0$ ausschließt. Aus $2x + y + 1 = x - y \Leftrightarrow x = -2y - 1$ folgt $L_2 = \{(x|y) \mid y \in \mathbb{Q} \wedge x = -2y - 1\}$. Die einzige Lösung aus L_2 mit $x - y = 0$ oder $x = y$ ist $x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}$. Es ergibt sich daher

$L_1 = \{(x|y) \mid y \neq -\frac{1}{3} \wedge x = -2y - 1\}$.

Bestimme in derselben Weise die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\frac{x + y}{x - 1} = 5$ **b)** $\frac{8x - y}{2y + 3} = 0$

c) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y + 2} = 0$ **d)** $\frac{x^2 + 2x - y}{x^2 + 1} = 1$

6.3 Lineare Gleichungssysteme

Bei Aufgaben mit mehreren Unbekannten sind meistens auch mehrere Bedingungen zu beachten, welche die gesuchten Zahlen erfüllen müssen.

Beispiel:

Hans beobachtet in einem Obstgeschäft, wie ein Kunde 3 kg Äpfel und 1 kg Birnen kauft und dafür 7,20 € bezahlt. Ein zweiter Kunde zahlt für 2 kg Äpfel und 5 kg Birnen derselben Sorten 15,20 €. Auf dem Heimweg versucht Hans den Preis für 1 kg jeder Sorte herauszufinden. Um diese nicht ganz leichte Aufgabe mathematisch zu formulieren, bezeichnen wir den Preis für 1 kg Äpfel mit x Cent, den Preis für 1 kg Birnen mit y Cent. Aus den von Hans beobachteten Einkäufen zweier Kunden ergeben sich zwei Bedingungen für x und y.

1. Kunde: $3x + y = 720$
2. Kunde: $2x + 5y = 1520$

Wir erhalten also zwei Gleichungen für x und y. Die gesuchten Zahlen müssen *beide* Gleichungen *zugleich* erfüllen. Man kann diesen Sachver-

halt auch so beschreiben: Gesucht ist ein Zahlenpaar $(x|y)$, das beim Einsetzen die UND-Aussageform

$$(3x + y = 720) \wedge (2x + 5y = 1520)$$

zu einer wahren Aussage macht.
Eine UND-Aussage ist bekanntlich genau dann wahr, wenn jede Teilaussage wahr ist. Zum Beispiel erfüllt das Zahlenpaar $(140|300)$ zwar die erste, jedoch nicht die zweite Gleichung und ist damit keine Lösung unserer Aufgabe.

UND-Verknüpfungen von Bestimmungsgleichungen spielen in der Mathematik eine sehr wichtige Rolle. Man hat daher für sie eine besondere Bezeichnung eingeführt:

Definition 129.1: Eine UND-Verknüpfung von zwei oder mehr Gleichungen für dieselben Unbekannten bezeichnet man als **Gleichungssystem.***
Falls alle Gleichungen linear sind, spricht man von einem **linearen Gleichungssystem.**

Es ist üblich, die einzelnen Gleichungen eines Gleichungssystems übersichtlich untereinander zu schreiben; auf das Verknüpfungszeichen $\wedge$ kann man dabei verzichten. Oft werden die Gleichungen auch noch durchnummeriert.

Beispiele:

1)	I $3x + y = 720$ II $2x + 5y = 1520$	System von zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x, y; linear
2)	I $2x + 5y - z = 0$ II $3x - y + z + 1 = 0$	System von zwei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z; linear
3)	I $x^2 + y^2 = 1$ II $x + y = 1$ III $x - y = 1$	System von drei Gleichungen mit den zwei Unbekannten x, y; nicht linear
4)	I $x + y = 3$ II $x + z = 4$ III $y + z = 5$	System von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, y, z; linear

Wie die Beispiele zeigen, kann in einem Gleichungssystem die Zahl der Gleichungen größer, gleich oder kleiner als die Anzahl der Unbekannten sein. In der Regel wird die Zahl der Gleichungen mit derjenigen der Unbekannten übereinstimmen. Beispiel 4 lässt erkennen, dass nicht alle Unbekannten in jeder Gleichung tatsächlich auftreten müssen. Man hat sich in einem solchen Fall vorzustellen, dass die fehlenden Unbekannten den Koeffizienten null haben.

* *τὸ σύστημα* (tò sýstema) = Vereinigung, Gesamtheit, das Ganze

Unabhängig von der Zahl der Gleichungen besteht eine Lösung eines Gleichungssystems immer aus so vielen Zahlen wie Unbekannte in dem System vorkommen. So ist z. B. $(-1\,|\,1\,|\,3)$ eine Lösung für Beispiel 2; jede der zwei Gleichungen mit drei Unbekannten wird von diesem Tripel erfüllt. Ebenso ist $(1\,|\,0)$ eine Lösung für Beispiel 3, da jede der drei Gleichungen mit zwei Unbekannten dieses Zahlenpaar als Lösung hat. Allgemein ist eine Lösung eines Systems von m Gleichungen für n Unbekannte ein n-Tupel von Zahlen, das jede der m Gleichungen des Systems erfüllt. Es muss also in jeder der Lösungsmengen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ der einzelnen Gleichungen enthalten sein. Umgekehrt ist ein n-Tupel, das Element jeder dieser Mengen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ ist, auch stets eine Lösung des Gleichungssystems. Die Lösungsmenge L des Gleichungssystems ist daher die Schnittmenge der Lösungsmengen sämtlicher Einzelgleichungen:

$$L = L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_m.$$

Bei einem Gleichungssystem für nur zwei Unbekannte kann man die Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen in der Koordinatenebene veranschaulichen und ihre Schnittmenge L auf graphischem Wege bestimmen (graphisches Lösungsverfahren).
Wir kehren zurück zu unserem einleitenden

Beispiel: I $3x + y = 720$
II $2x + 5y = 1520$

Da es sich um ein lineares Gleichungssystem für zwei Unbekannte handelt, kann man die Lösungsmengen L_1 und L_2 der einzelnen Gleichungen durch zwei Geraden g_1 und g_2 graphisch darstellen (Abbildung 130.1). Der Schnittmenge von L_1 und L_2 kann dabei nur der Schnittpunkt S der beiden Geraden entsprechen. Die Abbildung lässt vermuten, dass er die Koordinaten $x = 160$ und $y = 240$ hat. Setzt man diese Werte in I und II ein, so zeigt sich, dass tatsächlich beide Gleichungen erfüllt sind.
Ergebnis: 1 kg Äpfel kostete 1,60 €, 1 kg Birnen 2,40 €.

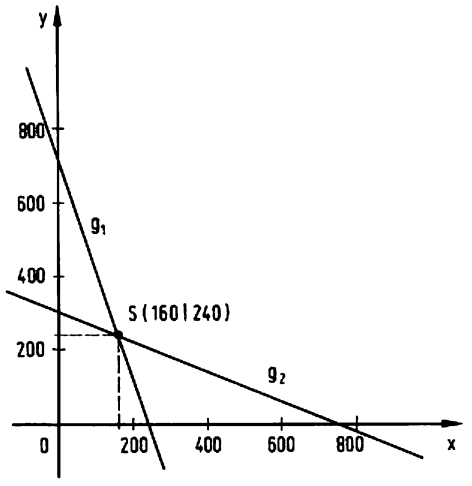


Abb. 130.1 Graphische Lösung* zum nebenstehenden Beispiel

* Den Fachausdruck *graphische Lösung* benutzt 1833 August Leopold CRELLE (1780–1855). – Siehe auch die Fußnote auf Seite 159.

Aufgaben

1. Schreibe die folgenden UND-Verknüpfungen von Gleichungen in der für Gleichungssysteme üblichen Form an.
   a) $(x - 2y + 3 = 0) \wedge (2x = 4y - 5)$
   b) $(5x + 3y - 8z = 10) \wedge (2x = y + 7) \wedge (y = z)$
   c) $(2x + 4y - 1 = 0) \wedge (x - 3y = 7) \wedge (5x + y - 11 = 0)$
   d) $(w + x = 0) \wedge (w + x + y = 0) \wedge (w + x + y + z = 0)$

2. Welche der folgenden Gleichungssysteme sind lineare Systeme?
   a) $3x - 2y = (-1)^2$
   $x + y = |-4|$
   b) $x \cdot (2 - y) + 1 = 0$
   $(3x + y) \cdot 2 - 1 = 0$
   c) $\dfrac{4x + 3y}{(3{,}5)^2} = 2$
   $\dfrac{2x - y}{3} = \dfrac{x + 3y}{2}$
   d) $|x| - 5|y| = -12$
   $2|x| + |y| = 8$

3. Für die Lösungsmengen der zwei Gleichungen eines Systems mit drei Unbekannten gilt
   $L_1 \supset \{(0|1|3), (2|-1|4), (1|1|1), (-7|-2|0)\}$ und
   $L_2 \supset \{(2|2|2), (0|-1|3), (-7|0|-2), (2|-1|4)\}$.
   Welche dieser Tripel sind Lösungen des Gleichungssystems?

4. Für die Lösungsmenge der ersten von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten gilt $L_1 = \{(0|0), (1|2), (2|3), (3|2)\}$. Die zweite Gleichung lautet $y = x + 1$. Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

5. Die folgenden linearen Gleichungssysteme sind von besonders einfacher Bauart. Bestimme ihre Lösungsmengen.
   a) $x = 1$
   $x + y = 2$
   b) $y = 2$
   $x - y = 1$
   c) $3x = 5$
   $6x - 2y = 7$
   d) $11x + 7y = 0$
   $13y = 0$
   $z + 2 = 0$
   e) $x = -1$
   $y = 2$
   $5x - 4y + 2z = 1$
   f) $x = 2$
   $x + y = 2$
   $x + y + z = 0$

6. Ermittle die Lösungsmengen der folgenden nicht linearen Gleichungssysteme.
   a) $x \cdot y = 0$
   $y = 4$
   b) $x \cdot y = 0$
   $x + y = 4$
   c) $x \cdot y = 0$
   $y^2 = 4$
   d) $x \cdot y = 0$
   $x^2 + y^2 = 4$
   e) $(x - 1)(y + 1) = 0$
   $2x - 3y = 5$
   f) $(2x + 8)(5 - 4y) = 0$
   $x \cdot y = 1$

7. Aufgabe 6 des *Papyrus Moskau* (19. Jh. v. Chr., Ägypten):
   Berechne die Länge und Breite eines Rechtecks der Fläche 12, wenn die Breite $\frac{3}{4}$ der Länge ist.

8. Bestimme graphisch die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme und mache durch Einsetzen die Probe.

a) $x - y = -1$
$x + y = 3$

b) $x - 3y - 4 = 0$
$4x - y + 6 = 0$

c) $x + 2y = 0$
$2x - y = 5$

d) $x + y = x - 3$
$4x = y + 5$

e) $\frac{x+y}{x} = 2$
$x + y = 1$

f) $\frac{5x - 2y + 1}{x + y} = 0$
$\frac{2x + 5y - 14}{x + 2} = 1$

Verwende zum Lösen der bei den Aufgaben **9** bis **12** auftretenden Gleichungssysteme das graphische Verfahren und mache die Probe.

9. Vor drei Jahren war Hans fünfmal so alt wie sein Bruder Otto; in drei Jahren wird er gerade doppelt so alt sein. Wie alt sind die beiden heute? (Maßstab: 1 Jahr $\hat{=}$ 5 mm)

10. Zählt man zum Dreifachen einer ersten Zahl das Fünffache einer zweiten, so erhält man -1. Zieht man jedoch vom Fünffachen der ersten das Dreifache der zweiten Zahl ab, so ergibt sich -13. Wie heißen die beiden Zahlen?

•**11.** Addiert man zu einer zweistelligen Zahl ihre Quersumme, so erhält man 50. Vertauscht man dagegen die beiden Ziffern, so erhält man eine um 9 kleinere Zahl. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

12. a) $x + y = 5$
$3x - 2y = 0$
$x - 4y = -10$

b) $4x - 5y = 10$
$2x + y = -2$
$-x + 1{,}25y = 1$

c) $2x + 5y = 6$
$y = 3 - 0{,}4x$
$\frac{1}{3}x + 1 = 2 - \frac{5}{6}y$

6.4 Lösungsverfahren für Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

6.4.1 Bestimmung der Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten kann im Koordinatensystem durch eine Gerade veranschaulicht werden. Daraus lassen sich leicht genauere Angaben über die bei einem System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten möglichen Typen von Lösungsmengen gewinnen. Wir bezeichnen wieder die den Lösungsmengen L_1, L_2 der beiden Gleichungen entsprechenden Geraden mit g_1, g_2. Dann gehört zu jeder Lösung $(x|y)$ des Gleichungssystems ein Punkt $(x|y)$, der sowohl auf g_1 als auch auf g_2 liegen muss. Da nun aber zwei Geraden der Koordinatenebene entweder genau einen oder keinen oder alle ihre Punkte gemeinsam haben, kann es auch nur drei verschiedene Typen von Lösungsmengen geben, nämlich

genau eine Lösung, d.h., $L_1 \cap L_2 = \{(a|b)\}$,
oder keine Lösung, d.h., $L_1 \cap L_2 = \{\ \}$,
oder unendlich viele Lösungen; dann gilt $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.

Zur Bestimmung der Lösungsmenge haben wir bis jetzt nur das graphische Verfahren kennen gelernt. Seine Genauigkeit ist offensichtlich sehr begrenzt. Wir benötigen daher rechnerische Verfahren, die exakte Ergebnisse liefern. Die Lösungsmenge lässt sich besonders leicht angeben, wenn das Gleichungssystem folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad x = a \\ &\text{II} \quad y = b. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $L_1 = \{(x|y) \mid x = a \wedge y \in \mathbb{Q}\}$, $L_2 = \{(x|y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y = b\}$, woraus $L = L_1 \cap L_2 = \{(a|b)\}$ folgt. Die Lösung $(a|b)$ kann natürlich direkt am Gleichungssystem abgelesen werden.
Um die Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems zu bestimmen, wird man versuchen, es durch geeignete Umformung auf die obige einfache Form zu bringen. Dabei kommt es aber wesentlich darauf an, dass das durch Umformung entstandene Gleichungssystem genau dieselben Lösungen besitzt wie das ursprüngliche.
Wir vereinbaren

Definition 133.1: Zwei Gleichungssysteme heißen **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Zum Lösen beliebiger linearer Gleichungssysteme benötigt man die beiden folgenden Umformungsschritte, von denen man leicht zeigen kann, dass sie Äquivalenzumformungen sind:

(A) Man multipliziert eine Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl; die übrigen Gleichungen bleiben ungeändert.

(B) Man verändert eine der Gleichungen dadurch, dass man ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung zu ihr addiert; alle übrigen Gleichungen werden in der ursprünglichen Form beibehalten.

Dass diese beiden Schritte wirklich Äquivalenzumformungen darstellen, sei an einem System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufgezeigt:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad ax + by = e \\ &\text{II} \quad cx + dy = f \end{aligned}$$

Umformung (A): Wir multiplizieren etwa I mit $r \neq 0$ und behalten II bei. Die neuen Gleichungen nennen wir I′, II′.

$$\begin{aligned} &\text{I}' \quad rax + rby = re \qquad && \text{I}' = \text{I} \cdot r \\ &\text{II}' \quad cx + dy = f && \text{II}' = \text{II} \end{aligned}$$

Jede Lösung $(x|y)$ des Systems (I, II) genügt auch dem System (I′, II′); die Lösungsmenge L von (I, II) ist also in der Lösungsmenge L' von (I′, II′) enthalten: $L \subset L'$. Man schreibt in diesem Fall: (I, II) $\Rightarrow$ (I′, II′).

Umgekehrt kann man aber aus (I′, II′) wieder (I, II) gewinnen, indem man I′ mit $\frac{1}{r}$ multipliziert und II′ beibehält. Hier wird die Voraussetzung $r \neq 0$ benötigt! Daher gilt auch: $L' \subset L$ oder (I′, II′) $\Rightarrow$ (I, II). Wegen $L \subset L'$ und $L' \subset L$ ist $L = L'$ und daher (I, II) $\Leftrightarrow$ (I′, II′).

Umformung (B): Wir addieren etwa die mit s multiplizierte Gleichung I zu II und behalten die usprüngliche Gleichung I bei.

I′ $ax + by = e$	I′ = I
II′ $(sa + c)x + (sb + d)y = se + f$	II′ = II + I · s

Jede Lösung von (I, II) ist auch Lösung von (I′, II′); also (I, II) $\Rightarrow$ (I′, II′). Man gelangt umgekehrt vom System (I′, II′) durch einen Rechenschritt derselben Art wieder zu (I, II); addiert man nämlich zu II′ das $(-s)$-fache von I′, so ergibt sich wieder das ursprüngliche System.
Es gilt also auch (I′, II′) $\Rightarrow$ (I, II) und daher (I, II) $\Leftrightarrow$ (I′, II′).

Natürlich gelangt man auch stets wieder zu äquivalenten Systemen, wenn man die Umformungen **(A)** und **(B)** wiederholt ausführt. Die folgenden Beispiele zeigen, wie man damit ein beliebiges System von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf die Endform $x = a, y = b$ bringen kann. Das Entscheidende dabei ist, dass man bei einer Gleichung die Unbekannte x, bei der anderen y **eliminiert***, d.h. beseitigt. Die rechts stehenden Anmerkungen geben jeweils an, wie die Gleichungen des neuen Systems aus denen des vorangehenden entstehen und welcher der Schritte **(A)**, **(B)** dabei angewandt wird. Um die Niederschrift übersichtlich zu gestalten, ziehen wir zwischen zwei äquivalenten Systemen jeweils einen Trennungsstrich.

Beispiel 1:

I	$2x + 7y = 5$	
II	$3x + 8y = 2$	
I′	$2x + 7y = 5$	I′ = I
II′	$-\frac{5}{2}y = -\frac{11}{2}$	II′ = II + I · $(-\frac{3}{2})$; **(B)**
I″	$2x + 7y = 5$	I″ = I′
II″	$y = \frac{11}{5}$	II″ = II′ · $(-\frac{2}{5})$; **(A)**
I‴	$2x = -\frac{52}{5}$	I‴ = I″ + II″ · (-7); **(B)**
II‴	$y = \frac{11}{5}$	II‴ = II″
I⁗	$x = -\frac{26}{5}$	I⁗ = I‴ · $\frac{1}{2}$; **(A)**
II⁗	$y = \frac{11}{5}$	II⁗ = II‴

(I⁗, II⁗) hat die Lösung $(-\frac{26}{5} \mid \frac{11}{5})$.

* eliminare (lat.) = aus dem Hause treiben.
Sowohl Isaac NEWTON (1643–1727) wie auch Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) verwenden gelegentlich *eliminare*, das durch Leonhard EULER (1707–1783) zum üblichen Fachausdruck wird.

Da (I, II) $\Leftrightarrow$ (I'''', II''''), ist dies auch die Lösung von (I, II). Zur Kontrolle auf eventuelle Rechenfehler führen wir aber noch eine Probe durch.

Probe: I $\text{LS} = 2 \cdot (-\frac{26}{5}) + 7 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{52}{5} + \frac{77}{5} = \frac{25}{5} = 5 = \text{RS}$; richtig!

II $\text{LS} = 3 \cdot (-\frac{26}{5}) + 8 \cdot \frac{11}{5} = -\frac{78}{5} + \frac{88}{5} = \frac{10}{5} = 2 = \text{RS}$; richtig!

Damit gilt: $L = \{(-\frac{26}{5} \mid \frac{11}{5})\}$

Beispiel 2:

I	$9x - 21y = 10$	
II	$6x - 14y = 13$	
I'	$9x - 21y = 10$	I' = I
II'	$0 \cdot x + 0 \cdot y = \frac{19}{3}$	II' = II + I $(-\frac{2}{3})$; **(B)**

II' und damit das Gesamtsystem hat keine Lösung; $L = \{\ \}$.

Beispiel 3:

I	$14x + 49y = \frac{3}{2}$	
II	$8x + 28y = \frac{6}{7}$	
I'	$14x + 49y = \frac{3}{2}$	I' = I
II'	$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$	II' = II + I $(-\frac{8}{14})$; **(B)**

II' stellt eine allgemein gültige Gleichung dar. Als Bedingung für x und y bleibt nur die Gleichung I'. Daher gilt:

$L = \{(x \mid y) \mid 14x + 49y = \frac{3}{2}\}$.

Das Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen.

Die vorangehenden Beispiele zeigen, dass bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten jeder der eingangs genannten Lösungsfälle tatsächlich auftreten kann.

6.4.2 Spezielle Lösungsverfahren

Die Umformung eines linearen Gleichungssystems mithilfe der Schritte **(A)** und **(B)** bis zur Ermittlung der Lösungsmenge kann auf sehr unterschiedliche Art erfolgen. Besonders zweckmäßig sind die drei folgenden Verfahren.

1) Das Einsetzungsverfahren

Man löst eine der Gleichungen nach einer Unbekannten auf und ersetzt in der anderen Gleichung diese Unbekannte durch den erhaltenen Term. Außer einfachen Umstellungen durch Termaddition benützt der erste Schritt die Umformung **(A)**, der zweite die Umformung **(B)**.

Beispiel:

I	$3x - y = 7$	
II	$2x + 4y = -1$	
I′	$y = 3x - 7$	folgt aus $\mathrm{I} \cdot (-1)$; **(A)**
II′	$2x + 4y = -1$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}$
I″	$y = 3x - 7$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{I}'$
II″	$2x + 4(3x - 7) = -1 \Leftrightarrow 14x = 27$	folgt aus $\mathrm{II}' + \mathrm{I}' \cdot (-4)$; **(B)**
I‴	$y = 3x - 7$	$\mathrm{I}''' = \mathrm{I}''$
II‴	$x = \frac{27}{14}$	$\mathrm{II}''' = \mathrm{II}'' \cdot \frac{1}{14}$; **(A)**
I⁗	$y = 3 \cdot \frac{27}{14} - 7 \Leftrightarrow y = -\frac{17}{14}$	folgt aus $\mathrm{I}''' + 3 \cdot \mathrm{II}'''$; **(B)**
II⁗	$x = \frac{27}{14}$	$\mathrm{II}'''' = \mathrm{II}'''$

Diese sehr ausführlich gehaltene Niederschrift des Lösungsganges lässt sich stark vereinfachen. Aus (I, II) kann sofort (I″, II″) gewonnen werden und daraus zuerst II⁗, dann I⁗. Die verkürzte Form sieht (mit neuer Nummerierung) so aus:

I	$3x - y = 7$	
II	$2x + 4y = -1$	
I′	$y = 3x - 7$	(I nach y aufgelöst)
II′	$2x + 4(3x - 7) = -1 \Leftrightarrow 14x = 27$	(y in II eingesetzt)
I″	$x = \frac{27}{14}$	(II′ nach x aufgelöst)
II″	$y = 3 \cdot \frac{27}{14} - 7 \Leftrightarrow y = -\frac{17}{14}$	(x in I′ eingesetzt)

$L = \{(\frac{27}{14} \mid -\frac{17}{24})\}$

2) Das Additionsverfahren

Man multipliziert die beiden Gleichungen mit Faktoren, die so gewählt werden, dass in den neuen Gleichungen die Koeffizienten bei einer der beiden Unbekannten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden (Umformung **(A)**). Bei der nachfolgenden Addition dieser Gleichungen (Umformung **(B)**) »verschwindet« diese Unbekannte. Als zweite Gleichung wird eine der Ausgangsgleichungen in der ursprünglichen oder in der multiplizierten Form verwendet.

Beispiel 1:

I	$3x + 2y = 8$	
II	$5x - 3y = -31$	
I′	$9x + 6y = 24$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} \cdot 3$
II′	$10x - 6y = -62$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II} \cdot 2$

I″	$19x = -38$	I″ = I′ + II′
II″	$9x + 6y = 24$	II″ = I′
I‴	$x = -2$	I″ nach x aufgelöst
II‴	$6y = 42$	x in II″ eingesetzt
I⁗	$x = -2$	I⁗ = I‴
II⁗	$y = 7$	II‴ nach y aufgelöst

$L = \{(-2|7)\}$

Eine nahe liegende Abkürzung der Niederschrift erhält man, wenn man die obigen Gleichungen I′, II′ gar nicht anschreibt, sondern sofort ihre Addition ausführt:

I	$3x + 2y = 8$	$\|\cdot 3$	
II	$5x - 3y = -31$	$\|\cdot 2$	
I′	$19x = -38$		I′ = I · 3 + II · 2
II′	$5x - 3y = -31$		II′ = II
I″	$x = -2$		I′ nach x aufgelöst
II″	$-3y = -21$		x in II′ eingesetzt
I‴	$x = -2$		I‴ = I″
II‴	$y = 7$		II″ nach y aufgelöst

$L = \{(-2|7)\}$

Beispiel 2:

I	$1{,}5x - 3{,}5y = -2$	$\|\cdot 6$	
II	$-9x + 21y = 12$	$\|\cdot 1$	
I′	$0 = 0$		I′ = I · 6 + II · 1
II′	$-3x + 7y = 4$		II′ = II · $\frac{1}{3}$ (Vereinfachung von II)
I″	$0 = 0$		I″ = I′
II″	$y = \frac{3x+4}{7}$		II′ nach y aufgelöst

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Man kann x willkürlich wählen und dazu y nach II″ berechnen. Wir wollen dies durch eine (immer zu empfehlende!) Proberechnung überprüfen.

Probe: I $\text{LS} = 1{,}5x - 3{,}5 \cdot \frac{3x+4}{7} = 1{,}5x - \frac{3x+4}{2} = -2 = \text{RS}$; richtig!

II $\text{LS} = -9x + 21 \cdot \frac{3x+4}{7} = -9x + 3(3x+4) = 12 = \text{RS}$; richtig!

Damit gilt: $L = \left\{(x|y) \,\middle|\, x \in \mathbb{Q} \wedge y = \frac{3x+4}{7}\right\}$

Manchmal ist es von Vorteil, das Additionsverfahren zweimal anzuwenden. Wenn es gelingt, zuerst durch Elimination von y auf eine Gleichung der Form $x = a$, dann – wiederum ausgehend von dem ursprünglichen System – entsprechend auf eine Gleichung $y = b$ zu kommen, so ist $(a|b)$ die Lösung des Systems.

Beispiel 3:

I	$6x + 10y = 15$	$\|\cdot 9$	$\|\cdot 10$
II	$20x + 45y = 31$	$\|\cdot(-2)$	$\|\cdot(-3)$
I′	$14x = 73$		$\text{I}' = \text{I}\cdot 9 + \text{II}\cdot(-2)$
II′	$-35y = 57$		$\text{II}' = \text{I}\cdot 10 + \text{II}\cdot(-3)$
I″	$x = \frac{73}{14}$		I′ nach x aufgelöst
II″	$y = -\frac{57}{35}$		II′ nach y aufgelöst

Die Probe zeigt, dass wir damit eine Lösung gefunden haben:

Probe: I $6\cdot\frac{73}{14} + 10\cdot(-\frac{57}{35}) = \frac{219}{7} - \frac{114}{7} = \frac{105}{7} = 15$; richtig!

II $20\cdot\frac{73}{14} + 45\cdot(-\frac{57}{35}) = \frac{730}{7} - \frac{513}{7} = \frac{217}{7} = 31$; richtig!

$L = \{(\frac{73}{14}|-\frac{57}{35})\}$.

Bei den zwei bisher behandelten Lösungsverfahren für lineare Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten geht es jeweils darum, ein äquivalentes System zu finden, in welchem eine Gleichung nur noch eine der beiden Unbekannten enthält. Deren Wert kann damit berechnet und in die andere Gleichung eingesetzt werden. Damit gewinnt man eine Gleichung, in der nur noch die zweite Unbekannte auftritt, sodass auch diese berechnet werden kann. Natürlich vereinfacht sich das Lösungsverfahren sehr, wenn bereits im ursprünglichen System eine Gleichung mit nur einer Unbekannten vorkommt. Solche Aufgaben konnten schon in **6.3** gelöst werden.

**3) Die Cramer'sche Regel

Gibt es für ein System von zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte eine Lösungsformel? Wir wollen versuchen, diese Frage zu beantworten. Ein solches Gleichungssystem hat allgemein die Form

$$\begin{array}{ll} \text{I} & ax + by = e \\ \text{II} & cx + dy = f. \end{array}$$

Dabei sind a, b, c, d, e, f beliebige Zahlen. Da durch sie das Gleichungssystem festgelegt ist, muss dies auch für die Lösungsmenge gelten; d.h., die eventuellen Lösungen müssen sich aus diesen Koeffizienten berechnen lassen. Wir versuchen, das System (I, II) durch Äquivalenzumformungen auf die Gestalt $x = u \wedge y = v$ zu bringen. Dazu benützen wir das doppelte Additionsverfahren:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & ax+by=e & \|\cdot d \qquad \|\cdot(-c) \\ \text{II} & cx+dy=f & \|\cdot(-b) \quad \|\cdot a \\ \hline \text{I}' & (ad-bc)x=de-bf & \text{I}'=\text{I}\cdot d+\text{II}\cdot(-b) \\ \text{II}' & (ad-bc)y=af-ce & \text{II}'=\text{I}\cdot(-c)+\text{II}\cdot a \end{array}$$

Man erkennt, dass es möglich ist, das Eliminieren von y aus der ersten und von x aus der zweiten Gleichung so vorzunehmen, dass bei der jeweils übrig bleibenden Unbekannten derselbe Faktor $ad-bc$ steht. Falls dieser von null verschieden ist, kann man die Rechnung fortsetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}'' & x=\dfrac{de-bf}{ad-bc}, \\ \text{II}'' & y=\dfrac{af-ce}{ad-bc}, \end{array} \qquad \text{falls} \quad ad-bc \neq 0\,.$$

In diesem Fall besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung und die Gleichungen I'', II'' stellen die gesuchte Lösungsformel dar.

Wenn jedoch $ad-bc=0$ gilt, hat das System (I', II') die Form

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 0\cdot x=de-bf \\ \text{II}' & 0\cdot y=af-ce \end{array}$$

und lässt sich nicht auf die Form $x=u \wedge y=v$ bringen. Man kann zeigen, dass es in diesem Fall entweder keine oder unendlich viele Lösungen gibt. Vergleiche dazu die Beispiele 2 und 3 auf Seite 141f.

Die für $ad-bc \neq 0$ gefundene Lösungsformel halten wir fest in

Satz 139.1: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax+by&=e \\ cx+dy&=f \end{aligned}$$

hat für $ad-bc \neq 0$ genau eine Lösung, nämlich

$$x=\frac{de-bf}{ad-bc}, \quad y=\frac{af-ce}{ad-bc}.$$

Der Term $ad-bc$, von dessen Wert es abhängt, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht, heißt **Determinante* des Gleichungssystems**. Die zwei Lösungsformeln in Satz 139.1, nach denen man die Lösung berechnen kann, falls diese Determinante von null verschieden ist, werden als **Cramer'sche Regel**** bezeichnet.

* determinare (lat.) = abgrenzen

** benannt nach Gabriel CRAMER (1704–1752), der dieses Verfahren 1750 als Anhang zu seiner *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* – »Einführung in die Analysis algebraischer Kurven« – unter dem Titel *De l'évanouissement des inconnues* – »Über das Verschwinden von Unbekannten« – veröffentlichte.

Für Determinanten gibt es eine besondere Schreibweise, vereinbart durch

Definition 140.1: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := a \cdot d - b \cdot c$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ heißt **zweireihige Determinante**.

Wenn man sich die Differenz der beiden Produkte in Definition 140.1 näher ansieht, erkennt man folgende Merkregel für die Berechnung einer zweireihigen Determinante:

Zahl oben links · Zahl unten rechts
minus
Zahl oben rechts · Zahl unten links

Nennt man die im Determinantenschema von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale *Hauptdiagonale* und die andere *Nebendiagonale*, so ergibt sich für $ad - bc$ der in Abbildung 140.1 veranschaulichte Merkspruch

»Hauptdiagonale
minus
Nebendiagonale«.

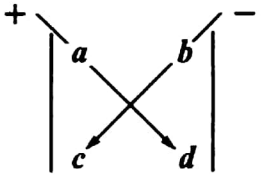


Abb. 140.1 Zur Berechnung einer zweireihigen Determinante

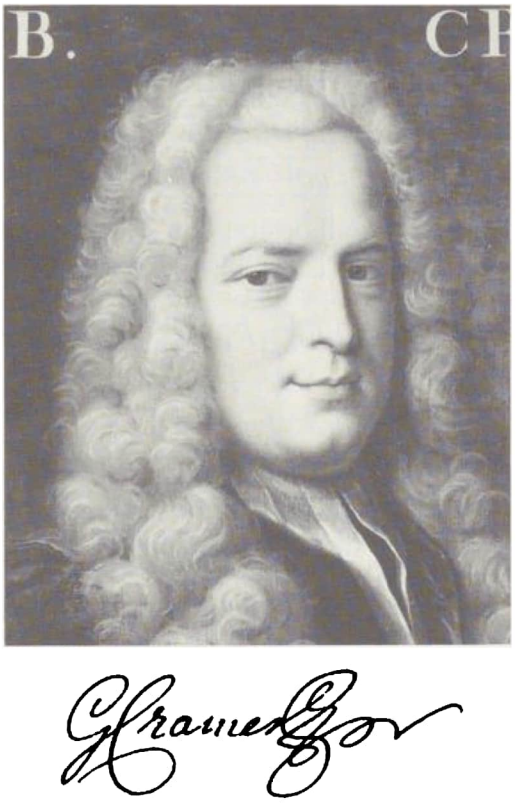


Abb. 140.2 Gabriel CRAMER, *gesprochen kramär, ä betont* (31. 7. 1704 Genf–4.1. 1752 Bagnols-sur Cèze). Gemälde Robert GARDELLE (1682–1766) zugeschrieben.

Auch die Zähler der in der Cramer'schen Regel auftretenden Brüche kann man als Determinanten schreiben. Es gilt nämlich

$$de - bf = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}, \quad af - ce = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}.$$

Damit lässt sich Satz 139.1 in der folgenden Form schreiben, in der wir ihn uns auch merken wollen:

Satz 141.1: Die Cramer'sche Regel. Das Gleichungssystem

$\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array}$ hat für $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ genau eine Lösung, nämlich

$$x=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Beispiel 1:

I $5x+2y=2$
II $3x-3y=4$

Wir berechnen zuerst die Determinante des Gleichungssystems:

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-3)-2\cdot 3=-15-6=-21$; also nicht null.

Daher hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, die man nach der Cramer'schen Regel berechnen kann:

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}{-21} \Leftrightarrow x=\dfrac{-14}{-21} \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3} \\[2ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-21} \Leftrightarrow y=\dfrac{14}{-21} \Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} L=\{(\tfrac{2}{3}\,|\,-\tfrac{2}{3})\}.$$

Beispiel 2:

I $1{,}5x-0{,}5y=3$
II $6x-2y=1$

$\begin{vmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 1{,}5\cdot(-2)-(-0{,}5)\cdot 6=0$

Damit hat das System keine eindeutige Lösung, die Cramer'sche Regel ist nicht anwendbar. Ob es überhaupt lösbar ist, können wir mit dem Einsetzungs- oder dem Additionsverfahren entscheiden; man erhält z. B.

I' $0\cdot x+0\cdot y=11$	I' = I · 4 + II · (−1)
II' $6x-2y=1$	II' = II

Da I' bei jeder Einsetzung die falsche Aussage $0=11$ ergibt, ist (I', II') und damit auch (I, II) unlösbar, also $L=\{\ \}$.

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad \tfrac{3}{2}x - y = -\tfrac{3}{8} \\ &\text{II} \quad -6x + 4y = 1{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = \tfrac{3}{2} \cdot 4 - (-1) \cdot (-6) = 0$$

Es gibt also keine eindeutige Lösung, die Cramer'sche Regel ist nicht anwendbar. Durch Äquivalenzumformung des Systems erhalten wir

$$\begin{aligned} &\text{I}' \quad 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 && \text{I}' = \text{I} \cdot 4 + \text{II} \cdot 1 \\ &\text{II}' \quad -6x + 4y = 1{,}5 && \text{II}' = \text{II} \end{aligned}$$

Da die Gleichung I′ allgemein gültig ist, besteht die Lösungsmenge aus allen Lösungen von II′. Somit gilt:

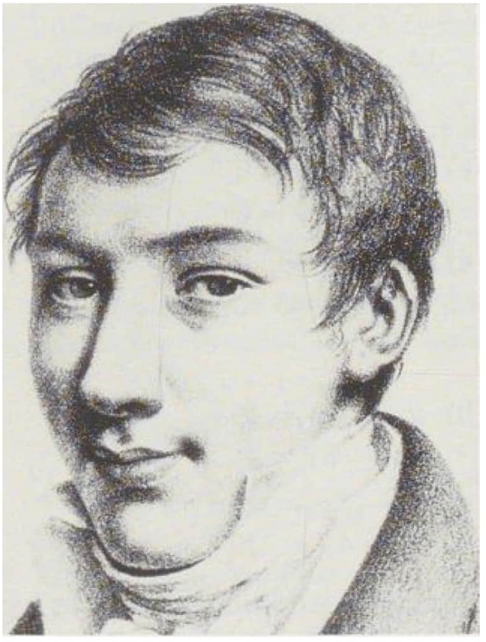
$$L = \left\{ (x \mid y) \;\middle|\; x \in \mathbb{Q} \wedge y = \frac{6x + 1{,}5}{4} \right\}.$$

**Zur Geschichte der Lösungsverfahren

Weder die Babylonier noch die Ägypter noch die Griechen haben Verfahren entwickelt, mit denen man, allgemein gesprochen, *jedes* System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten lösen kann. Soweit heute bekannt ist, finden wir zum ersten Mal ein solches allgemeines Verfahren, nämlich das Additionsverfahren im 九章算術 – *Chiu Chang Suan Shu* –, den »Neun Büchern arithmetischer Technik« aus der frühen Han-Zeit (202 v. Chr. – 9 n. Chr.). In Aufgabe 162/**80** ist das erste dort behandelte Problem wiedergegeben; 18 solcher Aufgaben enthält das Lehrwerk, von 2 bis zu 6 Unbekannten. Interessanterweise haben die Chinesen überhaupt keine Zeichen für ihre Unbekannten verwendet, sondern die Koeffizienten sauber in einem rechteckigen Schema angeschrieben, sodass jedem klar war, dass in der ersten Zeile die x-Glieder, in der zweiten die y-Glieder usw. stehen. (Die Chinesen schrieben ja von oben nach unten, nicht wie wir von links nach rechts!)
Das umständliche* Gleichsetzungsverfahren – man löst jede Gleichung nach derselben Variablen auf und setzt die erhaltenen Terme gleich – taucht in allgemeiner Form bei dem Inder BRAHMAGUPTA (598 – nach 665) auf. Wie schon oben (Seite 123) gesagt, beschäftigten sich die Araber und daher auch das europäische Mittelalter kaum mit Gleichungssystemen. Erste Ansätze dazu im Italien des späten 15. Jh.s gelangten nach Deutschland. Der Rechenmeister Christoff RUDOLFF (um 1500 Jauer/Schlesien – vor 1543 Wien?) war der Erste, der Gleichungssysteme behandelte, nämlich 1525 in seiner *Coß*. Zwar brachte Michael STIFEL (1487 (?)–1567) durch seine glücklichen Bezeichnungen (siehe Seite 123) einen Fortschritt; er rechnete aber wenig mit ihnen. Der von ihm beeinflusste Johannes BUTEO (1492–1564/72) packte dann das Problem, Gleichungssysteme zu lösen, allgemein an, da ihm die bisherige Art und Weise des Lösens »sehr mühsam und schwer zu erfassen« war. Er führt das Additionsverfahren

* Deswegen haben wir es nicht vorgeführt. EULER hält es zwar für den »natürlichsten Weg«.

an Aufgabe 149/**20** vor. Als allgemeine Methode finden sich das Gleichsetzungs- und das Einsetzungsverfahren dann bei Isaac NEWTON (1643–1727) in seiner *Arithmetica universalis* (entstandenen 1673, gedruckt 1707). Einen besonderen Weg ist Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646–1716) gegangen. 1678 glaubte er, eine Regel gefunden zu haben, mittels derer die Lösung eines beliebigen linearen Gleichungssystems ohne weitere Rechnung angegeben werden könnte. Er nennt es ein *theorema pulcherrimum*, einen allerschönsten Lehrsatz. 1684 hatte er es geschafft, die Determinantenmethode war geboren. Zwar verwendet er seine Erkenntnisse in Briefen, gedruckt wurden sie aber erst 1903 bzw. 1972! Im uns so fernen Japan veröffentlichte 1683 Takakazu (oder auch Kowa) SEKI (1642–1708 Tokio) die unabhängig von LEIBNIZ von ihm erfundene Determinantenmethode, die im 19. Jh. dort wieder in Vergessenheit gerät. Und so gebührt in Europa dem Schweizer Gabriel CRAMER (1704–1752) das Verdienst, 1750 die allgemeine Lösungsregel mittels Determinanten angegeben zu haben. Das Wort »Determinante« geht auf Carl Friedrich GAUSS (1777–1855) zurück, der in seinen *Disquisitiones arithmeticae* 1801 von einem *numerus determinans* spricht. Augustin CAUCHY (1789 bis 1857) verwendet es 1812 erstmals im heutigen Sinn, und Arthur CAYLEY (1821 bis 1895) führte 1841 die Schreibweise mit den beiden senkrechten Strichen ein.



1831

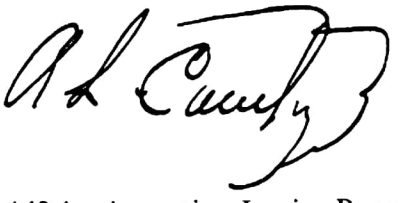


Abb. 143.1 Augustin Louis Baron CAUCHY (21.8.1789 Paris – 23.5.1857 Sceaux)

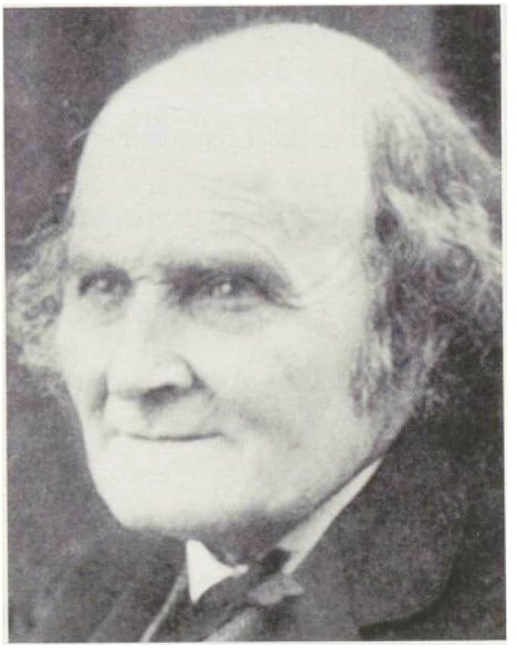


Abb. 143.2 Arthur CAYLEY (16.8.1821 Richmond – 26.1.1895 Cambridge)

Aufgaben

1. Führe das Gleichungssystem (I, II) nacheinander in die äquivalenten Systeme (I′, II′), ..., (I′′′′, II′′′′) über, sodass gilt:
In I′ hat x den Koeffizienten 1.
In II′′ kommt x nicht mehr vor.
In II′′′ kommt x nicht mehr vor, und der Faktor bei y ist 1.
In I′′′′ kommt y nicht mehr vor, und der Faktor bei x ist 1.

a) I $2x + 3y = 2$
II $4x - 9y = -1$

b) I $3x - 11y = 21$
II $4x + 7y = 28$

2. Weise mit Umformungen des Typs **(A)** und **(B)** nach, dass die Gleichungssysteme (I, II) und (I*, II*) äquivalent sind.
Bestimme sodann die Lösungsmenge.

a) I $x - 2y = 0$ I* $x - 2y = 0$
II $4x + y = 9$ II* $9y = 9$

b) I $5x + 8y = -10$ I* $x + 1{,}6y = -2$
II $3x + 2y = 1$ II* $-7x = -14$

3. Bestimme die Lösungsmenge nach dem Einsetzungsverfahren:

a) $2x + y = 4$
$x + y = 3$

b) $3{,}5x + 5y = 0$
$2{,}1x + 3y = 6$

c) $9x + 4y = 55$
$-5x + y = -37$

d) $\frac{2}{3}x + y = 4$
$x + \frac{3}{2}y = 6$

4. Verwende das Additionsverfahren:

a) $x + y = -8$
$x - y = 2$

b) $3x + 12y = 5$
$2x + 8y = 4$

c) $29x + 37y = 0$
$13x - 17y = 0$

d) $2x - 5y = 186$
$3x + 4y = 279$

5. a) Berechne durch zweimalige Anwendung des Additionsverfahrens (vgl. Beispiel 3, Seite 138) die Lösung des Gleichungssystems
$(11x + 15y = 40) \wedge (21x - 31y = 13)$.

•b) Warum versagt die zweimalige Anwendung des Additionsverfahrens bei dem System $(16x + 24y = 5\frac{1}{3}) \wedge (6x + 9y = 2)$?

****•6.** Stelle mithilfe der Determinante des Gleichungssystems fest, ob dieses genau eine Lösung hat. Berechne diese gegebenenfalls nach der Cramer'schen Regel. Bestimme andernfalls die Lösungsmenge durch Äquivalenzumformungen.

a) $3x + 4y = 0$
$4x - 3y = 25$

b) $8x - 2y = 1$
$-4x + y = -1$

c) $3{,}6x - 1{,}5y = 7{,}8$
$0{,}4x + 2{,}5y = -9{,}8$

d) $1{,}1x + 2{,}1y = 0$
$\frac{2}{7}x + \frac{6}{11}y = 0$

Bestimme bei den Gleichungssystemen der Aufgaben **7** bis **16** die Lösungsmengen.

7. $26x - 99y = 101$
$47x - 72y = 242$

8. $56x - 63y = 4$
$35x + 14y = 33$

9. $\frac{2}{5}x - 4y = -4$
$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 17$

10. $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = 1$
$10x + \frac{32}{3}y = 7$

11. $6{,}5x - 10{,}4y = 13$
$-2{,}6x + 13{,}9y = -5{,}2$

12. $-3{,}24x + 16{,}2y = 14{,}58$
$1{,}62x + 4{,}05y = 9{,}72$

13. $\frac{11}{6}x + \frac{7}{8}y = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{7}x + \frac{12}{35}y = \frac{3}{10}$

14. $0{,}7x + \frac{5}{6}y = 1{,}9$
$\frac{7}{9}x - y = -0{,}2$

15. $\frac{2}{3}x + \frac{9}{11}y = 5$
$1{,}2x - 1{,}8y = -9$

16. $\frac{3}{7}x - \frac{5}{14}y = 3{,}2$
$0{,}75x - 0{,}625y = 5$

17. Für welchen Punkt der Geraden mit der Gleichung $x + 2y - 6 = 0$ gilt:
a) Der Punkt hat zwei gleiche Koordinaten.
b) Die Abszisse des Punktes ist doppelt so groß wie seine Ordinate.
c) Die Ordinate ist um 3 größer als die Abszisse.

Gib jeweils zuerst das zu lösende Gleichungssystem an. Überprüfe die Ergebnisse an einer Zeichnung.

18. Stelle fest, ob die Geraden g_1 und g_2 einen Schnittpunkt haben, und berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.

a) g_1: $3x + 2y - 1 = 0$
g_2: $x - y + 3 = 0$

b) g_1: $2{,}5x - \frac{5}{6}y + 2 = 0$
g_2: $-x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

c) g_1: $2{,}5x - 0{,}8y + 2 = 0$
g_2: $-x + \frac{1}{3}y - 1 = 0$

d) g_1: $5x + 2{,}25y + 4{,}5 = 0$
g_2: $3\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - 3 = 0$

19. Eine einfache Aufgabe aus dem alten Babylon (um 2000 v. Chr.), gefunden in Susa: Ein Viertel der Breite zur Länge addiert ergibt 7 Handbreiten, Länge und Breite addiert macht 10 Handbreiten.

20. Eine Aufgabe von Geronimo CARDANO (1501–1576):
7 Ellen grüner Seide und 3 Ellen schwarzer Seide kosten 72 Pfund. 2 Ellen grüner Seide und 4 Ellen schwarzer Seide kosten 52 Pfund.

• **21.** Aufgabe 12 aus Buch I der *Zahlenlehre* des DIOPHANT (um 250 n. Chr.): Jemand drückt 100 auf zwei verschiedene Arten als zweigliedrige Summe aus, und zwar so, dass ein Summand der ersten Summe das Doppelte eines Summanden der zweiten Summe ist und dass der andere Summand der zweiten Summe das Dreifache des anderen Summanden der ersten Summe ist. Wie heißen die Summanden?

6.5 Lineare Gleichungssysteme mit mehr als zwei Gleichungen oder Unbekannten

Ein lineares Gleichungssystem besteht allgemein aus m linearen Gleichungen mit n Unbekannten. Ist $m < n$, dann heißt das System **unterbestimmt**, im Fall $m > n$ **überbestimmt**.
Zur Bestimmung der Lösungsmenge wird wieder das Verfahren der Äquivalenzumformungen angewandt. Man kommt auch hier mit den Schritten **(A)** und **(B)** aus (vgl. Seite 133). Durch schrittweises Eliminieren von Unbekannten lässt sich immer ein äquivalentes System finden, dessen Lösungsmenge unmittelbar ersichtlich ist. Grundsätzlich läuft das Verfahren wie bei zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Beispiel 1:

I	$3x - 2y + 5z = 23$	
II	$2x + 4y - z = -3$	$(m = 3,\ n = 3)$
III	$5x + 2y + 2z = 14$	
I′	$13x + 18y = 8$	$\mathrm{I}' = \mathrm{I} + \mathrm{II} \cdot 5$
II′	$2x + 4y - z = -3$	$\mathrm{II}' = \mathrm{II}$
III′	$9x + 10y = 8$	$\mathrm{III}' = \mathrm{III} + \mathrm{II} \cdot 2$
I″	$16x = 32$	$\mathrm{I}'' = \mathrm{III}' \cdot 9 + \mathrm{I}' \cdot (-5)$
II″	$9x + 10y = 8$	$\mathrm{II}'' = \mathrm{III}'$
III″	$2x + 4y - z = -3$	$\mathrm{III}'' = \mathrm{II}'$
I‴	$x = 2$	$\mathrm{I}''' = \mathrm{I}'' \cdot \frac{1}{16}$
II‴	$10y = -10$	$\mathrm{II}''' = \mathrm{II}'' - \mathrm{I}''' \cdot 9$
III‴	$4y - z = -7$	$\mathrm{III}''' = \mathrm{III}'' - \mathrm{I}''' \cdot 2$
I⁗	$x = 2$	$\mathrm{I}'''' = \mathrm{I}'''$
II⁗	$y = -1$	$\mathrm{II}'''' = \mathrm{II}''' \cdot \frac{1}{10}$
III⁗	$z = 3$	$\mathrm{III}'''' = \mathrm{II}'''' \cdot 4 - \mathrm{III}'''$

$L = \{(2 \mid -1 \mid 3)\}$

Natürlich eignet sich auch das Einsetzungsverfahren zum Lösen solcher Gleichungssysteme. Seine Anwendung soll noch einmal an Beispiel 1 aufgezeigt werden. Dazu lösen wir z. B. die Gleichung I nach $2y$ auf (weil alle Koeffizienten bei y gerade Zahlen sind!) und setzen den erhaltenen Term gleich in II und III ein:

I′	$2y = 3x + 5z - 23$
II′	$2x + 2(3x + 5z - 23) - z = -3 \Leftrightarrow 8x + 9z = 43$
III′	$5x + (3x + 5z - 23) + 2z = 14 \Leftrightarrow 8x + 7z = 37$

I″	$2y = 3x + 5z - 23$	I″ = I′
II″	$8x = 43 - 9z$	II′ nach $8x$(!) aufgelöst
III″	$(43 - 9z) + 7z = 37 \Leftrightarrow -2z = -6$	$8x$ in III′ eingesetzt
I‴	$\underline{z = 3}$	III″ nach z aufgelöst
II‴	$8x = 43 - 9 \cdot 3 \Leftrightarrow \underline{x = 2}$	z in II″ eingesetzt
III‴	$2y = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 23 \Leftrightarrow \underline{y = -1}$	x und z in I″ eingesetzt

$L = \{(2|-1|3)\}$.

Beispiel 2:

I	$x + 3y = -7$	
II	$2x - 5y = 30$	$(m = 3, n = 2)$
III	$7x + 4y = 19$	
I′	$x + 3y = -7$	I′ = I
II′	$-11y = 44$	II′ = II − I · 2
III′	$-17y = 68$	III′ = III − I · 7
I″	$x + 3y = -7$	I″ = I′
II″	$y = -4$	II″ = II′ · $(-\frac{1}{11})$
III″	$0 = 0$	III″ = II″ · 17 + III′ (kann im Folgenden weggelassen werden, da allgemein gültig)
I‴	$x = 5$	I‴ = I″ − II″ · 3
II‴	$y = -4$	II‴ = II″

$L = \{(5|-4)\}$

Die Lösbarkeit in Beispiel 2 beruht darauf, dass man zu einem äquivalenten System gelangt, welches eine allgemein gültige Gleichung enthält. Es bleiben dann nur noch zwei Bestimmungsgleichungen für die zwei Unbekannten übrig. In der Regel wird dieser Fall nicht eintreten. Ein überbestimmtes System ist i. A. nicht lösbar, da normalerweise bereits ein Teil des Systems eine eindeutig bestimmte Lösung hat, die den übrigen Gleichungen nicht mehr genügt. Ersetzt man etwa die Gleichung III von Beispiel 2 durch III* $7x + 4y = 20$, so besitzt das System (I, II, III*) keine Lösung. Denn aus I und II folgt bereits $x = 5$ und $y = -4$; doch liefert III* mit diesen Werten die falsche Aussage $19 = 20$.

Beispiel 3:

I	$2x - 5y + 11z = 31$	$(m = 2, n = 3)$
II	$3x + 15y - 4z = 15$	
I′	$2x - 5y + 11z = 31$	I′ = I
II′	$9x + 29z = 108$	II′ = I · 3 + II

I″	$-45y+41z=63$	$\text{I}'' = \text{I}' \cdot 9 - \text{II}' \cdot 2$
II″	$x+\frac{29}{9}z=12$	$\text{II}'' = \text{II}' \cdot \frac{1}{9}$
I‴	$y=-\frac{7}{5}+\frac{41}{45}z$	$\text{I}''' = \text{I}'' \cdot (-\frac{1}{45})$
II‴	$x=12-\frac{29}{9}z$	$\text{II}''' = \text{II}''$

Man kann also z willkürlich wählen; zu jedem Wert von z gibt es genau ein x und y. Das System hat somit unendlich viele Lösungen:

$L = \{(x|y|z) | x = 12 - \frac{29}{9}z \wedge y = -\frac{7}{5} + \frac{41}{45}z \wedge z \in \mathbb{Q}\}$.

Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als diejenige der Unbekannten, so hat das System im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass es unlösbar ist, wie z. B. das System

I $x+y+z=1$
II $x+y+z=2$.

Aufgaben

1. $x=7$
$3x+y=22$
$-5x+9y+z=-8$

2. $x-3z=-8$
$3x-z=0$
$x+y+z=3$

3. $2x+z=3$
$x-6y-2z=14$
$5x+4y+3z=5$

4. $x+y-z=1$
$x-y-z=0$
$x+5y-z=2$

5. $x-y+2z=11$
$x+y-2z=-7$
$3x-4y-7z=27$

6. $x+2y+5z=50$
$3x-7y+z=10$
$13x+4y-3z=-30$

7. $-3x+5y+z=3$
$7x-4y-z=2$
$x+6y+z=8$

8. $2x+4y-11z=6$
$9x-7y+5z=2$
$12x-26y+43z=0$

9. $2x-3y+5z=0$
$3x+5y-2z=0$
$5x-2y+3z=0$

10. $x-y=0$
$y-z=0$
$z-x=0$

11. $x-y-z=1$
$5x+4y+z=-1$

12. $7x+3{,}75y-1{,}5z=9$
$\frac{4}{3}x+\frac{5}{7}y-\frac{2}{7}z=\frac{4}{3}$

13. $x+2y=1$
$4x-3y=-29$
$3x+17y=36$

14. $8x-11y=3$
$13x+5y=-18$
$2x-9y=10$

15. $x + y - z = -1$
$x - y - z = 3$
$2y + 3z - w = -3$
$-2x + 2z + 3w = -5$

16. $x + y - z + w = 0$
$x - y - z - w = 0$
$x + y + z - w = 5$
$x - y + z + w = 3$

17. $2x - y + 3z = -7$
$x + 4y - 2z = 8$
$3x + 2y + z = 0$
$6x - 3y + 4z = -11$

18. $3x + 4y - 5z + 5w = 13$
$5x - 3y + 4z - 19w = -10$
$2x - 5y + z - 2w = -11$

19. Zwei Beispiele aus der *Zahlenlehre* des DIOPHANT (um 250 n. Chr.):

a) $x + y = 20$
$y + z = 30$
$z + x = 40$

b) $x = y + \frac{1}{3}z$
$y = z + \frac{1}{3}x$
$z = 10 + \frac{1}{3}y$

20. Johannes BUTEO (1492–1564/72) löst in seiner *Logistica* (1559) folgende Aufgabe als Beispiel für das Additionsverfahren. Text und Ansatz lauten*:

Tres numeros inuenire, quorum primus cum triente reliquorum faciat 14. Secundus cum aliorum quadrante 8. Tertius item cum parte quinta reliquorum 8.

$1A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = 14$
$1B + \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}C = 8$
$1C + \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}B = 8$

21. Das **Problem der 100 Vögel** erscheint zum ersten Mal im *Chang Ch'iu-chien Suan Ching* – »Arithmetisches Handbuch des CHANG Ch'iu-chien« – um 475 n. Chr.:
Ein Hahn kostet 5 sapeks, eine Henne 3 sapeks, und 3 Küken 1 sapek. Wenn wir nun für 100 sapeks 100 dieser Tiere einkaufen, wie viele sind es dann von jeder Sorte?

22. Aufgabe **21** findet sich bei den Indern, den Arabern, in Byzanz und schließlich bei fast allen Mathematikern des Abendlandes in allen möglichen Variationen, auch mit 4 und 5 Arten von Vögeln oder anderem Getier. Ein Beispiel hierfür ist die nebenstehende Aufgabe aus dem *Rechenbuch auff Linien und Ziphren* (1574) des Adam RIES (1492–1559).**
Beachte: ſt ist die Abkürzung für *Gulden*; ort bedeutet *ein Viertel*.

Adam Riſen. 71
Vihekauff.

Item/einer hat 100. ſt. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochſen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geiſſen/ koſt ein Ochs 4 ſt. ein Schwein anderthalben ſt. ein Kalb einen halben ſt. vnd ein Geiß ein ort von einem ſt. wie viel ſol er jeglicher haben für die 100. ſt?

* Drei Zahlen zu finden, deren erste mit einem Drittel der übrigen 14 macht. Die zweite mit einem Viertel der anderen 8. Die dritte ebenso mit dem fünften Teil der übrigen 8.

** Ohne Bild steht sie bereits in der Erstauflage von 1522, der *Rechenung auff der linihen vnd federn.*

6.6 Gleichungssysteme, die auf lineare Gleichungssysteme zurückführbar sind

In vielen Fällen gelingt es, nicht lineare Gleichungssysteme in lineare umzuwandeln. Die dabei verwendeten Rechenschritte sind aber im Allgemeinen keine Äquivalenzumformungen. In der Regel kann man nur sagen: Wenn das ursprüngliche System eine Lösung hat, so ist diese in der Lösungsmenge des aus ihm abgeleiteten Systems enthalten. Aber nicht jede Lösung des neuen Systems muss auch eine Lösung des ursprünglichen sein. Daher ist durch eine *grundsätzlich notwendige* Probe festzustellen, welche Lösungen aus der Lösungsmenge des neuen Systems auch dem ursprünglichen Gleichungssystem genügen.

Beispiel 1:

$$\text{I} \quad \frac{2x-y-1}{x+3y-2} = -\frac{3}{7}$$

$$\text{II} \quad \frac{5}{4x-5y-9} - \frac{2}{7x+2y-1} = 0$$

Ist $(x|y)$ eine Lösung, so genügt diese auch den folgenden Gleichungssystemen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 7(2x-y-1) = -3(x+3y-2) \\ \text{II}' & 5(7x+2y-1) = 2(4x-5y-9) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I}'' & 17x + 2y = 13 \\ \text{II}'' & 27x + 20y = -13 \end{array}$$

Als Lösungsmenge des Systems (I″, II″) erhält man in bekannter Weise $L'' = \{(1|-2)\}$. Ob $x = 1$ und $y = -2$ auch dem System (I, II) genügen, muss noch geprüft werden.

Probe: $\text{I} \quad \text{LS} = \frac{2+2-1}{1-6-2} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7} = \text{RS}$

$$\text{II} \quad \text{LS} = \frac{5}{4+10-9} - \frac{2}{7-4-1} = \frac{5}{5} - \frac{2}{2} = 0 = \text{RS}$$

Das ursprüngliche System hat also die Lösungsmenge $L = \{(1|-2)\}$.

Beispiel 2:

$$\text{I} \quad \frac{3x-y-5}{7x+2y-3} = 2$$

$$\text{II} \quad 8x - 13y = 34$$

Ist $(x|y)$ eine Lösung, so genügt diese auch den folgenden Systemen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 3x-y-5 = 2(7x+2y-3) \\ \text{II}' & 8x-13y = 34 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I}'' & 11x + 5y = 1 \\ \text{II}'' & 8x - 13y = 34 \end{array}$$

Daraus ergibt sich $\begin{array}{ll} \text{I}''' & x = 1 \\ \text{II}''' & y = -2 \end{array}$

Probe: I $\text{LS} = \dfrac{3+2-5}{7-4-3}$ sinnlos, da Nenner $= 0$.

Die Annahme, dass das System lösbar sei, hat also zu einem Widerspruch geführt. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist somit die leere Menge.

Beispiel 3:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \\ \text{II} & \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \end{array}$$

Da die Unbekannten nur in der Verbindung $\dfrac{1}{x}$ bzw. $\dfrac{3}{y}$ auftreten, empfiehlt es sich, für diese Ausdrücke Abkürzungen, z. B. u und v, einzuführen; d. h., wir machen folgende **Substitution***:

$$\text{(S)} \quad \frac{1}{x} =: u; \quad \frac{3}{y} =: v\,.$$

In den neuen Unbekannten u, v erhalten wir dann das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & u + v = 1 \\ \text{II}' & 3u - v = 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I}'' & u = \dfrac{1}{2} \\ \text{II}'' & v = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

Aus (S) ergibt sich dann

$$\begin{array}{ll} \text{III} & \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \text{IV} & \dfrac{3}{y} = \dfrac{1}{2} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{III}' & x = 2 \\ \text{IV}' & y = 6 \end{array}$$

Probe: I $\text{LS} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{6} = 1 = \text{RS}$ II $\text{LS} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{6} = 1 = \text{RS}$

Die Lösungsmenge von (I, II) ist also $L = \{(2|6)\}$.

* substituere (lat.) = an die Stelle einer Person oder Sache setzen

Beispiel 4:

$$\text{I} \quad \frac{6}{x+y} + \frac{2}{x+y+1} = -1$$

$$\text{II} \quad \frac{-3}{x+y} + \frac{4}{x+y+1} = 3$$

Substitution: (S) $\dfrac{3}{x+y} =: u$; $\dfrac{2}{x+y+1} =: v$.

Für u und v ergibt sich folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I}' & 2u + v = -1 \\ \text{II}' & -u + 2v = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I}'' & u = -1 \\ \text{II}'' & v = 1 \end{array}$$

Für die Unbekannten x und y erhalten wir durch Einsetzen in (S):

$$\begin{array}{ll} \text{III} & x + y = -3 \\ \text{IV} & x + y + 1 = 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{III}' & x + y = -3 \\ \text{IV}' & x + y = 1 \end{array} \quad \text{Widerspruch!}$$

Das ursprüngliche System hat demnach keine Lösung; $L = \{\ \}$.

Aufgaben

1. $\dfrac{x+30}{y+1} = 5$

$\dfrac{1}{2y-6} - \dfrac{2}{3(x-1)} = 0$

2. $\dfrac{2x-8}{x+y} = \dfrac{4}{5}$

$\dfrac{8}{2x+y} = \dfrac{5}{3y-4}$

3. $\dfrac{2}{11x-6y+2} = \dfrac{1}{14y-19x-9}$

$\dfrac{8y-3x-6}{7x-y+1} = \dfrac{3}{2}$

4. $\dfrac{1}{2x+3y-8} = \dfrac{-5}{3x-y+9}$

$\dfrac{7}{x+y-2} = \dfrac{2}{4x-3y+27}$

5. $3x + 5y = 5z - 4$

$\dfrac{3y-8z-6}{x+y+2z} = -1$

$\dfrac{6}{x-2y} = \dfrac{-1}{y-2z}$

6. $\dfrac{2x-7y+3z}{5x} = 1{,}4$

$\dfrac{x-y}{3y-4z} = 0{,}5$

$\dfrac{x-4y+15z}{8x+y-6z} = -1{,}5$

7. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 10$

$\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 20$

8. $\dfrac{14}{x} + \dfrac{15}{y} = 44$

$\dfrac{22}{x} - \dfrac{25}{y} = 40$

9. $5x - \frac{8}{y} = 13$

$7x - \frac{10}{y} = 18{,}5$

10. $\frac{5}{x} + 3y = 1$

$\frac{15}{x} - 7y = 3$

11. $\frac{1}{x+y+1} + \frac{3}{x-y+1} = 2$

$\frac{4}{x+y+1} - \frac{9}{x-y+1} = 1$

12. $\frac{10}{x+2y-1} - \frac{3}{x+2y+8} = 2$

$\frac{10}{x+2y-1} + \frac{6}{x+2y+8} = -1$

13. $\frac{1}{2x-10y+30} + \frac{1}{3x+2y-11} = 0$

$\frac{-7}{x-5y+15} + \frac{6}{3x+2y-11} = 0{,}2$

14. $\frac{5}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 14$

$\frac{1}{2x} + \frac{5}{2y} - \frac{1}{z} = \frac{5}{2}$

$\frac{2}{x} - \frac{3}{4y} + \frac{1}{3z} = \frac{3}{2}$

15. $\frac{2}{x+y} - \frac{1}{x+z} = \frac{3}{8}$

$\frac{1}{x+y} + \frac{9}{y+z} = \frac{3}{4}$

$\frac{5}{x+y} - \frac{6}{y+z} - \frac{4}{x+z} = \frac{5}{12}$

6.7 Textaufgaben

6.7.1 Bestimmung von Zahlen

1. Addiert man zu einer Zahl das Dreifache einer anderen, so ergibt sich 18. Subtrahiert man dagegen vom Dreifachen der ersten Zahl die zweite, so erhält man 4. Wie heißen die Zahlen?
2. Die Summe zweier Zahlen verhält sich zu ihrer Differenz wie 13 : 22. Die doppelte Summe der Zahlen übertrifft ihre Differenz um $\frac{8}{15}$.
3. Die Differenz zweier Zahlen ist eine gerade Primzahl. Ihre Summe ist gleich dem Quadrat dieser Primzahl.
4. Zwei natürliche Zahlen verhalten sich wie 2 : 7. Die kleinere ist in der größeren dreimal enthalten, wobei 9 als Rest bleibt.
5. Eine zweiziffrige Zahl ist viermal so groß wie die Quersumme. Vertauscht man die beiden Ziffern, so erhält man eine um 18 größere Zahl.

6. Die Zehnerziffer einer dreistelligen Zahl ist 6. Vertauscht man die Einer- mit der Hunderterziffer, so ergibt sich eine um 99 größere Zahl. Vertauscht man dagegen die Einer- mit der Zehnerziffer, so verkleinert sich die Zahl um 18.

7. Eine dreistellige Zahl, deren Wert sich bei Vertauschung der beiden ersten Ziffern nicht ändert, hat die Quersumme 15. Vertauscht man die beiden letzten Ziffern, so nimmt sie um 27 zu.

•**8.** Eine zweistellige Zahl ist durch 9 teilbar. Vertauscht man ihre beiden Ziffern, so ergibt sich eine Zahl, die um die Quersumme größer ist.

9. Eine dreistellige Zahl ist durch 11 teilbar. Auf ihrer Zehnerstelle steht die Ziffer 8. Vertauscht man die Einer- mit der Hunderterziffer, so ergibt sich eine um 198 größere Zahl. (Anleitung: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre »alternierende Quersumme«, das heißt die Summe der an 1., 3., 5., usw. Stelle stehenden Ziffern vermindert um die Summe der an 2., 4., 6., usw. Stelle stehenden Ziffern durch 11 teilbar ist.)

•**10.** Aus einer dreistelligen Zahl gewinnt man zwei vierstellige Zahlen, indem man eine gewisse Ziffer einmal davor setzt, das andere Mal hinten anhängt. Die Summe der so gewonnenen neuen Zahlen ist 11 803, ihre Differenz 3069. Wie heißt die ursprüngliche Zahl und welche Ziffer wurde angehängt? (Anleitung: Führe die neuen Zahlen als Unbekannte ein!)

11. Vergrößert man bei einem Bruch Zähler und Nenner um 1, so nimmt er den Wert $\frac{1}{2}$ an. Verkleinert man hingegen Zähler und Nenner um 3, so erhält der Bruch den Wert $\frac{1}{6}$. Wie heißt der ursprüngliche Bruch?

12. Subtrahiert man vom Zähler und vom Nenner eines Bruches die Zahl 6, so erhält er den Wert $\frac{4}{5}$. Verdoppelt man dagegen den Zähler und addiert zum Nenner 5, so erhält der Bruch den Wert $\frac{5}{4}$. Wie heißt der Bruch?

13. Zwei Zahlen verhalten sich wie 2 : 3; die Summe ihrer Kehrwerte ist 5.

•**14.** Zwei natürliche Zahlen verhalten sich wie 7 : 3. Dividiert man die größere durch die kleinere, so bleibt 37 als Rest.

•**15.** Eine zweistellige Zahl verhält sich zu der durch Vertauschung ihrer Ziffern entstehenden Zahl wie 8 : 3. Teilt man die kleinere der beiden Zahlen durch ihre Zehnerziffer, so ergibt sich 13, Rest 1.

16. Eine vierstellige ungerade Zahl ist durch 25 teilbar. Ihre Quersumme hat den Wert 26. Addiert man die Zahl zu derjenigen, die durch Umkehrung ihrer Ziffernfolge entsteht, so erhält man 12661.

17. Eine Zahl liegt zwischen 300 und 400. Sie ist 36-mal so groß wie ihre Quersumme; ihre Zehnerziffer verhält sich zur Einerziffer wie 1 : 2.

18. Die Summe zweier Zahlen verhält sich zur Differenz wie 3 : 1, die Differenz zum Produkt wie 1 : 6.

•**19.** Die Quadrate zweier natürlicher Zahlen unterscheiden sich um 93. Wie lauten diese Zahlen?

20. Aufgabe 18 des 1. Buches der *Ἀριθμητική* des DIOPHANT (um 250 n. Chr.): Drei Zahlen sind gesucht, sodass je zwei zusammen die jeweils dritte entweder um 20 oder um 30 oder um 40 übertreffen.

6.7.2 Teilen und Verteilen

21. Eine Anzahl Personen ist auf zwei Räume verteilt. Gehen 13 Personen aus dem zweiten in den ersten Raum, so sind dort doppelt so viele wie im zweiten. Wenn sich noch weitere 12 Personen aus dem zweiten in den ersten Raum begeben, befinden sich in diesem gerade viermal so viele wie im zweiten Raum. Wie groß ist die Gesamtzahl der Personen und wie viele befanden sich anfangs in den einzelnen Räumen?

22. Die Schülerzahlen zweier Klassen verhalten sich wie 4 : 5. An einem bestimmten Tag fehlen in der einen Klasse 2, in der anderen 1 Schüler, wodurch das Verhältnis der Schülerzahlen 3 : 4 wird. Wie viele Schüler besuchen jede Klasse?

23. Bei einer Gesellschaft verhielt sich die Anzahl der Herren zur Zahl der anwesenden Damen wie 3 : 2. Nachdem drei der Herren sich vorzeitig verabschiedet hatten, kamen noch zwei Ehepaare hinzu. Nun verhielt sich die Anzahl der Herren zu derjenigen der Damen wie 5 : 4. Wie viele Damen und Herren waren zu Beginn anwesend?

24. Karl und Otto kaufen zusammen ein Los für 10 €, wozu Karl 6 € und Otto 4 € beisteuern. Sie gewinnen eine größere Summe, die sie im Verhältnis ihrer Einsätze aufteilen. Karl kauft sich von dem Gewinn ein Grundstück um 60 000 €, Otto ein Auto um 27 000 €. Danach verbleibt Otto gerade noch doppelt so viel wie Karl. Wie groß war der Gewinn und wie viel erhielt jeder davon?

•**25.** Kunze und Link gründen ein Geschäft, an dessen Grundkapital jeder mit einer gewissen Summe als Geschäftseinlage beteiligt ist. Das Doppelte des Anteils von Kunze ist um 5000 € größer als der dreifache Anteil von Link. Der Gewinn nach dem ersten Geschäftsjahr wird anteilmäßig auf die beiden Partner verteilt. Kunze erhält dabei um 22 500 €, Link um 13 500 € weniger als seine Einlage. Wie groß ist das Grundkapital des Geschäfts und mit welchen Summen sind die beiden Partner daran beteiligt? Welchen Gewinn erzielten sie im ersten Jahr?

26. Zur Belieferung ihrer Kunden läßt eine Firma eine Anzahl gleich schwerer Kisten auf zwei Lastwagen von 1,5 t bzw. 2 t Tragkraft verladen. Sie werden auf die beiden Wagen im Verhältnis der Tragfähigkeit verteilt. Beim ersten Kunden werden vom kleineren Wagen 20, vom größeren 10 Kisten abgeladen. Nun enthält der größere Wagen doppelt so viel Ladegut wie der kleinere. Wie viele Kisten befanden sich ursprünglich auf jedem Wagen?

27. Ein erstes Petroleumfass enthält 8 l weniger als ein zweites. Gießt man nun aus dem zweiten 28 l in das erste Fass, so enthält dieses dreimal so viel wie jenes. Wie viel Liter Petroleum waren anfangs in jedem Fass?

28. Ein Bauer hat auf seinem Hof $2\frac{1}{2}$-mal so viel Hühner wie Kühe. Alle Hühner und Kühe zusammen haben 90 Füße. Wie viele Hühner und Kühe sind es?

•**29.** Ein Buchhändler bezieht drei verschiedene Sorten von Büchern zum Preis von 40 €, 12 € und 7 € pro Stück. Es sind insgesamt 100 Bücher, und die Rechnung lautet auf 1000 €. Wie viele Bücher von jeder Sorte waren es?

:**30.** Aus dem griechischen *Papyrus Michigan* (1. Hälfte des 3. Jh.s n. Chr.): 9900 Drachmen* sollen an 4 Personen verteilt werden. Dabei erhält die vierte Person 300 Drachmen mehr, als die drei anderen zusammen erhalten; die dritte Person erhält 300 Drachmen mehr, als die erste und zweite zusammen erhalten; die zweite Person schließlich erhält mehr als die erste, und zwar um $\frac{1}{7}$ dessen, was die erste bekommt. Wie viel erhält jeder?

6.7.3 Mischungsaufgaben

31. Mischt man 7 kg einer ersten Kaffeesorte mit 9 kg einer zweiten Sorte, so ist der Preis für 1 kg der Mischung 10,25 €. Werden jedoch 9 kg der ersten mit 7 kg der zweiten Sorte gemischt, so kommt 1 kg der Mischung auf 9,75 € zu stehen. Was kostet 1 kg der ersten bzw. zweiten Sorte?

32. Von zwei Kaffeesorten kostet 1 kg der ersten 10 €, 1 kg der zweiten 14 €. Welche Mengen von beiden Sorten müssen gemischt werden, wenn 1 kg der Mischung 11 € kosten soll und außerdem von der zweiten Sorte 5 kg weniger als von der ersten in der Mischung enthalten sein sollen?

•**33.** Wird eine bestimmte Menge Salzlösung mit 187,5 cm^3 Wasser verdünnt, so ergibt sich eine 10%ige Mischung. Gießt man noch weitere 375 cm^3 Wasser dazu, dann enthält die neue Lösung nur noch 5% Salz. Wie viel Gramm Salzlösung waren ursprünglich vorhanden und wie hoch war ihr Prozentgehalt? (Führe die Masse des ursprünglich vorhandenen Wassers und die des darin gelösten Salzes als Unbekannte ein!)

34. Von zwei Gefäßen enthält das eine 5%ige, das andere 12%ige Salzlösung. Schüttet man den Inhalt beider Gefäße zusammen, so ergibt sich eine 9,2%ige Lösung. Wird diese noch mit 650 cm^3 reinem Wasser verdünnt, so sinkt ihr Salzgehalt auf 4%. Wie viel Gramm waren ursprünglich von jeder Lösung vorhanden?

35. Mischt man 200 cm^3 einer ersten Salzlösung mit 150 cm^3 einer zweiten, so ergibt sich eine Lösung von der Dichte 1,08 g/cm^3. Nimmt man dagegen

* *δραχμή* (drachmé) = *eine Handvoll* (kleinerer Münzen), meist eine Silbermünze mit von Gegend zu Gegend verschiedenem Wert.

150 cm^3 der ersten und 200 cm^3 der zweiten Lösung, so hat die Mischung die Dichte 1,09 g/cm^3. Welche Dichte haben die beiden Ausgangslösungen?

• **36.** Luft ist (im Wesentlichen) eine Mischung der Gase Sauerstoff und Stickstoff. Sauerstoff hat unter Normalbedingungen (0 °C, 1013 hPa) die Dichte 0,00143 kg/dm^3, Stickstoff 0,00125 kg/dm^3 und Luft 0,00129 kg/dm^3. Wie viel kg Sauerstoff bzw. Stickstoff befinden sich unter Normalbedingungen in einem Zimmer von 5 m Länge, 4 m Breite und 2,5 m Höhe?

37. Wenn man 2 g einer ersten Goldsorte mit 3 g einer zweiten mischt, entsteht eine Legierung vom Feingehalt* 500. Mischt man dagegen 7 g der ersten Sorte mit 3 g der zweiten, so erhält man eine Legierung vom Feingehalt 425. Bestimme die Feingehalte der beiden Goldsorten.

38. Eine Goldlegierung wird mit 1,3 g Kupfer verschmolzen, wodurch eine Legierung vom Feingehalt* 553,5 entsteht. Nachdem noch weitere 2 g Kupfer hinzugegeben wurden, hat die Legierung den Feingehalt 369. Wie viel Gramm der ursprünglichen Legierung wurden verwendet und welchen Feingehalt hatte sie?

39. Das Epigramm** des METRODOROS (330 n. Chr.):
Schmied einen Kranz mir, du Künstler! Nimm Gold und Kupfer zur Mischung, gieß auch Zinn noch hinzu und hartes Eisen! Denn sechzig Minen*** wiege der Kranz: Das Gold mit dem Kupfer zusammen wiege zwei Drittel vom Ganzen; das Gold mit dem Zinne zusammen wiege drei Viertel davon; das Gold mit dem Eisen hinwieder wiege drei Fünftel vom Kranz. Nun sag mir genauestens, wie viel du Gold benötigst dazu, wie viel von dem Kupfer, wie viel du Zinn auch benötigst, und sag, wie viel Eisen brauchst du am Ende, dass ein Kranz mir entsteht von sechzig Minen zusammen.

6.7.4 Bewegungsaufgaben

40. Klaus und Heinz wohnen in zwei Orten, die 22,5 km voneinander entfernt sind. Um sich zu treffen, gehen sie einander entgegen. Heinz bricht um 8 Uhr auf, während Klaus sich erst eine Viertelstunde später auf den Weg macht. Sie begegnen sich um 10.38 Uhr. Wären beide gleichzeitig weggegangen, hätten sie sich nach genau $2\frac{1}{2}$ Std. getroffen. Wie viel km legte jeder in der Stunde zurück?

41. Ein Schleppzug durchfährt auf der Donau die 288 km lange Strecke von Passau nach Wien stromabwärts in 14 Std. 24 Min., stromaufwärts in

* Der Feingehalt ist der in Promille der Gesamtmasse ausgedrückte Gehalt an reinem Edelmetall.

** *ἐπίγραμμα* (epigramma) = *Aufschrift, Inschrift*, hier *Sinngedicht*, eine poetische Form, in der ein Gedanke in konzentrierter Weise dargestellt wird.

*** *μνᾶ* (mna), lat. *mina*, ein orientalisches Lehnwort, bezeichnet eine Gewichtseinheit, die in Griechenland entweder 623,7 g (äginäisch) oder 436,6 g (attisch) entsprach.

32 Std. Berechne die mittlere Eigengeschwindigkeit des Schleppzuges und die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Flusses.

42. Ein Schwimmer steigt in einen Fluss und versucht zunächst 1 Minute lang gegen die Strömung zu schwimmen. Er wird dabei jedoch 42 m abgetrieben. Daraufhin wendet er und schwimmt nun 3 Min. mit der Strömung. Er steigt 492 m von seinem Ausgangspunkt entfernt an Land. Wie viel Meter pro Sekunde legte er gegenüber dem Wasser im Durchschnitt zurück und wie groß war die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses?

43. An einem Föhntag startet in Fürstenfeldbruck ein Düsenflugzeug zu einem Testflug. Als Prüfstrecke dient die Entfernung zwischen einer bestimmten Marke auf dem Flugplatz und dem Gipfel der Zugspitze; sie beträgt 88,4 km. Für den Hinflug stoppt der Bordfunker eine Zeit von $276\frac{1}{4}$ s, für den Rückflug 260 s. Wie groß war die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs und diejenige des Windes, wenn man annimmt, dass die Flugstrecke genau in Windrichtung verlief? Wurde die »Schallmauer« durchbrochen? (Schallgeschwindigkeit: 340 m/s)

44. Ein Lastwagen fährt von München auf der Autobahn nach Nürnberg. 20 Min. später folgt ihm ein Personenkraftwagen, der ihn in 1 Std. einholt. Nach weiteren 20 Min. hat der Personenkraftwagen einen Vorsprung von 10 km. Berechne die Geschwindigkeit des Last- bzw. Personenkraftwagens.

45. Otto und Klaus tragen in einem Stadion ein Radrennen aus. Nachdem Otto $5\frac{1}{4}$ Runden gefahren ist, wird er von dem schnelleren Klaus zum ersten Mal überrundet. Beim Überholen stürzt jedoch Klaus vom Rad, zum Glück ohne ernstere Folgen. Bis er von neuem starten kann, ist Otto um 105 m weitergefahren. Klaus fährt mit der früheren Geschwindigkeit und holt Otto nach 94,5 s erneut ein. Wie viel km/h betragen die Geschwindigkeiten der beiden Fahrer?

46. Auf einer geschlossenen Aschenbahn von 350 m Länge starten zwei Läufer von demselben Punkte aus in entgegengesetzter Richtung. In dem Augenblick, in dem der schnellere gerade die halbe Bahn durchlaufen hat, beträgt der Abstand der beiden Läufer noch $16\frac{2}{3}$ m. Sie begegnen sich zum ersten Mal genau 25 s nach dem Start. Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hat jeder der beiden Läufer?

47. Klaus und Peter starten gleichzeitig zu einem Wettlauf. Die Geschwindigkeit von Klaus ist um 12,5% größer als die von Peter. Nachdem Klaus zum 340 m entfernten Ziel gelangt ist, kehrt er sofort um und trifft beim Rücklauf auf Peter, genau 40 s nach dem gemeinsamen Start. Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Läufer und in welcher Entfernung vom Startpunkt treffen sie zusammen?

48. Von zwei ineinander greifenden Zahnrädern hat das eine 8 Zähne mehr als das andere. 5 Umdrehungen des kleineren Rades entsprechen gerade 3 Umdrehungen des größeren. Wie viel Zähne hat jedes der beiden Räder?

•**49.** Bei einer Schnellzugslokomotive macht auf einer Strecke von 441 m das Laufrad 112 Umdrehungen mehr als das größere Treibrad. Auf je 7 Umdrehungen des Laufrads kommen 3 Umdrehungen des Treibrads. Wie viele Umdrehungen macht das Treibrad auf einer Strecke von 10,5 km?

6.7.5 Aufgaben aus der Geometrie

50. In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich der Winkel an der Spitze zu einem Basiswinkel wie **a)** 6 : 7, **b)** 23 : 1. Berechne alle Winkel des Dreiecks.

51. Von den Winkeln α, β und γ eines Dreiecks verhält sich α zu β wie 5 zu 6, β zu γ wie 2 zu 3. Bestimme die drei Winkel.*

52. Die Hälfte eines Umfangswinkels ist um 6° kleiner als der dritte Teil des zugehörigen Zentriwinkels. Bestimme die beiden Winkel.

53. Von den drei aufeinander folgenden Winkeln α, β, γ eines Sehnenvierecks messen α und β zusammen 213°, β und γ zusammen 231°. Berechne sämtliche Winkel des Vierecks.

54. In einem gleichschenkligen Dreieck von 32,5 cm Umfang ist ein Schenkel 5-mal so lang wie der dritte Teil der Basis. Berechne die drei Seiten.

55. Ein rechteckiger Bogen Papier vom Format DIN A4 hat einen Umfang von 102 cm. Die Seiten verhalten sich (ziemlich genau) wie 10 : 7. Bestimme Länge und Breite.

56. Die Mittelparallele eines Trapezes misst 6,8 cm. Die beiden parallelen Seiten verhalten sich wie 7 : 10. Berechne ihre Länge.

57. In einem Tangentenviereck mit den aufeinander folgenden Seiten a, b, c, d sind a und c zusammen 84 cm lang, während b und d sich wie 10 : 11 verhalten. Berechne b und d.

58. In einem Tangentenviereck mit den aufeinander folgenden Seiten a, b, c, d beträgt die Summe aus a und b 14 cm, ferner verhält sich a zu d wie 4 : 7. Wie groß sind die vier Seiten, wenn der Umfang 40 cm beträgt?

59. Die Fläche eines Rechtecks bleibt ungeändert, wenn man die erste Seite um 2 cm größer, die zweite um 1 cm kleiner macht. Verkleinert man hingegen die erste Seite um 1 cm und vergrößert die zweite um 2 cm, so hat das neue Rechteck einen um 3 cm² größeren Flächeninhalt. Berechne die Seiten des ursprünglichen Rechtecks.

* Der deutsche Dichter und Mathematiker Abraham Gotthelf KÄSTNER (27.9.1719 Leipzig – 20.6.1800 Göttingen) brachte 1764 die Sitte auf, die Innenwinkel eines Dreiecks mit α, β und γ zu bezeichnen. Allgemein üblich wurde diese Bezeichnungsweise seit 1826 durch den deutschen Straßenbauingenieur und Mathematiker August Leopold CRELLE (17.3.1780 Eichwerder bei Wriezen – 6.10.1855 Berlin), der zahlreiche Rechenbücher verfasste und 1826 das heute noch existierende *Journal für reine und angewandte Mathematik*, eine angesehene Fachzeitschrift, begründete.

60. Ein Rechteck hat einen Umfang von 34 cm. Wenn man seine Länge verdoppelt und die Breite um 3,5 cm verkleinert oder die Breite verdoppelt und die Länge um 5 cm verringert, so sind die entstehenden Rechtecke flächengleich. Berechne Länge und Breite des ursprünglichen Rechtecks.

61. Vergrößert man bei einem Rechteck die eine Seite um 2 dm und verringert die andere um 4 dm, so erhält man ein flächengleiches Quadrat. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

62. Ein Rechteck von 28,6 cm Umfang wird im Maßstab 5 : 1 vergrößert. Im neuen Rechteck ist der Unterschied der beiden Seiten gleich der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Berechne dessen Seiten.

6.7.6 Verschiedenes

63. Aus der *Rechenung auff der linihen vnd federn* des Adam Ries (1492–1559) von 1522 nach der Ausgabe von 1574, dem *Rechenbuch auff Linien und Ziphren*:

Jtem/ zween wöllen ein Pferdt kauffen/ Als A. vnd B. für 15. fl. Spricht A. zum B. gib mir deines gelts ein drittheil/ so wil ich meins darzu thun / vnd das Pferdt bezahlen. Spricht B. zum A gib mir von deinem gelt ein viertheil/ so wil ich mit meinem gelt hinzu gethan das pferdt bezahlen. Nun frage ich/ wie viel jeglicher in sonderheit gelts hab?

64. Frau Koch kauft in einem Lebensmittelgeschäft 1,5 kg Zucker und 5 kg Mehl. Der Gesamtpreis dafür ist 8,30 €. Eine andere Kundin bezahlt für 1 kg Zucker und 2 kg Mehl 3,80 €. Berechne den Preis für 1 kg Zucker und 1 kg Mehl.

65. Zur Ergänzung seiner Wohnungseinrichtung hat Herr Knapp ein Darlehen zu 6 % aufgenommen, von dem er am Ende eines jeden Jahres außer dem Zins noch eine feste Rate zurückbezahlt. Nach dem ersten Jahr hat er 1196 €, nach dem zweiten Jahr 1140,80 € zu entrichten. Welches Kapital hat er aufgenommen und wie groß ist die Rückzahlungsrate?

66. Ein erstes Kapitel, das $5\frac{1}{2}$ % Zinsen trägt, bringt ebenso viel ein wie ein zweites Kapitel, das zu $6\frac{1}{2}$ % ausgeliehen ist. Wäre umgekehrt das erste zu $6\frac{1}{2}$ % und das zweite zu $5\frac{1}{2}$ % angelegt, so wäre der Jahreszins beider Kapitalien um 20 € größer als vorher. Wie groß sind die beiden Kapitalien?

67. In einer Verkaufsstelle für Heizöl wird die Monatsabrechnung aufgestellt. Eingekauft wurden 82 t, während 76 t verkauft wurden. Es ergibt sich ein Einnahmeüberschuss von 3224 €. Wie groß ist der Einkaufs- bzw. Verkaufspreis einer Tonne Heizöl, wenn das Unternehmen mit 25 % Gewinn arbeitet?

68. Die Kosten für elektrische Energie setzen sich aus einem monatlichen Grundpreis und dem sog. Arbeitspreis zusammen. In einem Haushalt wurden in den ersten vier Monaten eines Jahres 1730 Kilowattstunden (kWh) verbraucht. In der Jahresabrechnung war für diesen Zeitraum ein Betrag von 259,25 € angegeben. Ab Mai galt ein um 0,5 Cent/kWh höhe-

rer Arbeitspreis. Für die restlichen acht Monate, in denen 3165 kWh verbraucht wurden, mussten 491,55 € bezahlt werden. Wie hoch war der monatliche Grundpreis und welcher Arbeitspreis pro kWh wurde zuletzt berechnet?

69. Von zwei Konservendosen hat die erste 153 g brutto, die zweite 576 g brutto. Ihre Nettogewichte verhalten sich wie 1 : 4. Von den leeren Dosen ist die zweite um 15 g schwerer als die erste. Wie viel Prozent beträgt bei jeder Dose die Tara? Wie groß sind die Nettogewichte?*

70. An einer Balkenwaage hängen links ein Kohlestück von der Dichte 1,4 g/cm^3, rechts ein Granitstein von der Dichte 2,8 g/cm^3. Die Waage ist im Gleichgewicht, wenn man die beiden Körper vollständig in Wasser eintauchen lässt. Um in Luft Gleichgewicht herzustellen, muss rechts eine zusätzliche Masse von 63 g angehängt werden. Bestimme die Volumina der beiden Körper.

71. Vor 3 Jahren war der Vater 4-mal so alt, wie sein Sohn heute ist. Nach 19 Jahren ist der Vater gerade doppelt so alt wie der Sohn. Wie alt sind beide jetzt?

72. Hans sagt zu seinem Bruder Otto: »In 3 Jahren wirst du gerade doppelt so alt sein wie ich.« Hierauf antwortet Otto: »Vor 5 Jahren war ich sogar 6-mal so alt wie du.« Wie alt sind Hans und Otto?

73. The combined ages of Mary and Ann are 48 years. Mary is twice as old as Ann was, when Mary was half as old as Ann will be, when Ann is three times as old as Mary was, when Mary was three times as old as Ann.

74. Ein etwas neugieriger Herr fragte bei einem Ball zwei Schwestern nach ihrem Alter. Die Ältere gab ihm zur Antwort: »Vor 20 Jahren war ich gerade doppelt so alt wie meine Schwester. In 20 Jahren werde ich doppelt so alt sein, wie meine Schwester heute ist.« – »Danke«, sagte der Herr geschmeichelt und begann eifrig zu rechnen. Zu welchem Ergebnis kam er?

75. Bei einer Gesellschaft wollte ein Herr das Alter seiner Tischdame in Erfahrung bringen. Da er es aber nicht für schicklich hielt, sie direkt danach zu fragen, bat er sie, es erraten zu dürfen. Nachdem sie sich damit einverstanden erklärt hatte, gab er ihr Papier und Bleistift und sagte:
»Schreiben Sie bitte heimlich Ihre Telefonnummer auf den Zettel und multiplizieren Sie diese mit 20; nun 31 addieren, das Ergebnis mit 5 multiplizieren und Ihr Alter dazuzählen. Wollen Sie schließlich noch die Anzahl der Tage von 30 Wochen, also 210, hinzuzählen und 365 abziehen. Nennen Sie mir nun bitte die gefundene Zahl.« – »Gern«, sagte die Dame, »sie

* Das Wort **Tara** ist arabischen Ursprungs: *tarh* = *wegwerfen, abziehen.* Gegen Ende des 15. Jh.s wird es italienisiert zu tara, womit spätestens seit dem 16 Jh. das Gewicht der Verpackung bezeichnet wird. Ende des 15. Jh.s kommen dann **netto** (= *rein*) zur Bezeichnung des reinen Warenanteils und schließlich Anfang des 16. Jh.s **brutto** (= *roh, gesamt*) zur Bezeichnung des Gesamtgewichts in Gebrauch. Im Laufe des 16. Jh.s werden die Ausdrücke ins Deutsche übernommen.

heißt 6 362 832.« – »Dann sind Sie 32 Jahre alt«, rief der Herr, »und außerdem ist Ihre Telefonnummer 63628.« – »Das stimmt«, sagte verblüfft die Dame und wusste nicht, wie sie sich das Rätsel erklären sollte. Kannst du es lösen?

76. Hans möchte Ottos Geburtsdatum erraten. Er lässt ihn zu diesem Zweck folgende Rechnung ausführen: »Schreibe, ohne dass ich es sehen kann, auf ein Blatt dein Geburtsjahr, multipliziere es mit 5 und zähle 3 hinzu; vervielfache nun mit 20, addiere 52 und die Nummer deines Geburtsmonats und ziehe sodann 112 ab. Verdopple das Ergebnis, zähle 31 hinzu und multipliziere die erhaltene Zahl mit 50. Addiere jetzt noch 365 und die Nummer des Tages deiner Geburt und vermindere das Ganze um 1915.« Etwas erschöpft nennt Otto die Zahl 19 760 417. »Dann bist du also am 17. April 1976 geboren«, antwortet Hans. Erkläre dies!

77. Die Entfernung zweier Bäume schätzte Karl auf 85 m, Fritz auf 75 m, wobei Karl zu viel und Fritz zu wenig schätzte. Der Schätzfehler von Fritz war $2\frac{1}{3}$-mal so groß wie jener von Karl. Um wie viel Meter hatte sich jeder verschätzt? Wie groß war die wirkliche Entfernung?

78. Der Stausee eines Elektrizitätswerks wird über einen Zuflusskanal mit Wasser versorgt. Wenn 3 von den 5 gleich starken Turbinen in Betrieb sind, nimmt der Inhalt des Stausees in 12 Stunden um 360 000 m^3 zu. Sind jedoch alle 5 Turbinen eingeschaltet, so verringert sich bei unverändertem Zufluss der Wasservorrat in 6 Stunden um 300 000 m^3. Wie viel m^3 Wasser fließen dem Stausee in einer Stunde zu und welche Wassermenge benötigt eine Turbine in der Stunde?

• **79.** Da der Trinkwasserspeicher einer Stadt um 11 Uhr nur noch zur Hälfte gefüllt ist, wird eine Förderpumpe eingeschaltet. Dennoch sinkt infolge des starken Verbrauchs bis 12 Uhr der Wasservorrat auf $\frac{2}{5}$ des gesamten Fassungsvermögens. Deshalb wird nun noch eine zweite, gleich starke Förderpumpe in Betrieb genommen. Daraufhin hat sich bis 14 Uhr der Speicher zu $\frac{4}{5}$ gefüllt, obwohl der Wasserverbrauch während der ganzen Zeit konstant blieb. In welcher Zeit würde nun nach Ausschalten beider Pumpen der Behälter leer sein, wenn der Verbrauch konstant bliebe? Wie lange braucht eine der Pumpen um den leeren Behälter zu füllen, wenn dabei keine Wasserentnahme erfolgt?

80. Aus dem *Chiu Chang Suan Shu* (Buch VIII, Aufgabe 1):
Aus 3 Garben einer guten Ernte, 2 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 39 Tou. Aus 2 Garben einer guten Ernte, 3 Garben einer mittelmäßigen Ernte und 1 Garbe einer schlechten Ernte erhält man den Ertrag von 34 Tou. Aus 1 Garbe guter Ernte, 2 Garben mittelmäßiger Ernte und 3 Garben schlechter Ernte erhält man den Ertrag von 26 Tou. Frage: Wie viel ist jedes Mal aus 1 Garbe der Ertrag der guten, mittelmäßigen und schlechten Ernte? (1 Tou $\approx$ 0,2 dm^3)

81. Zwei Heimarbeiterinnen stellen für eine Firma denselben Serienartikel her. Als die zweite mit der Arbeit anfängt, hat die erste bereits 5 Stück fertig gestellt. Da die zweite Arbeiterin flinker ist und die erste außerdem eine Pause von einer halben Stunde einlegt, holt sie diese nach 2 Std. ein. Nach weiteren 3 Std. beendet die zweite ihre Arbeit, während die erste noch eine halbe Stunde länger tätig sein muss, um dieselbe Stückzahl zu erreichen. Wie viel Stück fertigt jede Arbeiterin pro Stunde an?

82. Eine Tischdecke von 1,60 m Länge und 1,30 m Breite wird auf einer Nähmaschine mit einer Doppelnaht eingesäumt, wobei die zweite Naht mit einer etwas größeren Stichweite genäht wird als die erste. Auf diese Weise treffen bei der zweiten Naht auf die Längsseite 160 Stiche weniger als bei der ersten. Zum Einsäumen des Tischtuchs waren insgesamt 5220 Stiche notwendig. Welche Stichlängen haben die beiden Nähte?

83. Ein rechteckiges Grundstück wird so umzäunt, dass in jeder Ecke ein Pfosten steht und die einzelnen Pfosten in gleichem Abstand aufeinander folgen. Auf der Längsseite stehen 7 Pfosten mehr als auf der Breitseite. Wie viele Pfosten stehen auf einer Längs- bzw. auf einer Breitseite, wenn sich die Länge des Grundstücks zu seiner Breite wie 3 : 2 verhält?

• 84. Ein rechteckiges Grundstück von 126 m Länge und 42 m Breite soll mit Obstbäumen bepflanzt werden, die in Längs- und Querreihen angeordnet sind. Dabei soll der Abstand eines äußeren Baumes von der Grenze des Grundstücks gleich dem halben Baumabstand in der betreffenden Richtung sein. Bei einer ersten Planung wird vorgesehen, dass der Abstand zwischen zwei Längsreihen ebenso groß ist wie der zwischen zwei Querreihen. Danach entschließt sich der Besitzer jedoch, die Zahl der Längsreihen um 1, die der Querreihen um 2 zu erhöhen, wodurch er 32 Bäume mehr unterbringt. Wie viele Bäume werden also endgültig gepflanzt?

• 85. Als Abschluß seiner *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – von 1544 bringt Michael STIFEL (1487(?)–1567) ein *exemplum pulchrum*, ein »schönes Beispiel«:
Drei Reisende finden, während sie zusammen so dahingehen, einen Ranzen mit 73 Gulden. Sie stellen fest, dass diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft der ersten beiden das Doppelte dessen sind, was der erste und dritte und der zweite und dritte gemeinsam bei sich haben. Diese 73 Gulden ergeben aber auch mit dem Besitz des ersten und dritten das Dreifache dessen, was der zweite und dritte und der erste und zweite mit sich führen. Und schließlich ergeben diese 73 Gulden zusammen mit der Barschaft des zweiten und dritten das Vierfache dessen, was der erste und zweite und der erste und dritte zusammen bei sich tragen. Wie viele Gulden besitzt jeder?

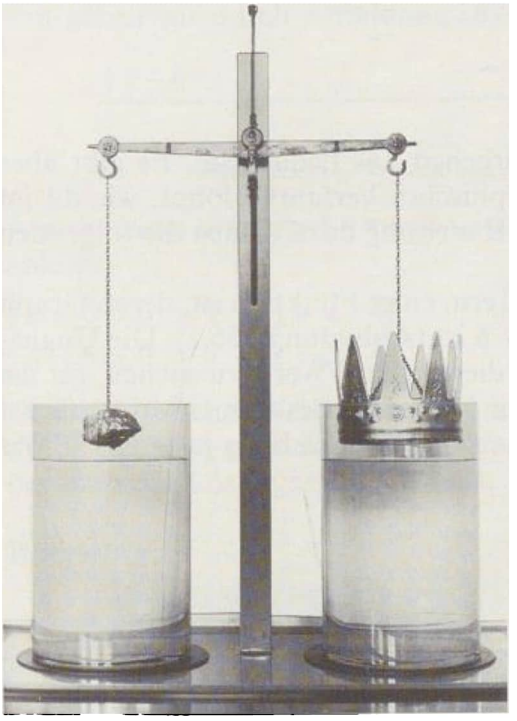
Zu Seite 165:

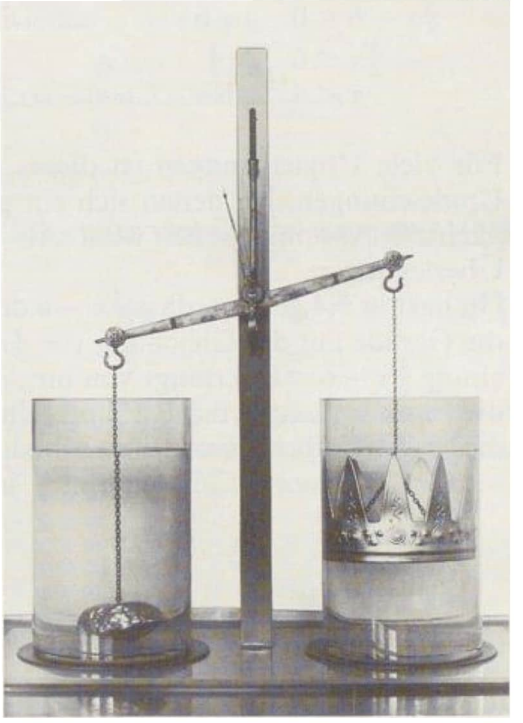
Aus der Vorrede zu Buch IX der *Zehn Bücher über die Architektur* des VITRUV, Übersetzung von C. FENSTERBUSCH.

9. Obwohl aber ARCHIMEDES viele verschiedene, bewundernswerte Entdeckungen gemacht hat, scheint von allen diese, von der ich nun berichte, auch mit unendlich großem schöpferischem Geist erarbeitet zu sein. In Syrakus nämlich hatte sich HIERON DER JÜNGERE zu einer starken Königsmacht emporgeschwungen. Als er nach seinen Siegen den unsterblichen Göttern in einem Heiligtum einen goldenen Kranz als Weihegabe niederzulegen beschlossen hatte, verdingte er die Anfertigung um einen Arbeitslohn und wog dem Unternehmer das Gold genau nach Gewicht zu. Dieser legte zur gegebenen Zeit das schön handgearbeitete Werkstück zur Abnahme vor, und er schien das Gewicht des Kranzes genau abgeliefert zu haben. 10. Später wurde Anzeige erstattet, es sei Gold weggenommen und dem Kranz ebenso viel Silber beigemischt worden. HIERON war darüber erbost, dass er betrogen war. Da er jedoch kein Mittel ausfindig machen konnte, wie er die Unterschlagung nachweisen konnte, bat er ARCHIMEDES, er sollte es übernehmen, sich darüber Gedanken zu machen. Während dieser darüber nachdachte, ging er zufällig in eine Badestube und, als er dort in die Badewanne stieg, bemerkte er, dass ebenso viel wie er von seinem Körper in die Wanne eintauchte, an Wasser aus der Wanne herausfloss. Weil (dieser Vorgang) einen Weg für die Lösung der Aufgabe gezeigt hatte, hielt er sich daher nicht weiter auf, sondern sprang voller Freude aus der Badewanne, lief nackend nach Hause und rief mit lauter Stimme, er habe das gefunden, was er suche. Laufend rief er nämlich immer wieder griechisch: „Ich hab's gefunden! Ich hab's gefunden". 11. Dann aber soll er in Verfolg dieser Entdeckung zwei Klumpen von dem gleichen Gewicht, das auch der Kranz hatte, gemacht haben, einen aus Gold, einen zweiten aus Silber. Danach füllte er ein großes Gefäß bis an den äußersten Rand mit Wasser, und dahinein tauchte er den Silberklumpen. Der Größe des in das Wasser eingetauchten Silberklumpens entsprach die Menge des abfließenden Wassers. Dann nahm er den Klumpen heraus. Darauf goss er, mit einem Sextar* abmessend, so viel Wasser, wie es weniger geworden war, in das Gefäß nach, sodass das Wasser in derselben Weise, wie es vorher gewesen war, mit dem Rand eine waagerechte Fläche bildete. So fand er daraus, welches bestimmte Gewicht Silber einem bestimmten Maß Wasser entsprach. 12. Nachdem er dies festgestellt hatte, tauchte er in der gleichen Weise den Goldklumpen in das volle Gefäß, nahm ihn wieder heraus, fügte in der gleichen Weise das abgemessene Quantum Wasser hinzu und fand, weil der Messbecher eine geringere Anzahl von Sexteln Wasser anzeigte, um wie viel bei gleich großem Gewicht ein Goldklumpen in seinem Volumen kleiner ist als ein Silberklumpen. Später aber füllte er das Gefäß wieder auf, tauchte den Kranz selbst in das gleiche Wasser hinein und fand, dass, als der Kranz eingetaucht war, mehr Wasser (aus dem Messbecher) abgeflossen war als dann, als der Goldklumpen von gleichem Gewicht eingetaucht war. Und so errechnete er aus dem, was im Falle des Kranzes mehr an Wasser zugetan war als im Falle des Goldklumpens, die Beimischung des Silbers zum Gold und wies sie und die handgreifliche Unterschlagung des Goldarbeiters nach.

* sextarius = 0,547 l, der 6. Teil eines congius

7 Ungleichungen





Die hydrostatische Waage
Was ist gleich, was ist ungleich?

König HIERON II. von Syrakus (*306, 275 Tyrann, 265 König, †215 v. Chr.) hatte einem Goldschmied Gold übergeben, damit er daraus eine Krone für eine Götterstatue schmiede. Es wurde ihm angezeigt, der Goldschmied habe Gold weggenommen und Silber beigemengt. HIERONS Verwandter und Freund ARCHIMEDES (Ἀρχιμήδης, um 287–212 v. Chr.), der wohl größte Mathematiker des Altertums, sollte den Verdacht erhärten oder widerlegen, ohne die Krone zu beschädigen. Im Bade kam ARCHIMEDES die Erleuchtung, die ihn so überwältigte, dass er mit dem Rufe εὕρηκα (heúreka) – »ich hab's gefunden« – nackt nach Hause eilte. Der Goldschmied hatte unterschlagen. – Überliefert wurde diese Legende von dem Baumeister Marcus VITRUVIUS Pollio (1. Jh. v. Chr.) in seinen vor 31 v. Chr. verfassten *De architectura libri decem*, dem einzigen erhaltenen Lehrwerk der Antike über Architektur und Technik. Im Lösungsheft wird VITRUVS Bericht wiedergegeben, dessen Übersetzung auf Seite 164 abgedruckt ist.

7 Ungleichungen

7.1 Ein graphisches Verfahren zum Lösen linearer Ungleichungen

Dir ist bekannt, wie man die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung mittels Äquivalenzumformungen bestimmt. Zur Erinnerung

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}x - 6 &< 0 \quad \| +6 \\ \tfrac{3}{2}x &< 6 \quad \| \cdot \tfrac{2}{3} \\ x &< 4, \quad \text{also} \quad L =]-\infty; 4[. \end{aligned}$$

Für viele Ungleichungen ist dieses Vorgehen das bequemste. Es gibt aber Ungleichungen, bei denen sich ein graphisches Verfahren lohnt, wie du im nächsten Abschnitt sehen wirst. Als Vorbereitung dazu dienen die folgenden Überlegungen.
Du hast in **5.4** gelernt, dass $\frac{3}{2}x - 6$ der Term einer Funktion ist, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x - 6$ ist (Abbildung 166.1). Die Ungleichung $\frac{3}{2}x - 6 < 0$ verlangt von uns, all diejenigen x-Werte zu suchen, für die die Funktionswerte negativ sind. Um sie zu finden, bestimmen wir zunächst die Nullstelle dieser Funktion, d. h. die Lösung der Gleichung $\frac{3}{2}x - 6 = 0$. Wir

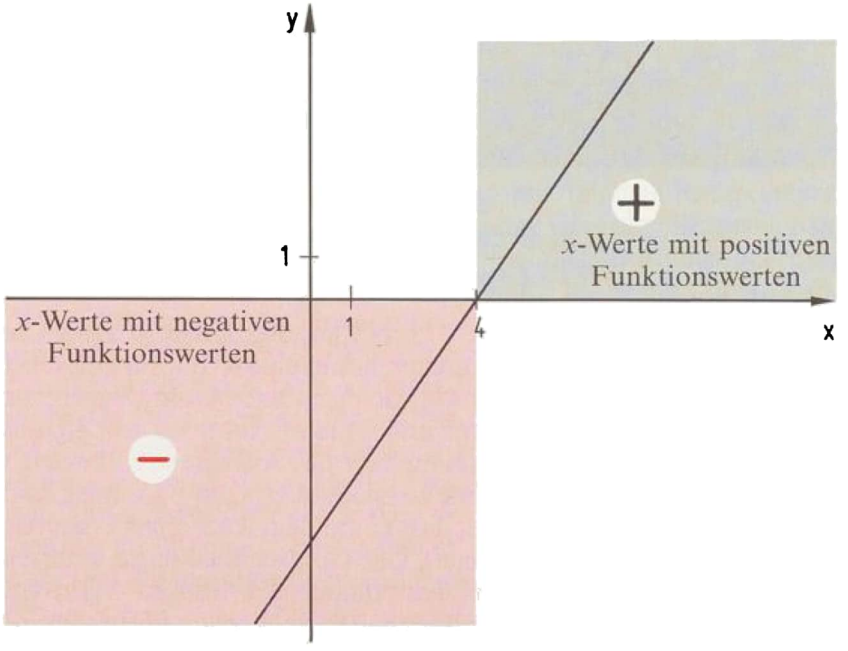


Abb. 166.1 Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x - 6$

erhalten $x = 4$. An dieser Stelle schneidet die Gerade die x-Achse. Da die Steigung der Geraden den Wert $\frac{3}{2}$ hat, also positiv ist, verläuft die Gerade von links unten nach rechts oben. Die Funktionswerte sind somit links von der Nullstelle 4 negativ, rechts davon positiv. Damit können wir die Lösungsmenge der Ungleichung direkt ablesen zu $L =]-\infty; 4[$.

Zur Lösung der Ungleichung $\frac{3}{2}x - 6 < 0$ ist es aber gar nicht nötig, die Gerade zu zeichnen. Es genügt nämlich zu wissen, wo sie die x-Achse schneidet und welches Steigungsverhalten sie besitzt. Bei einer steigenden Geraden liegen die negativen Funktionswerte links von der Nullstelle und die positiven rechts davon; bei einer fallenden Geraden ist es genau umgekehrt. Diesen Sachverhalt geben wir durch Abbildung 167.1 wieder:

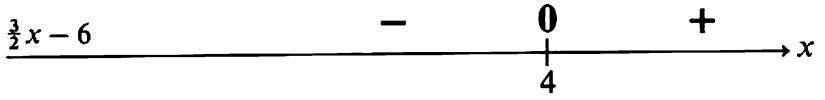


Abb. 167.1 Vorzeichenverteilung beim Term $\frac{3}{2}x - 6$

Aus ihr kann man die Lösungsmengen folgender vier Ungleichungen sofort ablesen.

$\frac{3}{2}x - 6 < 0 \Rightarrow L =]-\infty; 4[$ $\qquad$ $\frac{3}{2}x - 6 > 0 \Rightarrow L =]4; +\infty[$

$\frac{3}{2}x - 6 \leqq 0 \Rightarrow L =]-\infty; 4]$ $\qquad$ $\frac{3}{2}x - 6 \geqq 0 \Rightarrow L = [4; +\infty[$

Beim graphischen Verfahren zur Lösung von Ungleichungen löst man also durch Rechnen zunächst eine Gleichung und macht dann eine Zeichnung, aus der man die Lösungsmenge abliest. Zur Einübung ein weiteres Beispiel.

Beispiel 2:

$-7x + 13 \geqq 0$

Nullstelle: $-7x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{7}$

Steigung $= -7 < 0$

Die Vorzeichenverteilung gibt Abbildung 167.2 wieder. Aus ihr liest man ab, dass $L =]-\infty; \frac{13}{7}]$ ist.

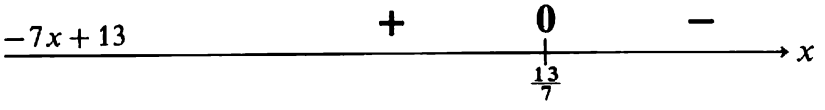


Abb. 167.2 Vorzeichenverteilung beim Term $-7x + 13$

Das graphische Verfahren ist nur dann anwendbar, wenn eine Seite der Ungleichung den Wert null hat. Andernfalls muss man durch Äquivalenzumformungen erst eine solche **Nullform*** herstellen. Dazu

* Die erste Nullform einer Gleichung findet sich in der *Arithmetica integra* (1544) des Michael STIFEL (1487(?) bis 1567), folium 283r.
Systematisch führte die Nullform Thomas HARRIOT (1560–1621) ein. 1631 stellten Freunde, vor allem Walter WARNER, aus seinen hinterlassenen Manuskripten einen dünnen Band *Artis analyticae praxis, ad aequationes Algebraicas nova, expedita & generali methodo, resolvendas: tractatus* zusammen, der starken Einfluss auf René DESCARTES (1596–1650) ausübte. Wir erinnern daran, dass sich in diesem Werk zum ersten Mal die nicht von HARRIOT erfundenen Symbole < und > finden. Walter WARNER hat HARRIOTS handschriftliche

Beispiel 3:

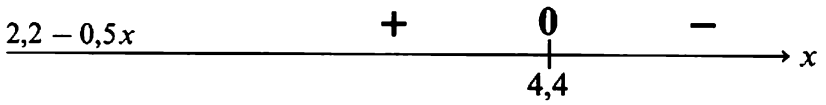
$0{,}3 - 3{,}2x < -2{,}7x - 1{,}9 \quad \| + 2{,}7x + 1{,}9$

$2{,}2 - 0{,}5x < 0$

Nullstelle: $2{,}2 - 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}4$

Steigung $= -0{,}5 < 0$

$L =]4{,}4; +\infty[$.



Aufgaben

1. a) $2x - 5 < 0$ b) $0 < -3x - 12$
2. a) $3\frac{1}{3} - \frac{5}{9}x > 0$ b) $0 > -2\frac{1}{9}x + 7\frac{1}{8}$
3. a) $5{,}6x - 0{,}49 \geqq 0$ b) $0 \leqq 1 - 0{,}001x$
4. a) $3x - 12 < 4 - 3(1 - (1 - x))$
   b) $8\frac{1}{4}x + 3(-\frac{1}{12}x + \frac{4}{9}) \geqq 4\frac{1}{4}x - 6(\frac{11}{24} - \frac{11}{24}x)$
5. a) $(2x - \frac{1}{2})^2 > 2x(2x - 1)$
   b) $(0{,}3 - 2x)(0{,}3 + 2x) < 0{,}09 - 4x^2$

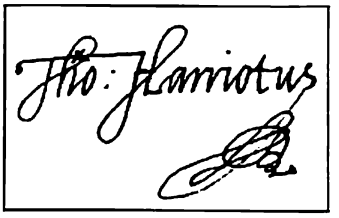


Abb. 168.1 Unterschrift HARRIOTS im Brief an KEPLER vom 13. 7. 1608

7.2. Produktungleichungen

Das graphische Lösungsverfahren von **7.1** bewährt sich besonders bei Produktungleichungen. Unter einer **Produktungleichung** verstehen wir eine Ungleichung, deren eine Seite ein Produkt und deren andere Seite null ist. Ein **Beispiel** hierfür ist

$$(3x + 5)(10 - 2x) < 0.$$

Man könnte diese Ungleichung mittels der Vorzeichenregeln rein rechnerisch lösen. Das links stehende Produkt ist nämlich nur dann negativ, wenn beide Faktoren verschiedenes Vorzeichen haben; dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

(1. Faktor positiv **und** 2. Faktor negativ)

oder

(1. Faktor negativ **und** 2. Faktor positiv) d. h.

Zeichen ≺ und ≻ drucktechnisch zu < und > vereinfacht. – Sir Walter RALEIGH sandte 1585 HARRIOT nach Amerika, wo er North-Carolina erforschte und kartographierte. Nach seiner Rückkehr nach England (1587) tat er sich als Astronom hervor, der mit Johannes KEPLER (1571–1630) korrespondierte: er beobachtete die Sonnenflecken und 1610 nach Galileo GALILEI (1564–1642) die Jupitermonde.
Erst 1734 verband Pierre BOUGUER (16. 2. 1698 Croisic/Bretagne – 15. 8. 1758 Paris) die Zeichen WARNERS mit dem Gleichheitszeichen des Robert RECORD(E) (1510(?) – 1558) zu den Symbolen ≦ und ≧. BOUGUER war einer der Geodäten, die Frankreich 1735 zur Vermessung eines Meridianbogens nach Peru sandte.

$$((3x+5>0) \wedge (10-2x<0)) \vee ((3x+5<0) \wedge (10-2x>0))$$
$$(x>-\tfrac{5}{3} \wedge x>5) \vee (x<-\tfrac{5}{3} \wedge x<5)$$
$$x>5 \vee x<-\tfrac{5}{3}$$
$$L =]-\infty; -\tfrac{5}{3}[\cup]5; +\infty[$$

Dieses rein rechnerische Verfahren ist aufwendig und auch unübersichtlich. Einfacher findet man die Lösungsmenge mit dem graphischen Verfahren. Dazu berechnet man für jeden Faktor zuerst die Nullstelle, zeichnet dann die dazugehörige Vorzeichenverteilung und ermittelt über die Vorzeichenregeln die Vorzeichenverteilung des Produkts, aus der man die Lösungsmenge abliest. Betrachten wir nochmals die Produktungleichung

$$(3x+5)(10-2x)<0.$$

Nullstellen: $3x+5=0 \Leftrightarrow x=-\tfrac{5}{3}$ Steigungen: $3>0$

$10-2x=0 \Leftrightarrow x=5$ $-2<0$

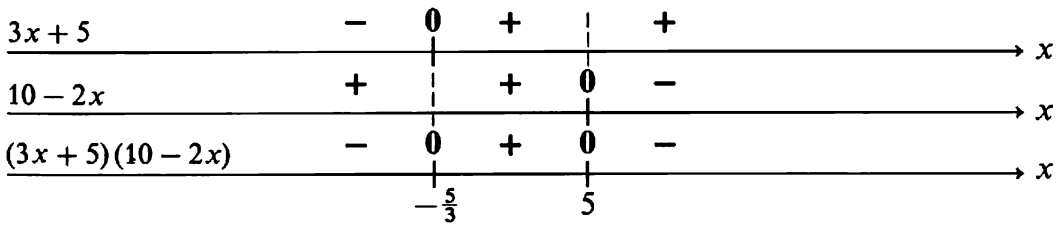


Abb. 169.1 Vorzeichenverteilung beim Term $(x+5)(10-2x)$

Aus Abbildung 169.1 liest man ab $L =]-\infty; -\tfrac{5}{3}[\cup]5; +\infty[$

Das graphische Verfahren lässt sich im Gegensatz zum rechnerischen Verfahren mit Leichtigkeit auch auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren übertragen. Hierzu ein

Beispiel: $x(1-x)(2x+8) \geqq 0$

Nullstellen: $x=0$ Steigungen: $1>0$

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ $-1<0$

$2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ $2>0$

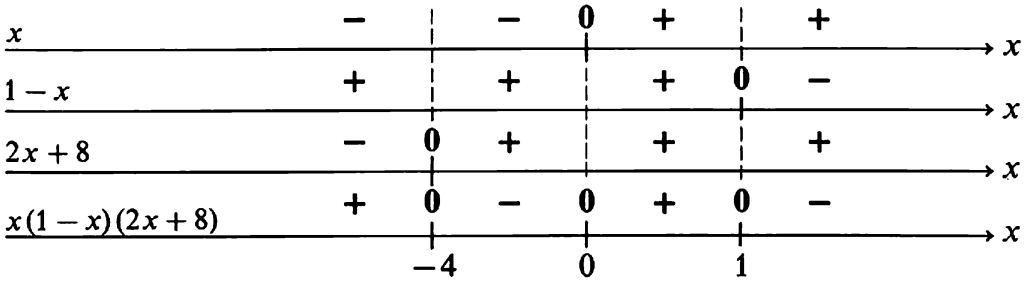


Abb. 169.2 Vorzeichenverteilung beim Term $x(1-x)(2x+8)$

Aus Abbildung 169.2 liest man ab $L =]-\infty; -4] \cup [0; 1]$

Wenn eine Ungleichung nicht in Produktform vorliegt, dann kann man sie manchmal durch Faktorisieren in Produktform bringen und lösen.
Dazu ein

Beispiel: $x^3 + 4x^2 - 21x > 0$
$x(x^2 + 4x - 21) > 0$
$x(x+7)(x-3) > 0$ $\qquad L =]-7; 0[\cup]3; +\infty[$

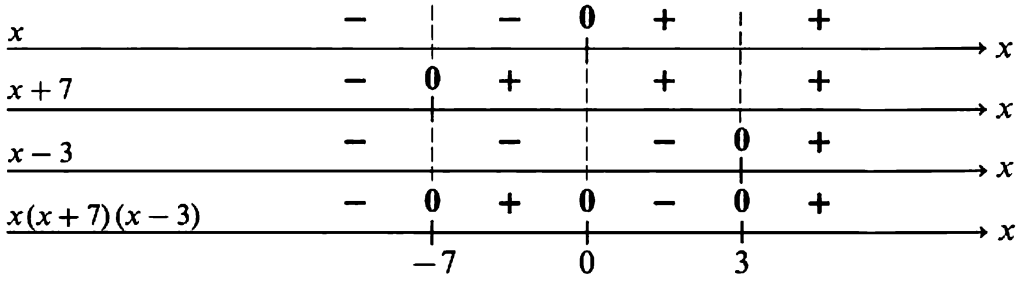


Abb. 170.1 Vorzeichenverteilung beim Term $x(x+7)(x-3)$

Aufgaben

1. **a)** $(x-2)(x-5) < 0$ **b)** $x(x-\frac{1}{3}) > 0$
c) $(x+1)(x-1) \leqq 0$ **d)** $(x+2)(-x+4) \geqq 0$

2. **a)** $(x+2)^2 > 0$ **b)** $(-x-7)^2 < 0$
c) $(x+3)^2 \geqq 0$ **d)** $(-x+7)^2 \leqq 0$
e) $(x+1)^3 > 0$ **f)** $(x-3)^3 < 0$

3. **a)** $\frac{1}{2}(2x+6)(x+3) < 0$ **b)** $5(3x+1)(2x-5) > 0$
c) $-3(\frac{1}{2}x-2)(-\frac{1}{3}x-3) \leqq 0$ **d)** $-(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}) \geqq 0$

4. **a)** $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ **b)** $3x(2x+9)(-x+7) < 0$
c) $(0{,}1x-0{,}01)(1{,}2-x)(1{,}2+x) \geqq 0$ **d)** $(3\frac{1}{2}-7x)(3\frac{1}{2}x-7)\cdot x \leqq 0$

•**5.** **a)** $-4x(2x-3)(3-2x)(3+2x) > 0$
b) $(\frac{1}{2}x-4)(\frac{4}{3}-2x)(\frac{3}{5}x+\frac{1}{10})(0{,}1-0{,}001x) < 0$
••**c)** $-x^2(0{,}01x+10)(x+1000) \geqq 0$

6. **a)** $3x - x^2 \geqq 0$ **b)** $25x^2 - 36 < 0$
c) $2{,}89x - 1{,}69x^3 > 0$ **d)** $x^3 - 3x^2 - 10x \leqq 0$

••**7.** **a)** $(x-a)(x-b) < 0$ **b)** $(ax-1)(bx-b) > 0$
c) $-x(a-x)(b+x)^2 \geqq 0$ **d)** $-(a^2x^2-b^4)(ax+b^2) < 0$

7.3 Bruchungleichungen

Die Vorzeichenregeln für die Division entsprechen völlig denen für die Multiplikation. Deshalb können wir das graphische Lösungsverfahren auch auf Bruchungleichungen anwenden, wenn wir sie auf Nullform bringen und Zähler und Nenner faktorisieren.

Beispiel:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x} \leqq \frac{x^2}{x^2-1} \qquad D = \mathbb{Q}\setminus\{-1; 0; 1\}$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{x^2}{x^2-1} \leqq 0$$

$$\frac{x^3+2x^2+x-2x^2+2-x^3}{x(x-1)(x+1)} \leqq 0$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)} \leqq 0 \qquad L = [-2; -1[\cup]0; 1[$$

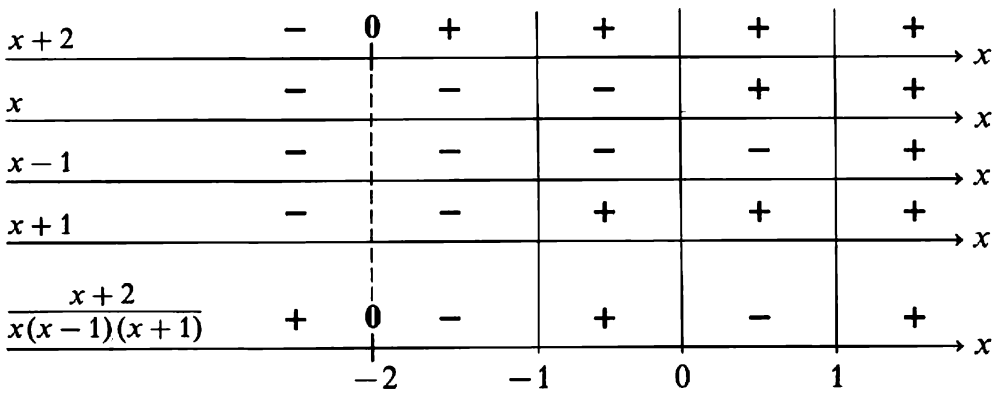


Abb. 171.1 Vorzeichenverteilung beim Term $\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}$.
Die roten Striche kennzeichnen die nicht zulässigen x-Werte.

Weil bei Bruchungleichungen Nenner auftreten, die null werden können, müssen wir auf die Definitionsmenge achten. Am besten streicht man beim graphischen Lösungsverfahren die nicht zulässigen x-Werte von vornherein weg.

Aufgaben

1. a) $\frac{1}{x} < 0$ **b)** $\frac{2}{x+1} > 0$ **c)** $\frac{-7}{x-3} \geqq 0$

d) $\frac{1}{2x+5} > 0$ **e)** $\frac{-8}{3x+2} \geqq 0$ **f)** $\frac{1}{0{,}3x+1{,}2} > 0$

2. a) $\frac{x+1}{x-1} > 0$ **b)** $\frac{3-x}{x-5} < 0$ **c)** $\frac{2-3x}{3x-2} \leqq 0$

d) $\frac{2x-1}{1-x} \leqq 0$ **e)** $\frac{\frac{1}{2}x-3}{3x-\frac{1}{2}} < 0$ **f)** $\frac{1{,}2-0{,}3x}{0{,}9+3x} \geqq 0$

3. a) $\frac{1}{x} > -2$ **b)** $\frac{2}{x+2} < -3$ **c)** $\frac{x}{0{,}8-2x} > -\frac{1}{2}$

4. a) $\frac{1}{x(x+2)} > 0$ **b)** $\frac{-3}{(x-2)(x+3)} \geqq 0$

c) $\frac{-1}{x^2} > 0$ **d)** $\frac{3}{(x+3)^2} \geqq 0$

5. a) $\frac{x}{x^2-4} < 0$ **b)** $\frac{x^2+6x+9}{x^2-6x+9} > 0$

c) $\frac{9x^2-16}{9x^2+16-24x} \leqq 0$ **d)** $\frac{\frac{1}{4}-x+x^2}{\frac{1}{4}-x^2} \geqq 0$

6. a) $\frac{x}{x-1} > 1$ **b)** $\frac{x+1}{x-1} \leqq 1$

c) $\frac{2x-1}{4x+2} \geqq -1$ **d)** $\frac{-0{,}2x+0{,}1}{3x+0{,}6} < 2$

7. a) $x < \frac{1}{x}$ **b)** $\frac{1}{x+1} \geqq \frac{1}{x}$

c) $\frac{-1}{2x+1} < \frac{1}{1+2x}$ **d)** $\frac{-0{,}1}{x+0{,}2} \geqq \frac{0{,}2}{0{,}2x+1}$

8. a) $\frac{x}{x+2} \geqq \frac{2x}{2x+1}$ **b)** $\frac{6x}{x+1} \leqq \frac{6x+1}{x-1}$

c) $\frac{3x}{2-3x} > \frac{1-2x}{2x-1}$ **d)** $\frac{3x}{2-3x} \leqq \frac{1-2x}{2x+1}$

9. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geqq 0$ **b)** $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geqq 0$

c) $\frac{3+x}{x} + \frac{6}{3-x} \leqq 1$ **d)** $\frac{4x-1}{x+1} + \frac{4x+1}{x-1} < 8$

:10. a) $x + \frac{1}{x} \leqq \frac{x^2+2}{x} - 1$ **b)** $\frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{2+x} \geqq \frac{x^2+x}{(x-2)^2}$

c) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} \geqq \frac{2}{x}$ **d)** $\frac{5x^2-6}{25x^2-4} + \frac{9-2\frac{1}{2}x}{15x^2-6x} < \frac{4x-5}{20x^2+8x} - \frac{1}{6x}$

11. a) $\frac{x}{x-a} \leqq 0$ b) $\frac{x}{x-a} \leqq 1$ c) $\frac{x}{x-a} \leqq a$

12. a) $1 > \frac{1}{x+3} > 0{,}1$ b) $\frac{1}{5} < \frac{2}{3x-5} < 2$

c) $-1 \leqq \frac{1}{x} \leqq 2$ d) $-10 < \frac{10}{2x+1} \leqq 5$

13. a) Für zwei von null verschiedene rationale Zahlen gelte $a < b$. Welche Beziehung besteht dann zwischen den Kehrwerten $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$?

Hinweis: Multipliziere die gegebene Ungleichung mit $\frac{1}{ab}$ und beachte die nötigen Fallunterscheidungen.

b) Wende die Regeln aus **a** an für

1) $\frac{1}{x} > 1$ 2) $\frac{1}{x} < -3$ 3) $\frac{3}{2x} > 10$

4) $\frac{1}{x} < 1$ 5) $\frac{1}{2x} > -3$ 6) $\frac{1}{x-1} < 4$

7.4 Ungleichungen mit Absolutbeträgen

Treten in Gleichungen bzw. Ungleichungen Absolutbeträge auf, so musst du immer eine Fallunterscheidung vornehmen. Dabei musst du, wie du weißt, danach unterscheiden, ob der Term zwischen den Betragsstrichen positiv, null oder negativ ist. Der Term zwischen den Betragsstrichen ist bekanntlich das Argument der Betragsfunktion.
Ist nun das Argument größer als 0 oder gleich 0, dann kannst du die Betragsstriche durch eine Plusklammer ersetzen. Ist das Argument hingegen kleiner als 0, dann musst du die Betragsstriche durch eine Minusklammer ersetzen, z. B.

$$|2x-3| = \begin{cases} (2x-3), & \text{falls } 2x-3 \geqq 0, \\ -(2x-3), & \text{falls } 2x-3 < 0. \end{cases}$$

Üblicherweise gibt man aber die Bedingungen $2x-3 \geqq 0$ und $2x-3 < 0$ als Bedingungen für x an und löst die Minusklammer im Kopf auf, nämlich

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & \text{falls } x \geqq \frac{3}{2}, \\ 3-2x, & \text{falls } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

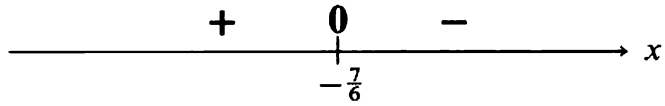
Die Zahl $\frac{3}{2}$ trennt die beiden Fälle. Sie ist aber auch die Nullstelle des Arguments. Es ist daher zweckmäßig, zuerst die Nullstelle des Arguments zu bestimmen, um mit ihrer Hilfe die Vorzeichenverteilung des Arguments ermitteln zu können.

Beispiel 1: $|-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}|$

Nullstelle des Arguments: $-\frac{5}{3}x-\frac{7}{10}=0$

$$x=-\frac{7}{6}$$

Vorzeichenverteilung:



Somit gilt:

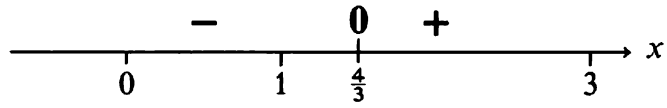
$$|-\tfrac{3}{5}x-\tfrac{7}{10}|=\begin{cases}-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}, & \text{falls } x\leqq-\frac{7}{6},\\ \frac{3}{5}x+\frac{7}{10}, & \text{falls } x>-\frac{7}{6}.\end{cases}$$

Beachte: An Stelle der Minusklammer $-(-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10})$ haben wir gleich $\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}$ geschrieben.

Kommen nun Absolutbeträge in Gleichungen oder Ungleichungen vor, dann musst du in den jeweiligen Vorzeichenbereichen die zugehörigen Gleichungen bzw. Ungleichungen lösen. Die Lösungsmenge der Betrags(un)gleichung ist dann die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen. Zwei Beispiele mögen dir das veranschaulichen.

Beispiel 2: $|3x-4|\leqq 2x-1$

Vorzeichenverteilung: $3x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$



1. Fall $\boxed{x<\frac{4}{3}}$

$$\begin{aligned}-3x+4&\leqq 2x-1\\ 5&\leqq 5x\\ 1&\leqq x \quad\Rightarrow\quad L_1=[1;\tfrac{4}{3}[\end{aligned}$$

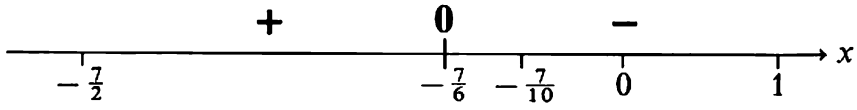
2. Fall $\boxed{x\geqq\frac{4}{3}}$

$$\begin{aligned}3x-4&\leqq 2x-1\\ x&\leqq 3 \quad\Rightarrow\quad L_2=[\tfrac{4}{3};3]\end{aligned}$$

Somit gilt $L=L_1\cup L_2=[1;3]$.

Beispiel 3: $|-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}|>\frac{2}{5}x$

Vorzeichenverteilung: $-\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{7}{6}$



1. Fall $\boxed{x<-\frac{7}{6}}$

$$\begin{aligned}-\tfrac{3}{5}x-\tfrac{7}{10}&>\tfrac{2}{5}x\\ -x&>\tfrac{7}{10}\\ x&<-\tfrac{7}{10} \Rightarrow L_1=]-\infty;-\tfrac{7}{6}[,\\ &\quad\text{da } -\tfrac{7}{6}<-\tfrac{7}{10}.\end{aligned}$$

2. Fall $\boxed{x \geqq -\frac{7}{6}}$ $\quad -(-\frac{3}{5}x - \frac{7}{10}) > \frac{2}{5}x$

$$\frac{1}{5}x > -\frac{7}{10}$$

$$x > -\frac{7}{2} \Rightarrow L_2 = [-\frac{7}{6}; +\infty[,$$

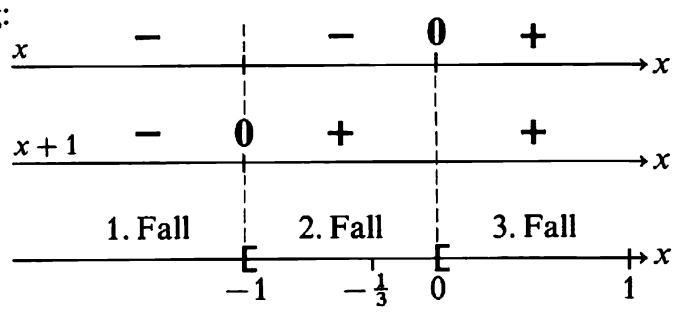
da $-\frac{7}{2} < -\frac{7}{6}$.

Somit gilt $L = L_1 \cup L_2 = \mathbb{Q}$

Schwieriger wird es, wenn mehrere Absolutbeträge vorkommen. Dann musst du für jedes Argument die Vorzeichenverteilung feststellen und anschließend die Zahlengerade so in Intervalle einteilen, dass in keinem der Intervalle ein Argument das Vorzeichen ändert. Die Nullstellen der Argumente trennen die Intervalle. Wir wollen sie immer zum rechten Intervall dazunehmen. Dazu

Beispiel 4: $|x| - |x+1| > x$

Vorzeichenverteilung:



1. Fall $\boxed{x < -1}$

$$-x - (-x - 1) > x$$
$$-x + x + 1 > x$$
$$1 > x$$
$$x < 1 \Rightarrow L_1 =]-\infty; -1[$$

2. Fall $\boxed{-1 \leqq x < 0}$

$$-x - (x + 1) > x$$
$$-x - x - 1 > x$$
$$-1 > 3x$$
$$x < -\frac{1}{3} \Rightarrow L_2 = [-1; -\frac{1}{3}[$$

3. Fall $\boxed{0 \leqq x}$

$$x - (x + 1) > x$$
$$x - x - 1 > x$$
$$-1 > x$$
$$x < -1 \Rightarrow L_3 = \{\ \}$$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty; -\frac{1}{3}[$.

Aufgaben

1. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $|x| = 0$ **b)** $|x| = 1$ **c)** $|x| = -3{,}75$ **d)** $|x| = |-2\frac{3}{7}|$
e) $|x| - 8 = 11$ **f)** $3 - |x| = 7$ **g)** $2 \cdot |x| + 5 = 9$ **h)** $5 + |3x| = 5$
i) $|x - 1| = 1{,}5$ **k)** $|x + 4| = 6$ **l)** $|2x + 5| = 0$ **m)** $|9 - 7x| = 30$

2. Welche Punktmengen auf der Zahlengeraden werden durch die folgenden Ungleichungen beschrieben?

a) $|x| < 1$ **b)** $|x| \geqq 2$ **c)** $|x - 3| \leqq 1$ **d)** $|4x + 10| > 5$

3. **a)** $|2x - 1| < 5x$ **b)** $|x + 1| \geqq 2x - 1$
c) $2 \cdot |x - 0{,}5| \leqq 2x + 1{,}5$ **d)** $-|3 - x| > 3 - x$
e) $-3 \cdot |\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}| > 10 - x$ **f)** $-2{,}5 \cdot |2x - 1{,}2| \leqq 10 - 2x$

4. Bestimme die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen und veranschauliche sie auf der Zahlengeraden.

a) $1 < |x| < 3$ **b)** $1 \leqq |x - 3| \leqq 4$
c) $|x| < x$ **d)** $|x| < |x + 3|$
e) $x < 2 < |x|$ • **f)** $5x + 7 > |2x - 4| \geqq x - 1$

5. **a)** $|x| \geqq 1 - |x|$ **b)** $|2x + 3| \geqq |3x - 2|$
c) $|4x - 12| + 5 \leqq 4 - |x + 2|$ **d)** $|x + 1| \geqq x + |x - 1|$
e) $|2x - 9| \leqq 2x - 9$ **f)** $3 \cdot |x| + 2x + 1 \leqq 2 - |2x - 6|$

6. **a)** $|x| + |x + 1| \geqq x + 2$ **b)** $|x| - |x + 1| \geqq x + 2$
c) $-|x| + |x + 1| \geqq x + 2$ **d)** $-|x| - |x + 1| \geqq x + 2$

•**7.** **a)** $|x + 2| - |2x - 1| < 2x$
b) $|\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}| - 2 \cdot |\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
c) $|2{,}5 - 1{,}2x| + |2{,}4x + 7{,}5| \geqq 3{,}6x + 1{,}5$

••**8.** **a)** $|x| + |x + 1| - |x + 2| > 0$
b) $|x - 1{,}5| + |2x - 5| - |3x + 6| \leqq 4x - 2{,}5$
c) $|\frac{1}{4}x + 1| - |x + \frac{1}{4}| \geqq |\frac{2}{3}x + 1| - |x + \frac{2}{3}|$

7.5 Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen

7.5.1 Graphische Lösung einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen

Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen lässt sich geometrisch in einem Koordinatensystem als Menge von Punkten deuten, die auf einer Geraden liegen. So ergibt sich als Lösungsmenge für die Gleichung $3x + 2y - 12 = 0$ die Gerade der Abbildung 177.1.

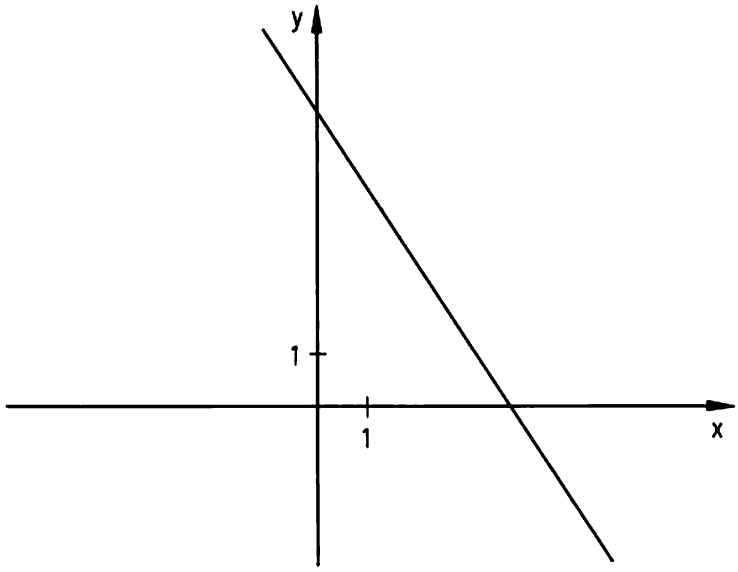


Abb. 177.1 Die Lösungsmenge der Gleichung $3x + 2y - 12 = 0$

Nun betrachten wir statt dieser Gleichung eine Ungleichung, zum Beispiel $3x + 2y - 12 \leqq 0$. Wie sieht in diesem Fall das geometrische Bild der Lösungsmenge aus? Am leichtesten lässt sich diese Frage beantworten, wenn man die Ungleichung nach y auflöst. Wir erhalten als neue Ungleichung $y \leqq -\frac{3}{2}x + 6$. Wegen des $=$-Zeichens sind die Punkte der Geraden von Abbildung 177.1 auch Lösung dieser Ungleichung; so ist z. B. $(2|3)$ ein Lösungspunkt. Wegen des $<$-Zeichens ist dann auch jeder Punkt $(2|y)$ mit $y < 3$, d. h. jeder Punkt, der unterhalb des Geradenpunkts $(2|3)$ liegt, ein Lösungspunkt der Ungleichung (Abbildung 178.1). Weil die für den Punkt $(2|3)$ angestellte Überlegung für jeden Geradenpunkt richtig ist, können wir sagen: Die Lösungsmenge der Ungleichung $y \leqq -\frac{3}{2}x + 6$ ist die Menge aller Punkte unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{3}{2}x + 6$ und die Gerade selbst. Eine solche Punktmenge heißt **Halbebene**.
Bei der Ungleichung $y < -\frac{3}{2}x + 6$ gehört die Randgerade natürlich nicht zur Lösungsmenge. Ersetzt man $<$ durch $>$, dann sind die oberhalb der Geraden gelegenen Punkte Lösungspunkte. Einen Überblick über die möglichen vier Fälle gibt dir Abbildung 178.2.

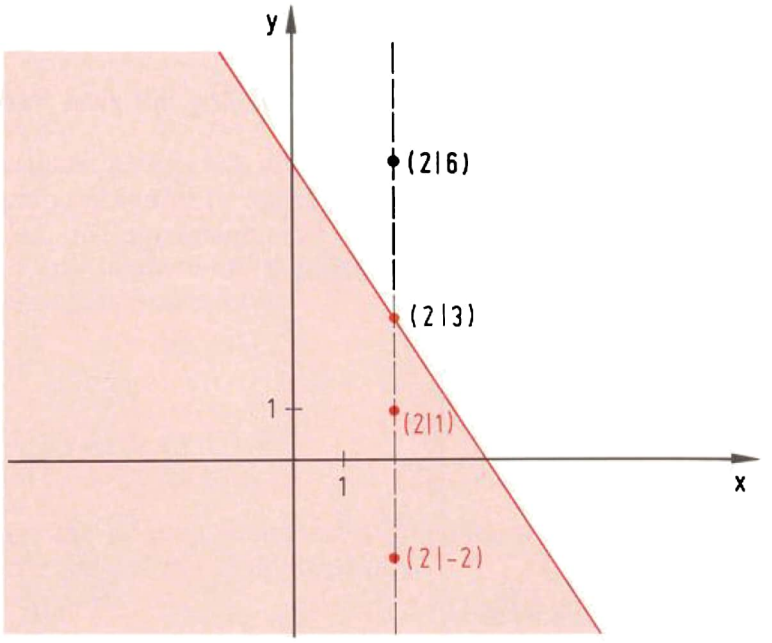


Abb. 178.1 Die Lösungsmenge der Ungleichung $3x + 2y - 12 \leqq 0$

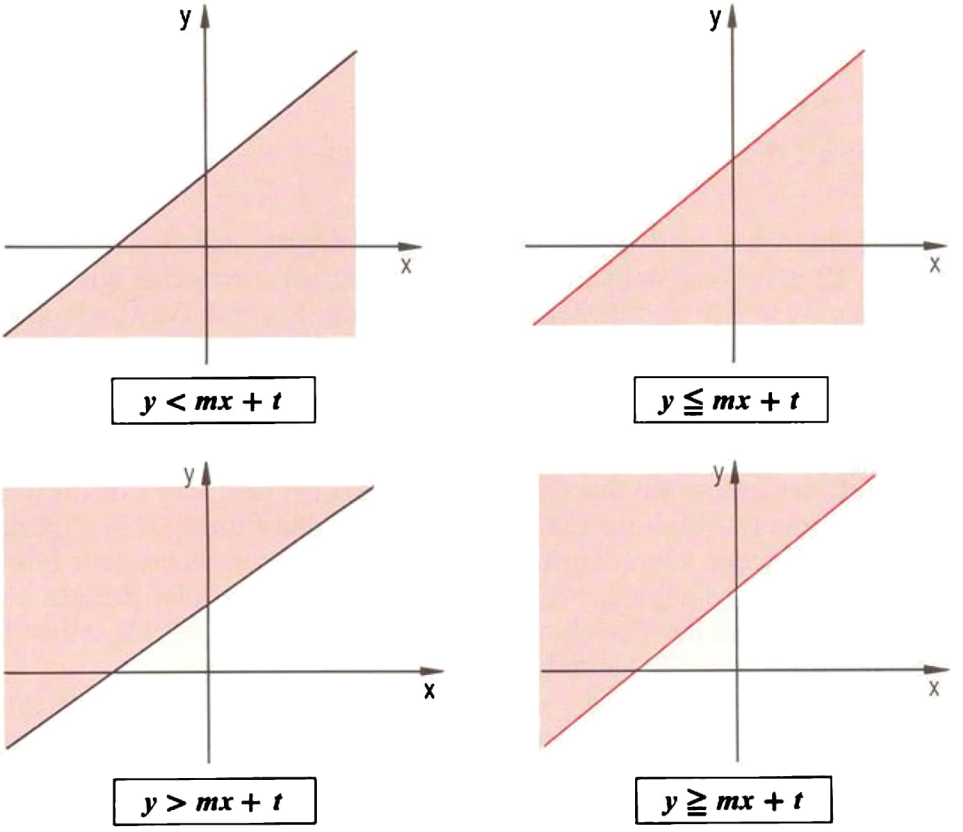


Abb. 178.2 Die Lösungsmengen der Ungleichungen $y \gtreqless mx + t$

Aufgaben

Zeichne die Lösungsmenge!

1. **a)** $y < x + 3$ **b)** $y \leqq -\frac{1}{2}x$ **c)** $y > 2x - 5$ **d)** $y \geqq -\frac{3}{4}x + 4$

2. **a)** $y < 2$ **b)** $y \geqq -3$ **c)** $x < 0$ (!) **d)** $x \geqq -2$ (!)

3. **a)** $x + y < 0$ **b)** $2x + 4y - 6 \geqq 0$
c) $-3x + 2y + 4 < 0$ **d)** $\frac{3}{2}x - \frac{6}{5}y - 1\frac{2}{5} > 0$

7.5.2 Systeme linearer Ungleichungen mit zwei Variablen

Eine Lösung eines Systems linearer Ungleichungen muss jede einzelne dieser Ungleichungen erfüllen. Sie muss also in jeder der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen enthalten sein und damit auch in der Schnittmenge dieser Lösungsmengen. Dazu

Beispiel 1: I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$ II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$
ist ein System von zwei linearen Ungleichungen mit zwei Variablen. Eine Lösung dieses Systems muss sowohl der Lösungsmenge L_I wie auch der Lösungsmenge L_{II} angehören, also Element der Schnittmenge $L_I \cap L_{II}$ sein. In der geometrischen Deutung ist die Lösungsmenge des Systems die Schnittmenge der beiden Halbebenen L_I und L_{II}. (Abbildung 179.1)

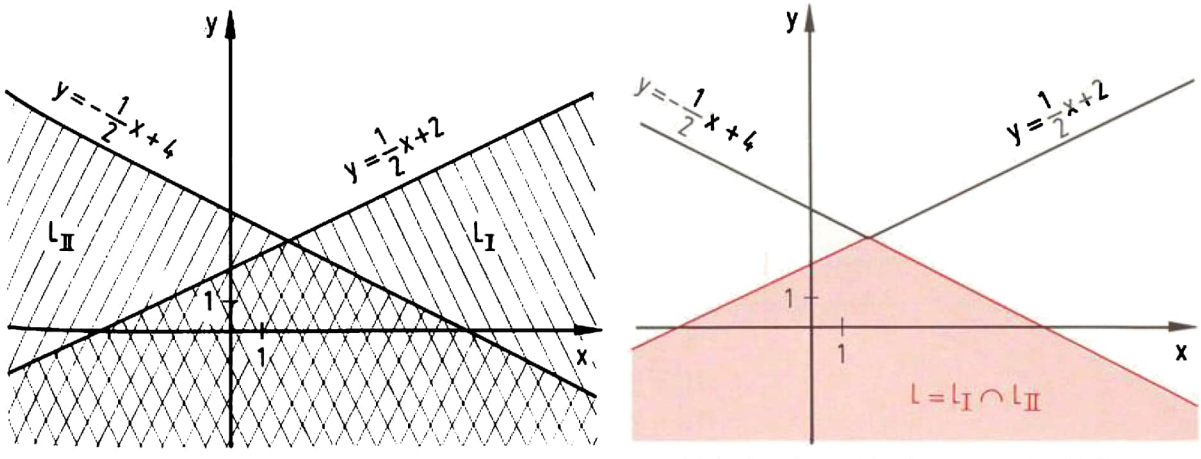


Abb. 179.1 Die Lösungsmenge des Systems von Beispiel 1 als Schnittmenge der Teil-Lösungsmengen

Auch bei einem System mit mehr als zwei Ungleichungen erhält man die Lösungsmenge als Schnittmenge aller Teil-Lösungsmengen, geometrisch als Schnittmenge aller Lösungs-Halbebenen. Es entsteht dabei entweder eine

konvexe Polygonfläche* (siehe Abbildung 180.1) oder eine konvexe Punktmenge, die sich ins Unendliche erstreckt (siehe Abbildung 179.1) oder die leere Menge (siehe Abbildung 180.2).

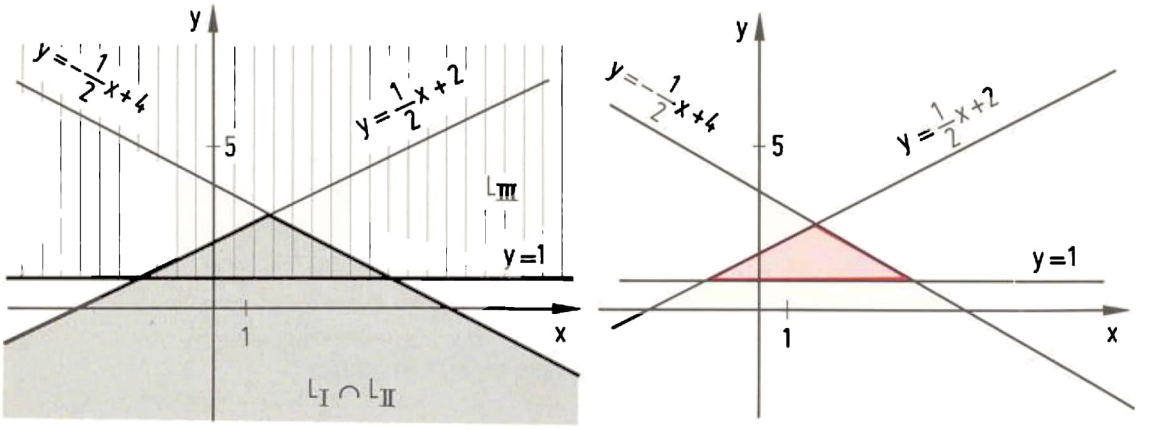


Abb. 180.1 Die Lösungsmenge des Systems

I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$

II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$

III $y \geqq 1$

ist die rote Dreiecksfläche.

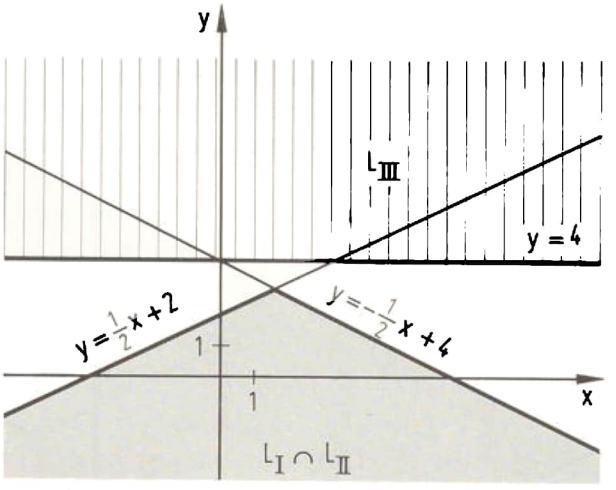


Abb. 180.2 Die Lösungsmenge des Systems

I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$

II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$

III $y \geqq 4$

ist leer.

* Aus πολύς (polýs) = *viel* und dem ionischen ἡ γωνία (he gonía) = der *Winkel, die Ecke* wurde in nachklassischer Zeit, d.h. nach 300 v.Chr., das Kunstwort τὸ πολύγωνον (to polýgonon) = *das Vieleck* geprägt. *convexus* (lat.) = *kesselförmig, gewölbt*. Ein Vieleck heißt konvex, wenn die Verbindungsstrecke zweier beliebiger innerer Punkte ganz im Inneren des Vielecks liegt.

Je mehr Ungleichungen das System hat, desto mehr Ecken hat im Normalfall die entstehende Polygonfläche. Dazu

Beispiel 2:

I $y \leqq \frac{1}{2}x + 2$
II $y \leqq -\frac{1}{2}x + 4$
III $y \leqq -x + 6$
IV $y \geqq 0$
V $x \geqq 0$

Die Lösungsmenge, eine Fünfecksfläche, zeigt Abbildung 181.1.

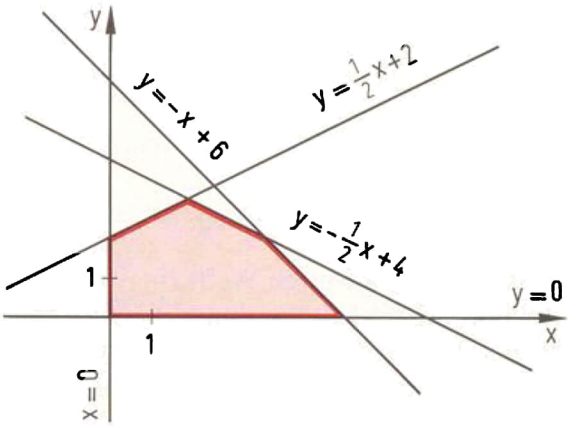


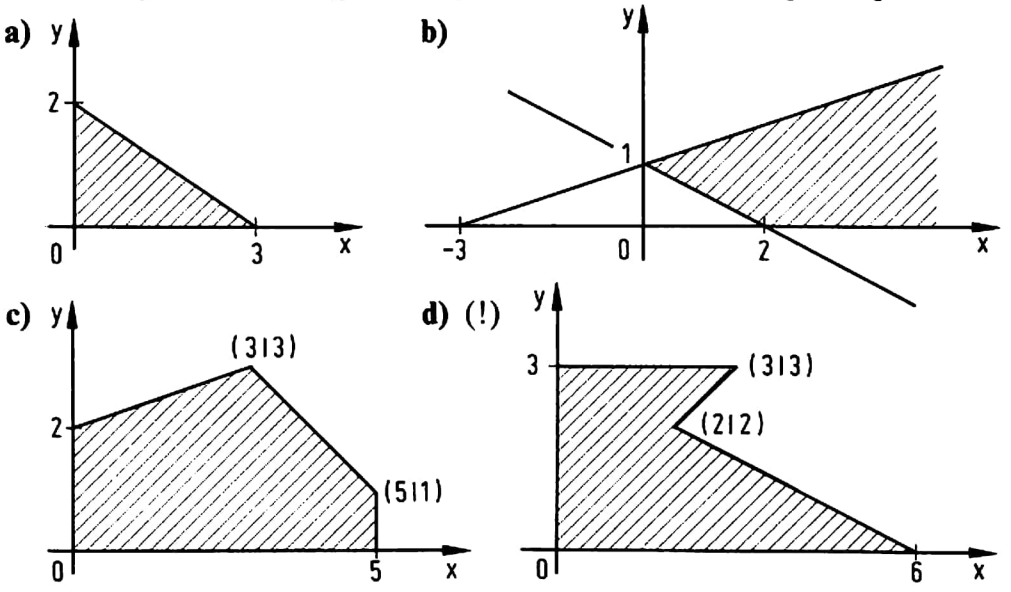
Abb. 181.1 Zum Beispiel 2

Aufgaben

1. **a)** I $y \leqq 3x + 5$ II $y \geqq -2x$
b) I $x + y \geqq 0$ II $x - y \leqq 0$
c) I $2x - y + 3 < 0$ II $-3x + 5y < 10$
d) I $-x + 2y \leqq 2$ II $x - y > 3$

2. **a)** I $y \leqq \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ II $y \geqq -x - 1$ III $y \geqq x$
b) I $2x - y + 2 \geqq 0$ II $x - 2y - 2 \leqq 0$ III $y + 3 \geqq 0$
c) I $y \leqq 2x + 6$ II $3y \leqq -4x + 12$ III $y \leqq -\frac{1}{3}x$
IV $y \geqq -6$ V $x \leqq 6$
d) I $y + x - 2 \geqq 0$ II $y - 2x + 10 \geqq 0$ III $3y - x + 18 \leqq 0$
IV $y \geqq 0$ V $x \geqq 0$

3. Gib ein System von Ungleichungen an, das diese Lösungsmenge liefert.



• **4.** Bestimme alle Lösungspunkte, deren Koordinaten natürliche Zahlen sind.

a) I $2x - y + 2 \geqq 0$ II $x - 2y - 2 \leqq 0$ III $x + y - 5 \leqq 0$

b) I $y \leqq x + 3$ II $y \leqq 8$ III $y \geqq 2x - 4$ IV $y \geqq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ V $x \geqq 1$

7.5.3 Lineare Optimierung

Während des Zweiten Weltkriegs und in den darauf folgenden Jahren ist eine Rechentechnik entstanden, die heute zu einem sehr wichtigen Hilfsmittel moderner Unternehmensplanung geworden ist. Im Englischen nannte man sie *operations research*, was man mit *Verfahrensforschung*, *Verfahrensplanung* oder auch *Planungsrechnung* verdeutschte. G. B. DANTZIG hat im Wesentlichen dieses neue Gebiet der Mathematik begründet; er nannte es 1949 *Lineares Programmieren*, da man schematisch mittels so genannter Programme* Lösungen von linearen Gleichungen und Ungleichungen sucht. Heute spricht man lieber von *linearer Optimierung***, weil man im Grunde die beste aller möglichen Lösungen sucht. Zur Verdeutlichung und Einführung betrachten wir das einfache, aber doch schon genügend aussagekräftige

Beispiel 1:

Ein Betrieb stellt zwei verschiedene Produkte X und Y her. Für die Anfertigung von einem Stück X benötigt man 5 Std. und verbraucht Material im Wert von 5 €, wohingegen ein Y Material im Wert von 0,60 € und eine Herstellungszeit von 6 Std. benötigt. Pro Tag können bis zu 4000 Arbeitsstunden von der Belegschaft geleistet werden. Der Finanzplan erlaubt es, täglich bis zu 1500 € Material einzukaufen. Aus technischen Gründen können von Y höchstens 550 Stück pro Tag produziert werden. Die Lagerkapazität erlaubt es nicht, dass die Gesamtproduktion von X und Y 800 Stück überschreitet. Nun bringt das Produkt X pro Stück einen Gewinn von 8 €, Y hingegen nur 5 €. Welche Stückzahlen von X und Y soll der Fabrikant pro Tag herstellen lassen, damit sein Gewinn maximal *** wird?

Lösung: Wir bezeichnen mit x bzw. y die Anzahl der Stücke des Produkts X bzw. Y, die pro Tag hergestellt werden. Der Gewinn z hängt von diesen Stückzahlen x und y ab; es gilt nämlich

$$z(x, y) = 8x + 5y.$$

Das Ziel des Fabrikanten ist es, den Gewinn z möglichst groß werden zu lassen. Daher nennt man z **Zielfunktion**.

* *τὸ πρόγραμμα* (to prógramma) = die schriftliche Bekanntmachung
** optimus (lat.) = der beste
*** maximus (lat.) = der größte

Man erkennt unmittelbar, dass z umso größer wird, je größer x und y werden. Nun können aber x und y nicht beliebig wachsen, da für sie technische und wirtschaftliche Einschränkungen bestehen. Diese Einschränkungen heißen **Nebenbedingungen**. Lesen wir den Text nochmals durch, so finden wir das folgende Ungleichungssystem für die Nebenbedingungen.

I	$x \geqq 0$	(Nichtnegativität)
II	$y \geqq 0$	
III	$y \leqq 550$	(Produktbeschränkung von Y)
IV	$x + y \leqq 800$	(Lagerkapazität)
V	$5x + 6y \leqq 4000$	(Zeitbeschränkung)
VI	$5x + 0{,}6y \leqq 1500$	(Geldbeschränkung)

Die Lösungsmenge des Systems dieser Nebenbedingungen heißt **zulässige Menge**. Aufgrund der Überlegungen des vorigen Abschnitts erhält man die zulässige Menge als Schnittmenge der Lösungshalbebenen der Ungleichungen I–VI. Abbildung 184.1 zeigt die zulässige Menge als Fünfecksfläche OABCD. Für die Eckpunkte errechnet man die Koordinaten

O(0|0), A(0|550), B(140|550), C($244\frac{4}{9}$|$462\frac{26}{27}$) und D(300|0).

Jetzt kann man für jeden Punkt aus der zulässigen Menge den Gewinn z berechnen. So erhält man z. B. für A (man stellt nur das Produkt Y her)

$$z(0;\ 550) = 8 \cdot 0 + 5 \cdot 550 = 2750$$

und für D (man stellt nur das Produkt X her)

$$z(300;\ 0) = 8 \cdot 300 + 5 \cdot 0 = 2400.$$

Der Gewinn ist also im letzteren Fall kleiner.
Wählen wir einen Punkt aus dem Inneren der zulässigen Menge, z. B. P(150|200) – man stellt 150X und 200Y her –, so ergibt sich

$$z(150;\ 200) = 8 \cdot 150 + 5 \cdot 200 = 2200.$$

So könnte man fortfahren und für jeden Punkt der zulässigen Menge den Gewinn ausrechnen, um schließlich den Punkt zu finden, bei dem der Gewinn maximal wird. Dieser Punkt heißt **optimaler Punkt**.
Es ist klar, dass du mit dem Ausrechnen nie fertig werden wirst. Daher überlegen wir:
Die Punkte, für die der Gewinn jeweils einen festen Wert z_0 hat, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $8x + 5y = z_0$. Die Auflösung nach y ergibt

$$y = -\tfrac{8}{5}x + \tfrac{1}{5}z_0.$$

Die Gerade hat also die Steigung $-\frac{8}{5}$ und den y-Achsenabschnitt $\frac{1}{5}z_0$. Da die Steigung nicht von z_0 abhängt, sind alle Geraden, die man für verschiedene

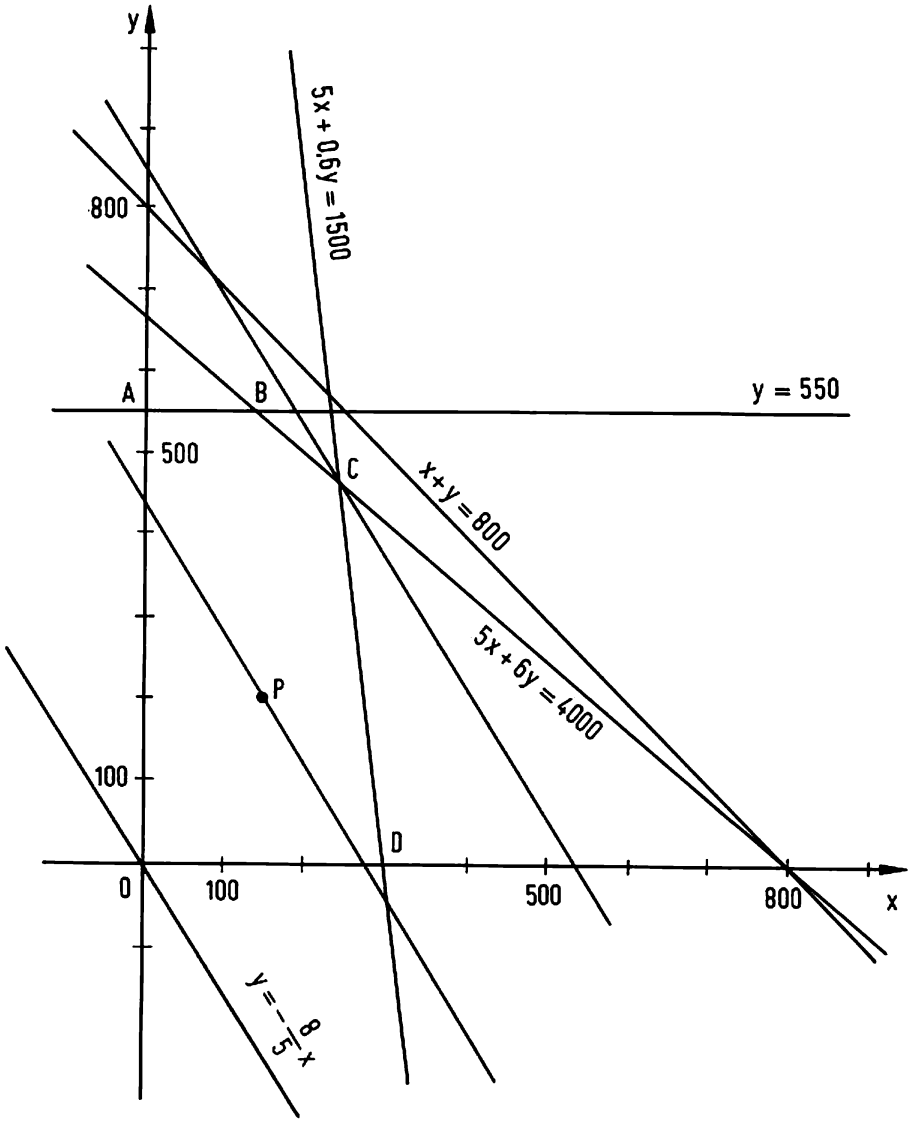


Abb. 184.1 Die zulässige Menge des Systems der Nebenbedingungen

Werte von z_0 erhält, zueinander parallel. Darüber hinaus erkennen wir, dass bei größtem Gewinn der y-Achsenabschnitt am größten ist (und umgekehrt).

Wir müssen also aus unserer Parallelenschar diejenige Gerade bestimmen, die die zulässige Menge gerade noch trifft und dabei einen möglichst großen y-Achsenabschnitt besitzt.

Zeichnerisch kann man wie folgt vorgehen. Man verschiebt die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{8}{5}x$ so weit parallel nach oben, bis sie die zulässige Menge

gerade noch trifft. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Die Gerade trifft die zulässige Menge in einem Eckpunkt oder sie trifft sie in einer ganzen Polygonseite. Im ersten Fall gibt es genau einen optimalen Punkt; im zweiten Fall ist jeder Punkt dieser Seite ein optimaler Punkt, es gibt also unendlich viele solcher optimalen Punkte. In unserem Beispiel gibt es genau einen optimalen Punkt, weil keine Polygonseite die Steigung $-\frac{8}{5}$ hat.

Rechnerisch bestimmt man den optimalen Punkt nun so, dass man für alle Eckpunkte – denn diese kommen nach dem Obigen als optimale Punkte in Frage – den Gewinn z errechnet. Der Eckpunkt mit dem größten z ist der optimale Punkt. Gibt es aber zwei Eckpunkte mit größtem z, dann ist die ganze Verbindungsstrecke optimal.
Für unser Fünfeck OABCD erhalten wir

O: $z(0; 0) = 0$,
A: $z(0; 550) = 2750$, B: $z(140; 550) = 3870$,
C: $z(244\frac{4}{9}; 462\frac{26}{27}) = 4270\frac{10}{27}$, D: $z(300; 0) = 2400$.

Man erkennt: C ist der optimale Punkt.
Wenn der Produktionsprozess auch die Herstellung von Teilen von Produkten zulässt, dann sind wir fertig. Der Fabrikant wird dann pro Tag $244\frac{4}{9}$ »Stück« von X und $462\frac{26}{27}$ »Stück« von Y herstellen lassen, um den maximal möglichen Gewinn von $4270\frac{10}{27}$ € zu erzielen.

Wenn aber nur ganze Produkte möglich sind, dann müssen wir die Gerade durch den optimalen Punkt C so weit nach unten parallel verschieben, bis sie zum ersten Mal auf einen Gitterpunkt trifft. Dieser ist dann der optimale Gitterpunkt, der die Lösung für das ganzzahlige Problem liefert. In unserem Beispiel ist G(244|463) der optimale Gitterpunkt (Abbildung 186.1).
Der Fabrikant wird jetzt pro Tag 244 Stück von X und 463 Stück von Y herstellen lassen, um den maximal möglichen Gewinn von 4267 € erzielen zu können.

Ein Blick auf Abbildung 184.1 zeigt übrigens, dass die Nebenbedingung IV für die Lagerkapazität ($x + y \leqq 800$) überflüssig ist, weil sie die zulässige Menge nicht beeinflusst.

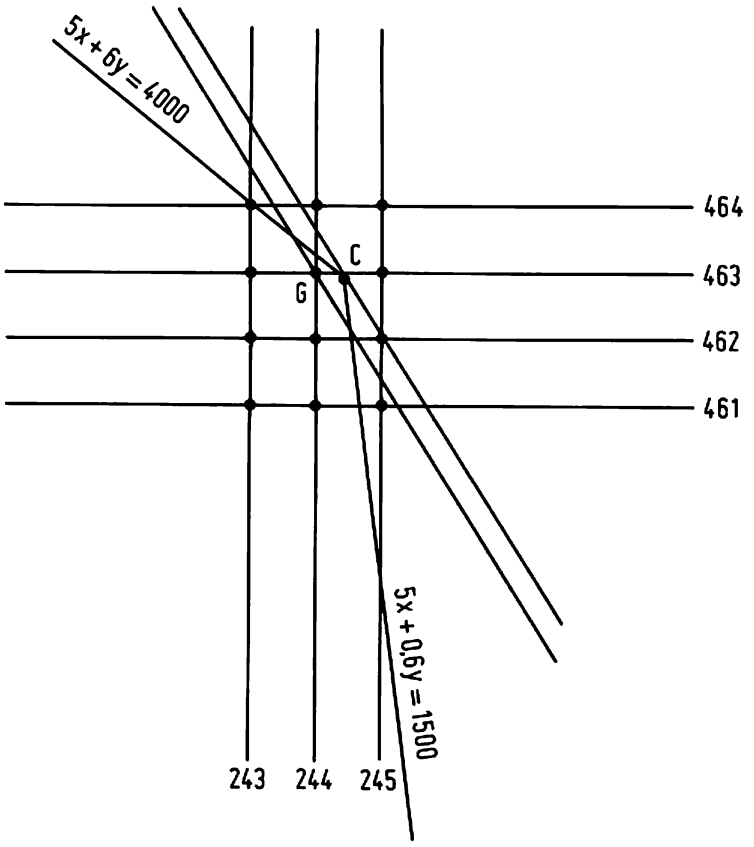


Abb. 186.1 Auffinden des optimalen Gitterpunkts

Aufgaben

1. Durch die Nebenbedingungen

I $x \geqq 0$ II $y \geqq 0$ III $x + 2y \leqq 12$ IV $3x + y \leqq 11$ V $x \leqq 3$
VI $x + 2y \geqq 2$

wird eine zulässige Menge beschrieben. Bestimme für die angegebene Zielfunktion z den optimalen Punkt, sodass dort z maximal wird. Wie groß ist das Maximum?

a) $z = x + 4y$ **b)** $z = x + y$ **c)** $z = 3x + y$ • **d)** $z = x - 2y$

2. Bei manchen Fragestellungen sucht man nicht denjenigen Punkt, bei dem die Zielfunktion maximal wird, sondern denjenigen, bei dem sie minimal* wird. (So wird man z. B. bei einem Geschäft versuchen, den Verlust zu minimieren.) Löse nun Aufgabe **1** so, dass die Zielfunktion im optimalen Punkt ihr Minimum annimmt.

* minimus (lat.) = der kleinste

3. Die Nebenbedingungen

I $x \geqq 0$ II $y \geqq 0$ III $x + 2y \geqq 12$ IV $3x + y \geqq 11$ V $x \leqq 3$

legen eine zulässige Menge fest. In welchen Punkten werden die Zielfunktionen aus Aufgabe **1**

a) maximal, **b)** minimal?

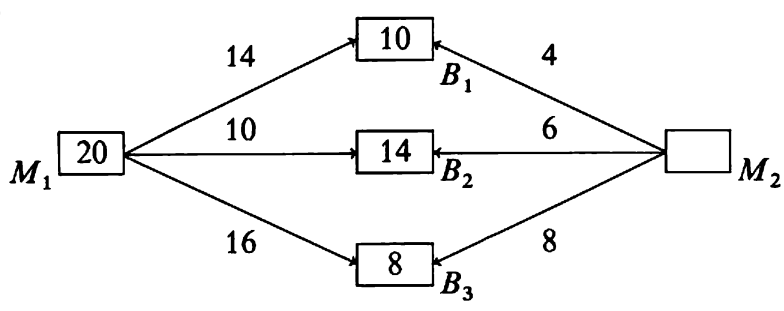
4. Eine Fabrik stellt ein Gerät in 2 Ausführungen her. Je nach Ausführung ist die Zusammensetzung der zur Herstellung verwendeten Materialien verschieden, wie die nachstehende Tabelle zeigt; diese gibt auch an, über welche Vorräte in kg die Fabrik verfügt.

Material	Typ 1	Typ 2	Vorrat
a	8	12	620
b	10	4	390
c	5	10	500
d	4	0	140

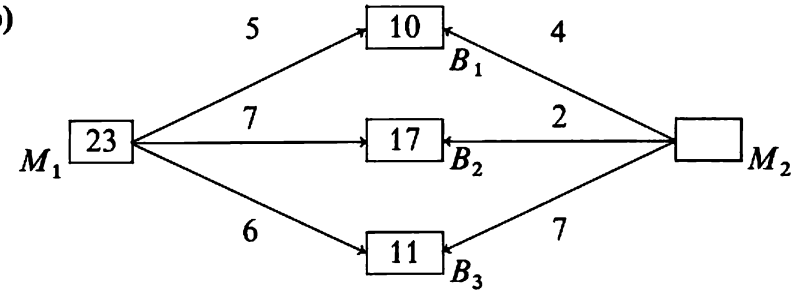
Wie viele Geräte müssen von jedem Typ hergestellt werden, damit die Gesamtzahl maximal wird?

5. Eine Großbäckerei mit drei Backstuben in verschiedenen Orten bezieht Mehl von zwei Mühlen. Im nachstehenden Diagramm ist neben der Tagesproduktion der ersten Mühle der Tagesbedarf der Backstuben, jeweils in t, eingetragen. Die Tagesproduktion der ersten Mühle wird vollständig an die drei Backstuben ausgeliefert; die zweite Mühle liefert den Rest. Auf den Pfeilen sind die Frachtkosten in € je t verzeichnet. Wie viel t Mehl muss jede Mühle an jede Backstube liefern, damit die Frachtkosten für die Großbäckerei minimal werden? Wie hoch sind sie?

a)



b)



c) Was ergibt sich bei Aufgabe **b**, wenn M_1 aufgrund eines alten Vertrags an B_2 mindestens so viel liefern muss wie an B_1?

d) Was ergibt sich bei Aufgabe **b**, wenn zusätzlich zur Bedingung aus **c** eine weitere Vertragsklausel vorschreibt, dass die Lieferung von M_1 an B_1 zusammen mit dem Doppelten der Lieferung an B_2 mindestens 24 t betragen muss?

6. Ein Bioladen hat 210 kg Haferflocken, 180 kg Rosinen und 240 kg Trockenäpfel lagern. Daraus werden zwei Sorten Müsli gemischt, und zwar einmal im Verhältnis 4 : 5 : 6, das andere Mal im Verhältnis 2 : 1 : 2. Welche Menge muss der Ladenbesitzer von jeder Sorte herstellen, um den größtmöglichen Verdienst zu erzielen, wenn er an 1 kg der ersten Sorte

a) 9 € **b)** 12 €

und an 1 kg der zweiten Sorte jeweils 10 € verdient?
Wie groß ist in jedem Fall sein Verdienst?

7. Für jeden Teilnehmer einer Expedition soll eine »eiserne Ration« aus Vollkornbrot, Wurst und Schokolade zusammengestellt werden. Sie muss genau 160 g Eiweiß und mindestens 360 g Kohlenhydrate und darf höchstens 100 g Fett enthalten. Es gilt folgende Tabelle:

je 100 g enthalten	g Kohlenhydrate	g Fett	g Eiweiß
Vollkornbrot	45	5	20
Wurst	10	20	30
Schokolade	60	10	10

Aus wie viel Gramm von jedem Nahrungsmittel muss die eiserne Ration bestehen, damit ihr Gesamtgewicht möglichst klein bleibt? Wie viel wiegt sie?

8. Eine Mischung aus Nüssen und Rosinen soll als Studentenfutter verkauft werden. Die Mischung soll zu mindestens 50 % aus Rosinen und zu mindestens 30 % aus Nüssen bestehen. Der Kaufmann hat einen Vorrat von 10 kg Nüssen und 5 kg Rosinen. Üblicherweise verkauft er die Nüsse für 25 € pro kg, die Rosinen für 10 € pro kg. In welchem Verhältnis muss er Nüsse und Rosinen mischen, wenn er bei einem Verkaufspreis für 1 kg Studentenfutter von

a) 15 € **b)** 13,75 € **c)** 14,50 €

maximalen Erlös aus dem Verkauf des gesamten Vorrats erzielen will. Wie groß ist dieser dann?

9. Eine Familie muss für den Kauf einer Eigentumswohnung 120 000 € an Kredit* aufnehmen. Die Mutter hat sich bei drei Banken nach deren Konditionen erkundigt. Für das erste Jahr verlangt die erste Bank 5 % Zinsen auf die Gesamtschuld und eine Tilgung von 3 % dieser Schuld. Die zweite Bank verlangt 4 % Zins und 12 % Tilgung. Die dritte Bank fordert 6 %

* creditum (lat.) = das Anvertraute

Zins und eine Tilgung von 5 % und ist überdies nur bereit, einen Kredit zu gewähren, der mindestens 12 000 € beträgt. Die Beratung im Familienkreis ergibt, dass nur eine Belastung von höchstens 12 200 € pro Jahr verkraftet werden kann. Bei welcher Aufteilung des Kredits auf die drei Banken zahlt die Familie die wenigsten Zinsen? Wie hoch sind sie? Wie viel € werden getilgt?

Register

$A \backslash B$ 11
Abbildung 85
abhängig 87
Absolutbetrag 173
Abszisse 93, 98
Achsenabschnitt 111
Addieren
~ gleichnamiger Bruchterme 34
~ ungleichnamiger Bruchterme 37
Addition
~, korrespondierende 73
~sverfahren 136, 142, 149
affin 109
Aggregat 35
Ägypter 9, 27, 70, 96, 123, 142
AL-CHARIZMI 28ff., 66
algorismus 29
Algorismus Ratisbonensis 25, 30, 120
Algorithmus 29
AL-HASSAR 29
AL-KARADSCHI 24
APOLLONIOS (*Ἀπολλώνιος*) 98, 118
Äquivalenz
~ von Bruchtermen 14
~ von Gleichungssystemen 133
~umformung 133
Araber 28, 49, 123, 142, 149
ARCHIMEDES (*Ἀρχιμήδης*) 71, 165
Argument 86, 173
ARISTOTELES (*Ἀριστοτέλης*) 88
Ast 77, 118
aufheben 15
Außenglieder 69, 71f.

Babylonier 27, 70, 123, 142, 145
BARLAAM 23
Bewegungsaufgaben 157ff.
BEYER 31f.
BHĀSKARA II 24
BOETHIUS 70
BOMBELLI 54
BOUGUER 168
BRAHMAGUPTA 123, 142
Breite 96f., 123
Bruch 30
~gleichung 56
~ ~ mit Parametern 81
~strich 29f.
~term 11
~ungleichung 171
brutto 161
BUTEO 123, 142, 149
Byzanz 149

CALANDRI 68
CARDANO 145
cardo 96
CARTESIUS → DESCARTES
CATALDI 54
CAUCHY 143
causa 123
CAYLEY 143
CHANG 149
Chinesen 28, 49, 142
Chiu Chang Suan Shu 24, 31, 142, 162
CICERO 70
COMMANDINO 98
Coß 142
COTES 114
CRAMER 100, 139f., 143
Cramer'sche Regel 138ff., 141
CRELLE 130, 159

DANTZIG 182
decumanus 96
Definitionsmenge
~ einer Bruchgleichung 56
~ einer Funktion 86
~ eines Bruchterms 11
DE MOIVRE 114
DESCARTES 76, 92f., 98, 104, 124, 167
Determinante 104, 139f., 143
Dezimalbruch 31
Dezimalrechnung 31
DIOPHANT (*Διόφαντος*) 123f., 145, 149, 155
direkt proportional 103
Dividieren von Bruchtermen 48
Divisionsregel 48f.
Doppelbruch 52
Doppelpunkt 71
Drachme 156
Dupel 123
DÜRER 10

$\in$ 87
EF 23
EFFNER 55
Einsetzungsverfahren 135, 143
Ekliptik 121
eliminieren 134, 146
Epigramm 157
erweitern 15
Erweiterungsfaktor 23
EUDOXOS (*Εὔδοξος*) 70
EUKLID (*Εὐκλείδης*) 70, 72f. 103
EULER 87, 100, 109, 114, 134, 142

f 86f.
$f(x)$ 86f.
Fallunterscheidung 77, 81
Feingehalt 157
FERMAT 97ff.
FIBONACCI 24, 29f., 47, 123
Fixelement 90
Formvariable 76
functio 86f.
Funktion 86f., 97
~, konstante 110
~, lineare 109f.
~sgleichung 70, 87
~sterm 87
~swert 86
Fußpfeil 86

GALILEI 97f., 168
GAUSS 1, 24, 143
gemeiner Bruch 28
GEMMA FRISIUS 67
Geometrische Aufgaben 159f.
Gerade 106, 110
~, fallende 111
~, steigende 110
GERNARDUS 15
G_f 93
ggT 91
Gleichheitszeichen 71, 168
gleichnamig 23
Gleichsetzungsverfahren 142f.
Gleichungssystem 129
~, überbestimmtes 146
~, unterbestimmtes 146
Gleichungsvariable 76
Graph 93
Griechen 28, 49, 70, 96, 98, 123, 142

HARRIOT 167f.
Halbebene 177
Hauptdiagonale 140
Hauptnenner 23ff., 61
heben 15
hekat 9
HÉRIGONE 98
HIERON 165
HIPPARCHOS (*Ἵππαρχος*) 96
HIRE 99
HN 23
Horusauge 9
hydrostatische Waage 165
Hyperbel 118

Inder 28, 123, 142, 149
Index 104, 114
indirekt proportional 116
Innenglieder 69, 71f.
Isis 9

JACOB 23
Japaner 143
JOHANNES DE LINERIIS 28, 30
JOHANNES HISPALENSIS 28, 30
JONES 114
JORDANUS NEMORARIUS 15

Kanon 31
kartesisch 92
KÄSTNER 71, 159
Kehrwert 48
KEPLER 97, 168
kgV 23
Kettenbruch 54
kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches 23, 25

KÖBEL 27, 29, 32
Koeffizient 125
Komma 32
konstant 110
konvex 90, 180
Koordinaten 98
~system 92, 96ff.
~ ~, kartesisches 92
Korrespondenz-Umformung 73
Kredit 188
Kreuzweises Multiplizieren 56
KROLL 15
kürzen 15

LACROIX 99
Länge 96f., 123
LEIBNIZ 71, 76, 87, 98f., 104, 134, 143
LEONARDO von PISA → FIBONACCI
liber abaci 29
Lilavati 24
linear 76, 110
~e Funktion 109
~e Gleichung 76
~e ~ssysteme 128
~e Optimierung 182
~es Programmieren 182
LINNÉ 88
Linienrechnen 15
Lösungsbaum 77
Lot 120

MAX EMANUEL 55
maximal 182
MELANCHTHON 10
Menora 75
METRODOROS (*Μητρόδωρος*) 157
Mine 157
minimal 186
minutia 30, 49
Mischungsaufgaben 156f.
Multiplizieren
~ kreuzweises 56
~ mit dem Hauptnenner 61
~ von Bruchtermen 44
MYDORGE 76

Nebenbedingungen 183
Nebendiagonale 140
Nenner 30
netto 161
NEWTON 99, 104, 134, 143
NIKOLAUS VON ORESME 29, 84, 96
n-Tupel 123
Nullform 167
Nullstelle des Nenners 11

OHM 25
operations research 182
optimaler Punkt 183
optimus 182
Ordinate 93, 98
ORESME → NIKOLAUS
Osiris 9
OUGHTRED 71

P(*a*|*b*) 93
PAPPOS (*Πάππος*) 97
Papyrus
~ *Michigan* 156
~ *Moskau* 131
~ *Rhind* 9, 27, 49, 70
Parameter 76
PEANO 87
Pfennigbrot 120
PIRCKENSTEIN 71
Planungsrechnung 182
Polygon 180
~fläche 180
PRESTET 76
Primzahl 85, 88, 94, 103
Problem der 100 Vögel 149
Produktungleichung 168
Programm 182
proportio 69f.
Proportion 69ff.
~, Umformen von 72
Proportionale, vierte 72
proportionalitas 70
Proportionalität
~, direkte 103
~, indirekte 116
~sfaktor 103, 116
PYTHAGORAS (*Πυθαγόρας*) 70
Pythagoreer (*Πυθαγόρειοι*) 70

Quadrant 100
Quadrupel 123
Quintupel 123

RALEIGH 168
Rechenbaum 78
Rechenpfennig 15
RECORD(E) 71, 168
REINAUD 29
Relation 89
res 123
reziprok 48
RIES 149, 160
Römer 28, 96
RUDOLFF 15, 142

Schaubild 93
Scheffel 120
SCHRĪDHARA 28, 49
SCHOOTEN 93, 98
SEGNER 71
SEKI 143
Sextupel 123
STAMPIOEN 71
STEEN 67
Steigung 110f.
~sdreieck 112
STEVIN 31, 123
STIFEL 49, 123, 142, 163, 167
Striche 114
STURM 71
Substitution 151
Subtrahieren
~ gleichnamiger Bruchterme 34
~ ungleichnamiger Bruchterme 37
Subtraktion, korrespondierende 73
Sumerer 27
System 92, 129

Tara 161
Teilbarkeit durch elf 154
Teilungsaufgaben 155f.
-tel 27
Thot 9
Titelblatt 31
TITUS 75
Tripel 123
Tupel 123
TUTANCHAMUN 9

überbestimmt 146
Über-Kreuz-Multiplizieren 49
Udschat-Auge 9
umgekehrt proportional 116
unabhängig 87
UND-Aussageform 129
UND-Verknüpfung 129
Ungleichheitszeichen 167f.
ungleichnamig 23
Ungleichungen 166ff.
~ mit Absolutbeträgen 173
unterbestimmt 146

Variable
~, abhängige 87
~, Form- 76
~, Gleichungs- 76
~, unabhängige 87
Verfahrensforschung 182
Verfahrensplanung 182
Verhältnis 69ff.
~gleichung 69ff.
Vierte Proportionale 72
VIÈTE 31, 98, 124
VITRUV 165
Vögel 149

WARNER 167
Wertemenge 86
WIDMANN VON EGER 29
WING 71
WOLFF 30

y-Achsenabschnitt 111

Zahlenpaar 92, 122
Zahlenrätsel 153ff., 161f.
Zähler 30
Zielfunktion 182
zulässige Menge 183

ISBN 3-486-02647-X

9 783486 026474

Bestell-Nr. 02647-X