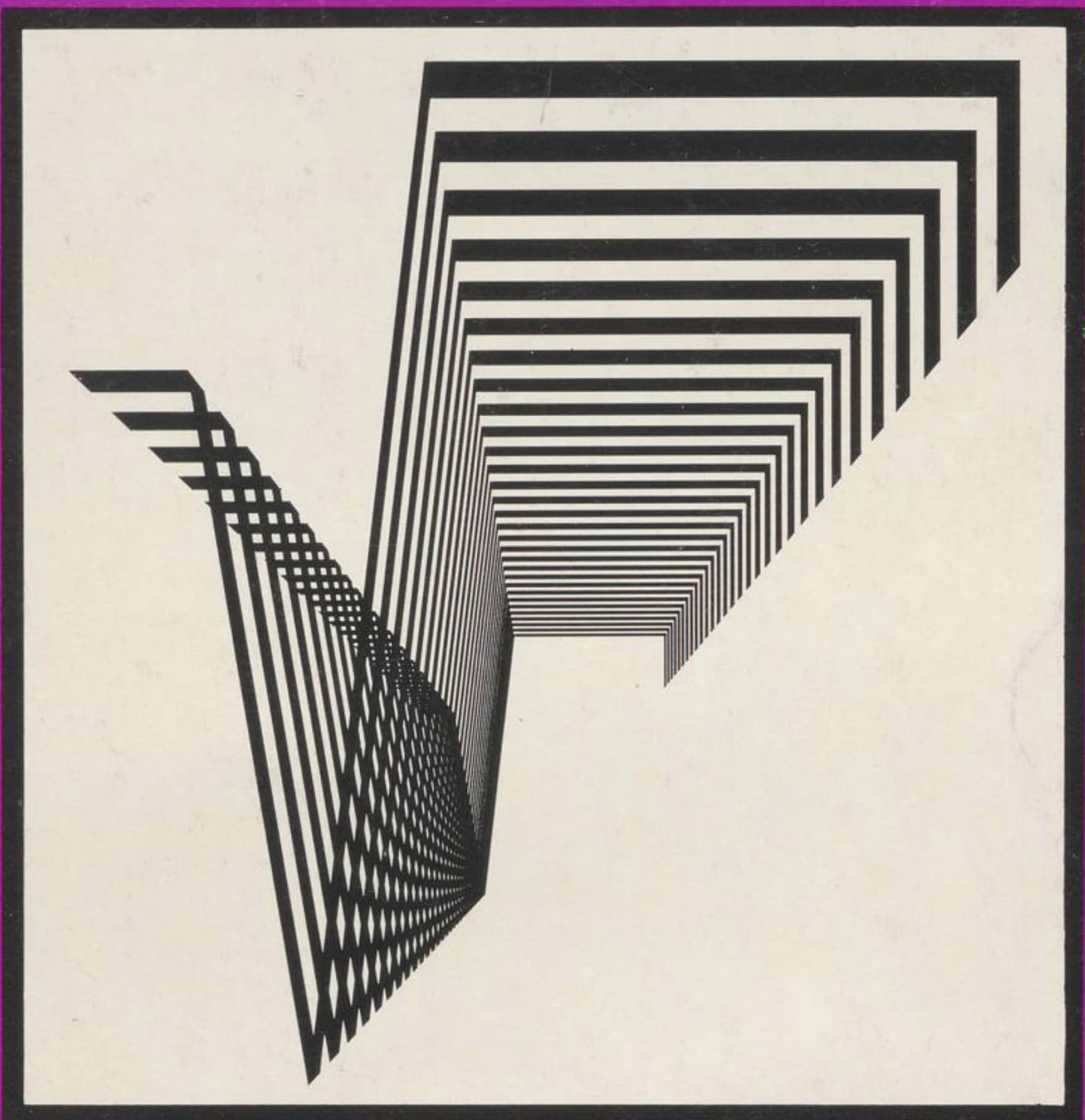
Barth · Federle · Haller

Algebra 9

Lösungen



Ehrenwirth · Oldenbourg

Algebra 9

Lösungen

Friedrich Barth · Reinhold Federle
Rudolf Haller

Ὦ βασιλεῦ, κατὰ μὲν τὴν χώραν ὁδοί
εἰσιν ἰδιωτικαὶ καὶ βασιλικαί, ἐν δὲ
τῇ γεωμετρίᾳ πᾶσίν ἐστιν ὁδὸς μία.

Durch Dein Land, o König, führen freilich
gewöhnliche Wege und Königsstraßen,
in der Mathematik aber gibt es für alle
nur einen Weg.

Menaichmos
zu Alexander dem Grossen

Aufgaben zu 1.1

12/1. Man zeigt zunächst, dass x keine ganze Zahl sein kann:
a) $1 < x < 2$ **b)** $2 < x < 3$ **c)** $2 < x < 3$ **d)** $22 < x < 23$
Bei einer rationalen Lösung $x = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, p, q teilerfremd) müsste also $q > 1$ gelten. Dann kann aber $x^2 = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$, da nicht kürzbar, keine ganze Zahl sein.

12/2. Die Lösungsmenge ist
a) $\{1 ; -1\}$ **b)** $\{2 ; -2\}$ **c)** $\{11 ; -11\}$ **d)** $\{25 ; -25\}$
e) $\{\frac{3}{4} ; -\frac{3}{4}\}$ **f)** $\{1\frac{2}{3} ; -1\frac{2}{3}\}$ **g)** $\{0{,}8 ; -0{,}8\}$ **h)** $\{0{,}02 ; -0{,}02\}$

12/3. (1) Voraussetzung: $n = k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $L = \{k; -k\}$.
(2) Voraussetzung: n ist keine Quadratzahl.
Dann ist $n > 1$, und es gibt $k \in \mathbb{N}$ so, dass $k^2 < n < (k+1)^2$ gilt. Eine positive Lösung muss damit die Bedingung $k < x < k+1$ erfüllen, kann also keine ganze Zahl sein. Aus der Annahme, der Bruch p/q ($p, q \in \mathbb{N}$ und teilerfremd) wäre eine Lösung, folgt $q > 1$ und $(p/q)^2 = n$. Die linke Seite dieser Gleichung kann aber keine ganze Zahl sein (vergleiche Aufgabe 1). Widerspruch! (Es kann auch keine negative rationale Lösung geben, da deren Gegenzahl eine positive Lösung wäre.)

12/4. Aus $x^2 = 2$ und der Annahme, es gäbe eine rationale Zahl $x = p/q$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, p, q teilerfremd) folgt wie angegeben $p^2 = 2q^2$. Wegen des Faktors 2 steht rechts und damit auch links vom Gleichheitszeichen eine gerade Zahl. Mit p^2 muss aber auch p selbst eine gerade Zahl sein. (Die Annahme $p = 2n + 1$ führt zu $p^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$, also zu ungeradem p^2). Mit $p = 2n$ erhält man, wie angegeben, $2n^2 = q^2$. Wegen des Faktors 2 steht nun links und damit auch rechts eine gerade Zahl. Mit q^2 ist auch q selbst gerade (vergleiche oben). Es muss also sowohl p als auch q eine gerade Zahl sein. Das ist aber ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass der Bruch p/q vollständig gekürzt sein soll. Es gibt somit keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist.

12/5. Man macht wieder die Annahme, es gäbe eine rationale Lösung, die man als vollständig gekürzten Bruch p/q schreiben kann. Dann folgt

a) $p^2 = 7q^2$; also ist p^2 und damit p durch 7 teilbar. Aus $p = 7n$ folgt $7n^2 = q^2$; also ist auch q durch 7 teilbar: Widerspruch zur vorausgesetzten Teilerfremdheit von p und q!

b) $p^2 = 12q^2 = 3 \cdot 4q^2 = 3 \cdot (2q)^2$; also ist p durch 3 teilbar. Mit $p = 3n$ folgt $3n^2 = (2q)^2$; also ist 2q und damit q selbst auch durch 3 teilbar: Widerspruch!

c) $p^2 = 15q^2 = 3 \cdot 5q^2$; also ist p^2 und damit p sowohl durch 3 als auch durch 5, somit durch 15 teilbar. Mit $p = 15n$ erhält man $15n^2 = q^2$; also ist auch q durch 15 teilbar: Widerspruch!

12/6. a) $x^2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (6x)^2 = 6$; $z^2 = 6$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

b) $x^2 = 2\frac{2}{7} \Leftrightarrow (7x)^2 = 7 \cdot 16 \Leftrightarrow (\frac{7x}{4})^2 = 7$; $z^2 = 7$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

c) $x^2 = 0{,}2 \Leftrightarrow (5x)^2 = 5$; $z^2 = 5$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

d) $x^2 = 1{,}25 \Leftrightarrow (4x)^2 = 20 \Leftrightarrow (2x)^2 = 5$; $z^2 = 5$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

12/7. $x^2 = \frac{p}{q} \Leftrightarrow (qx)^2 = p \cdot q$. Die Substitution $z = qx$ ergibt $z^2 = pq$. Wegen $pq \in \mathbb{N}$ ist diese Gleichung in $\mathbb{Q}$ genau dann lösbar, wenn pq eine Quadratzahl ist (vergleiche Aufgabe 3). Da jeder ganzzahligen Lösung der Gleichung $z^2 = pq$ umkehrbar eindeutig die (rationale!) Lösung $x = \frac{z}{q}$ der Ausgangsgleichung entspricht, ist auch diese genau dann in $\mathbb{Q}$ lösbar, wenn pq eine Quadratzahl ist.

13/8. a) 1) 2a 2) 7a 3) 1,5a 4) $\frac{5}{6}$a

b) 1) Nein; $x^2 = 5a^2 \Leftrightarrow (\frac{x}{a})^2 = 5$; $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{x}{a} \in \mathbb{Q}$;

$z^2 = 5$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

2) Ja, 4a.

3) Nein; $x^2 = 1{,}6a^2 \Leftrightarrow (5x)^2 = 40a^2 \Leftrightarrow (5x/2a)^2 = 10$;

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 5x/2a \in \mathbb{Q}$; $z^2 = 10$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

13/9. a) 1) Nein; $x^2 = 15$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

2) Ja, 4cm.

3) Nein; $x^2 = 2{,}3$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

b) Seitenlängen 2x und 3x $\Rightarrow A = 6x^2$

1) $6x^2 = 36\text{cm}^2 \Leftrightarrow x^2 = 6\text{cm}^2$; $z^2 = 6$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

2) $6x^2 = 324\text{mm}^2 \Leftrightarrow x^2 = 54\text{mm}^2$; $z^2 = 54$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

3) $6x^2 = 0{,}24\text{m}^2 \Leftrightarrow x^2 = 0{,}04\text{m}^2 \Leftrightarrow x = 0{,}2\text{m}$.

13/10. a) Für einen Würfel der Kantenlänge x gilt: $V = x^3$.
Wegen $V = 2$ erhält man $x^3 = 2$.

b) x kann keine ganze Zahl sein, da $1^3 < 2$ und $2^3 > 2$ ist.
Für eine Lösung $x = p/q$ ($p,q \in \mathbb{N}$ und teilerfremd) muss daher $q > 1$ gelten. Dann ist aber $x^3 = \frac{p^3}{q^3}$, da nicht kürzbar, keine ganze Zahl.
Also hat $x^3 = 2$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung.

13/11. **a)** Die im Hinweis genannten Vierecke sind Parallelogramme, ja sogar Rauten; das folgt aus der Symmetrie der Figur bezüglich der Mittelsenkrechten der Seiten (= der Winkelhalbierenden) des 5-Ecks.
Daher gilt: $\overline{EA'} = s$, $\overline{A'C} = d'$, $s + d' = \overline{EC} = d$; somit $\mathbf{d' = d - s}$ (2').
Wegen $\overline{EC} = \overline{EA'} + \overline{A'C} = \overline{EA'} + (\overline{B'C} - \overline{B'A'})$ ist

$$d = s + (s - s') \text{ oder } \mathbf{s' = 2s - d} \quad (2'')$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Aus (2') folgt } s + d' = d, \text{ also } s < d \\ \text{aus (2'') folgt } d = 2s - s', \text{ also } d < 2s\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{s < d < 2s} \quad (3)$$

(3) kann auch aus Dreieckseigenschaften gefolgert werden:
im Dreieck CDE gilt $\overline{CD} < \overline{CE}$ (da $\sphericalangle CED < \sphericalangle EDC$) und
$\overline{CE} < \overline{CD} + \overline{DE}$ (Dreiecksungleichung)
also $\mathbf{s < d < 2s}$.

b) $(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad \dfrac{d}{s} = \dfrac{d - s}{2s - d}$; Erweitern der rechten Seite mit $1/_s$ ergibt

$\dfrac{d}{s} = \dfrac{d/_s - 1}{2 - d/_s}$; daraus entsteht durch die angegebene

Substitution

$$x = \frac{x - 1}{2 - x}, \text{ also (4). Aus (3) folgt } \mathbf{1 < x < 2} \quad (3').$$

c) $x = \dfrac{p}{q}$ in (4) eingesetzt: $\quad \dfrac{p}{q} = \dfrac{p/_q - 1}{2 - p/_q}$

$$p(2 - p/_q) = q(p/_q - 1)$$

$$2p - \frac{p^2}{q} = p - q$$

$$p + q = \frac{p^2}{q} \quad (5)$$

d) Die Gleichung (4) hat keine ganzzahlige Lösung (vergleiche (3')). Für die angenommene rationale Lösung $p/_q$ muss daher $q > 1$ gelten. Da p und q teilerfremd sind, ist p^2/q keine ganze Zahl, wohl aber $p + q$. Daher stellt (5) einen Widerspruch dar. Die Annahme, es gäbe eine rationale Lösung von (4), ist deshalb falsch.

Aufgaben zu 1.2

17/1. **a)** 0,28 **b)** 2,6 **c)** $0,\overline{384615}$ **d)** $0,5\overline{3}$ **e)** 0,6
f) 0,46875 **g)** $0,\overline{0588235294117647}$ **h)** $9,\overline{90}$ **i)** $0,147\overline{2}$
k) 0,15

17/2. Zum Beispiel
(1) 0,123 112233 111222333 ... ; der k-te Abschnitt enthält der Reihe nach je k-mal die Ziffern 1, 2 und 3.
(2) 0,10 100 1000 ... ; der k-te Abschnitt ist die Ziffernfolge von 10^k.
(3) 0,10 200 3000 40000 ... ; der k-te Abschnitt besteht aus der Ziffernfolge von $k \cdot 10^k$.

17/3. Man führt jeweils die Annahme, es gäbe eine Periode, die dann eine feste Länge n haben müsste, zu einem Widerspruch:
a) Da in der Folge der natürlichen Zahlen auch die Zehnerpotenzen auftreten, kommen beliebig lange Abschnitte vor, die nur aus Nullen bestehen. Denkt man sich die Ziffernfolge von einer beliebigen Stelle an in Abschnitte der Länge n zerlegt, so gibt es stets solche, die nur Nullen enthalten (hier spätestens bei der Zahl 10^{2n-1}). Da aber dahinter immer wieder auch von Null verschiedene Ziffern auftreten, kann die Dezimalzahl nicht periodisch sein.
b) Da in der Folge der Quadratzahlen die Potenzen 10^{2k}, $k \in \mathbb{N}$, auftreten, gibt es beliebig lange Abschnitte, die nur aus Nullen bestehen. Daher (vergleiche **a**) ist y irrational.
c) Auch bei dieser Dezimalzahl treten beliebig lange Abschnitte auf, die nur aus Nullen bestehen. Denn da in k! stets $[k/2]$ gerade Faktoren und $[k/5]$ durch 5 teilbare Faktoren enthalten sind, endet k! auf mindestens $[k/5]$ Nullen. Diese Zahl wird mit wachsendem k beliebig groß. Daher (vergleiche **a**) ist z irrational.

17/4. **a)** rational ($0,367\overline{9} = 0,368$) **b)** irrational **c)** irrational
d) rational ($-7,\overline{727} = -7\frac{727}{999}$) **e)** irrational
f) rational ($-4,321\overline{0} = -4,321$)

17/5.

Intervallschachtelung ?	a)	b)	c)	d)	e)	f)
richtige Antwort	ja	ja	ja	nein	nein	ja

17/6. a) [0,9 ; 1], [0,99 ; 1], [0,999 ; 1], ... ist eine Schachtelung für $0{,}\overline{9}$.

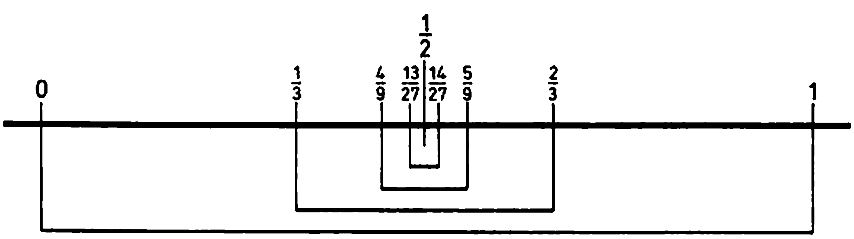
b) 1 liegt, wie unmittelbar ersichtlich, in jedem Intervall. Da die Intervalllängen beliebig klein werden, kann es keine von 1 verschiedene Zahl mit dieser Eigenschaft geben. Also ist $0{,}\overline{9} = 1$.

c) Intervallschachtelung für $0{,}0\overline{9}$: [0,09 ; 0,1], [0,099 ; 0,1], ...
0,1 liegt in jedem Intervall; daher $0{,}0\overline{9} = 0{,}1$.
Intervallschachtelung für $0{,}00\overline{9}$: [0,009 ; 0,01], [0,0099 ; 0,01], ...
0,01 liegt in jedem Intervall; daher $0{,}00\overline{9} = 0{,}01$.

d) $1{,}1\overline{9} = 1{,}2$; $0{,}40\overline{9} = 0{,}41$; $-9{,}\overline{9} = -10$.

e) $2{,}5 = 2{,}4\overline{9}$; $-0{,}89 = -0{,}88\overline{9}$; $11 = 10{,}\overline{9}$; $-2{,}011 = -2{,}010\overline{9}$.

17/7. a) Das jeweilige Intervall wird in drei gleich lange Teile zerlegt; das mittlere Teilintervall ist das nächste Intervall der Schachtelung.



b) Jedes Intervall ist ein Teilintervall des vorausgehenden; die Intervalllängen 1, $1/3$, $1/9$, ..., allgemein $1/3^n$, werden beliebig klein. Da $1/2$ in jedem Intervall liegt (es ist jeweils die Intervallmitte), stellt die Schachtelung diese Zahl dar.

c) $[0;1]$, $[1/2;1]$, $[1/2;3/4]$, $[5/8;3/4]$, $[5/8;11/16]$, ...

18/8.	a)	[1 ; 2],	[1,7 ; 1,8],	[1,73 ; 1,74],	[1,732 ; 1,733]
	b)	[0 ; 1],	[0,7 ; 0,8],	[0,70 ; 0,71],	[0,707 ; 0,708]
	c)	[14 ; 15],	[14,1 ; 14,2],	[14,14 ; 14,5],	[14,142 ; 14,143]
	d)	[0 ; 1],	[0,6 ; 0,7],	[0,60 ; 0,61],	[0,603 ; 0,604]

18/9.	a)	[1 ; 2],	[1,2 ; 1,3],	[1,25 ; 1,26],	[1,259 ; 1,260]
	b)	[2 ; 3],	[2,1 ; 2,2],	[2,15 ; 2,16],	[2,154 ; 2,155]
	c)	[4 ; 5],	[4,6 ; 4,7],	[4,64 ; 4,65],	[4,641 ; 4,642]

Aufgaben zu 1.3

20/1. a) Intervallschachtelung für $a = 0{,}37337\ldots$:
$[0;1]$, $[0{,}3;0{,}4]$, $[0{,}37;0{,}38]$, $[0{,}373;0{,}374]$, $[0{,}3733;0{,}3734]$, …

Intervallschachtelung für $b = {}^7/_{11}$ $(= 0{,}\overline{63})$:
$[0;1]$, $[0{,}6;0{,}7]$, $[0{,}63;0{,}64]$, $[0{,}636;0{,}637]$, $[0{,}6363;0{,}6364]$, …

Intervallschachtelung für $a + b$:
$[0;2]$, $[0{,}9;1{,}1]$, $[1{,}00;1{,}02]$, $[1{,}009;1{,}011]$, $[1{,}0096;1{,}0098]$, …

Somit gilt: $a + b = 1{,}009\ldots$

b) Intervallschachtelung für $a = 2{,}0408016\ldots$:
$[2;3]$, $[2{,}0;2{,}1]$, $[2{,}04;2{,}05]$, $[2{,}040;2{,}041]$, $[2{,}0408;2{,}0409]$, …

Intervallschachtelung für $b = 1{,}505505550\ldots$:
$[1;2]$, $[1{,}5;1{,}6]$, $[1{,}50;1{,}51]$, $[1{,}505;1{,}506]$, $[1{,}5055;1{,}5056]$, …

Intervallschachtelung für $a + b$:
$[3;5]$, $[3{,}5;3{,}7]$, $[3{,}54;3{,}56]$, $[3{,}545;3{,}547]$, $[3{,}5463;3{,}5465]$, …

Somit gilt: $a + b = 3{,}546\ldots$

c) Intervallschachtelung für $a = 2{,}\overline{039}$:
$[2;3]$, $[2{,}0;2{,}1]$, $[2{,}03;2{,}04]$, $[2{,}039;2{,}040]$, $[2{,}0390;2{,}0391]$, …

Intervallschachtelung für $b = -1{,}808008\ldots$:
$[-2;-1]$, $[-1{,}9;-1{,}8]$, $[-1{,}81;-1{,}80]$, $[-1{,}809;-1{,}808]$,
$[-1{,}8081;-1{,}8080]$, …

Intervallschachtelung für $a + b$:
$[0;2]$, $[0{,}1;0{,}3]$, $[0{,}22;0{,}24]$, $[0{,}230;0{,}232]$, $[0{,}2309;0{,}2311]$, …

Somit gilt: $a + b = 0{,}23\ldots$

d) Intervallschachtelung für $a = -0{,}7717711\ldots$:
$[-1;0]$, $[-0{,}8;-0{,}7]$, $[-0{,}78;-0{,}77]$, $[-0{,}772;-0{,}771]$,
$[-0{,}7718;-0{,}7717]$, …

Intervallschachtelung für $b = -3{,}141144\ldots$:
$[-4;-3]$, $[-3{,}2;-3{,}1]$, $[-3{,}15;-3{,}14]$, $[-3{,}142;-3{,}141]$,
$[-3{,}1412;-3{,}1411]$, …

Intervallschachtelung für $a + b$:
$[-5;-3]$, $[-4{,}0;-3{,}8]$, $[-3{,}93;-3{,}91]$, $[-3{,}914;-3{,}912]$,
$[-3{,}9130;-3{,}9128]$, …

Somit gilt: $a + b = -3{,}91\ldots$

20/2. **a)** Intervallschachtelung für $a = 0{,}37337\ldots$:
$[0 ; 1]$, $[0{,}3 ; 0{,}4]$, $[0{,}37 ; 0{,}38]$, $[0{,}373 ; 0{,}374]$, $[0{,}3733 ; 0{,}3734]$, ...

Intervallschachtelung für $(-b) = -\,{}^7/_{11}$ $(= -\,0{,}\overline{63}\,)$:
$[-1 ; 0]$, $[-\,0{,}7 ; -\,0{,}6]$, $[-\,0{,}64 ; -\,0{,}63]$, $[-\,0{,}637 ; -\,0{,}636]$,
$[-\,0{,}6364 ; -\,0{,}6363]$, ...

Intervallschachtelung für $a - b$:
$[-1 ; 1]$, $[-\,0{,}4 ; -\,0{,}2]$, $[-\,0{,}27 ; -\,0{,}25]$, $[-\,0{,}264 ; -\,0{,}262]$,
$[-\,0{,}2631 ; -\,0{,}2629]$, ...

b) Intervallschachtelung für $a = -\,0{,}7717711\ldots$:
$[-1 ; 0]$, $[-\,0{,}8 ; -\,0{,}7]$, $[-\,0{,}78 ; -\,0{,}77]$, $[-\,0{,}772 ; -\,0{,}771]$,
$[-\,0{,}7718 ; -\,0{,}7717]$, ...

Intervallschachtelung für $(-b) = 3{,}141144\ldots$:
$[3 ; 4]$, $[3{,}1 ; 3{,}2]$, $[3{,}14 ; 3{,}15]$, $[3{,}141 ; 3{,}142]$, $[3{,}1411 ; 3{,}1412]$, ...

Intervallschachtelung für $a - b$:
$[2 ; 4]$, $[2{,}3 ; 2{,}5]$, $[2{,}36 ; 2{,}38]$, $[2{,}369 ; 2{,}371]$, $[2{,}3693 ; 2{,}3695]$, ...

20/3. **a)** Als Intervallschachtelung für $z_1 + z_2$ erhält man
$[2 ; 4]$, $[2{,}7 ; 2{,}9]$, $[2{,}77 ; 2{,}79]$, $[2{,}777 ; 2{,}779]$, $[2{,}7777 ; 2{,}7779]$, ...
Jedes Intervall hat die Form $[2{,}7\ldots77 ; 2{,}7\ldots79]$. Daher liegt $2{,}\overline{7}$ in jedem Intervall. Also ist $z_1 + z_2 = 2{,}\overline{7} = 2\,{}^7/_9$ eine rationale Zahl.

b) Zum Beispiel $z_1 = 0{,}151151115\ldots$ und $z_2 = -\,z_1 = -\,0{,}151151115\ldots$.
Die Schachtelung für $z_1 + z_2$ lautet
$[-1 ; 1]$, $[-\,0{,}1 ; 0{,}1]$, $[-\,0{,}01 ; 0{,}01]$, ... ; sie stellt die Zahl 0 dar.

20/4. **a)** Man muss $1 - 0{,}585585558\ldots = 0{,}414414441\ldots$ addieren,
also eine irrationale Zahl. (Probe: $0{,}58558\ldots + 0{,}41441\ldots = 0{,}\overline{9} = 1$)

b) Man muss $0{,}58558\ldots - 0{,}25225\ldots = 0{,}\overline{3}$ subtrahieren,
also die rationale Zahl ${}^1/_3$.

20/5. Voraussetzung: $a \in \mathbb{Q}$ und $b \notin \mathbb{Q}$ und $a + b = c$
Aus der Annahme $c \in \mathbb{Q}$ folgt wegen $b = c - a$, dass b als Differenz rationaler Zahlen ebenfalls rational sein muss. Widerspruch!

20/6. **a)** Wegen $[a_n ; A_n] \supset [a_{n+1} ; A_{n+1}]$ und $[b_n ; B_n] \supset [b_{n+1} ; B_{n+1}]$ gilt
$a_n \leq a_{n+1} < A_{n+1} \leq A_n$ und $b_n \leq b_{n+1} < B_{n+1} \leq B_n$ (für $n \in \mathbb{N}$).
Durch Addition dieser Ungleichungen erhält man
$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1} < A_{n+1} + B_{n+1} \leq A_n + B_n$. Daher gilt auch
$[a_n + b_n ; A_n + B_n] \supset [a_{n+1} + b_{n+1} ; A_{n+1} + B_{n+1}]$.

b) $(A_n + B_n) - (a_n + b_n) = (A_n - a_n) + (B_n - b_n)$; da $A_n - a_n$ und $B_n - b_n$ mit wachsendem n beliebig klein werden, gilt das auch für die Summe, also für die Länge des Intervalls $[a_n + b_n ; A_n + B_n]$

Mit **a** und **b** ist gezeigt, dass die Summe zweier Intervallschachtelungen wieder eine Intervallschachtelung ist.

20/7. **a)** [0 ; 3], [1,38 ; 1,68], [1,518 ; 1,5477], [1,5318 ; 1,534767], ... ;
die Intervalle sind ineinandergeschachtelt.
$a \cdot b = \frac{2}{3} \cdot 2{,}3 = \frac{23}{15} = 1{,}5\overline{3}$; $a \cdot b$ liegt in jedem Intervall.

b) Intervalllängen: 3; 0,3; 0,0297 (<0,03)* ; 0,00 2967 (<0,003)*.

c) Ja; die Intervalle sind ineinander geschachtelt, ihre Längen nehmen rasch ab (jeweils etwa auf ein Zehntel der Länge des vorausgehenden Intervalls) und $a \cdot b$ liegt in jedem Intervall.

21/8. **a)** Intervallschachtelung für a = 1,50550... :
[1 ; 2], [1,5 ; 1,6], [1,50 ; 1,51], [1,505 ; 1,506], ...

Intervallschachtelung für b = 0,20406... :
[0 ; 1], [0,2 ; 0,3], [0,20 ; 0,21], [0,204 ; 0,205], ...

Intervalle $[a_n \cdot b_n ; A_n \cdot B_n]$:
[0 ; 2], [0,3 ; 0,48], [0,3 ; 0,3171], [0,30702 ; 0,30873], ...

b) Wegen $0 < 0{,}3 \leq 0{,}3 < 0{,}30702$ und $2 > 0{,}48 > 0{,}3171 > 0{,}30873$ sind diese Intervalle ineinander geschachtelt.
Intervalllängen: 2; 0,18 (< 0,2)*; 0,0171 (<0,02)*; 0,00171 (<0,002)*

---

* Vergleiche dazu Aufgabe **10**.

21/9. a) $$\left.\begin{array}{l} a_n < A_n\,,\ b_n > 0 \Rightarrow a_nb_n < A_nb_n \\ b_n < B_n\,,\ A_n > 0 \Rightarrow A_nb_n < A_nB_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_nb_n < A_nB_n$$

b) $$\left.\begin{array}{l} a_n \le a_{n+1}\,,\ b_n > 0 \Rightarrow a_nb_n \le a_{n+1}b_n \\ b_n \le b_{n+1}\,,\ a_{n+1} > 0 \Rightarrow a_{n+1}b_n \le a_{n+1}b_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_nb_n \le a_{n+1}b_{n+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_n \ge A_{n+1}\,,\ B_n > 0 \Rightarrow A_nB_n \ge A_{n+1}B_n \\ B_n \ge B_{n+1}\,,\ A_{n+1} > 0 \Rightarrow A_{n+1}B_n \ge A_{n+1}B_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow A_nB_n \ge A_{n+1}B_{n+1}$$

c) $$\begin{aligned} A_n(B_n - b_n) + b_n(A_n - a_n) &= A_nB_n - A_nb_n + A_nb_n - a_nb_n \\ &= A_nB_n - a_nb_n\,. \end{aligned}$$

Wegen $A_1 \ge A_n$ und $B_1 \ge B_n > b_n$ sowie $A_n - a_n > 0$ und $B_n - b_n > 0$ gilt $A_n(B_n - b_n) + b_n(A_n - a_n) < A_1(B_n - b_n) + B_1(A_n - a_n)$,
also $A_nB_n - a_nb_n < A_1(B_n - b_n) + B_1(A_n - a_n)$.
A_1, B_1 sind feste Zahlen, die Intervalllängen $A_n - a_n$ und $B_n - b_n$ werden mit wachsendem n beliebig klein. Deshalb nehmen die beiden Produkte $A_1(B_n - b_n)$ und $B_1(A_n - a_n)$ und auch ihre Summe beliebig kleine Werte an.

21/10. Für die Intervalllängen gilt dann $A_n - a_n = B_n - b_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Damit erhält man (Vergleiche **9 c**) die Abschätzung
$A_nB_n - a_nb_n < A_1 \cdot \frac{1}{10^{n-1}} + B_1 \cdot \frac{1}{10^{n-1}}$, das heißt, $A_nB_n - a_nb_n < \frac{A_1 + B_1}{10^{n-1}}$.
(Beispiele dazu in **7 b** und **8 b**)

21/11. a) Intervallschachtelung für $a = -4/3$ $(= -1{,}\overline{3})$:
$[-2\,;-1]$, $[-1{,}4\,;-1{,}3]$, $[-1{,}34\,;-1{,}33]$, $[-1{,}334\,;-1{,}333]$, …

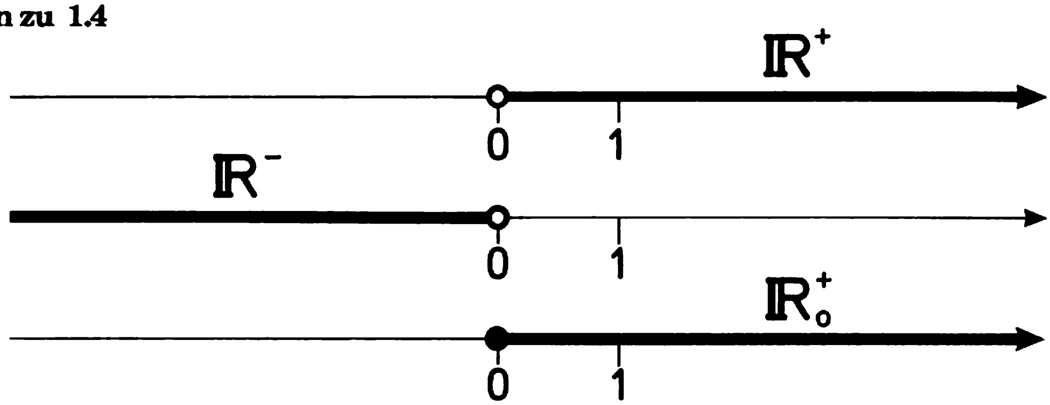
Intervallschachtelung für $b = -3{,}6$ $(= -3{,}6\overline{0})$:
$[-4\,;-3]$, $[-3{,}7\,;-3{,}6]$, $[-3{,}61\,;-3{,}60]$, $[-3{,}601\,;-3{,}600]$, …

Intervallschachtelung für $a{\cdot}b$:
$[3\,;8]$, $[4{,}68\,;5{,}18]$, $[4{,}788\,;4{,}8374]$, $[4{,}7988\,;4{,}803734]$, …

b) In diesem Fall hat die linke Intervallgrenze jeweils einen größeren Absolutbetrag als die rechte. Deshalb ist das (positive!) Produkt zweier linken Grenzen größer als das der entsprechenden rechten Grenzen.
Oder: $$\left.\begin{array}{l} a_n < A_n < 0\,,\ b_n < 0 \Rightarrow a_nb_n > A_nb_n > 0 \\ b_n < B_n < 0\,,\ A_n < 0 \Rightarrow A_nb_n > A_nB_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_nb_n > A_nB_n > 0$$
Damit ist a_nb_n die rechte und A_nB_n die linke Grenze des Intervalls der Produktschachtelung.

Aufgaben zu 1.4

23/1. a) b) c)



23/2. a) $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ b) $\mathbb{R}_0^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0$ c) $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Menge der irrationalen Zahlen.

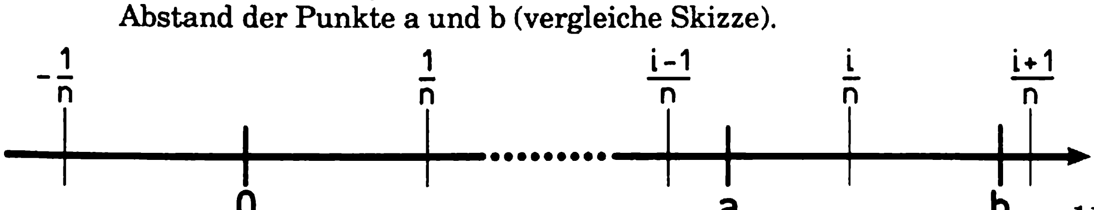
24/3. Man kann so keine neuen Zahlen erzeugen. Denn auch bei einer Intervallschachtelung mit reellen Intervallgrenzen gibt es genau einen Punkt der Zahlengeraden, der zu allen Intervallen gehört. Diesem Punkt ist (wie in 1.4 gezeigt wurde) eindeutig eine **reelle** Zahl zugeordnet.

24/4. a) Voraussetzung: $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $r \cdot z = c$.
Aus der Annahme $c \in \mathbb{Q}$ folgt wegen $z = \frac{c}{r}$, dass z als Quotient rationaler Zahlen rational ist. Widerspruch!

b) Voraussetzung: $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann ist $z \neq 0$ und $\frac{1}{z}$ existiert. Aus der Annahme $\frac{1}{z} \in \mathbb{Q}$ folgt nach **a**, dass $z \cdot \frac{1}{z}$ irrational ist. Widerspruch zu $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

24/5. a) Zum Beispiel: $a < 0{,}4142 < b$

b) Voraussetzung: $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.
Dann ist $b - a > 0$ und es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < {}^1\!/_n < b - a$ (denn ${}^1\!/_n$ nähert sich mit wachsendem n beliebig dem Wert 0; es gibt unendlich viele n mit $0 < {}^1\!/_n < b - a$).
Von den Brüchen der Form ${}^k\!/_n$, $k \in \mathbb{Z}$, liegt dann mindestens einer zwischen a und b. Denn die den Zahlen ${}^k\!/_n$ zugeordneten Punkte der Zahlengeraden haben jeweils den Abstand ${}^1\!/_n$, welcher kleiner ist als der Abstand der Punkte a und b (vergleiche Skizze).



24/6. **a)** **1)** Zum Beispiel $1{,}5 < 1{,}5303003000\ldots < 1{,}6$

2) Zum Beispiel $\frac{25}{33} < 0{,}76010110111\ldots < \frac{26}{33}$

b) Zum Beispiel $0{,}414114111\ldots < 0{,}414202002000\ldots < 0{,}414414441\ldots$

c) Voraussetzung: $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.
Es gibt (unendlich viele) positive irrationale Zahlen z, die kleiner als $b - a$ sind. (Zum Beispiel ist $0{,}\underbrace{0\ldots0}_{\text{n-mal } 0}909009000\ldots < 1:10^n$, kann also beliebig klein gemacht werden.) Mit z sind auch alle Zahlen $k \cdot z$, $k \in \mathbb{Z}$, irrational (vergleiche Aufgabe 4) und mindestens eine davon liegt zwischen a und b. Denn die diesen Zahlen entsprechenden Punkte zerlegen die Zahlengerade in Strecken der Länge z, und wegen $z < b - a$ können die Punkte a und b nicht auf derselben Teilstrecke liegen.

24/7. **a)** $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}; +, \cdot)$

b) In $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; +, \cdot)$ sind ungültig

E_+ und E. (Summe und Produkt irrationaler Zahlen können rational sein, zum Beispiel $z + (-z) = 0$; $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.)

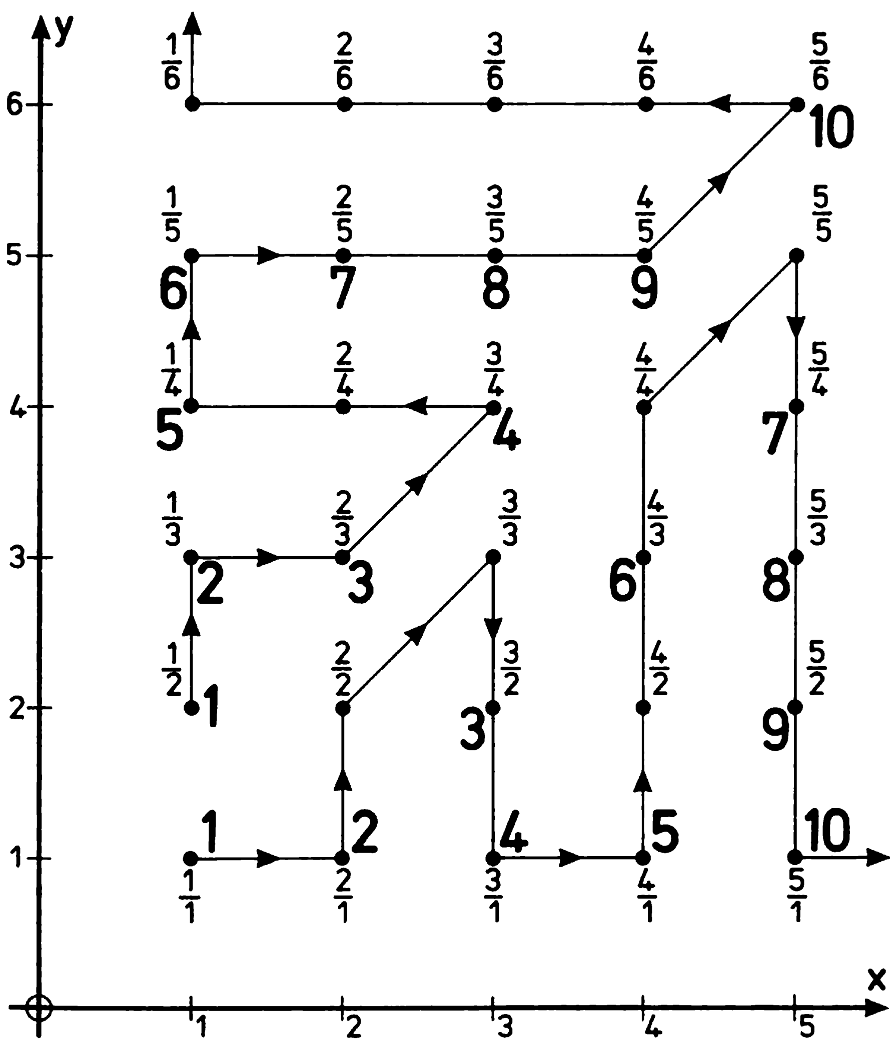
N_+ und N. ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ enthält weder 0 noch 1.)

Aufgaben zu 1.5

28/1. a) Die Punkte mit $^p/_q < 1$ liegen oberhalb der Winkelhalbierenden y=x.
(Die großen Zahlen unten im Bild sind die Nummern.)

b) Die Punkte mit $^p/_q \geq 1$ liegen unterhalb oder auf der Winkelhalbierenden y=x.

(Es gibt auch andere Möglichkeiten, die Punkte zu durchlaufen.)



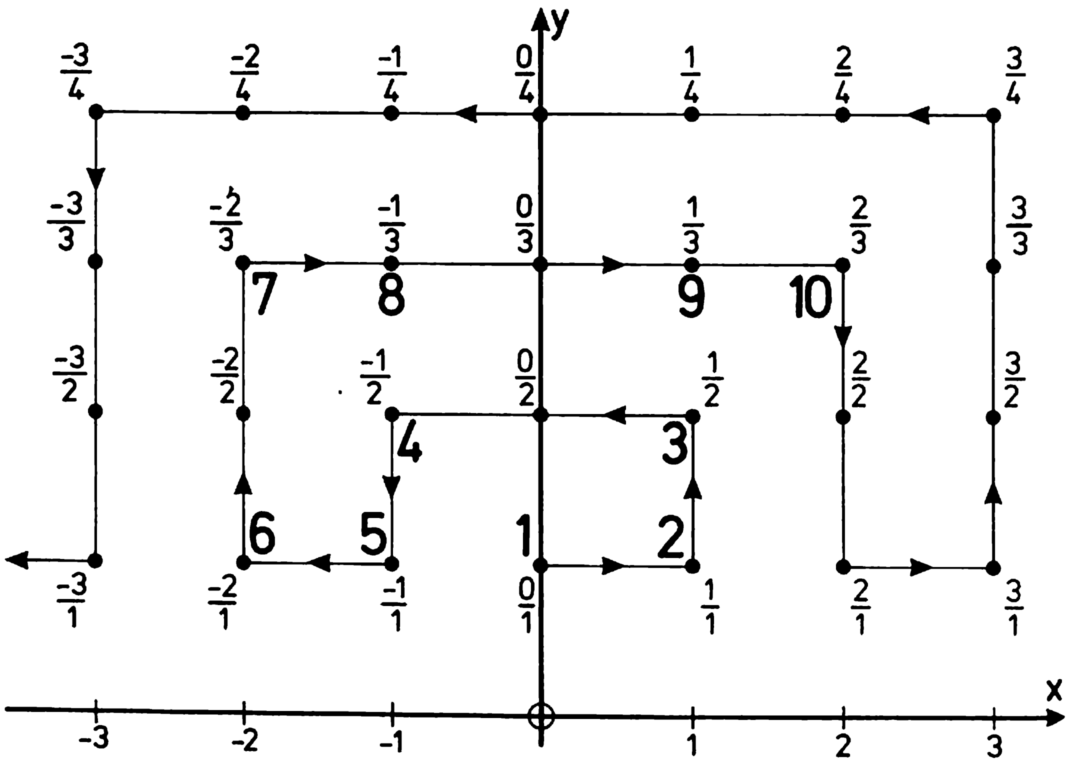
28/2. a) Die Summe aus Zähler und Nenner ist für alle Brüche einer Diagonallinie gleich. Es treten jeweils alle positiven Brüche mit der gleichen Summe längs einer Diagonallinie auf.

b) Beim Übergang zur nächsten Diagonallinie vergrößert sich die Summe aus Zähler und Nenner um 1.

c) Beim Kürzen eines Bruchs verkleinert sich die Summe aus Zähler und Nenner.

d) Der (aus einem kürzbaren Bruch) durch vollständiges Kürzen entstehende wertgleiche Bruch hat eine kleinere Summe aus Zähler und Nenner. Er liegt daher auf einer schon vorher durchlaufenen Diagonale und wurde dort, da nicht kürzbar, mit einerNummer versehen.

28/3. Das Bild zeigt eine der (beliebig vielen!) Möglichkeiten die rationalen Zahlen anzuordnen. (Die großen Zahlen sind die Nummern.)



28/4. **a)** $f(n) = 2n$ **b)** $f(n) = 2n - 1$ **c)** $f(n) = n - 1$

d) $f(n) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-n}{2}, \text{ falls n ungerade} \\ \frac{n}{2}, \text{ falls n gerade} \end{array} \right\} = (-1)^n \cdot [n/2]$

e) $f(n) = 1/n$ **f)** $f(n) = n^2$

28/5. **a)** Man kann die Elemente von A und B eineindeutig einander zuordnen, zum Beispiel durch folgende Tabelle:

$k \epsilon A$	1	2	3	.....	29	60
$n \epsilon B$	78	79	80	.....	136	137

also $k \mapsto 77 + k$; $k \epsilon A$.

b)

$p \epsilon P$	11	13	17	19	.....	89	97	–
$n \epsilon V$	12	16	20	24	.....	88	92	96

V hat ein Element mehr als P.
Deshalb ist keine eineindeutige Zuordnung möglich.

c) $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$; also $|A| = m$; $|B| = n$.
Falls $m = n$, ist eine eineindeutige Zuordnung möglich,
zum Beispiel

a_1	a_2	a_3	.....	a_n
b_1	b_2	b_1	.....	b_n

Falls $m \neq n$, zum Beispiel $m > n$, bleiben bei der Paarbildung Elemente der größeren Menge ohne Partner:

a_1	a_2	a_3	.....	a_n	a_{n+1}	.....	a_m
b_1	b_2	b_3	.....	b_n	–	.....	–

29/6. Zwischen $x \epsilon A$ und $y \epsilon B$ ist folgende eineindeutige Zuordnung möglich:
a) $y = -x$ **b)** $y = 1/x$ **c)** $y = 1/x - 1$

29/7. Begründung wie bei **6**

29/8. Paradoxien liegen vor **a)** in **4 a, b, c, d, f**
b) in **6 c**

29/9. **a)** Jedem $P \in [AB]$ ist eineindeutig der Schnittpunkt P' von PZ mit $[CD]$ zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem $P' \in [CD]$ eineindeutig der Schnittpunkt P von ZP' mit $[AB]$.

b) Es gilt $\bar{A}B \parallel g$. (Der Beweis kann zum Beispiel mit dem Satz vom Thaleskreis erfolgen: $\overline{AM} = \overline{\bar{A}M} = \overline{MB} \Rightarrow \sphericalangle A\bar{A}B = 90°$; dazu $\overline{\bar{A}A} \perp g$.)
$M = M'$ (Fixpunkt der Abbildung)
Ein Punkt P_1 der offenen Strecke $]AM[$ wird zuerst auf $\bar{P}_1 \in]\bar{A}M[$ gespiegelt. $Z\bar{P}_1$ ist von $Z\bar{A}$ verschieden und schneidet daher g in P'_1.
Lässt man P_1 von M nach A wandern, so durchläuft P'_1 eine der Halbgeraden, in die g durch M zerlegt wird. Dabei tritt jeder Punkt dieser Halbgeraden genau einmal als Bildpunkt auf.
Ein Punkt P_2 der offenen Strecke $]MB[$ wird von Z aus auf die andere Halbgerade von g projiziert, was wieder eine eineindeutige Zuordnung liefert.

30/10. **a)** Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, so könnte man jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Nummer $n \in \mathbb{N}$ zuordnen. Dabei erhielte auch jedes $x \in M$ eine Nummer, das heißt, M wäre auch abzählbar. (Man könnte die Elemente von M nach ihren aufsteigenden Nummern $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ ordnen und umnummerieren: $x_{n_1} = x'_1, x_{n_2} = x'_2, x_{n_3} = x'_3, \ldots$)
Eine überabzählbare Teilmenge M kann es also nur geben, wenn $\mathbb{R}$ selbst überabzählbar ist.

b) $0{,}5 = 0{,}4\overline{9}$; $0{,}71 = 0{,}70\overline{9}$; $3/8 = 0{,}375 = 0{,}374\overline{9}$; $17/250 = 0{,}068 = 0{,}067\overline{9}$.

c) Da $z_i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, gilt für $z = 0{,}z_1z_2z_3\ldots$: $0{,}\overline{1} \le z \le 0{,}\overline{8}$, also $0 < z < 1$ und damit $z \in M$. Aufgrund der Auswahlregel für die Ziffern von z unterscheidet sich z von x_i in der i-ten Nachkommastelle z_i.
Also gilt: $z \ne x_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

d) Aus der Annahme der Abzählbarkeit von M folgt, dass man **alle** Elemente von M als $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durchnummerieren kann.
Die in **c** konstruierte Zahl z ist dann
– einerseits von allen x_i verschieden, sodass $z \notin M$ gilt,
– andrerseits eine reelle Zahl mit $0 < z < 1$, sodass $z \in M$ gilt.
Widerspruch! Die Annahme, M sei abzählbar, ist also falsch.
Da M überabzählbar ist, muss nach **a** auch die Obermenge $\mathbb{R}$ überabzählbar sein.

Aufgaben zu 2.1

36/1. **a)** 1 **b)** 4 **c)** 9 **d)** 6 **e)** 10 **f)** 50
g) 700 **h)** 1000 **i)** 14 **k)** 13 **l)** 16 **m)** 19

36/2. **a)** $\frac{7}{8}$ **b)** $\frac{21}{11}$ **c)** $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ **d)** $\frac{42}{100} = 0{,}42$
e) 1,5 **f)** 2,3 **g)** 0,17 **h)** 0,025

36/3. **a)** 5 und 7 **b)** 12 und 8 **c)** 25 und 31 **d)** 9 und 1
e) 3 und 5 **f)** 8 und 10 **g)** 13 und 11 **h)** 30 und 20

36/4. **a)** 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5 **e)** 6

36/5. **a)** 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 10 **e)** 2
f) $1/4$ **g)** 4 **h)** 5,5 **i)** 5 **k)** 1,5 **l)** $5/6$

36/6. **a)** $a \geq 0$ **b)** $a \leq 0$ **c)** $a \geq -1$ **d)** $a \leq 2{,}5$ **e)** $x \in \mathbb{R}$
f) $x = 0$ **g)** $x \in \mathbb{R}$ **h)** $x \leq -1$ oder $x \geq 1$ **i)** $-1 \leq x \leq 1$
k) $x \leq -3$ oder $x \geq 3$ **l)** $x \leq -1$ oder $x > 1$ **m)** $-2{,}5 \leq x < 2$

37/7. **a)** $3 + 2\sqrt{2}$ **b)** $12 - 6\sqrt{3}$ **c)** -2
d) $a - 4b\sqrt{a} + 4b^2$ **e)** $9x + 30y\sqrt{x} + 25y^2$ **f)** $9p^2 - 3p$

37/8. **a)** $18 - 2\sqrt{2}$ **b)** $14a - 14\sqrt{a}$ **c)** $2 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}$
d) $20 + \sqrt{6} - 20\sqrt{7}$ **e)** 24 **f)** 0

37/9. **a)** $\{35 ; -35\}$ **b)** $\{8 ; -8\}$ **c)** $\{0\}$ **d)** $\{\sqrt{2} ; -\sqrt{2}\}$
e) $\{\sqrt{17} ; -\sqrt{17}\}$ **f)** $\{ \}$ **g)** $\{5 ; -5\}$ **h)** $\{ \}$
i) $\{0{,}3 ; -0{,}3\}$ **k)** $\{\sqrt{\sqrt{3}} ; -\sqrt{\sqrt{3}}\}$
l) $\{\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}} ; -\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{5}}\}$ **m)** $\{ \}$

37/10. **a)** $x^2 = 1,\ \{1 ; -1\}$ **b)** $x^2 = 7,\ \{\sqrt{7} ; -\sqrt{7}\}$ **c)** $x^2 = 0,\ \{0\}$
d) $x^2 = 1{,}2,\ \{\sqrt{1{,}2} ; -\sqrt{1{,}2}\}$ **e)** $x^2 = \frac{1}{3},\ \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} ; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **f)** $x^2 = 0,\ \{0\}$

37/11. a) $\sqrt{2}$ m b) 4 cm c) $3\sqrt{2}$ dm d) 30 mm
e) 18 m f) $\sqrt{6}$ km

37/12.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
irration.	irration.	irration.	rational	rational	irration.	irration.	rational

37/13. a) {4} b) {9} c) {1} d) { } e) {9}
f) { } g) {0} h) { } i) $\mathbb{R}_0^+$

37/14. a) $d = 6\frac{1}{4}$ mm

b) Für die Blendendurchmesser $d_1, d_2, \ldots, d_7$ gilt:
$d_{i+1}^2 = \frac{1}{2}d_i^2$ also $d_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}d_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.
Daraus folgt für die Blendenzahlen: $\frac{f}{d_{i+1}} = \sqrt{2} \cdot \frac{f}{d_i}$.
Mit $\frac{f}{d_1} = 2$ erhält man die Zahlen $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16$
beziehungsweise, wenn man die Dezimalentwicklung der irrationalen Werte nach der 2. geltenden Ziffer abbricht, 2; 2,8 ; 4; 5,6; 8; 11; 16.

Aufgaben zu 2.2

44/1. Man muss höchstens 4 Zwischenwerte quadrieren, wenn man wie folgt verfährt:

(1) Quadrat der Intervallmitte: $5{,}55^2 = 30{,}8025 < 31$.
Also liegt $\sqrt{31}$ im Intervall $[5{,}55\ ;\ 5{,}60]$.

(2) Quadrat eines der Mitte des neuen Intervalls benachbarten Zwischenwerts: $5{,}58^2 = 31{,}1364 > 31$.
Also liegt $\sqrt{31}$ im Intervall $[5{,}55\ ;\ 5{,}58]$.

(3) Quadrat eines der Mitte des neuen Intervalls benachbarten Zwischenwerts: $5{,}56^2 = 30{,}9136 < 31$.
Also liegt $\sqrt{31}$ im Intervall $[5{,}56\ ;\ 5{,}58]$.

(4) Quadrat des in der Mitte dieses Intervalls liegenden Zwischenwerts: $5{,}57^2 = 31{,}0249 > 31$.

Damit ist $[5{,}56\ ;\ 5{,}57]$ das nächste Intervall.

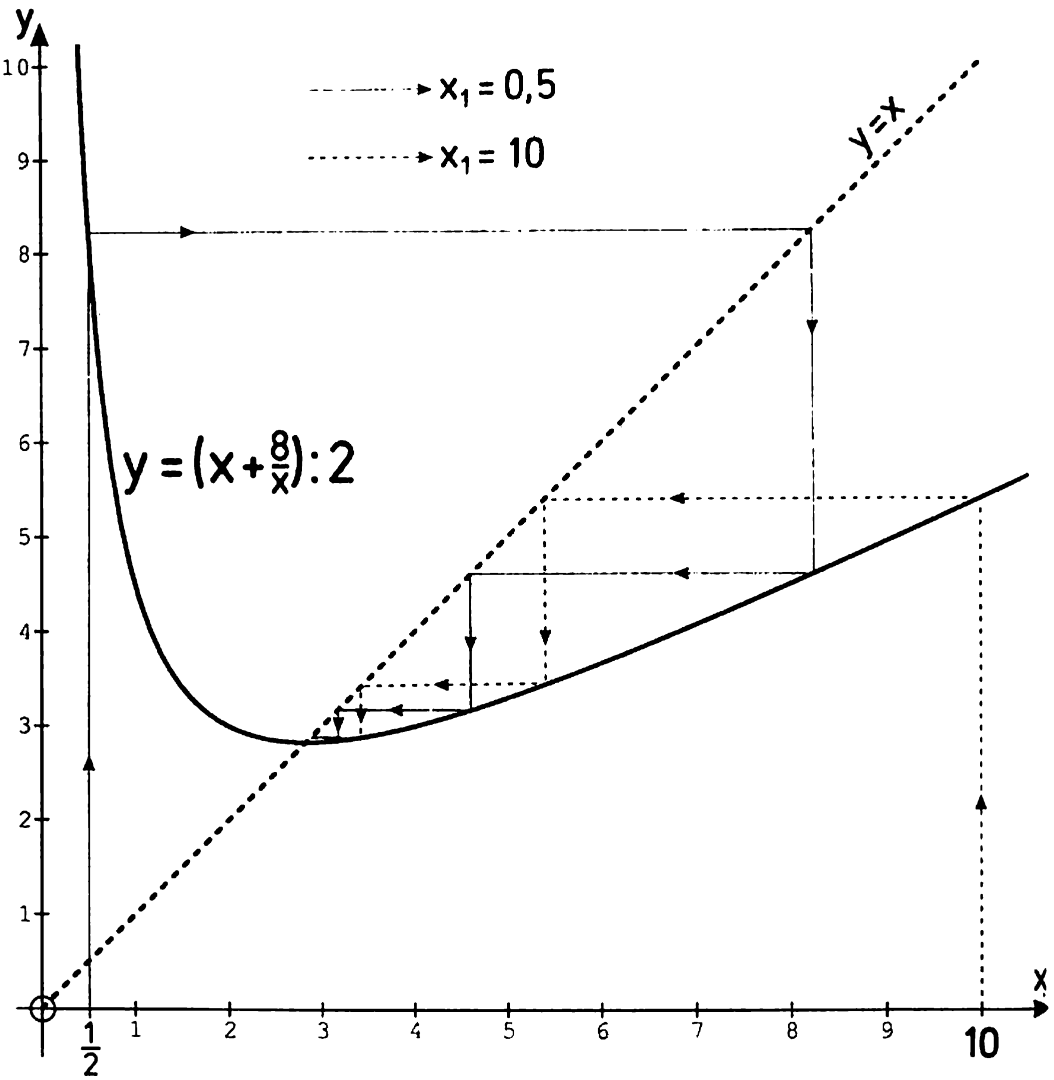
Anmerkung: Man kombiniert hierbei das Zehnteilungs- mit dem Halbierungsverfahren. Zuerst zerlegt man die 10 Teilintervalle in 2 Fünfergruppen, dann die zutreffende Fünfergruppe in eine Zweier- und eine Dreiergruppe, usw. Häufig wird man mit weniger als 4 Schritten zum Ziel kommen, insbesondere wenn man die Abweichungen der Quadrate vom Sollwert miteinander vergleicht und die Lage des Wurzelwerts abschätzt.

44/2. Man berechnet das Quadrat für die Intervallmitte:
$4{,}66905^2 = 21{,}800027 > 21{,}8$.
Also ist $\sqrt{21{,}8} < 4{,}66905$ und damit $\sqrt{21{,}8} \approx 4{,}6690$.

44/3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a)	3	3,6666666	3,6060606	3,6055513	3,6055512
b)	4	3,625	3,6056034	3,6055512	3,6055512
c)	2	2,58	2,5148062	2,5139611	2,5139610
d)	2,5	2,514	2,5139610	2,5139610	2,5139610
e)	60	63,225	63,142749	63,142695	63,142695
f)	1	0,975	0,9746794	0,9746794	0,9746794

44/4.



45/5. $y = x$ und $y = (x + \frac{a}{x}):2 \quad \Rightarrow \quad x = (x + \frac{a}{x}):2 \;\| \cdot 2x$

$$2x^2 = x^2 + a, \text{ also } x^2 = a$$

Wegen $x > 0$ ist $x = \sqrt{a}$ die einzige Lösung; also $S(\sqrt{a} \mid \sqrt{a}\,)$.

45/6. Behauptung: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$; $a, b \in \mathbb{R}^+$

Beweis: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \;\| \cdot 2$

$2\sqrt{ab} \leq a + b \;\|\; ^2$ (Äquivalenzumformung, da beide Seiten positiv sind!)

$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \;\| - 4ab$

$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$

$0 \leq (a - b)^2$

Da nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden und die letzte Gleichung wahr ist, ist auch die Behauptung wahr.

45/7. a) Geometrisches Mittel $= \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$ (für $n \in \mathbb{N}$)

x_{n+1} ist das arithmetische Mittel von x_n und $\frac{a}{x_n}$.

Nach **6** gilt daher $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ (für $n \in \mathbb{N}$).

b) $x_{n+1} - x_n = \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right):2 - x_n = \frac{x_n^2 + a - 2x_n^2}{2x_n}$, also $x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}$.

Nach **a** gilt für $n \geq 2$: $\sqrt{a} \leq x_n \Leftrightarrow a \leq x_n^2 \Leftrightarrow a - x_n^2 \leq 0$.

Wegen $x_n > 0$ ist damit auch $\frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0$, das heißt $x_{n+1} - x_n \leq 0$.

Also gilt $x_{n+1} \leq x_n$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ beziehungsweise $x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq \ldots$

c) Arithmetisches Mittel $= \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = x_{n+1}$ (nach (I))

harmonisches Mittel $= \frac{2x_n \cdot \frac{a}{x_n}}{x_n + \frac{a}{x_n}} = \frac{2a}{2x_{n+1}} = \frac{a}{x_{n+1}}$

46/8. a) $\sqrt{8170} = 90{,}38\ldots$ b) $\sqrt{14{,}36} = 3{,}789\ldots$

c) $\sqrt{0{,}088855} = 0{,}2980\ldots$ d) $\sqrt{0{,}000001234} = 0{,}001110\ldots$

46/9. a) $\sqrt{5} = 2,\ldots$ b) $\sqrt{37{,}64} = 6,\ldots$ c) $\sqrt{428} = 2\_,\ldots$

d) $\sqrt{3650809} = 1\_\_\_,\ldots$ e) $\sqrt{82145} = 2\_\_,\ldots$ f) $\sqrt{8214{,}5} = 9\_,\ldots$

g) $\sqrt{821{,}45} = 2\_,\ldots$ h) $\sqrt{82{,}145} = 9,\ldots$

46/10. a) 1) $1 > \sqrt{a} \geq 0{,}1$ 2) $0{,}1 > \sqrt{a} \geq 0{,}01$ 3) $\frac{1}{10^2} > \sqrt{a} \geq \frac{1}{10^3}$

b) 1) $\sqrt{0{,}5} = 0{,}7\ldots$ 2) $\sqrt{0{,}025} = 0{,}1\ldots$ 3) $\sqrt{0{,}004} = 0{,}06\ldots$

46/11. a) $\sqrt{0{,}7\ldots} = 0{,}8\ldots$ b) $\sqrt{0{,}006\ldots} = \begin{cases} 0{,}07\ldots, & \text{falls die auf 6 folgende Ziffer} < 4 \\ 0{,}08\ldots, & \text{falls die auf 6 folgende Ziffer} \geq 4 \end{cases}$

c) $\sqrt{0{,}12\ldots} = 0{,}3\ldots$ d) $\sqrt{0{,}0147\ldots} = 0{,}121\ldots$

46/12. a) $\sqrt{1000} = 31,\ldots$ b) $\sqrt{80656} = 284$ c) $\sqrt{338725} = 582,\ldots$

d) $\sqrt{3387{,}25} = 58,\ldots$

46/13. a) $\sqrt{19} \approx 4{,}36$ b) $\sqrt{187{,}5} \approx 13{,}69$ c) $\sqrt{17{,}7241} = 4{,}21$

d) $\sqrt{0{,}6196} \approx 0{,}79$

46/14. a) 1,75 b) $\frac{589}{340} = 1{,}73235\ldots$ c) 2,45

d) 20,875 e) $20\frac{6}{7} = 20{,}85714\ldots$ f) 31,625

47/15. $\sqrt{a} = \sqrt{x_1^2 + (a - x_1^2)} \approx x_1 + \dfrac{a - x_1^2}{2x_1}$, also $x_2 = x_1 + \dfrac{a - x_1^2}{2x_1}$ oder $x_2 = \dfrac{x_1^2 + a}{2x_1}$

(I) liefert $x_2' = (x_1 + \frac{a}{x_1}) : 2$

$x_2' = \dfrac{x_1^2 + a}{x_1} : 2 \quad \Rightarrow \quad x_2' = \dfrac{x_1^2 + a}{2x_1}$. Ergebnis: $x_2 = x_2'$.

47/16. a) $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} \approx 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{26}{15}$

b) 1) $\sqrt{15} \approx \frac{244}{63}$ (= 3,87301...) 2) $\sqrt{63} \approx \frac{2024}{255}$ (=7,93725...)

3) $\sqrt{120} \approx \frac{5291}{483}$ (=10,95445...)

c) HERON: $\sqrt{3} \approx 1{,}7\overline{3}$ ARCHIMEDES: $1{,}732026\ldots < \sqrt{3} < 1{,}732051\ldots$
Der Vergleich mit $\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$ zeigt, dass der von HERON angegebene Wert zu groß ist. Durch die viel genauere Abschätzung von ARCHIMEDES sind bereits die ersten 5 Stellen der Dezimalentwicklung festgelegt.

47/17. a) $\sqrt{0;38,24} = \sqrt{\frac{2304}{3600}} = \frac{48}{60} = 0;48$, also richtig.

b) 1) $\sqrt{3,45;}$ $(= \sqrt{225} = 15) = 15;$

2) $\sqrt{1;33,45}$ $(= \sqrt{\frac{5625}{3600}} = \frac{75}{60}) = 1;15$

3) $\sqrt{11;13,21}$ $(= \sqrt{\frac{40401}{3600}} = \frac{201}{60}) = 3;21$

47/18. a) Länge der Diagonale $= \sqrt{68}$ Ellen = 8,246... Ellen.

b) 0;41,15 GAR = $\frac{2475}{3600} \cdot 12$ Ellen = 8,25 Ellen.
$8{,}25 > \sqrt{68}$; also ist 0;41,15 GAR ein etwas zu großer Näherungswert.
Nach **14** gilt $\sqrt{68} = \sqrt{64 + 4} \approx 8 + \frac{4}{2 \cdot 8} = 8{,}25$.

c) 0;42,13,20 GAR= $8\frac{4}{9}$ Ellen ist ein wesentlich schlechterer Näherungswert.

48/19. **a)** **1)** $1;25 = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$. Die ersten 3 Ziffern stimmen.

2) $\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} \approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Mit $p_2 = \frac{3}{2}$, also $p_2^2 = \frac{9}{4}$, erhält man dann

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} \approx \frac{3}{2} - \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{17}{12}.$$

b) **1)** $1;24,51,10 = 1\frac{89470}{216000} = 1{,}4142129\ldots$; die ersten 6 Ziffern stimmen.

2) 1. Weg: Mit $p_3 = \frac{17}{12}$ erhält man

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{289}{144} - \frac{1}{144}} \approx \frac{17}{12} - \frac{1 \cdot 12}{144 \cdot 34} = \frac{577}{408} = 1\frac{169}{408}.$$

2. Weg: Mit $x_1 = 1;25 = \frac{17}{12}$ erhält man aus (I)

$$x_2 = \left(\frac{17}{12} + \frac{2 \cdot 12}{17}\right):2 = \frac{577}{408} = 1\frac{169}{408}.$$

$$\frac{169}{408} = \frac{\frac{169}{408} \cdot 60}{60} = \frac{24 + \frac{348}{408}}{60} = \frac{24}{60} + \frac{\frac{29}{34} \cdot 60}{60^2} = \frac{24}{60} + \frac{51 + \frac{6}{34}}{60^2} =$$

$$= \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{\frac{3}{17} \cdot 60}{60^3} = \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10 + \frac{10}{17} \cdot 60}{60^3};$$

Somit gilt: $1\frac{169}{408} = 1;24,51,10,\ldots$.

3) $d = 30 \cdot (1;24,51,10) = 30 + \frac{24}{2} + \frac{51}{2 \cdot 60} + \frac{10}{2 \cdot 3600}$

$= 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} = 42;25,35$

(Das ist die untere der in Abb. 49.1 in Keilschrift angegebenen Zahlen!)

49/20. **a)** Bei 20°C ist $c = 343{,}5\ ^{m}/_{s}$; bei 40°C ist $c = 355{,}0\ ^{m}/_{s}$.

b) bei −10,8°C

49/21. **a)** $\nu_0 = 100{,}95\ldots$ Hz ≈ 101 Hz (Anmerkung: $\rho = 7{,}85 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$; $q = 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2}$)
18 Obertöne liegen unter 2 kHz.

b) $F = (\nu_0 \cdot 2l)^2 \cdot \rho \cdot q$; $F \approx 139$ N

c) $l = \frac{1}{2\nu_0} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho q}}$; $l \approx 69{,}6$ cm

Aufgaben zu 2.3

54/1. **a)** 4 **b)** 6 **c)** 30 **d)** 100 **e)** 10^5
f) 0,01 **g)** 12 **h)** 25 **i)** 14 **k)** 0,2
l) 1,5 **m)** 0,77 **n)** 1 **o)** 2 **p)** 13

54/2. **a)** 6 **b)** 20 **c)** 30 **d)** 3 **e)** 2,1
f) 0,024 **g)** 1 **h)** 18

54/3. **a)** 44 **b)** 1750 **c)** 18 **d)** 12 **e)** 245,7
f) 4400 **g)** 1500 **h)** 210 **i)** 7128

54/4. **a)** $4\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** $6\sqrt{5}$ **d)** $4\sqrt{11}$ **e)** $6\sqrt{6}$
f) $25\sqrt{2}$ **g)** $30\sqrt{10}$ **h)** $0{,}5\sqrt{10}$ **i)** $4{,}5\sqrt{2}$ **k)** $0{,}025\sqrt{10}$

54/5. **a)** 2 **b)** 4 **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **e)** 18
f) 0,35 **g)** $\frac{1}{15}$

54/6. **a)** $\frac{9}{20}$ (= 0,45) **b)** $\frac{3}{5}$ (= 0,6) **c)** $\frac{7}{16}$ (= 0,4375) **d)** $\frac{4}{3}$

54/7. **a)** $b^2\sqrt{a}$ **b)** $|ab|$ **c)** $5|m|^5 n\sqrt{n}$ **d)** $3x^4y^2\sqrt{3}$
e) $\frac{4}{5|a|}\sqrt{2b}$ **f)** $\frac{5m^2}{n^2}\sqrt{5m}$ **g)** $\frac{11}{80}|v|w^2\sqrt{u/3}$

54/8. **a)** 2 **b)** 50 **c)** $21\sqrt{2} - 8$ **d)** 27

55/9. **a)** 1 **b)** $60\sqrt{30} - 330$ **c)** $8 + 3\sqrt{21}$ **d)** $-47\sqrt{5}$

55/10. **a)** $4\sqrt{10}$ **b)** $-16 + 16\sqrt{21}$

55/11. a) 128 b) $38 - 12\sqrt{10}$ c) 91 d) $240\sqrt{6} - 160\sqrt{14}$

55/12. a) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $-\frac{2}{19}\sqrt{19}$ d) $\frac{7-\sqrt{7}}{7}$
e) $\frac{2}{33}\sqrt{11}$ f) $\sqrt{1{,}2}+2$ g) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$ h) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

55/13. a) $\sqrt{10} - 3$ b) $\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{3}}{5}$ c) $7-\sqrt{42}$ d) $3 - 2\sqrt{2}$
e) $\frac{5\sqrt{3}+13\sqrt{5}}{55}$ f) $\frac{-7+21\sqrt{2}+12\sqrt{17}-2\sqrt{14}}{119}$

55/14. a) $\frac{\sqrt{b}}{|a|b}$ b) $\frac{\sqrt{2bc}}{2|a|bc}$ c) $\frac{a\sqrt{6bc}}{3b^2c^2}$
d) $\frac{a\sqrt{b}}{|a|} = \begin{cases} \sqrt{b} \text{ für } a > 0 \\ -\sqrt{b} \text{ für } a < 0 \end{cases}$ e) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ f) $\frac{\sqrt{pq}}{pq}$

55/15. a) 4 b) 32 c) $32\sqrt{2}$ d) $128\sqrt{2}$ e) 256
f) $3\sqrt{3}$ g) 11 h) $49\sqrt{7}$ i) 81 k) $625\sqrt{5}$

56/16. a) 8 b) $9\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{5}$ d) 8 e) $6\sqrt{6}$
f) 121 g) $81\sqrt{3}$ h) 32 i) $64\sqrt{2}$ k) 1024

56/17. a) 64 b) 50 c) $8232 + 1617\sqrt{7}$ d) $\frac{1}{18}$

56/18. a) $a\sqrt{a}$ b) a^2 c) $a^3\sqrt{a}$ d) a^n e) $a^m\sqrt{a}$
f) $|a|$ g) $a\sqrt{a}$ h) a^2 i) $a^2\sqrt{a}$ k) $|a|^3$

56/19. a) $|a+b|$ b) $|m-3|\cdot\sqrt{2}$ c) z^2+1
d) $|3z^2-1|$ e) $|11x+2y|\sqrt{0{,}1}$ f) $1+|x|$

56/20. **a)** $\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt{175}$ **c)** $-\sqrt{12-4x}$ **d)** $\sqrt{80a}$

e) $\sqrt{x^2y}$ für $x \geq 0$; $-\sqrt{x^2y}$ für $x < 0$ **f)** $\sqrt{a^4x}$

g) $\sqrt{4b^6y}$ für $b \geq 0$; $-\sqrt{4b^6y}$ für $b < 0$

h) $\sqrt{(a-b)^2(a+b)}$ für $a \geq b$; $-\sqrt{(a-b)^2(a+b)}$ für $a < b$

56/21. **a)** $>$ **b)** $>$ **c)** $>$ **d)** $=$ **e)** $>$ **f)** $<$

56/22. **a)** $>$ **b)** $<$ **c)** $>$ **d)** $<$ **e)** $>$ **f)** $<$

56/23. **a)** $<$ **b)** $<$ **c)** $>$ **d)** $>$

57/24. **a)** Aus $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq 0$ und $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$

sowie $\sqrt{a+b} \geq 0$ und $\sqrt{a+b}^{\,2} = a+b$

folgt $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = \sqrt{a+b}^{\,2} + 2\sqrt{ab}$ (*) und $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq \sqrt{a+b}^{\,2}$

und $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$.(**)

Nach (*) gilt in (**) das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $ab = 0$, also für $a = 0$ oder $b = 0$.

b) $0 < a < b \Rightarrow \sqrt{b-a} > 0$ und $\sqrt{b}-\sqrt{a} > 0$.
Daher gilt nach dem Monotoniegesetz des Radizierens:

$$\begin{aligned} \sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a} &\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 < \sqrt{b-a}^{\,2} \\ &\Leftrightarrow b - 2\sqrt{ab} + a < b - a \\ &\Leftrightarrow 2a < 2\sqrt{ab} \\ &\Leftrightarrow a^2 < ab \\ &\Leftrightarrow a < b \end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung nach Voraussetzung richtig ist, gilt auch die dazu äquivalente Behauptung.

57/25. **a)** $x^2 = y^2 = 21 - 12\sqrt{3}$; aber $x < 0$, $y > 0$, also $x \neq y$.

b) $x^2 = y^2 = 14 - 8\sqrt{3}$; aber $x > 0$, $y < 0$, also $x \neq y$.

57/26. **a)** LS > 0 und $(\text{LS})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$; RS > 0 und $(\text{RS})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$; also LS = RS.

b) LS > 0 und $(\text{LS})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$; RS > 0 und $(\text{RS})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$; also LS = RS.

c) LS > 0 und $(\text{LS})^2 = 9 + 2\sqrt{14}$; RS > 0 und $(\text{RS})^2 = 9 + 2\sqrt{14}$; also LS=RS.

d) LS > 0 und $(\text{LS})^2 = \sqrt{8} + \sqrt{2} + 4$;
RS > 0 und $(\text{RS})^2 = \sqrt{8} + \sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{8} + \sqrt{2} + 4$; also LS = RS.

57/27. a) $\sqrt{a}+\sqrt{b} \ge 0$ und $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

$\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} \ge 0$ und $\sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}^{\,2} = a + b + 2\sqrt{ab}$

also $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$.

Für $0 \le a \le b$ gilt:

$\sqrt{b}-\sqrt{a} \ge 0$ und $(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 = b - 2\sqrt{ab} + a$

$\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} \ge 0$ und $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}^{\,2} = a + b - 2\sqrt{ab}$

also $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}$.

b) Es gilt $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ (Vergleiche Aufgabe **6** von **2.2**)

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \ge 0.$

c) 1) $\sqrt{8}+\sqrt{18} = \sqrt{8 + 18 + 2\sqrt{8\cdot 18}} = \sqrt{26 + 2\cdot 12} = \sqrt{50}$.

$\sqrt{18}-\sqrt{8} = \sqrt{18 + 8 - 2\sqrt{18\cdot 8}} = \sqrt{26 - 2\cdot 12} = \sqrt{2}$.

2) $(\sqrt{8}+\sqrt{18})^2 = 8 + 2\sqrt{8\cdot 18} + 18 = 50 \Rightarrow (!)\ \sqrt{8}+\sqrt{18} = \sqrt{50}$.

$(\sqrt{18}-\sqrt{8})^2 = 18 - 2\sqrt{8\cdot 18} + 8 = 2 \Rightarrow (!)\ \sqrt{18}-\sqrt{8} = \sqrt{2}$.

$(!: \sqrt{8}+\sqrt{18} > 0;\ \sqrt{18}-\sqrt{8} > 0)$

d) 1) $\underbrace{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}_{b} - \underbrace{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}_{a} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) - 2\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}} = \sqrt{2\sqrt{3}-2}$

2) $(\underbrace{\sqrt{\sqrt{40}+6}}_{b} + \underbrace{\sqrt{\sqrt{40}-6}}_{a})^2 = \sqrt{(\sqrt{40}+6) + (\sqrt{40}-6) + 2\sqrt{40-36}}^{\,2} = 2\sqrt{40} + 4$

3) $(\sqrt{12+\sqrt{6}} + \sqrt{12-\sqrt{6}})^2 = \sqrt{(12+\sqrt{6}) + (12-\sqrt{6}) + 2\sqrt{144-6}}^{\,2} =$

$= 24 + 2\sqrt{138}$

57/28. a) $(RS)^2 = 2 + 3 + 5 + 2(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}) = 10 + \sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}$;

also $(RS)^2 = (LS)^2$ und, wegen $LS > 0$ und $RS > 0$, $RS = LS$.

b) $(RS)^2 = 6 + 5 + 3 + 2 + 2(\sqrt{30}+\sqrt{18}+\sqrt{15}+\sqrt{12}+\sqrt{10}+\sqrt{6})$

$= 16 + \sqrt{120}+\sqrt{72}+\sqrt{60}+\sqrt{48}+\sqrt{40}+\sqrt{24}$;

also $(RS)^2 = (LS)^2$ und, wegen $LS > 0$ und $RS > 0$, $RS = LS$.

Aufgaben zu 2.5.1

66/1. **a)** $\{2\}$ **b)** $\{-1\}$ **c)** $\{-1\}$ **d)** $\{\ \}$ **e)** $\{-2\}$ **f)** $\{\ \}$

66/2. **a)** $\{0\}$ **b)** $\{\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\}$ **c)** $\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$ **d)** $\{\ \}$
e) $\{\frac{3}{7}\}$ **f)** $\{-\frac{1}{4}\sqrt{21}\}$

66/3. **a)** $\{0\}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $\{0;-\frac{5}{4}\}$ **d)** $\{2{,}5\}$
e) $\{\frac{5}{16}\}$ **f)** $\{0\}$

66/4. **a)** $\{2;-2\}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $\{2;-2\}$ **d)** $\{\frac{1}{2}\}$
e) $\{\ \}$ **f)** $\{\ \}$

66/5. **a)** $\{2\}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $\{-2\}$ **d)** $\{3;-3\}$
e) $\{\ \}$ **f)** $\{0;-\frac{1}{2}\}$

67/6. **a)** $\{5\}$ **b)** $\{3\}$ **c)** $\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\}$ **d)** $\{\frac{119}{64}\}$

67/7.

Ausgangsgleichung	Hilfsgleichung nach dem 1. Quadrieren	Hilfsgleichung nach dem 2. Quadrieren	L
$\sqrt{x^2+3x} = 1 + \sqrt{x^2+x}$	$2x - 1 = 2\sqrt{x^2+x}$	$8x = 1$	$\{\ \}$
$\sqrt{x^2+3x} = 1 - \sqrt{x^2+x}$	$2x - 1 = -2\sqrt{x^2+x}$	$8x = 1$	$\{\frac{1}{8}\}$
$\sqrt{x^2+3x} = -1 + \sqrt{x^2+x}$	$2x - 1 = -2\sqrt{x^2+x}$	$8x = 1$	$\{\ \}$

67/8. **a)** $\{8\}$ **b)** $\{12\}$ **c)** $\{\ \}$ **d)** $\{\sqrt{8};-\sqrt{8}\}$
e) $\{\ \}$ **f)** $\{\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$

67/9. **a)** $\{\ \}$ **b)** $\{1\}$ **c)** $\{\frac{25}{14};-\frac{25}{14}\}$ **d)** $\{\ \}$

67/10. **a)** $\{-2\}$ **b)** $\{-\frac{1}{4}\}$

67/11. Census = x; sin wurcz = $\sqrt{x}$
Gleichung: $\sqrt{x-\sqrt{x}}+\sqrt{x} = 2$; $L = \{\frac{16}{9}\}$

Umschrift von Abbildung 68.1

(133v) Machmet in dem puech algebra vnd almalcobula hat gepruchet dise wort: Census, radix, numerus. Census ist ain yede zal, die in sich selb multiplicirt wirt, dz ist numerus quadratus. Radix ist die wurcz der zal oder dez zins. Numerus ist ain zal fur sich selb gemercket, nit alz sie ain zins oder ain wurcz ist. Vß den dingen merckt er 6 ding: dz erst, wann der census sich gelichet den wurczen; daz ander, so der census sich gelichet der zal; daz drit, so sich dye zal gelichet den wurczen; daz 4, so sich der census vnd dye wurczen gelichen der zal, als ob man spreche: ain census vnd 10 wurcz gelichent sich 39; das funft ist, so sich der census vnd dy zal gelichent den wurczen; daz sechst, so sich dy wurczen vnd dye zal gelichen dem censuj.

Dar vmb sprech ainer: gib mir ain censum vnd zuech dar von sin wurcz, vnd von dem, daz vber belyb an dem censu, zuech och vß dye wurcz; dye czwo wurcz tue (134r) zesamen, daz 2 zal dar auß werden. So aber daz nit in der sechs regel ainer stat, so bring es in ain regel, also: Es sallen dye czwo wurcz 2 numero gelyh gesin, so kompt es in die dritten regel. Dar vmb zuch ab von den 2 numero die wurczen dez census, so belyben 2 minder der wurczen deß zins; das selb belybend ist gelyh der wurczen deß, das ain censu ůber belybt, sein wurcz dar von gezogen wurt; daz du aber habest dez gelychnuß daz vber belybt, so multiplicir die 2 dragmas, id est numero, minder ainr wurczen in sich selb, so komen 4 dragme vnd ain zins minder 4 wurczen; daz wurt gelijch dem, daz vber belybt an dem censu, wann sein wurcz dar von wurt gezogen. Nu zeuch dar von dye gemindert wurcz, so belybt: 1 census vnd 4 dragme gelich ain census vnd 3 wurcz. Nu tu baidenthalb den zins dar von, so beleybt dannocht daz vbrig gelijch: daz ist, 4 dragme sind ge (134v) lijch 3 wurczen. So muß dein wurcz $1\frac{1}{3}$ sein, wann 3 mal $1\frac{1}{3}$ macht 4; multiplicir $1\frac{1}{3}$ in sich selb, so kompt $\frac{16}{9}$, daz ist der census, vnd sein wurcz ist $1\frac{1}{3}$; vnd wann tue $1\frac{1}{3}$ tust von $\frac{16}{9}$, so belyb $\frac{4}{9}$; die wurcz von $\frac{4}{9}$ ist $\frac{2}{3}$, dye $\frac{2}{3}$ zw der wurczen $\frac{16}{9}$, daz ist $1\frac{1}{3}$, macht 2 gancz etc. 1461. Erasmi martyris.

Aufgaben zu 2.5.2

70/1. **a)** $x = 2a + 1$ für $a \geq -1$; $L = \{\ \}$ für $a < -1$.

b) $x = a^2 - 3a + 1$ für $a \geq 1$; $L = \{\ \}$ für $a < 1$.

c) $x = 2a$ für $a \geq 0$; $L = \{\ \}$ für $a < 0$.

d) $x = \frac{1}{2}(a^2 - a)$ für $a(a+1) \geq 0$, das heißt, für $a \geq 0$ oder $a \leq -1$; sonst $L = \{\ \}$.

e) $L = \{0\,;1\}$ für $a \geq 0$; $L = \{-1\}$ für $-1 \leq a < 0$; $L = \{\ \}$ für $a < -1$.

f) $x = -a$ für $a \neq 0$; $L = \mathbb{R}_0^+$ für $a = 0$.

70/2. **a)** $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = 2a \Rightarrow 2a^2 - a = 2a\sqrt{x-a}$

$\boxed{a = 0}$ $0 = 0\sqrt{x}$; dazu $L = \mathbb{R}_0^+$

Probe: $LS = 2\sqrt{x}$. $LS = RS$ für $x = 0$; sonst $LS \neq RS$.

$\boxed{a \neq 0}$ $2a - 1 = 2\sqrt{x-a} \Rightarrow x = a^2 + \frac{1}{4}$

Probe: $LS = \left|a + \frac{1}{2}\right| + \left|a - \frac{1}{2}\right|$

$LS = RS$ für $a \geq \frac{1}{2}$; sonst $LS \neq RS$.

Ergebnis: $x = 0$ für $a = 0$; $x = a^2 + \frac{1}{4}$ für $a \geq \frac{1}{2}$; sonst $L = \{\ \}$.

b) $L = \mathbb{R}_0^+$ für $a = 0$; $x = a^2 + \frac{1}{4}$ für $0 < |a| \leq \frac{1}{2}$; sonst $L = \{\ \}$.

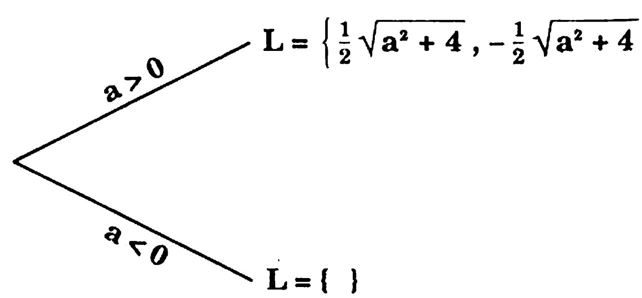
70/3. Hier muss $a \neq 0$ gelten.

a) $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}$,

$x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}$

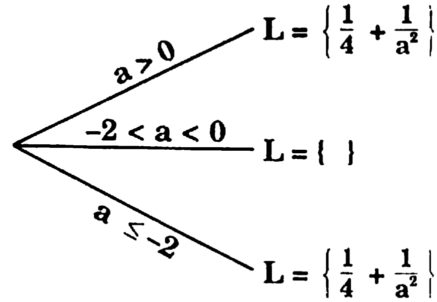
für $a > 0$;

$L = \{\ \}$ für $a < 0$.



b) $x = \frac{1}{4} + \frac{1}{a^2}$ für $a > 0$ oder $a \leq -2$;

$L = \{\ \}$ für $-2 < a < 0$.



70/4. a) $\sqrt{ax^3+3} = \sqrt{3+a^3x} \;\Rightarrow\; ax(x^2-a^2)=0$

$\boxed{a=0}$ $\quad 0 \cdot x(x-0)=0$; $\quad$ dazu $L=\mathbb{R}$ (Probe!)

$\boxed{a \neq 0}$ $\quad x_1=0$; $x_2=a$; $x_3=-a$;

Probe mit x_1: $LS = RS = \sqrt{3}$; $\qquad 0 \in L$ (für jedes $a \in \mathbb{R}$)

Probe mit x_2: $LS = RS = \sqrt{a^4+3}$; $\quad a \in L$ (für jedes $a \in \mathbb{R}$)

Probe mit x_3: $LS = RS = \sqrt{-a^4+3}$; $-a \in L$, falls $3-a^4 \geq 0$;

$a^4 \leq 3 \Leftrightarrow a^2 \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow |a| \leq \sqrt{\sqrt{3}}$ ($\approx 1{,}316$).

b) $\sqrt{x^2+a} - \sqrt{ax^2-2} \;\Rightarrow\; x^2(a-1)=a+2$

$\boxed{a=1}$ $\quad x^2 \cdot 0 = 3$; $L=\{\ \}$

$\boxed{a \neq 1}$ $\quad x^2 = \frac{a+2}{a-1}$; $\frac{a+2}{a-1} \geq 0$ für $a>1$ oder $a \leq -2$.

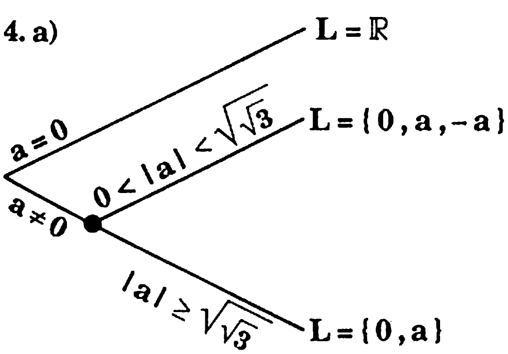
$x_1 = \sqrt{\frac{a+2}{a-1}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}$ für $a>1$ oder $a \leq -2$.

Probe mit $|x| = \sqrt{\frac{a+2}{a-1}}$:

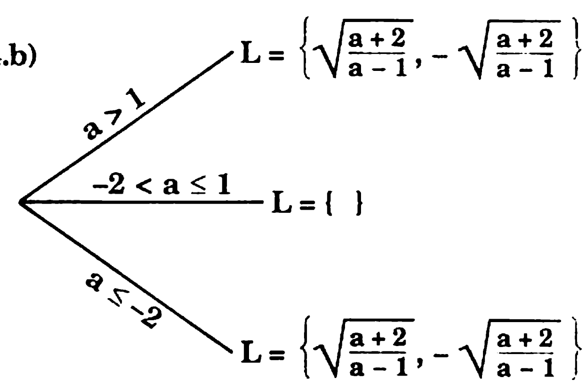
$LS = \sqrt{\frac{a+2}{a-1}+a} - \sqrt{a\frac{a+2}{a-1}-2} = \sqrt{\frac{a^2+2}{a-1}} - \sqrt{\frac{a^2+2}{a-1}} = 0 = RS.$

Somit $L = \left\{\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}, -\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}\right\}$ für $a>1$ oder $a \leq -2$.

4. a)



4.b)



70/5. a) $\sqrt{x+2a^2} = a + \sqrt{x+a^2} \;\Rightarrow\; 2a\sqrt{x+a^2}=0$

$\boxed{a=0}$ $\quad \Rightarrow L = \mathbb{R}_0^+$

$\boxed{a \neq 0}$ $\quad 2a\sqrt{x+a^2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+a^2}=0 \Rightarrow x=-a^2$

Probe: $LS = \sqrt{a^2} = |a|$; $RS = a + \sqrt{0} = a$.

$LS = RS$, falls $a>0$; also $x=-a^2$ für $a>0$

und $L=\{\ \}$ für $a<0$.

Ergebnis: $L=\mathbb{R}_0^+$ für $a=0$; $L=\{-a^2\}$ für $a>0$; $L=\{\ \}$ für $a<0$.

b) $\sqrt{ax^2+x} = \sqrt{ax^2-x} + 1 \Rightarrow x - \frac{1}{2} = \sqrt{ax^2-x}$ (*)

Aus der Hilfsgleichung (*) erkennt man bereits, dass jede Lösung die Bedingung $x \geq \frac{1}{2}$ erfüllen muss.

Aus $x - \frac{1}{2} = \sqrt{ax^2-x}$ folgt $x^2(a-1) = \frac{1}{4}$ (**)

$\boxed{a=1}$ (**) $\Rightarrow x^2 \cdot 0 = \frac{1}{4}$, also $L = \{\ \}$

$\boxed{a<1}$ (**) $\Rightarrow x^2 < 0$, also $L = \{\ \}$

$\boxed{a>1}$ (**) $\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4(a-1)} > 0.$

$$x = \pm\frac{1}{2\sqrt{a-1}}$$

Nach obiger Folgerung aus (*) kommt lediglich $x = \frac{1}{2\sqrt{a-1}}$ als Lösung in Betracht.

Probe: $LS = \sqrt{\frac{a}{4(a-1)} + \frac{1}{2\sqrt{a-1}}} = \sqrt{\frac{a-1}{4(a-1)} + \frac{1}{2\sqrt{a-1}} + \frac{1}{4(a-1)}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{a-1}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{a-1}}\right)^2} = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a-1}}\right| = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right).$$

Für RS ergibt sich ganz entsprechend:

$RS = 1 + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a-1}}\right| = 1 + \frac{1}{2}\left|1 - \frac{1}{\sqrt{a-1}}\right|$, also

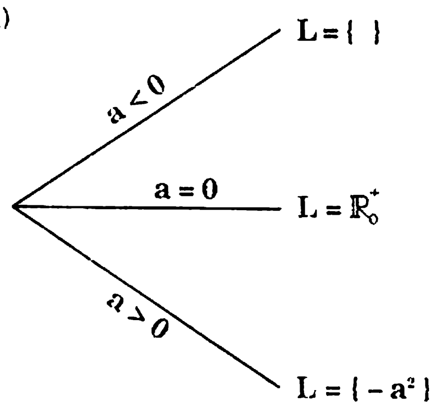
$$RS = \begin{cases} 1 & \text{für } a = 2 \\ 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a-1}} & \text{für } a > 2 \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a-1}} & \text{für } a < 2 \end{cases}$$

Somit gilt (im Fall $a > 1$) $LS = RS$ nur für $a \leq 2$,

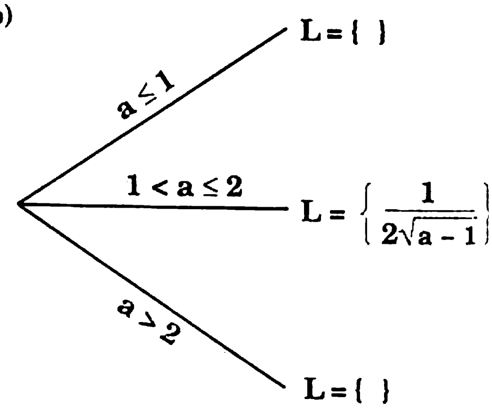
d.h. $L = \left\{\frac{1}{2\sqrt{a-1}}\right\}$ für $1 < a \leq 2$, $L = \{\ \}$ für $a > 2$.

Ergebnis: $L = \left\{\frac{1}{2\sqrt{a-1}}\right\}$ für $1 < a \leq 2$; sonst $L = \{\ \}$.

5. a)



5. b)



Aufgaben zu 3.1

74/1.

	quadratisch	Form	lineares Glied	Konstante
a)	ja	$x^2 + x - 3 = 0$	x	-3
b)	ja	$2x^2 - 1 = 0$	0	-1
c)	nein			
d)	ja	$x^2 - 2x + 4 = 0$	$-2x$	4
e)	ja	$0{,}25x^2 + 4x + 16 = 0$	$4x$	16
f)	nein			

74/2.

		Form	lineares Glied	Konstante
a)	quadratisch für x:	$yx^2 + 1 = 0$	0	1
b)	quadratisch für y:	$y^2(x-1) - 3x = 0$	0	$-3x$
c)	quadratisch für x:	$3x^2 - xy - y^2 = 0$	$-xy$	$-y^2$
	quadratisch für y:		$-xy$	$3x^2$
d)	quadratisch für x:	$x^2 - xy^2 + y^3 - 1 = 0$	$-xy^2$	$y^3 - 1$
e)	quadratisch für x:	$-abx^2 + a^3b^2 + 2 = 0$	0	$a^3b^2 + 2$
	quadratisch für b:	$a^3b^2 - ax^2b + 2 = 0$	$-ax^2b$	2
f)	quadratisch für b:	$b^2 - ab = 0$	$-ab$	0

74/3. **a)** $x^2 - 2x + 5 = 0$ **b)** $x^2 + 3x - 1 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{15}{14}x - \frac{27}{14} = 0$

d) $x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{2}{25} = 0$ **e)** $x^2 - 1 = 0$ **f)** $x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0$

Aufgaben zu 3.2.1

76/1.	**a)** ± 13	**b)** ± 32	**c)** $\pm 2{,}5$
	d) $\pm 0{,}18$	**e)** ± 5	**f)** ± 4
	g) $\pm \frac{35}{12}$	**h)** $\pm \frac{10}{3}$	**i)** $\pm \frac{2}{15}$

76/2.	**a)** ± 2	**b)** ± 4	**c)** ± 3
	d) $\pm \frac{2}{3}$	**e)** $\pm \frac{2}{3}$	**f)** $\pm \frac{7}{5}$
	g) $\pm \frac{7}{6}$	**h)** $\pm \frac{11}{6}$	**i)** ± 3

76/3.	**a)**	$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -\frac{1}{4}\}$;	$L = \{0\}$
	b)	$D = \mathbb{R} \setminus \{-5; -\frac{10}{3}\}$;	$L = \{-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}\}$
	c)	$D = \mathbb{R} \setminus \{-7; \frac{5}{2}\}$;	$L = \{\ \}$
	d)	$D = \mathbb{R} \setminus \{-7; -\frac{5}{2}\}$;	$L = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$
	e)	$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;	$L = \{1\}$
	f)	$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$;	$L = \{-\frac{3}{2}\}$
	g)	$D = \mathbb{R} \setminus \{-4; \frac{2}{9}\}$;	$L = \{\ \}$
	h)	$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}; \frac{9}{5}\}$;	$L = \{-\frac{1}{7}\sqrt{42}; \frac{1}{7}\sqrt{42}\}$

77/4. **a)** $\pm\sqrt{3}$ **b)** $\{\ \}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\sqrt{6}; -\frac{1}{17}\sqrt{119}; \frac{1}{17}\sqrt{119}; \frac{1}{3}\sqrt{6}\}$; $L = \{-\frac{1}{4}\sqrt{2}; \frac{1}{4}\sqrt{2}\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$; $L = \{-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\}$

77/4. e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$; $L = \{-2; 2\}$

f) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$; $L = \{-2; 2\}$

77/5. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$; $L = \{-1; 1\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{5}; 1\}$; $L = \{-\frac{1}{5}\sqrt{15}; \frac{1}{5}\sqrt{15}\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $L = \{-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$; $L = D$

77/6. a) $b = 0$ und $a = 0$: $L = \mathbb{R}$
$b = 0$ und $a \neq 0$: $L = \{0\}$
$b \neq 0$ und $a \leq 0$: $L = \{\ \}$
$b \neq 0$ und $a > 0$: $L = \left\{-\frac{b}{a}\sqrt{a}; \frac{b}{a}\sqrt{a}\right\}$

b) $a \neq 0$: $L = \{-a^2; a^2\}$

c) $a \neq 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b = 0$: $L = \{\ \}$
$ab < 0$: $L = \{\ \}$; $ab > 0$: $L = \{-\sqrt{ab}; \sqrt{ab}\}$

d) $a = b$: $L = \mathbb{R}$
$a \leq -b$: $L = \{\ \}$
$a > -b$: $L = \left\{-\frac{1}{\sqrt{a+b}}; \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right\}$

e) $a = 0$: $L = \{0\}$
$a \neq 0$: $L = \left\{-\frac{3}{5}a\sqrt{5}; \frac{3}{5}a\sqrt{5}\right\}$

f) $a \neq 0$.
$b < 0$: $L = \{\ \}$
$b = 0$: $L = \mathbb{R}$
$b > 0$: $L = \left\{-\frac{a}{b}\sqrt{b}; \frac{a}{b}\sqrt{b}\right\}$

77/7. **a)** $b-a<0$: $L=\{\ \}$
$b=a$: $L=\{0\}$
$b>a$: $L=\{-\sqrt{b-a}\,;\sqrt{b-a}\,\}$

b) $a=0$ und $b=0$: $L=\mathbb{R}$
$a=0$ und $b\neq 0$: $L=\{\ \}$
$a\neq 0$ und $b=0$: $L=\{0\}$
$(a<0$ und $b<0)$ oder $(a>0$ und $b>0)$: $L=\{-\sqrt{b/a}\,;\sqrt{b/a}\}$
$(a<0$ und $b>0)$ oder $(a>0$ und $b<0)$: $L=\{\ \}$

c) $a<0$: $L=\{\ \}$, da die Summe zweier Quadrate stets ≥ 0 ist.
$a=0$: $L=\{0\}$
$0<a<1$: $L=\{-\sqrt{a(1-a)}\,;\sqrt{a(1-a)}\,\}$
$a=1$: $L=\{0\}$
$a>1$: $L=\{\ \}$

d) $|a|<\sqrt{2}$: $L=\{\ \}$
$|a|=\sqrt{2}$: $L=\{0\}$
$|a|>\sqrt{2}$: $L=\{-2\sqrt{a^2-2}\,;2\sqrt{a^2-2}\,\}$

e) $a\neq 0$; $|ab|<1$: $L=\left\{-\frac{1}{2a}\sqrt{2(1-a^2b^2)}\,;\frac{1}{2a}\sqrt{2(1-a^2b^2)}\right\}$
$|ab|=1$: $L=\{0\}$
$|ab|>1$: $L=\{\ \}$

f) $|a|<|b|$: $L=\{\ \}$
$a=b$: $L=\mathbb{R}$
$a=-b\neq 0$: $L=\{0\}$
$|a|>|b|$: $L=\left\{-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,;\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right\}$

77/8. **a)** $4\,;\,10$ **b)** $-3\,;\,-\frac{5}{3}$ **c)** $-2-\sqrt{2}\,;\,-2+\sqrt{2}$

d) $0\,;\,6$ **e)** $\{\ \}$ **f)** $3-\sqrt{3}\,;\,3+\sqrt{3}$

g) $a-b\,;\,a+b$ **h)** $0\,;\,-\frac{2}{3}a$

77/9. **a)** $a=0$: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $L=\{\ \}$
$a\neq 0$: $D=\mathbb{R}\setminus\{-a\,;a\}$; $L=\{-2a\,;2a\}$

b) $a\neq 0$: $D=\mathbb{R}\setminus\{-a\,;a\}$; $L=\{-1/a\,;1/a\}$

77/10. $\frac{7}{50}x \cdot \frac{11}{18}x = 40733$; $L = \{-690 ; 690\}$

77/11. $\frac{7}{5}b \cdot b = 2240$; $b = 56$

78/12. $x : y = 3 : 4$ und $x \cdot y = 11532$; $x = \pm 93,\ y = \pm 124$

78/13. $x : y = a : b$ und $xy = z$; $x = \pm\sqrt{\frac{az}{b}},\ y = \pm\sqrt{\frac{bz}{a}}$

78/14. $x :=$ Länge ; $x \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})x = 12$; $x = 4$

78/15. a) $2\frac{7}{9}x^2 = 10^2$; $x = -6$ oder $x = 6$. Der eine Teil ist 6 , der andere 4.

b) $4x^2 = 20$; $x = -\sqrt{5}$ oder $x = \sqrt{5}$
AL-CHARIZMI ließ nur die positive Lösung zu.

c) $\frac{x}{10 - x} = 4$; $x = 8$. Der eine Teil ist 8, der andere 2.

78/16. $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x = 24$; $x = -12$ oder $x = 12$

78/17. $(x + 5)(x - 5) = 96$ $x = -11$ oder $x = 11$

78/18. $x :=$ Anzahl der Reichstaler der 1. Person
2. Person: $\frac{3}{7}x$ Reichstaler
3. Person: $\frac{5}{17} \cdot \frac{3}{7}x$ Reichstaler
$\frac{3}{7}x^2 + \frac{45}{833}x^2 + \frac{15}{119}x^2 = 3830\frac{2}{3}$
Lösungen der Reihe nach $79\frac{1}{3}$, 34 , 10 Reichstaler.

78/19. $x :=$ Anzahl der Gesellschafter
Einlage pro Person = $10x$ Reichstaler
Kapital = $10x^2$ Reichstaler
Gewinn pro 100 Reichstaler = $2x$ Reichstaler
Gewinn = $\frac{10x^2}{100} \cdot 2x = \frac{1}{5}x^3$ Reichstaler
$\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{5}x^3 \cdot 2\frac{2}{9} = x$; $x = 0$ oder $x = -15$ oder $x = 15$

Aufgaben zu 3.2.2

79/1. **a)** $0;5$ **b)** $-\frac{8}{3};0$ **c)** $0;\frac{6}{5}$

d) $-\frac{1}{4};0$ **e)** $0;1$ **f)** $-1;0$

79/2. **a)** $0;9$ **b)** $-\frac{1}{5}\sqrt{2};0$ **c)** $0;\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d) 0 **e)** $-\frac{1}{2}\sqrt{2};0$ **f)** $-\frac{1}{9};0$

79/3. **a)** $0;\ \frac{1}{8}\sqrt{10}$ **b)** $0;\ 9-\sqrt{10}$

79/4. 1. Möglichkeit: $4x(10-x)=x^2$; $x=0$ oder $x=8$
Der eine Teil beträgt 8, der andere 2.
2. Möglichkeit: $4x(10-x)=(10-x)^2$; $x=2$ oder $x=10$
Der eine Teil beträgt 2, der andere 8.
10 ist keine Lösung, da sonst ein Teil 0 wäre.

80/5. **a)** $0;\frac{15}{14}$ **b)** $0;\frac{16}{3}$ **c)** $0;12$ **d)** $0;16$

80/6. **a)** $a=0$: $\{0\}$; $a\neq 0$: $\{0;2a\}$

b) $a=b$: $\{0\}$; $a\neq b$: $\{0;\frac{1}{2}(b-a)\}$

c) $a=0$ und $b=0$: $\mathbb{R}$
$a=0$ und $b\neq 0$: $\{0\}$
$a\neq 0$ und $b=-a$: $\{0\}$
$a\neq 0$ und $a+b\neq 0$: $\{0;\frac{a+b}{2a}\}$

d) $a=2b$: $\mathbb{R}$
$a\neq 2b$ und $a=-2b$: $\{0\}$
$a\neq 2b$ und $a\neq -2b$: $\{0;\frac{-1}{a+2b}\}$

Aufgaben zu 3.3

82/1. a) $(x-2)(x-3)=0$; $\quad 2;3$

b) $(z+2)(z+4)=0$; $\quad -4;-2$

c) $(y+5)(y-4)=0$; $\quad -5;4$

d) $(\mu-8)(\mu+3)=0$; $\quad -3;8$

82/2. a) x^2+4x+4 b) $x^2-8x+16$ c) $x^2-24x+144$

d) $x^2-0{,}6x+0{,}09$ e) $x^2+1{,}8x+0{,}81$ f) $x^2-0{,}5x+0{,}0625$

g) $x^2+1{,}3x+0{,}4225$ h) $x^2+\frac{5}{8}x+\frac{25}{256}$ i) $x^2-\frac{9}{4}x+\frac{81}{64}$

82/3. a) $x^2+3\frac{1}{2}x+3\frac{1}{16}$ b) $x^2-3\frac{1}{4}x+2\frac{41}{64}$ c) $x^2+2\frac{1}{5}x+1\frac{21}{100}$

d) $x^2-3ax+2\frac{1}{4}a^2$ e) $x^2+\frac{a+b}{2}x+(\frac{a+b}{4})^2$

f) $x^2-\frac{3(2a-3b)}{2}x+\frac{9(2a-3b)^2}{16}$ g) $x^2+10\sqrt{7}\,x+175$

h) $x^2-7\sqrt{10}\,x+122\frac{1}{2}$ i) $x^2-\frac{4}{5}\sqrt{15}\,x+2\frac{2}{5}$

82/4. a) $1;2$ b) $-1;3$ c) $-7;-4$

d) -6 e) $-2\sqrt{10};\sqrt{10}$

f) $10+\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1}{2}\sqrt{10+40\sqrt{10}}$; $10+\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{10+40\sqrt{10}}$

82/5. a) $\{\,\}$ b) $-2\pm\sqrt{5}$ c) $1;7$ d) $-3;1$

83/6. a) 7 b) $-3;7$ c) $\{\,\}$ d) $-9;-1$

83/7. **a)** $-1\,;\frac{2}{3}$ **b)** $-1 \pm \sqrt{7}$ **c)** $\{\ \}$ **d)** $-3\,;1\frac{2}{3}$

83/8. **a)** $-5k\,;k$ **b)** $a(-2 \pm \sqrt{3}\,)$ **c)** $-3m\,;3m + 2n$

d) $r = 0:\quad L = \mathbb{R}$

$r \neq 0:\quad s < 0:\quad L = \{\ \}$

$\quad s = 0:\quad L = \{r\}$

$\quad s > 0:\quad L = \{r - \sqrt{s}\,;r + \sqrt{s}\}$

Übersetzung von Abbildung 91.1:

Es folgt nun diese Art des Wurzelziehens.

Erstens: Beginne mit der Anzahl der Wurzeln und denke dir diese halbiert. Ersetze sie durch ihre Hälfte, die beiseite stehen soll, bis die ganze Operation ausgeführt ist.

Zweitens: Multipliziere jene beiseite gestellte Hälfte mit sich selbst.

Drittens: Addiere oder subtrahiere gemäß der Forderung des Vorzeichens des Hinzugefügten oder des Vorzeichens des Abgezogenen.

Viertens: Zu finden ist die Quadratwurzel aus der Summe deiner Addition oder aus dem Rest deiner Subtraktion.

Fünftens: Addiere oder subtrahiere gemäß der Forderung des Vorzeichens oder deines Beispiels.

Diese Art des Wurzelziehens habe ich für dich, mein guter Leser, so gebildet, dass sie sich fest dem Gedächtnis einprägen kann durch die Stütze dieser Wortbildung AMASIAS.

Aufgaben zu 3.4

92/1.	**a)** $-\frac{1}{2}$; 3	**b)** -4; $\frac{4}{5}$	**c)** $-\frac{2}{3}$; 3	**d)** $\frac{5}{8}$; $\frac{8}{5}$
	e) { }	**f)** $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$	**g)** $\frac{3}{2}$	**h)** $-\frac{7}{2}$; $\frac{2}{7}$

92/2.	**a)** -12; 6	**b)** -6; 12	**c)** -29; 25	**d)** -187; 188
	e) -14; 6	**f)** -9; 6	**g)** -4; 12	**h)** 6
	i) $4 \pm 3\sqrt{6}$	**j)** { }	**k)** $6 \pm 3\sqrt{2}$	**l)** $-\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{33})$
	m) $\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{33})$	**n)** $3 \pm 3\sqrt{5}$		

92/3.	**a)** -7; 3	**b)** -3; 7	**c)** 3; 4	**d)** -8; 18
	e) -18; 8	**f)** $5 \pm \sqrt{31}$	**g)** $-5 \pm \sqrt{31}$	**h)** $5 \pm \sqrt{19}$
	i) $\sqrt{3} \pm 5$	**j)** $\sqrt{3} \pm \sqrt{23}$	**k)** $-\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$	**l)** -3; $3\frac{2}{3}$
	m) 2; 8			

92/4.	**a)** 1	**b)** $1 \pm \sqrt{2}$	**c)** $-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$
	d) $\frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{7})$	**e)** $\frac{1}{10}(5 \pm \sqrt{5})$	**f)** $-2 \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$

92/5.	**a)** -1; 2	**b)** -6; $-\frac{1}{2}$	**c)** 3; 4	**d)** -15; $\frac{2}{3}$
	e) $\frac{2}{9}$	**f)** $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{4}$	**g)** $\frac{2}{3}(4 \pm \sqrt{6})$	**h)** $\frac{5}{9}(-1 \pm \sqrt{11})$

92/6. a) $\pm\sqrt{37} \approx \pm 6{,}083$ b) $3 \pm 2\sqrt{5}$; –1,472 ; 7,472

c) $\frac{1}{2}(-11 \pm \sqrt{89})$; –10,217 ; – 0,783 d) $\frac{1}{4}(14 \pm \sqrt{133})$; 0,617 ; 6,383

e) $\sqrt{5} \pm \sqrt{3}$; 0,504 ; 3,968 f) $\sqrt{3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$; 1,024 ; 2,439

g) { } h) $\frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{41})$; – 0,425 ; 1,175 i) $2 + \sqrt{2}$; 3,414

j) $\frac{1}{4}(3\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}})$; 0,366 ; 1,732 k) $\frac{1}{2}(\sqrt{6} \pm \sqrt{2})$; 0,518 ; 1,932

l) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3} \pm \sqrt{8 + 2\sqrt{15}})$; –1,732 ; 2,236

93/7. a) $\frac{1}{2}(7{,}9771 \pm \sqrt{35{,}31332441})$; 1,017 ; 6,959

b) $\frac{1}{2}(-0{,}1010 \pm \sqrt{0{,}974601})$; – 0,5441 ; 0,4431

c) $-\frac{1}{2}\pi(1 \pm \sqrt{5})$; – 5,083 ; 1,941

d) $\frac{1}{2}(\sqrt{3{,}14} \pm \sqrt{4\sqrt{5} - 0{,}86})$; – 0,5356 ; 2,307

e) $\frac{-2{,}01 \pm \sqrt{0{,}25954}}{6{,}28}$; – 0,4011 ; – 0,2389

f) $\frac{999 \pm 2\sqrt{3073971}}{1509}$; – 2,985 ; 1,661

g) $\frac{2{,}34 \cdot 10^5 \pm \sqrt{54\,876\,049\,200}}{2 \cdot 1{,}23 \cdot 10^4}$; – 0,000 004 273 ; 19,02

h) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$; 0,2928

93/8. a) $-5\frac{1}{2}$; 4 b) $-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$ c) { }

d) – 1 ; $2\frac{1}{2}$ e) – 3 ; $\frac{17}{21}$ f) 0 ; $\frac{19}{3}$

g) – 3 ; $\frac{2}{5}$ h) $-\frac{5}{2}$; $\frac{2}{5}$ i) $-13\frac{1}{2}$; $10\frac{2}{3}$

94/9. a) $-\frac{22}{17};5$ b) $1;48$ c) $-1\frac{3}{5};5$ d) $4\frac{1}{3};5$

e) $-194\frac{1}{2};2$ f) $\frac{1}{3};54\frac{1}{3}$ g) $-151;1$

94/10. a) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\};\ L=\{2;3\}$ b) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\};\ L=\{-3;6\}$

c) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\};\ L=\{-1\frac{1}{3};4\}$ d) $D=\mathbb{R}\setminus\{0\};\ L=\{\frac{5}{9};9\}$

e) $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{5}{2};1\};\ L=\{-\frac{3}{4};\frac{7}{2}\}$ f) $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{6};\frac{3}{2}\};\ L=\{\frac{1}{6};\frac{7}{6}\}$

g) $D=\mathbb{R}\setminus\{\frac{7}{2};3\};\ L=\{4;6\frac{1}{2}\}$ h) $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{4};12\};\ L=\{8\frac{1}{2}\}$

i) $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{5};\frac{8}{5}\};\ L=\{\ \}$ j) $D=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\};\ L=\{\frac{2}{15};1\}$

k) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0\};\ L=\{2;4\}$

l) $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;0\};\ L=\{\frac{11}{14}-\frac{1}{14}\sqrt{1381};\frac{11}{14}+\frac{1}{14}\sqrt{1381}\}$

94/11. a) 3 b) 4;7 c) 4;6

d) 8. Die Lösung 12,5 würde im Nenner auf eine negative Zahl führen.

e) 1. Die Lösung 100 würde bei $10-x$ zu einer negativen Zahl führen.

f) 3. Die Lösung 17,5 würde zu negativen Zahlen in der Rechnung führen.

g) $2\frac{1}{4};9$

h) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\};\quad L=\{-1\frac{1}{2};\frac{1}{2}\}$. Bei AL-CHARIZMI natürlich nur $\frac{1}{2}$.

i) 24. Die Lösung $\frac{24}{25}$ würde zu einer negativen zu quadrierenden Zahl führen.

j) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\};\ L=\{-3;2\}$. Bei AL-CHARIZMI natürlich nur 2.

95/12. a) $-21\frac{1}{2}\,;2$ b) $3\frac{3}{5}\,;9$ c) $\frac{31}{13}\,;5$ d) $-6\frac{1}{3}\,;4$ e) $\frac{103}{99}\,;2$

f) $\frac{94}{281}\,;3$ g) $-\frac{7}{10}\,;4$ h) $1;5$ i) $\frac{6}{7}\,;4$

95/13. a) $D=\mathbb{R}\setminus\{-4;3;4\}$; $L=\{6;10\}$

b) $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;5\}$; $L=\{-\frac{37}{15};7\}$

c) $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3;4\}$; $L=\{2\frac{1}{3};5\}$

d) $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;0\}$; $L=\{-2\frac{2}{5};1\}$

95/14. a) $-3a\,;-a$ b) $\frac{4n}{m}\,;\,\frac{n}{m}$ c) $-p\,;q$ d) $-1\,;2a^2$

e) $\frac{u+v}{2u}$ f) $-\frac{3d}{2c}\,;\,\frac{c+2d}{c}$ g) $\frac{1}{2}(r+s\pm\sqrt{1+s^2}\,)$

h) $-2-a\,;2+2b$

i) $a=-4b$ und $b=0$: $L=\mathbb{R}$
$a=-4b$ und $b\neq0$: $L=\{-4b\}$
$a\neq-4b$: $L=\left\{\frac{a(2a-5b)}{2(a+4b)}\,;\,\frac{a(2a+9b)}{2(a+4b)}\right\}$

j) $a=0$: $L=\mathbb{R}$; $a\neq0$: $L=\{-2b\,;a+b\}$

96/15. a) $|a|<1$: $L=\{\,\}$
$|a|=1$: $L=\{-a\}$, also $a=-1 \Rightarrow L=\{1\}$, $a=1 \Rightarrow L=\{-1\}$
$|a|>1$: $L=-a\pm\sqrt{a^2-1}$

b)

$-\infty<a<$	-1	$<a<$	0	$<a<$	1	$<a<+\infty$
$\{\,\}$	-2	$2a\pm2\sqrt{a(a^2-1)}$	0	$\{\,\}$	2	$2a\pm2\sqrt{a(a^2-1)}$

c) $a=0$: $L=\{0\}$
$a\neq0$:

$-\infty<b<$	0	$<b<$	4	$<b<+\infty$
$-\frac{1}{2}a(b\pm\sqrt{b(b-4)})$	0	$\{\,\}$	$-2a$	$-\frac{1}{2}a(b\pm\sqrt{b(b-4)})$

d) $b = 2a: \; L = \{-5a\};$ $\qquad b \neq 2a: \; L = \{\;\}$

e) $m \leq 0: \; L = \{\;\};$ $\qquad m > 0: \; L = \{1 - \frac{1}{m}\sqrt{m}; 1 + \frac{1}{m}\sqrt{m}\}$

f)

$-\infty < a <$	-3	$< a <$	-2	$< a <$	2	$< a < +\infty$
$\{\;\}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1 \pm \sqrt{a+3}}{a^2-4}$	$\{\;\}$	$\frac{1 \pm \sqrt{a+3}}{a^2-4}$	$\{\;\}$	$\frac{1 \pm \sqrt{a+3}}{a^2-4}$

g) $a = 0: \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \qquad L = \{\;\}$
$a \neq 0: \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-a; a\}; \qquad L = \{-7a; 3a\}$

h) $|a| \neq |b|$
$a = 0: \quad L = \mathbb{R}$
$a \neq 0$ und $b \neq 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}; \frac{b}{a}\}; \qquad L = \{-\frac{b^2}{a^2}; 1\}$
$a \neq 0$ und $b = 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \qquad L = \{1\}$

96/16. **a)** Diskriminante $36 - 8k > 0 \Leftrightarrow k < \frac{9}{2}$

b) $|k| < 18 \Leftrightarrow -18 < k < 18$ $\qquad$ **c)** $k = 0$

d) $k^2 > 16 \Leftrightarrow k < -4$ oder $k > 4$ $\qquad$ **e)** $-\frac{1}{4}; 0$

f) $0; -\frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{2}); -\frac{1}{4}(3 - 2\sqrt{2})$

96/17. **a)** **1)** $D = p^2 - 4q = p^2 + 4(-q) > 0$, da $-q > 0$.
2) $D = b^2 - 4ac = b^2 + 4(-ac) > 0$ $\qquad$ Begründung:
Haben a und c verschiedene Vorzeichen, so ist $ac < 0$, also $-ac > 0$.

b) Nein!
1) $p^2 - 4q > 0$, solange $p^2 > 4q$. q muss nicht negativ sein.
2) $b^2 - 4ac > 0$, solange $b^2 > 4ac$.
Das ist auch möglich, wenn a und c gleiches Vorzeichen haben.

96/18. $ax^2 + bx + c = 0 \;||\; \cdot d \qquad adx^2 + bdx + cd = 0$

$$x = \frac{-bd \pm \sqrt{b^2d^2 - 4ad\cdot cd}}{2ad} = \frac{-bd \pm \sqrt{d^2(b^2 - 4ac)}}{2ad} = \frac{-bd \pm |d|\sqrt{b^2 - 4ac}}{2ad}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-bd \pm d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2ad} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ falls } d > 0 \\ \dfrac{-bd \mp d\sqrt{b^2 - 4ac}}{2ad} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ falls } d < 0 \end{cases}$$

Für $d > 0$ erhält man die Lösungen der Ausgangsgleichung in der gleichen Reihenfolge, für $d < 0$ werden sie vertauscht.

96/19. $x_2 - x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{1}{a}\sqrt{D}$

a) 2 **b)** 6 **c)** $-10 ; 10$

d) $-\sqrt{19} ; \sqrt{19}$ **e)** $-8\frac{1}{3} ; 3$ **f)** $-\frac{3600}{169} ; 25$

96/20. **a)** $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - k^2}, \quad |k| \leq 1$

$k = -1$ oder $k = 1 \Rightarrow x_{1,2} = -1$

$k = 0 \Rightarrow x_1 = -2 ;\; x_2 = 0$

b) $x_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 15k}}{k}, \quad k \leq \frac{20}{3}$ und $k \in \mathbb{N}$

$k = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{10 \pm 5}{5} ;\; x_1 = 1 ;\; x_2 = 3$

c) $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-10 \pm \sqrt{100 - \frac{192}{k}}\right), \quad \frac{192}{k} \leq 100$ ist für $k < 0$ stets erfüllt.

Für $k > 0$ ergibt sich $k \geq 1{,}92$.

Außerdem kommen für $|k|$ nur Teiler von 192 in Frage:

$\lvert k\rvert$		1	2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	64	96	192
$k > 0$	$100 - \frac{192}{k}$	–	4	36	52	68	76	84	88	92	94	96	97	98	99
$k < 0$	$100 - \frac{192}{k}$	292	196	164	148	132	124	116	112	108	106	104	103	102	101

Radizieren lassen sich nur 4, 36 und 196.

$k = 2$ ergibt $x_1 = -6, \quad x_2 = -4$

$k = 3$ ergibt $x_1 = -8, \quad x_2 = -2$

$k = -2$ ergibt $x_1 = -12, \quad x_2 = 2$

97/21. $\frac{1}{2}(8 \pm \sqrt{64 - 4n}) = 3k,\; k \in \mathbb{Z} ;\quad \pm\sqrt{16 - n} = 3k - 4 ;$

$n = 7 : \quad \pm 3 = 3k - 4,\; k \notin \mathbb{Z}$

$n = 12 : \quad \pm 2 = 3k - 4 \Rightarrow k = 2 ;$ Lösung 6

$n = 15 : \quad \pm 1 = 3k - 4 \Rightarrow k = 1 ;$ Lösung 3

97/22. **a)** $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und $b^2 - 4ac$ ist keine Quadratzahl.

$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$ und $x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Falls sich $b^2 - 4ac$ noch partiell radizieren lässt,

gilt $b^2 - 4ac = u^2 \cdot \frac{b^2 - 4ac}{u^2}$ mit $u \in \mathbb{Q}^+$.

Man erhält $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{u}{2a}\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{u^2}}$.

Da $-\frac{b}{2a}$, $\frac{1}{2a}$ und auch $\frac{u}{2a}$ aus $\mathbb{Q}$ sind, gilt die Darstellung

$x_1 = r - s\sqrt{t}$ und $x_2 = r + s\sqrt{t}$, q.e.d.

b) Nach a muss $x_2 = 3 + 2\sqrt{17}$ sein. Somit gilt

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & (3 + 2\sqrt{17})^2 + p(3 + 2\sqrt{17}) + q = 0 \\
\text{II} & (3 - 2\sqrt{17})^2 + p(3 - 2\sqrt{17}) + q = 0 \\
\hline
\text{I} - \text{II} & 24\sqrt{17} + 4\sqrt{17}p = 0 \\
\text{I} + \text{II} & 18 + 136 + 6p + 2q = 0 \\
\hline
 & p = -6 \\
 & q = -59 \\
 & \text{Lösung:} \quad x^2 - 6x - 59 = 0
\end{array}$$

c) Ansatz nach a $x_1 = r - 3\sqrt{5}$ und $x_2 = r + 3\sqrt{5}$.

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & 2(r - 3\sqrt{5})^2 - 7(r - 3\sqrt{5}) + c = 0 \\
\text{II} & 2(r + 3\sqrt{5})^2 - 7(r + 3\sqrt{5}) + c = 0 \\
\hline
\text{I} - \text{II} & 24\sqrt{5}\,r - 42\sqrt{5}r = 0 \\
\text{I} + \text{II} & 4r^2 + 180 - 14r + 2c = 0 \\
\hline
 & r = \frac{7}{4} \\
 & c = \frac{671}{8}
\end{array}$$

97/23. **a)** $1 + \sqrt{4} = 3$: $\quad LS = 3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 0 = RS$

$1 - \sqrt{4} = -1$: $\quad LS = (-1)^2 + 7 + 12 = 20 \neq RS$

b) $3{,}5 + \sqrt{\frac{1}{4}} = 4$: $\quad LS = 4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 0 = RS$

$3{,}5 - \sqrt{\frac{1}{4}} = 3$: $\quad LS = 3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 0 = RS$

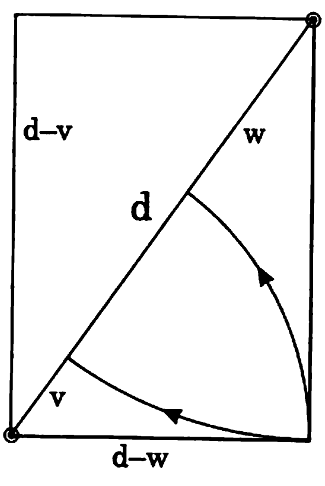
Der Satz gilt nicht. Gelegentlich trifft er zu.

97/24. Negative Zahlen sind vom Problem her keine Lösungen!

1)	$x^2 + x = \frac{3}{4}$;	$x = \frac{1}{2}$	$[-1{,}5]$
2)	$x^2 - x = 870$;	$x = 30$	$[-29]$
3)	$x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$;	$x = \frac{1}{2}$	$[-1]$
4)	$x^2 - \frac{1}{3}x^2 + x = 286\frac{2}{3}$;	$x = 20$	$[-21{,}5]$
5)	$x^2 + x + \frac{1}{3}x = \frac{11}{12}$;	$x = \frac{1}{2}$	$[-\frac{11}{6}]$
6)	$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$;	$x = \frac{1}{2}$	$[-\frac{7}{6}]$
7)	$11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$;	$x = \frac{1}{2}$	$[-\frac{25}{22}]$
16)	$x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{12}$;	$x = \frac{1}{2}$	$[-\frac{1}{6}]$
23)	$x^2 + 4x = \frac{25}{36}$;	$x = \frac{1}{6}$	$[-4\frac{1}{6}]$

98/25. a) $d :=$ Länge der Diagonale. Wegen der Angabe ist $d > 4$.
Pythagoras: $d^2 = (d-4)^2 + (d-2)^2$
$d_1 = 10$ [$d_2 = 2$ ist keine Lösung.]
Diagonale 10 Fuß, Höhe 8 Fuß, Breite 6 Fuß.

Bemerkung: Interessant ist die im *Chiu Chang Suan Shu* angegebene Lösung. Sie wird erst durchsichtig, wenn wir sie allgemein ansetzen:



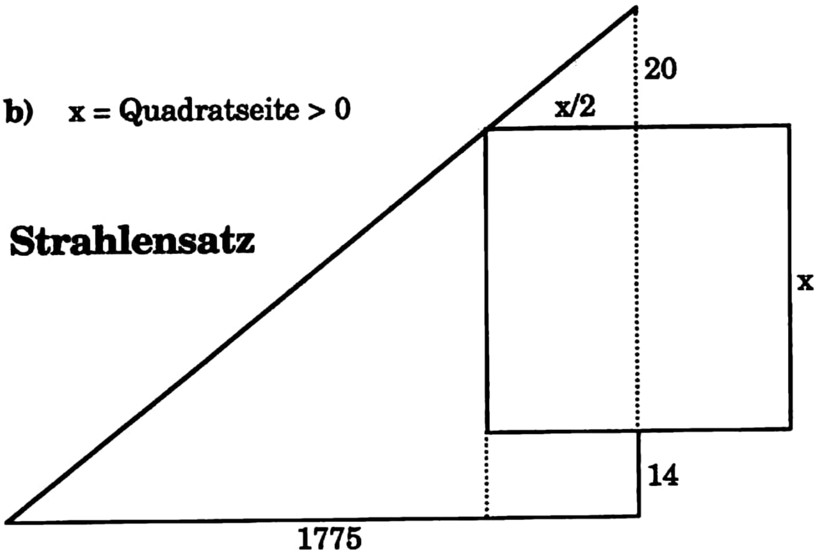
Man erkennt sofort, dass $d - (w + v) > 0$ sein muss.
Als Lösungsweg wird angegeben:
Breite $= v + \sqrt{2wv}$, Höhe $= w + \sqrt{2wv}$.
Wie fand man ihn? Wir vermuten:

$$(d-w)^2 + (d-v)^2 = d^2$$
$$2d^2 - 2(w+v)d + w^2 + v^2 = d^2 \quad \| -d^2 + 2wv$$
$$d^2 - 2(w+v)d + w^2 + v^2 + 2wv = 2wv$$
$$d^2 - 2(w+v)d + (w+v)^2 = 2wv$$
$$[d - (w+v)]^2 = 2wv$$
$$d - (w+v) = \sqrt{2wv} \quad \text{(wegen Vorbemerkung)}$$

Also Breite $= d - w = v + \sqrt{2wv}$
Höhe $= d - v = w + \sqrt{2wv}$.
Aus der Anfangsgleichung ergibt sich d.
Mit den gegebenen Werten ist
Breite $= 2 + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 4} = 6$
Höhe $= 4 + \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 4} = 8$ und $d = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

b) x = Quadratseite > 0

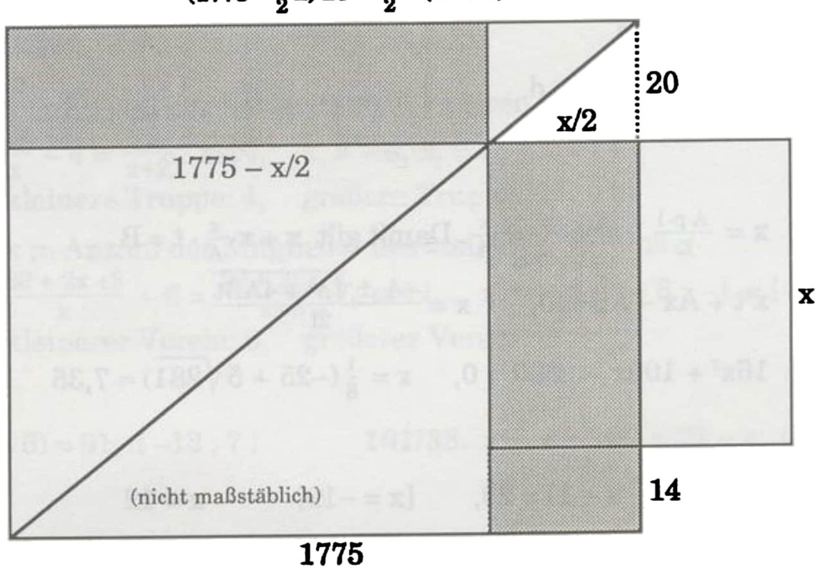
Strahlensatz



$$\frac{1775}{1775-\frac{1}{2}x} = \frac{14+x+20}{14+x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 34\,x - 71000 = 0 \qquad x = 250$$

Bemerkung: Die Aufgabe kann auch mit dem Satz von den Ergänzungsparallelogrammen gelöst werden.

$$(1775-\tfrac{1}{2}x)\cdot 20 = \tfrac{1}{2}x\cdot(x+14)$$



98/26. a) 1) $a(a-x) = x^2 \qquad (\heartsuit)$

$x^2 + ax - a^2 = 0; \quad x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$

2) Wäre $x \leq \frac{1}{2}a$, so wäre in ($\heartsuit$) die rechte Seite $\leq \frac{1}{4}a^2$, die linke $\geq \frac{1}{2}a^2$, Widerspruch.

b) Dreieck ABC ist rechtwinklig, die Hypotenuse ist [BC]. Also gilt

$\overline{BC}^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2, \qquad \overline{BC} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}.$

Somit ist nach Konstruktion

$\overline{AD} = x = \overline{CB} - \overline{AC} = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1),$

das ist die Lösung von **a**.

c) $a : x = x : (a-x) \;\Rightarrow\; a(a-x) = x^2$, siehe **a**.

d) $x : (a-x) = (a-x) : (x - (a-x))$

$(a-x)^2 = x(2x - a)$

$a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - ax$

$a^2 - ax = x^2$

$a(a-x) = x^2$, q.e.d.

100/27. a) $x = \frac{A \cdot p \cdot 1}{12}$, also $\frac{p}{12} = \frac{x}{A}$. Damit gilt $x + x \cdot \frac{x}{A} \cdot t = B$

$x^2t + Ax - AB = 0, \qquad x = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4ABt}}{2t}$

b) $16x^2 + 100x - 1600 = 0, \quad x = \frac{1}{8}(-25 + 5\sqrt{281}) \approx 7{,}35$

100/28. a) $(\frac{1}{3}x + 1)(\frac{1}{4}x + 1) = 20, \qquad [x = -19] \qquad x = 12$

b) $x^2 + (10 - x)^2 = 58, \qquad x = 3$ oder $x = 7$

c) $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = x + 24 \qquad [x = -12] \qquad x = 24$

100/29. $a = 1$; $b = p$; $c = q$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} =$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(p^2 - 4q)} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$$

Zur Fußnote: (B1): $p = B,\ q = -C,\qquad x = \sqrt{(B/2)^2 + C} - \frac{B}{2}$

(B2): $p = -B,\ q = C$

$x = \frac{B}{2} - \sqrt{(B/2)^2 - C}$ oder $x = \frac{B}{2} + \sqrt{(B/2)^2 - C}$

genau eine Lösung, wenn $(B/2)^2 = C$, nämlich $x = \frac{B}{2}$,

und keine Lösung, wenn $(B/2)^2 < C$.

(B3): $p = -B,\ q = -C$

$x = \sqrt{(B/2)^2 + C} + \frac{B}{2}$

100/30. a) $(\frac{1}{8}x)^2 + 12 = x,\qquad x_1 = 16,\ x_2 = 48$

b) $(\frac{1}{5}x - 3)^2 + 1 = x,\qquad x_1 = 5,\quad x_2 = 50$; $x_1 = 5$ wird ausgeschlossen, weil sonst ($\frac{1}{5}$ der Herde weniger 3 Affen) = (–2) Affen ergäbe.

BHASKARA schreibt: »Diese Lösung ist unpassend; denn eine negative Zahl billigt man nicht.«

101/31. a) $x :=$ Anzahl der Soldaten der kleineren Truppe

$\frac{48}{x} - 4 = \frac{48}{x+2},\ x \in \mathbb{N},\quad x_1 = -6,\ x_2 = 4;\quad L = \{4\}$

kleinere Truppe: 4, größere Truppe: 6

b) $x :=$ Anzahl der Mitglieder des kleineren Vereins

$\frac{93 + 2x + 3}{x} - 6 = \frac{93 + 2x + 3}{x+3},\ x \in \mathbb{N},\quad x_1 = -8,\ x_2 = 6;\quad L = \{6\}$

kleinerer Verein: 6, größerer Verein: 9

101/32. $x(x + 6) = 91$; $\{-13 ; 7\}$

101/33. $x^2 - 9 - 100 = 23 - x$; $\{-12 ; 11\}$

101/34. $x :=$ kleinere Zahl; $\quad x \cdot 2x + (x+2x) = 90$; $\qquad \{-7\frac{1}{2} ; 6\}$

Wählt man $x = -7\frac{1}{2}$, dann ist $2x = -15$ nicht doppelt so groß.

Folglich kann nur 6 die Lösung sein.

102/35. $x :=$ Kaufpreis in Reichstalern

$119 - x = \frac{x}{100} \cdot x$; $\qquad \{-170 ; 70\}$ $\qquad$ Kaufpreis = 70 Reichstaler

102/36. x := Anzahl der Tücher; $\frac{180}{x} - \frac{180}{x+3} = 3$; $\{-15; 12\}$ 12 Tücher

102/37.

	1. Gesellschafter	2. Gesellschafter
Einlage in Reichstalern	x	$100 - x$
Gewinn	$99 - x$	$99 - (100 - x) = x - 1$
Gewinn/Monat	$\frac{1}{3}(99 - x)$	$\frac{1}{2}(x - 1)$

Bedingung: Monatsgewinne verhalten sich wie die Einlagen.

$\frac{99-x}{3} : \frac{x-1}{2} = x : (100 - x)$; $\{-440; 45\}$

Einlage des ersten = 45 Reichstaler.

102/38.

	1. Bäuerin	2. Bäuerin
Anzahl der Eier	x	$100 - x$
Preis/Ei in Kreuzer	$\frac{15}{100-x}$	$\frac{6\,^2/_3}{x}$

Bedingung: $x \cdot \frac{15}{100-x} = (100 - x) \cdot \frac{6\,^2/_3}{x}$; $\{-200; 40\}$

Die erste Bäuerin hatte 40 Eier, die zweite 60.

102/39.

	1. Händler	2. Händler
Verkauf in Ellen	x	$x + 3$
Preis/Elle in Reichstalern	$\frac{24}{x+3}$	$\frac{12\,^1/_2}{x}$

Bedingung: $x \cdot \frac{24}{x+3} + (x+3) \cdot \frac{12\,^1/_2}{x} = 35$; $\{5; 15\}$

1. Lösung: 1. Händler 5 Ellen, 2. Händler 8 Ellen
2. Lösung: 1. Händler 15 Ellen, 2. Händler 18 Ellen

Aufgaben zu 3.5

107/1. **a)** $x^2 - x - 6 = 0$ **b)** $x^2 - 5x = 0$

c) $x^2 + 9x + 8 = 0$ **d)** $x^2 + 6x + 9 = 0$

e) $x^2 - 3{,}5x + 2{,}5 = 0$ **f)** $x^2 - 3{,}9x - 21{,}7 = 0$

g) $x^2 + 8{,}5x + 18{,}06 = 0$ **h)** $x^2 - \frac{1}{7}x - \frac{2}{49} = 0$

i) $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{18} = 0$

107/2. **a)** $x^2 - (4 + \sqrt{2})x + 4\sqrt{2} = 0$ **b)** $x^2 - (1{,}5 + 2\sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0$

c) $x^2 - (\sqrt{7} - 1{,}3)x - 2{,}3(1 + \sqrt{7}) = 0$ **d)** $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

e) $x^2 - (8 + \sqrt{3} + \sqrt{5})x + (15 + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{5} + \sqrt{15}) = 0$

f) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$

107/3. **a)** $x_2 = -5$; $q = -10$ **b)** $x_2 = 0$; $q = 0$

c) $x_2 = 1{,}5$; $q = -6$ **d)** $x_2 = -4{,}5$; $q = 20{,}25$

e) $x_2 = -2{,}37$; $q = -5{,}6169$ **f)** $x_2 = 1{,}5$; $p = -5{,}5$

g) $x_2 = -0{,}5$; $p = 7{,}5$ **h)** $x_2 = -2{,}5$; $p = 5$

i) $x_2 = 0$; $p = -17$

107/4. **a)** $x_2 = 1$; $c = 2$ **b)** $x_2 = -1$; $c = -1$

c) $x_2 = 17$; $c = -11{,}9$ **d)** $x_2 = 1$; $b = -9$

e) $x_2 = -\frac{3}{2}$; $b = 0$ **f)** $x_2 = \frac{7}{3}$; $b = -\frac{5}{14}$

g) $a = 7$; $x_2 = 1$ **h)** $a = -\frac{8}{3}$; $x_2 = -\frac{3}{40}$

107/5. a) $b = -6$; $c = -20$ b) $b = \frac{33}{2}$; $c = 42$

c) $a = -3$; $c = 60$ d) $a = -5$; $c = -38{,}25$

e) $a = -\frac{1}{2}$; $b = 0$ f) $a = 5$; $b = -\frac{78}{7}$

107/6. a) $3 ; 5$ b) $-5 ; 3$ c) $-3 ; 5$

d) $-5 ; -3$ e) $-11 ; 1$ f) $2 ; 7$

g) $-11 ; -2$ h) $-4 ; 6$ i) $-16 ; 4$

108/7. a) $(x-2)(x+2)$ b) $(x-1)(x-2)$ c) $(x+5)(x-8)$

d) $(x+6)(x-2{,}5)$ e) $(x-6{,}7)(x-10)$

f) $(x-1+\sqrt{7})(x-1-\sqrt{7})$ g) $5(x+3)(x-5{,}4)$

h) $30(x+5{,}5)(x+0{,}6)$ i) $25(x-1{,}1+0{,}2\sqrt{2})(x-1{,}1-0{,}2\sqrt{2})$

108/8. Die gesuchten Zahlen sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - ux + v = 0$

a) $-3 ; 6$ b) $-5 ; -1$ c) $7 ; 7$

d) $-1{,}6 ; 15$ e) $3{,}5 ; 4{,}5$ f) $3-\sqrt{3} ; 3+\sqrt{3}$

108/9. a) $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{13}{4}$ b) $\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{3}{2}$

c) $\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2 \cdot \frac{c}{a}}{-\frac{b}{a}} = -\frac{2c}{b} = \frac{5}{6}$

d) $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$. Die Gleichung hat aber keine Lösung, weil $D = 1 - 4 < 0$ ist!

108/10. a) $\frac{1}{3}(12-9)=1$ **b)** $\frac{1}{5}(\frac{45}{6}+\frac{4}{3}+5+\frac{7}{6})=3$ **c)** $\frac{1}{4}(7-\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$

108/11. a) $\frac{1}{3}(7-\frac{1}{10}k)=3 \Leftrightarrow k=-20$

b) $\frac{1}{4}(10+99+\frac{2{,}75}{k})=30 \Leftrightarrow k=0{,}25$

c) $\frac{1}{4}(\frac{63}{k}+\frac{k}{3})=2{,}5 \Leftrightarrow k=9$ oder $k=21$

108/12. a) I. $m=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2} \Leftrightarrow b=-2m$

II. Diskriminante ≥ 0

$(-2m)^2-4\cdot 9\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2\geq 9$, also $m\leq -3$ oder $m\geq 3$

b) $(-2m)^2-4\cdot(-9)\geq 0$, $m^2\geq -9$, also m beliebig aus $\mathbb{R}$.

108/13. $\frac{x_1+x_2}{2}=4{,}5$ und $\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}=4$

$\frac{-b}{2}=4{,}5$ und $\frac{2c}{-b}=4$, also $b=-9$ und $c=18$; $x^2-9x+18=0$

108/14. $x^2-21x+(6\sqrt{3})^2=0$, $x_1=9$, $x_2=12$

109/15. a) $x_2-x_1=3$ und $x_2+x_1=5 \Leftrightarrow x_1=1$, $x_2=4$, $q=4$

b) $x_1 : x_2 = 2:3$

$x_1\cdot x_2=96$

$x_{11}=-8$;	$x_{21}=-12$;	$p_1=20$
$x_{12}=8$;	$x_{22}=12$;	$p_2=-20$

c) $x_1\cdot x_2=15$

$x_1+2x_2=11$

$x_{11}=6$;	$x_{21}=2{,}5$;	$b_1=-8{,}5$
$x_{12}=5$;	$x_{22}=3$;	$b_2=8$

109/16. a) $x_1 = 4{,}5$; $x_2 = 12{,}5$; $x^2 - 17x + 56{,}25 = 0$

b) $x_1 = 9$; $x_2 = 15$; $x^2 - 24x + 135 = 0$

c) $x_1 = 4$; $x_2 = 6$; $x^2 - 10x + 24 = 0$

109/17. a)
$$\begin{array}{l} -1 + x_2 = -2q \\ \underline{\quad -x_2 = q \quad} \\ q = 1; \qquad p = 2; \quad \text{also } x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} 2 + x_2 = -p \\ \underline{\quad 2x_2 = 2p \quad} \\ x_2 = -1; \qquad p = -1; \text{ also } x^2 - x - 2 = 0 \end{array}$$

c) $3(-1 - x_2) = 2\,x_2 - 5 \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{5}$

$q = \frac{2}{5}$; $p = -\frac{7}{5}$; also $x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$

109/18. a)
$$\begin{array}{l} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{6} \\ \underline{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x_1 x_2 = -3 \qquad} \\ \qquad\qquad x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x_1 + x_2 = 3{,}5 \\ \underline{\text{II} \quad x_1 x_2 = -15 \qquad} \\ \xi_1 := x_1^2; \qquad \xi_2 := x_2^2; \end{array}$$

Durch Quadrieren von I und II erhält man

I' $\xi_1 + 2\cdot(-15) + \xi_2 = \frac{49}{4}$

II' $\xi_1 \cdot \xi_2 = 225$

Also sind ξ_1 und ξ_2 Lösungen von $x^2 - 42{,}25x + 225 = 0$.

Probe: $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 6$

$\xi_1 = 6{,}25$; $\xi_2 = 36$

c)
$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{4}{3} \\ \underline{x_1 x_2 = -5 \qquad} \\ \xi_1 := 6x_1 + 4; \qquad \xi_2 := 6x_2 + 4; \qquad \text{eingesetzt ergibt} \\ \xi_1 + \xi_2 = 16 \\ \xi_1 \xi_2 = -132 \qquad \text{Also } x^2 - 16x - 132 = 0 \end{array}$$

109/19. a) Wegen $x_1x_2 = 1$ gilt $x_2 = \frac{1}{x_1}$, das heißt, die Lösungen sind reziprok zueinander.

b) Wegen $x_2 = \frac{1}{x_1}$ gilt $1 = \frac{c}{a}$, das heißt, $c = a$.

109/20. a) **1. Möglichkeit**

$$\begin{array}{l} (y_1 + 1) + (y_2 + 1) = -5 \\ \underline{(y_1 + 1) \cdot (y_2 + 1) = 2} \\ y_1 + y_2 = -7\,; \qquad y_1y_2 = 8 \\ \text{also } y^2 + 7y + 8 = 0 \end{array}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{array}{l} (x-1)^2 + p(x-1) + q = 0 \\ x^2 + (p-2)x + 1 - p + q = 0 \\ \text{somit} \quad p - 2 = 5 \\ \qquad\quad \underline{-p + q + 1 = 2} \\ \qquad\quad p = 7\,; \quad q = 8 \end{array}$$

b) **1. Möglichkeit**

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = -5 & \text{quadrieren} \\ \underline{x_1 x_2 = 2} & \underline{\text{quadrieren}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 25 \\ \underline{x_1^2x_2^2 = 4} \\ (y_1 - 3) + 2\cdot 2 + (y_2 - 3) = 25 \\ \underline{(y_1 - 3)(y_2 - 3) = 4} \\ y_1 + y_2 = 27; \qquad y_1 y_2 = 76 \\ \text{also } y^2 - 27y + 76 = 0 \end{array}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{array}{l} (x^2 + 3)^2 + p(x^2 + 3) + q = 0 \\ x^4 + 6x^2 + 9 + px^2 + 3p + q = 0 \\ (-5x-2)^2 + (6+p)x^2 + 3p + q + 9 = 0 \\ x^2(25 + 6 + p) + 20x + 3p + q + 13 = 0 \\ \frac{20}{31+p} = 5 \\ \underline{\frac{3p+q+13}{31+p} = 2} \\ p = -27 \\ q = 76 \end{array}$$

c) **1. Möglichkeit**

$$\begin{array}{l|l} x_1 + x_2 = -5 & \text{mit 3 potenzieren} \\ \underline{x_1 x_2 = 2} & \underline{\text{mit 3 potenzieren}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = -125 \\ \underline{x_1^3 x_2^3 = 8} \\ x_1^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2^3 = -125 \\ \underline{x_1^3 x_2^3 = 8} \\ (y_1 + 1) + 3\cdot 2\cdot(-5) + (y_2 + 1) = -125 \\ \underline{(y_1 + 1)(y_2 + 1) = 8} \\ y_1 + y_2 = -97\,; \qquad y_1y_2 = 104\,; \quad \text{also } y^2 + 97y + 104 = 0 \end{array}$$

2. Möglichkeit

$(x^3-1)^2+p(x^3-1)+q=0$

$x^6-2x^3+1+px^3-p+q=0 \quad (\heartsuit)$

Nun ist $x^2 = -5x-2$

$$\begin{aligned} x^4 &= 25x^2+20x+4 = 25(-5x-2)+20x+4 = \\ &= -125x-50+20x+4 = -105x-46 \\ x^6 &= x^4\,x^2 = (105x+46)(5x+2) = 525x^2+440x+92 \\ x^3 &= x^2\,x = -5x^2-2x \end{aligned}$$

Somit wird $(\heartsuit)$ zu

$525x^2+440x+92+(p-2)(-5x^2-2x)+1-p+q=0$

$(535-5p)x^2+(444-2p)x+93-p+q=0$.

Aus $\frac{444-2p}{535-5p}=5$ und $\frac{93-p+q}{535-5p}=2$ folgt $p=97$ und $q=104$.

d) **1. Möglichkeit**

$(\frac{1}{y_1}-1)+(\frac{1}{y_2}-1)=-5$

$(\frac{1}{y_1}-1)\cdot(\frac{1}{y_2}-1)=2$

$(y_1+y_2)+3y_1\,y_2=0$

$(y_1+y_2)+y_1\,y_2=1$

$y_1\,y_2=-\frac{1}{2}$; $y_1+y_2=\frac{3}{2}$

also $y^2-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}=0$

2. Möglichkeit

$\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+p\cdot\frac{1}{x+1}+q=0$

$1+p(x+1)+q(x+1)^2=0$

$qx^2+x(2q+p)+q+p+1=0$

Somit

$\frac{2q+p}{q}=5$ und $\frac{q+p+1}{q}=2$

also $p=-1{,}5$; $q=-0{,}5$

e) **1. Möglichkeit**

$\frac{y_1}{1-y_1}+\frac{y_2}{1-y_2}=-5$

$\frac{y_1}{1-y_1}\cdot\frac{y_2}{1-y_2}=2$

$3y_1\,y_2-4(y_1+y_2)=-5$

$y_1\,y_2-2(y_1+y_2)=-2$

$2(y_1+y_2)=1$ und $y_1\,y_2=-1$

also $y^2-\frac{1}{2}y-1=0$

2. Möglichkeit

$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+p\cdot\frac{x}{x+1}+q=0$

$x^2(1+p+q)+x(p+2q)+q=0$

Somit

$\frac{p+2q}{1+p+q}=5$ und $\frac{q}{1+p+q}=2$

also $p=-\frac{1}{2}$; $q=-1$

f) **1. Möglichkeit**

Wegen $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y}}{y}$ ist von der direkten Berechnung abzuraten.

2. Möglichkeit

$\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)^2 + p \cdot \frac{2x-1}{x^2} + q = 0$

Mit $x^2 = -5x - 2$, $\quad x^3 = x^2x = -5x^2 - 2x$

und $x^4 = 25x^2 + 20x + 4$ erhält man

$x^2(25q - 11p + 4) + x(20q - 4p - 4) + 4q + 1 = 0$, also

$\frac{20q - 4p - 4}{25q - 11p + 4} = 5 \Leftrightarrow 17p - 35q = 8$

$\frac{4q + 1}{25q - 11p + 4} = 2 \Leftrightarrow 22p - 46q = 8$

das heißt, $p = \frac{41}{4}$ und $q = \frac{19}{4}$; somit $y^2 + \frac{41}{4}y + \frac{19}{4} = 0$.

109/21. a)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 : x_2 = 3 : 4 \\ \text{II} & x_1 \cdot x_2 = k \\ \text{III} & x_1 + x_2 = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 6; \quad x_2 = -8; \quad k = 48$$

b)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x_1 : x_2 = -\frac{7}{5} \\ \text{II} & x_1 \cdot x_2 = -\frac{21}{k} \\ \text{III} & x_1 + x_2 = \frac{6}{k} \\ \hline \text{I} & x_1 = -\frac{7}{5}x_2 \quad \text{in III, II} \\ \text{III'} & x_2 = \frac{15}{k} \quad \text{in II} \\ \text{II'} & -\frac{7}{5} \cdot \frac{15}{k} \cdot \frac{15}{k} = -\frac{21}{k} \quad \Leftrightarrow k = 15 \end{array}$$

c) $k = -9$ oder $k = 9$.

d) $k = -7{,}5$; [$k = 0$ ist keine Lösung.]

110/22. a) 2. Lösung $-\sqrt{2}$; also $x^2 - 2 = 0$

b) 2. Lösung $1 + \sqrt{3}$; also $x^2 - 2x - 2 = 0$

c) 2. Lösung $3{,}5 - \sqrt{17}$; also $x^2 - 7x - 4{,}75 = 0$

d) 2. Lösung $-3 + 2\sqrt{5}$; also $x^2 + 6x - 11 = 0$

e) 2. Lösung $0{,}6+\sqrt{0{,}7}$; also $x^2-1{,}2x-0{,}34=0$

f) 2. Lösung $\frac{1}{3}(2-\sqrt{3})$; also $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}=0$

g) 1. Lösung $-1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 2. Lösung $-1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; also $x^2+2x+\frac{1}{2}=0$

h) 1. Lösung $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$; 2. Lösung $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$; also $x^2-x-\frac{7}{4}=0$

110/23. a) $(r+\sqrt{7})+(r-\sqrt{7})=-6 \quad \Leftrightarrow r=-3$
$k=(-3+\sqrt{7})+(-3-\sqrt{7})=2$

b) $(r-4\sqrt{11})+(r+4\sqrt{11})=22 \quad \Leftrightarrow r=11$
$k=(11-4\sqrt{11})+(11+4\sqrt{11})=-55$

c) $(r+2\sqrt{5})(r-2\sqrt{5})=-16 \quad \Leftrightarrow r=-2$ oder $r=2$, $k=-2r$
Es gibt zwei Lösungen: $k=-4$ oder $k=4$.

d) $(r+\sqrt{0{,}5})(r-\sqrt{0{,}5})=-0{,}25 \quad \Leftrightarrow r=-0{,}25$ oder $r=0{,}25$
$k=-0{,}5$ oder $k=0{,}5$.

e) $-2r=-\frac{10}{k}$ und $(r-\sqrt{3})(r+\sqrt{3})=-\frac{10}{k}$
$r=\frac{5}{k}$ und $r^2-3=-\frac{10}{k}$

$3k^2-10k-25=0$, also $k=-\frac{5}{3}$ oder $k=5$

f) $-2r=\frac{16}{k}$ und $r^2-216=\frac{120}{k}$
$27k^2+15k-8=0$, also $k=-\frac{8}{9}$ oder $k=\frac{1}{3}$

110/24. a) $y_1=10$, $y_2=7$; also $y^2-17y+70=0$

b) $y_1=\frac{10}{7}$, $y_2=86$; also $y^2-\frac{612}{7}y+\frac{860}{7}=0$

110/25. a) $\overline{AE}=:x_1 \quad \overline{EB}=:x_2$ ferner $b>0$ und $c>0$.
$x_1x_2=c$, $x_1+x_2=b$
Nach VIETA sind x_1 und x_2 die Lösungen von
$x^2-bx+c=0$, umgestellt $x^2+c=bx$ Typ (B2)

b) Konstruktion der Quadratseite x_2: Nach a gilt

$x_2^2 - bx_2 = -c$

$x_2^2 - bx_2 + (b/2)^2 = (b/2)^2 - c$

$(x_2 - b/2)^2 = (b/2)^2 - c$

1.Fall: $x_2 > \frac{b}{2}$ $\quad x_2 - b/2 = \sqrt{(b/2)^2 - c} \Leftrightarrow x_2 = b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c}$

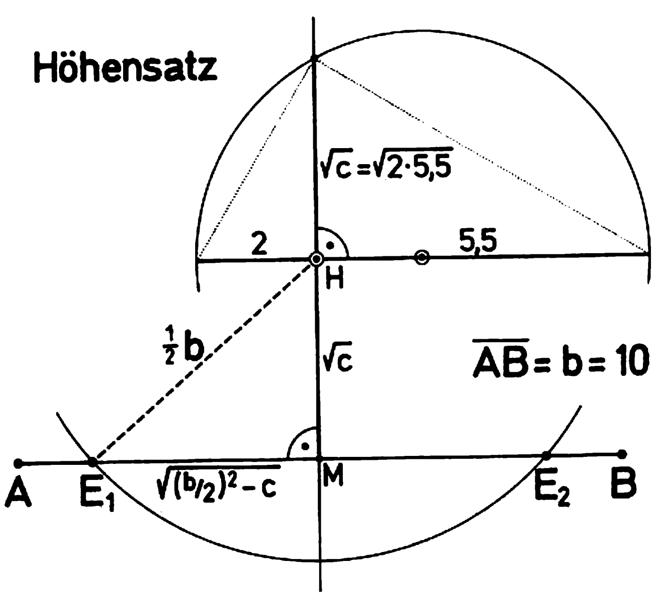
2.Fall: $x_2 < \frac{b}{2}$ $\quad b/2 - x_2 = \sqrt{(b/2)^2 - c} \Leftrightarrow x_2 = b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - c}$

Man erhält $\sqrt{(b/2)^2 - c}$ als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $b/2$ und der Kathete $\sqrt{c}$. Man muss also zuerst in einer Nebenkonstruktion nach dem Höhensatz oder dem Kathetensatz $\sqrt{c}$ konstruieren.

Im 1. Fall ist $\overline{ME_1} = x_2 - \frac{b}{2}$, also $\overline{BE_1} = x_2$.
Die Rechtecksseite ist dann $x_1 = \overline{AE_1}$.

Im 2. Fall ist $\overline{ME_2} = \frac{b}{2} - x_2$, also $\overline{E_2B} = x_2$.
Die Rechtecksseite ist dann $x_1 = \overline{AE_2}$.

Zusammenfassung: $\overline{AE_1}$ und $\overline{E_1B}$ sind die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - bx + c = 0$.

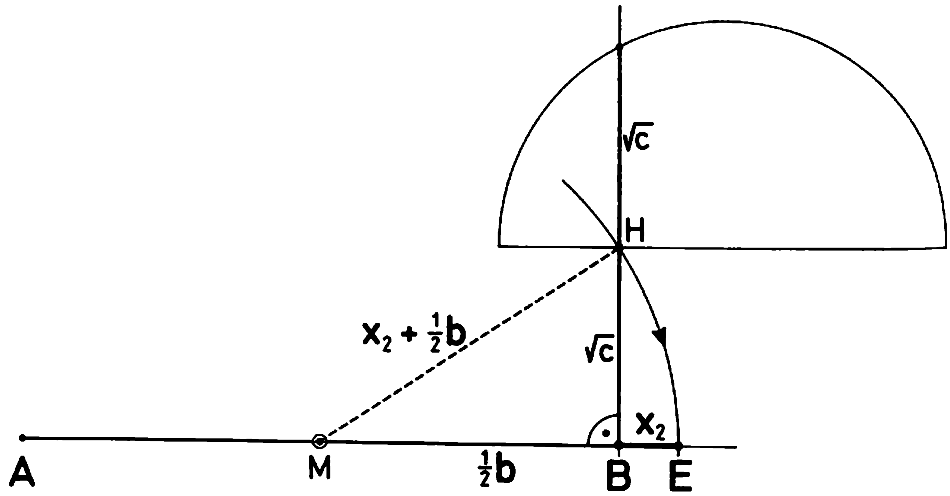


c) $\overline{AE} =: x_1 \quad \overline{BE} =: x_2$ ferner $b > 0$ und $c > 0$.
$x_1 - x_2 = b, \quad x_1 x_2 = c$

1) $-x_1 + x_2 = -b \quad \Leftrightarrow \quad (-x_1) + x_2 = -b$
$x_1 x_2 = -c \quad \Leftrightarrow \quad (-x_1)x_2 = -c$
Nach VIETA sind $-x_1$ und x_2 die Lösungen von
$x^2 + bx - c = 0$, umgestellt $x^2 + bx = c$ Typ (B1)

2) $x_1 + (-x_2) = b$
$x_1(-x_2) = -c$
Nach VIETA sind x_1 und $-x_2$ die Lösungen von
$x^2 - bx - c = 0$, umgestellt $x^2 = bx + c$ Typ (B3)

d) 1) Konstruktion der Quadratseite x_2 nach **c 1**:
$x_2^2 + bx_2 = c$
$(x_2 + {}^b/_2)^2 = ({}^b/_2)^2 + c$
$x_2 + {}^b/_2$ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit ${}^b/_2$ und $\sqrt{c}$ als Katheten. In einer Nebenkonstruktion ist $\sqrt{c}$ zu konstruieren.
$\overline{MH} = \overline{ME} = x_2 + {}^b/_2$, also $\overline{BE} = x_2$



2) Konstruktion der ganzen Rechtecksseite nach **c 2**:
$x_1^2 = bx_1 + c \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 - bx_1 = c$
$(x_1 - {}^b/_2)^2 = ({}^b/_2)^2 + c$
Konstruktion wie unter **1**.
Jetzt ist aber $\overline{MH} = \overline{ME} = x_1 - {}^b/_2$, also $\overline{AE} = x_1$.

Aufgaben zu 3.6

112/1. **a)** $x + y = xy$

$x + y = x^2 - y^2 \Rightarrow (x\,|\,y) = (0\,|\,0)$ oder $(x\,|\,y) = (\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})\,|\,\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}))$

b) I $\quad x + y = xy$

II $\quad x + y = x^2 + y^2 \qquad 2 \cdot I + II \quad 3(x + y) = (x + y)^2$

$\Rightarrow (x\,|\,y) = (0\,|\,0)$ oder $y^2 - 3y + 3 = 0$

Diskriminante $= -3$, keine weitere Lösung!

112/2. $a : u = v : b$

$u + v = c$

$u \cdot v = ab \qquad \Rightarrow x^2 - cx + ab = 0 \qquad \Rightarrow x = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - 4ab})$

für $c = 13$, $a = 4$ und $b = 10$ ergibt sich $u = x_1 = 5$, $v = x_2 = 8$.

112/3. $\frac{x + 10y}{x + y} = \frac{x + y}{3}$

$y + 10x = x + 10y + 45$

$\Rightarrow y = 2$ [oder $y = \frac{5}{4}$] $\Rightarrow x = 7$, die Zahl heißt 27.

112/4. $(10x + y) + (10y + x) = 165$

$(10x + y)(10y + x) = 6786$

$\Rightarrow x = 7$ oder $x = 8$, $y = 8$ oder $y = 7$. Die Zahl heißt 78 oder 87.

112/5. $(a - x)^2 + (a + x)^2 = a \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(a - 2a^2) = \frac{1}{2}a(1 - 2a)$

Es gibt nur Lösungen, wenn $a(1 - 2a) \geq 0$ ist, das heißt, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

Es gibt genau eine Lösung, nämlich null, wenn $a = 0$ oder $a = \frac{1}{2}$ gilt.

$a = 0{,}01 \Rightarrow x = \pm\frac{7}{100}$

112/6. $\frac{x + 42}{x - 42} = \frac{x}{8} \qquad \Rightarrow x = 56$ oder $x = -6$

112/7. $\frac{(a + x) + (a - x) + ax + a/x}{4} = a \Rightarrow a(x - 1)^2 = 0$

$a = 0$: x beliebig oder $a \neq 0$: $x = 1$.

112/8. $1000 + 100y + x = 946 + 10x + y$
$(10x + y)(100y + x) = 655371$ $\Rightarrow$ $x = 83,\ y = 7$ als positive Lösung
Die Zahlen heißen 837, 783 und 1783.

112/9. $\sqrt{10x + y} = x + y - 2$
$10y + x = (x + y)^2 + 3$ $\Rightarrow$ $x = 2,\ y = 5$ als ganzzahlige Lösung
Die Zahl heißt 25.

112/10. Anzahl der Diagonalen im n-Eck = $\frac{1}{2}n(n-3)$,
das 13-Eck hat 65 Diagonalen, das 100-Eck hat 4850 Diagonalen.

112/11. Es gibt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Partien. 23 Spieler nahmen teil. 22

112/12. Maximal $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte entstehen bei n Geraden.
18 Geraden erzeugen höchstens 153 Schnittpunkte.

112/13. Bei n Punkten gibt es maximal $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungsgeraden.
45 Punkte liefern maximal 990 Geraden.

113/14. **a)** $\frac{n(n-3)}{2} = n \quad \Rightarrow \quad n = 5$

b) $\frac{n(n-1)}{2} = 499500 \quad \Rightarrow \quad n = 1000$

113/15. $n^2 + (n + 7)^2 = 289 \quad \Rightarrow \quad n = 8$
Das eine Quadrat hat 8, das andere 15 Münzen in einer Reihe.

113/16. $x(x + 9) = 90 \Rightarrow x = 6$. Es gibt 6 Reihen zu je 15 Bäumen.

113/17. $\frac{y}{x+5} = \frac{x+5}{x}$ $x :=$ Alter der Tochter jetzt, $y :=$ Alter des Vaters jetzt
$y + 3 = 3[(x + 3) + (x + 8)] \Rightarrow x = 1,\ y = 36$
Der Vater ist jetzt 36 Jahre, der Sohn 6 Jahre und die Tochter 1 Jahr alt.

113/18. $800(1+p)(1{,}005+p) = 861{,}12 \quad \Rightarrow \quad p = 3{,}5\%$

Im ersten Jahr war der Zinsfuß 3,5%, im zweiten 4%.

113/19. $120 = 3000 \cdot \frac{k}{12} \cdot 0{,}06 + t_1$

$120 = (3000 - t_1)\frac{k}{12} \cdot 0{,}06 + t_2$

$3000 = t_1 + t_2 + 2878{,}8 \quad \Rightarrow \quad k = 4$ Monate

113/20. $E(1+p)(1+2p) = \frac{33}{25}E; \quad p > 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}1 = 10\%$

113/21. x Gramm Salz wurden zuerst ins Wasser geschüttet.

$\frac{x}{600+x} + \frac{9}{400} = \frac{x+15}{615+x}, \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 25$

113/22. $\frac{y}{z} + \frac{1}{20} = \frac{y+20}{z+20}, \quad \frac{y+20}{z+115} = \frac{2}{25}, \quad z > 0 \quad \Rightarrow \quad z = 360, \; y = 18, \; x = 342.$

Im Glas waren 342 g Wasser, auf dem Löffel 18 g Zucker.

114/23. $x^2 + y^2 = (x+8)^2$

$2x + y + 8 = 30 \quad \Rightarrow \quad x = 5, \; y = 12,$ Hypotenuse $= 13$

114/24. $pq = 36^2$

$p + q = 78 \quad \Rightarrow \quad p = 54$ oder $p = 24$

$q = 24$ oder $q = 54$

Teilverhältnis $= \frac{24}{54} = \frac{4}{9}$ beziehungsweise $\frac{9}{4}$.

114/25. $x^2 + (x+5)^2 = (2y+7)^2$

$x^2 = y(2y+7), \quad x, y > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 15, \; y = 9$

Die Seiten sind 15 cm, 20 cm und 25 cm lang.

114/26. $2x + 5 = y - 30$

$x \cdot y = (2x+5)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5, y_1 = 45, \qquad x_2 = \frac{5}{2}, y_2 = 40$

1. Dreieck: Hypotenuse 50, Katheten $15\sqrt{10}$ und $5\sqrt{10}$
2. Dreieck: Hypotenuse 42,5 , Katheten $10\sqrt{17}$ und $\frac{5}{2}\sqrt{17}$

114/27. $a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 14$

$\frac{1}{2}ab = 7 \;\wedge\; a, b > 0 \quad \Rightarrow \; a = 4 \pm \sqrt{2}\,,\; b = 4 \mp \sqrt{2}\,, c = 6$

114/28. $24^2 = x(60 - x)$. Die Abschnitte sind 12 und 48.

114/29. $2x + 2y + 8 = 2x + 2y + y - x$

$x \cdot y + 67 = (x + \frac{y}{2})(y - \frac{y}{2})$

1. Lösung: Seiten 14 und 22 ; 2. Lösung: Seiten 10 und 18.

114/30. $x + y = 23{,}6$

$x \cdot y = 120$ Länge = 16 m, Breite = 7,5 m

114/31. $2x + y = 87$

$x \cdot y = 540$

1. Lösung: $x = 36$ m, $y = 15$ m
2. Lösung: $x = 7{,}5$ m, $y = 72$ m

Die 2. Lösung ist unbrauchbar, weil in den Ecken keine Pfosten stehen.

114/32. Mit den Abschnitten xr und $2r - xr$ gilt:

$\left(\frac{5}{12}\right)^2 = x(2 - x) \quad \Rightarrow \; x = 1 \pm \frac{\sqrt{119}}{12}$

Die Abschnitte sind $\left(1 + \frac{\sqrt{119}}{12}\right)r$ und $\left(1 - \frac{\sqrt{119}}{12}\right)r$.

114/33. $x \cdot (13 - x) = 2{,}8 \cdot 11{,}2 \quad \Rightarrow \; x = 9{,}8$ [oder 3,2]

Die Abschnitte sind 9,8 oder 3,2.

115/34. Ist x (in mm) die Länge der halben kleineren Sehne, dann gilt:

$13^2 - x^2 = 27^2 - (30 + x)^2 \quad \Rightarrow \; x = 5$. Der gesuchte Abstand ist 12.

115/35. Ist x ein Drittel der langen Sehne, dann gilt:

$\sqrt{1^2 - (\frac{x}{2})^2} + \sqrt{2^2 - (\frac{3x}{2})^2} = 1 \quad \Rightarrow \; x = \frac{1}{2}\sqrt{7}$

Die lange Sehne ist $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ cm, die kurze $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ cm lang.

Die Abstände von den Mittelpunkten sind:

$\frac{1}{4}$ cm von M_1 und $\frac{3}{4}$ cm von M_2 .

115/36. $x(5 + x) = 2 \cdot 12,\ x > 0 \quad \Rightarrow x = 3$
Die Abstände sind 3 und 8.

115/37. Ist t die Länge der Tangentenstrecke, dann gilt: $t^2 = (r + x)^2 - r^2$
a) $x = 0$ **b)** $x = 0$ oder $x = \frac{2r}{n^2 - 1}$ **c)** $x = (\sqrt{2} - 1)r$
d) $x = (\sqrt{n^2 + 1} - 1)r$

115/38. Ist x das kleinere Stück, dann gilt
$\frac{x}{10 - x} = \frac{10 - x}{10}, x < 10 \quad \Rightarrow x = 15 - 5\sqrt{5}$

115/39. $r = \frac{17}{2}$; $(\frac{15}{2})^2 = x(17 - x) \quad \Rightarrow x = \frac{25}{2}$ oder $x = \frac{9}{2}$

115/40. Ist x die ursprüngliche Würfelkante, dann gilt
$x(x - 2) + x(x - 1) + (x - 1)(x - 2) = 206 \quad \Rightarrow x = 2 + \sqrt{69}$
Der Rauminhalt wurde um $x(3x - 2) = 215 + 10\sqrt{69}$ [cm³] verkleinert.

115/41. Geschwindigkeit x [km/min], Flugzeit t [min].
$9t + xt = 460$
$9\frac{1}{3}(t - \frac{5}{4}) + (x + \frac{1}{3})(t - \frac{5}{4}) = 460$
$\Rightarrow t = 15, \quad x = \frac{65}{3}$ oder 1300 [km/h]

116/42. x in km/min ist die Normalgeschwindigkeit,
t in min ist die Flugzeit bis zur Mitte bei Normalgeschwindigkeit
$xt - 26\frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})(t - 1)$
$xt + 26\frac{1}{4} = (x + 1)(t - 1) \quad \Rightarrow t = 36, \quad x = 8\frac{3}{4}$, 525 km/h
Frankfurt – London = 2xt = 630 [km]

116/43. x in km/min ist die ursprüngliche Geschwindigkeit.
$\frac{960}{x + 0{,}4} = \frac{960}{x} - 10 \quad \Rightarrow x = 6$ oder 360 [km/h]
$\Rightarrow$ Zeit 160 min beziehungsweise 150 min.

116/44. x in km/min war die Geschwindigkeit.
$\frac{24}{x} - 12 = \frac{24}{x + 1/15} \quad \Rightarrow x = 20$. Er hätte um 15.18 Uhr in A abfahren sollen.

116/45. v in m/s ist die Geschwindigkeit.

$(20v)^2 + (10 + 10v)^2 = 20^2 \qquad \Rightarrow v = 0{,}6$ oder $v = -1$

116/46. v in kn ist die Geschwindigkeit von B.

$(0{,}5v)^2 + (2 + 0{,}5v)^2 = 10^2 \qquad \Rightarrow v = 12$ oder $v = -16$

116/47. x sei der Umfang des Hinterrads in m, y der des Vorderrads in m

$(\frac{450}{x} + 120)\cdot y = 450$

$(\frac{900}{2x+1} + 75)(y + \frac{1}{2}) = 450 \qquad \Rightarrow x = 2{,}5 \qquad y = 1{,}5$

116/48. $\frac{p+160}{T+60} = \frac{p}{T} \qquad \frac{p-72}{273} = \frac{p}{T} \qquad \Rightarrow p = 801$ [hPa], $T \approx 300$ [K]

116/49. $1000\cdot 48 = (1000 - 0{,}8x)(100 - x) \quad \Rightarrow x \approx 5$

Die Flüssigkeit ist etwa 5cm hoch.

116/50. $50\cdot 960 = (50 - x)(2500 - 10x) \qquad \Rightarrow x = 28$

Das Wasser ist etwa 28 cm ins Rohr eingedrungen.

Aufgaben zu 3.7.1

120/1. **a)** $D =]-\infty ; 2\frac{1}{5}[$; $L = \{-1 ; 2\}$

b) $D = [-2\frac{1}{3} ; 2]$; $L = \{3\}$

120/2. **a)** $D = \{\ \}$; $L = \{\ \}$

b) $D = [-1 ; +\infty]$; $L = \{2\}$

120/3. **a)** $D = [-3 ; +\infty[$; $L = \{0\}$

b) $D = [-\frac{1}{3} ; +\infty]$; $L = \{1 ; 5\}$

120/4. **a)** $D = [-\frac{3}{4} ; +\infty[$; $L = \{1 - \sqrt{3} ; 1 + \sqrt{3}\}$

b) $D = [-3\frac{4}{5} ; +\infty[$; $L = \{\frac{1}{4} ; 9\}$

120/5. **a)** Sicher $x \geq -4$; $L = \{-1 ; 2{,}5\}$

Probe für -1: $LS = \sqrt{5 - 2 + 6} = 3$; $RS = -1 + 4 = 3$

Probe für $2{,}5$: $LS = \sqrt{31{,}25 + 5 + 6} = 6{,}5$; $RS = 2{,}5 + 4 = 6{,}5$

b) Sicher $x \geq -\frac{7}{4}$; $L = \{\frac{1}{30}(\sqrt{721} - 59)\}$

Probe: $LS = \sqrt{\frac{1}{900}(721 - 118\sqrt{721} + 3481) - \frac{1}{10}(\sqrt{721} - 59) + 3} =$

$= \frac{1}{30}\sqrt{4202 - 118\sqrt{721} - 90\sqrt{721} + 5310 + 2700} =$

$= \frac{1}{30}\sqrt{12212 - 208\sqrt{721}}$

$RS = \frac{1}{30}(4\sqrt{721} - 236) + 7 = \frac{1}{30}(4\sqrt{721} - 26) =$

$= \frac{1}{30}\sqrt{11536 - 208\sqrt{721} + 676} =$

$= \frac{1}{30}\sqrt{12212 - 208\sqrt{721}}$

120/6. **a)** Sicher $x \geq -\frac{1}{2}$; $L = \{\frac{1}{2}\}$

Probe $LS = \sqrt{3 + 10 + 3} = 4$; $RS = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 4$

b) Sicher $x \geq \frac{2}{3}$; $L = \{\ \}$

120/7. **a)** $D = [-\frac{1}{2}\,;+\infty[$; $\quad L = \{0\,;40\}$

b) $D = [-\frac{1}{2}\,;+\infty[$; im Laufe der Rechnung ergibt sich als weitere Bedingung $x \le -4$; somit $L = \{\ \}$

120/8. **a)** $D = [-\frac{4}{3}\,;\frac{5}{4}]$; $\quad L = \{-1\,;\frac{31}{49}\}$

b) $D = [-\frac{3}{2}\,;+\infty[$; $\quad L = \{\ \}$,

da sich als weitere Bedingung $x \le -1\frac{12}{17}$ ergibt.

120/9. **a)** $D = [1\,;+\infty[$; $\quad L = \{5\}$

b) $D = [1\,;3]$; $\quad L = \{1{,}2\,;2\}$

121/10. **a)** $D = \mathbb{R}_0^+$; $\quad L = \{\frac{1}{12}\,;\frac{1}{4}\}$

b) $D = [1\,;2]$; $\quad L = \{\ \}$

121/11. **a)** Sicher $x \ge \frac{5}{3}$; $\quad L = \{3\}$, da sich zusätzlich $x \le 5$ ergibt.

b) Sicher $x \ge 1{,}5$; $\quad L = \{\ \}$

121/12. **a)** Sicher $x \ge -\frac{5}{4}$; $\quad L = \{-\frac{5}{4}\,;\frac{11}{4}\}$

b) Sicher $x \le \frac{3}{2}$; $\quad L = \{-\sqrt{2}\}$, da sich zusätzlich $x \le 1$ ergibt.

121/13. **a)** Im Laufe der Rechnung ergibt sich $x \le -\frac{1}{2}$. $\quad L = \{-1\}$

b) Im Laufe der Rechnung ergibt sich $x \ge -\frac{5}{2}$. $\quad L = \{-1\frac{19}{22}\,;\frac{1}{2}\}$

121/14. **a)** Zunächst $x \le 1$, dann $x \le -\frac{1}{2}$. $\quad L = \{-3\}$

b) Zunächst $x \le 1$, dann $x \le \frac{2}{7}$. $\quad L = \{\frac{11}{61}\}$

121/15. **a)** $D = [\frac{1}{2}\,;+\infty[$

a	$-\infty < a \le 4$	$4 < a \le 16$	$16 < a < +\infty$
L	$\{\ \}$	$\{\frac{6}{a-4}\}$	$\{\ \}$

b) $D = [-2a\,;+\infty[$

$x = -a$ oder $x = 3a$

Nur für $a \geq 0$ liegen diese Werte in D. Also

a	$-\infty < a < 0$	0	$0 < a < +\infty$
L	{ }	{0}	$\{-a\,;3a\}$

c) $D = \mathbb{R}_0^+$

$x = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2-12})$, falls $|a| \geq 2\sqrt{3}$

1. $a \geq 2\sqrt{3}$

1.1 $-a + \sqrt{a^2-12} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-12} \geq a$, falsch

1.2 $-a - \sqrt{a^2-12} \geq 0$, falsch.

2. $a \leq -2\sqrt{3}$

2.1 $\sqrt{a^2-12} \geq a$, wahr

2.2 $-\sqrt{a^2-12} \geq a$, wahr.

Ergebnis:

a	$-\infty < a < -2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3} < a < +\infty$
L	$\{\frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2-12})\}$	$\{\sqrt{3}\}$	{ }

d) $D = [-\frac{2}{3}\,;+\infty[$

$x = -4 \pm 2\sqrt{2a-4}$, falls $a \geq 2$

Ist $-4 \pm 2\sqrt{2a-4} \geq -\frac{2}{3}$?

$\pm 2\sqrt{2a-4} \geq \frac{10}{3}$; ist nicht erfüllt für das Minuszeichen.

Für das Pluszeichen ergibt sich $2a-4 \geq \frac{25}{9} \Leftrightarrow a \geq \frac{61}{18}$, somit:

a	$-\infty < a < \frac{61}{18}$	$\frac{61}{18} \leq a < +\infty$
L	{ }	$\{-4 + 2\sqrt{2a-4}\}$

121/16. a) Im Laufe der Rechnung ergibt sich $a \leq 1$ und schließlich $x = \pm\sqrt{a}$, falls $a \geq 0$.

Probe: LS $= \sqrt{1 + a \pm 2\sqrt{a}} + \sqrt{1 + a \mp 2\sqrt{a}} =$

$= \sqrt{(1 \pm \sqrt{a})^2} + \sqrt{(1 \mp \sqrt{a})^2} =$

$= |1 \pm \sqrt{a}| + |1 \mp \sqrt{a}| =$

$= 1 \pm \sqrt{a} + 1 \mp \sqrt{a} = 2 = \text{RS}$

Ergebnis:

a	$-\infty < a < 0$	$0 \leq a \leq 1$	$1 < a < +\infty$
L	{ }	$\{-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}\}$	{ }

b) Im Laufe der Rechnung ergibt sich $a \geq 1$und schließlich $x = \pm\sqrt{a}$.

Probe: $\quad LS = \sqrt{1 + a \pm 2\sqrt{a}} - \sqrt{1 + a \mp 2\sqrt{a}} =$

$= \sqrt{(1 \pm \sqrt{a})^2} - \sqrt{(1 \mp \sqrt{a})^2} =$

$= \quad |1 \pm \sqrt{a}| - |1 \mp \sqrt{a}| =$

$$= \begin{cases} 1 + \sqrt{a} - (-(1-\sqrt{a})) = 2 = RS \\ -(1-\sqrt{a}) - (1 + \sqrt{a}) = -2 \neq RS. \end{cases}$$

Ergebnis:

a	$-\infty < a < 1$	$1 \leq a < +\infty$
L	$\{\ \}$	$\{\sqrt{a}\}$

121/17. a) $x = 0$ oder $x = 2a + 1$

1) Probe für $x = 0$: $\quad \left.\begin{array}{l} LS = \sqrt{a^2} = |a| \\ RS = -a \end{array}\right\}$ LS = RS, falls $a \leq 0$

2) Probe für $x = 2a + 1$: $\quad \left.\begin{array}{l} LS = |a + 1| \\ RS = a + 1 \end{array}\right\}$ LS = RS, falls $a \geq -1$

Ergebnis:

a	$-\infty < a < -1$	$-1 \leq a \leq 0$	$0 < a < +\infty$
L	$\{0\}$	$\{0; 2a+1\}$	$\{2a + 1\}$

b) **1.** $a = 0 \Rightarrow L = \mathbb{R}$

2. $a \neq 0$

$ax^2 - (2a + 1)x + (a - 1) = 0$, $\quad$ Diskriminante $= 8a + 1$

2.1 $a < -\frac{1}{8} \Rightarrow L = \{\ \}$

2.2 $a = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -3$

Probe: $\quad \left.\begin{array}{l} LS = \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \\ RS = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -3 \in L$

2.3 $a > -\frac{1}{8} \Rightarrow x = \dfrac{2a + 1 \pm \sqrt{8a + 1}}{2a}$

Probe: RS $= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{8a + 1})$. RS ist im Fall des Minuszeichens nicht negativ, wenn zusätzlich $a \leq 0$. Dann gilt

$RS = \sqrt{\frac{1}{4}(1 \pm 2\sqrt{8a + 1} + 8a + 1)} = \sqrt{2a + \frac{1}{2} \pm \sqrt{8a + 1}}$

$LS = \sqrt{a + \frac{1}{2} \pm \sqrt{8a + 1} + a} = RS$

Ergebnis:

a	$-\infty < a < -\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8} < a < 0$	0	$0 < a < +\infty$
L	$\{\ \}$	$\{-3\}$	$\left\{\frac{2a + 1 - \sqrt{8a + 1}}{2a}; \frac{2a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2a}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\frac{2a + 1 + \sqrt{8a + 1}}{2a}$

121/18. a)

a	$a<b$	$a=b$	$a>b$
L	$\{-a\}$	$\{-a;-b\}$	$\{-b\}$

b) $\sqrt{3a-2b-x}\cdot\sqrt{3a-2b+x}=3a-2b+x$

$x=2b-3a$ oder $x=0$

1. Probe für $x=0$: $\left.\begin{array}{l}LS=2\sqrt{3a-2b}\\ RS=2\sqrt{3a-2b}\end{array}\right\}$ 0 ist Lösung, falls $a\ge\frac{2}{3}b$
2. Probe für $x=2b-3a$:

$\left.\begin{array}{l}LS=\sqrt{6a-4b}\\ RS=\sqrt{6a-4b}\end{array}\right\}$ $2b-3a$ ist Lösung, falls $a\ge\frac{2}{3}b$

Ergebnis:

a	$a<\frac{2}{3}b$	$a=\frac{2}{3}b$	$a>\frac{2}{3}b$
L	$\{\,\}$	$\{0\}$	$\{0;2b-3a\}$

121/19. a) Man erkennt sofort: $x\ge 0$ und $x\ge -a$. Die Umformungen zu $x^2-x-a=0$ sind dann Äquivalenzumformungen. Man erhält ferner, dass nur für $a\ge-\frac{1}{4}$ Lösungen existieren können.

1. Für $a=-\frac{1}{4}$ ergibt sich $x=\frac{1}{2}$.

Probe: $\left.\begin{array}{l}LS=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}=1\\ RS=\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}}\;=1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\in L$

2. Für $a>-\frac{1}{4}$ erhält man $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a}$.

Die Probe ist mühsam. Man überlegt daher

2.1 $a>0$, Minuszeichen nicht möglich, da sonst $x_2<0$.

2.2 $a=0$, $x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$, $\quad x_1=1,\quad x_2=0$

2.3 $-\frac{1}{4}<a<0$, dann muss $x>-a$ sein.

2.3.1 $\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+a}>-a$

$\sqrt{\frac{1}{4}+a}<a+\frac{1}{2}$; beide Seiten sind positiv!

$a+\frac{1}{4}<a^2+a+\frac{1}{4}\;\Leftrightarrow\;0<a^2$ wahr

2.3.2 $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}>-a$

$\sqrt{\frac{1}{4}+a}>-a-\frac{1}{2}$, LS positiv, RS negativ, also wahr.

Ergebnis:

a	$-\infty<a<-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}<a<0$	0	$0<a<+\infty$
L	$\{\,\}$	$\{\frac{1}{2}\}$	$\left\{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+a};\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}\right\}$	$\{0;1\}$	$\left\{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}\right\}$

b) Man erhält $ax(ax + b) = 0$

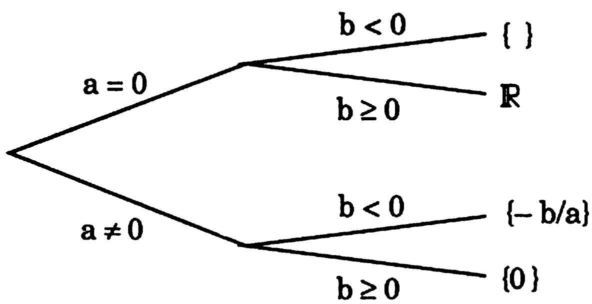
1. $a = 0$: $\left.\begin{array}{l} LS = \sqrt{|b|} \\ RS = \sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b \geq 0: & L = \mathbb{R} \\ b < 0: & L = \{\ \} \end{array}\right.$

2. $a \neq 0$

2.1 $x = 0$: $\left.\begin{array}{l} LS = \sqrt{|b|} \\ RS = \sqrt{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b \geq 0: & 0 \in L \\ b < 0: & 0 \notin L \end{array}\right.$

2.2 $x = -\frac{b}{a}$: $\left.\begin{array}{l} LS = \sqrt{|b| + b} \\ RS = \sqrt{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b > 0: & -\frac{b}{a} \notin L \\ b \leq 0: & -\frac{b}{a} \in L \end{array}\right.$

Ergebnis:



121/20. a) $x :=$ Anzahl der Gulden am Anfang

$x + x + (\sqrt{2x} + 2) + (x + x + \sqrt{2x} + 2)^2 = 5550$; $\quad u := 2x + \sqrt{2x} + 2$

$$u^2 + u = 5550$$

$u = -75$	oder	$u = 74$
$2x + \sqrt{2x} + 77 = 0$	oder	$2x + \sqrt{2x} - 72 = 0$
	$z := \sqrt{2x}$	
$z^2 + z + 77 = 0$	oder	$z^2 + z - 72 = 0$
Diskriminante $= -307$		$z = -9$ oder $z = 8$
keine Lösung		$\sqrt{2x} = -9$ oder $\sqrt{2x} = 8$
		keine Lösung $\quad x = 32$

121/21. $x + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x}} = 15$; $\quad x \geq 0$. $\quad z := \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$, also $z \geq 0$

$z^2 + 2z - 15 = 0$, $\quad z_1 = -5$ ist keine Lösung

$z_2 = 3$, also $\sqrt{x + 2\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} = 9$; $\quad x \leq 9$

$x_1 = 11 + 2\sqrt{10}$ ist keine Lösung

$x_2 = 11 - 2\sqrt{10}$

Zur Fußnote

$x + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x + 2\sqrt{x}} = 10$; (♣) $x \geq 0$. $z := \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$, also $z \geq 0$

$z^2 + 2z - 10 = 0$, $z_1 = -\sqrt{11} - 1$ ist keine Lösung

$z_2 = \sqrt{11} - 1$, also $\sqrt{x + 2\sqrt{x}} = \sqrt{11} - 1$

(in $\mathbb{R}_0^+$) $\Leftrightarrow$ $x + 2\sqrt{x} = 12 - 2\sqrt{11}$ (*)

Trick CARDANOs : Auf beiden Seiten 1 addieren

$(\sqrt{x} + 1)^2 = 13 - 2\sqrt{11}$

$\sqrt{x} + 1 = \underset{(-)}{+}\sqrt{13 - 2\sqrt{11}}$ (Das Minuszeichen ist nicht möglich.)

$\sqrt{x} = \sqrt{13 - 2\sqrt{11}} - 1$

$x = 14 - 2\sqrt{11} - 2\sqrt{13 - 2\sqrt{11}}$

Da in $\mathbb{R}_0^+$ alle Umformungen Äquivalenzumformungen sind, ist die angegebene Zahl Lösung der Aufgabe.

Wer in (*) den Trick CARDANOs nicht sieht: $2\sqrt{x} = 12 - 2\sqrt{11} - x$ (**)

$\Rightarrow$ $x^2 + 4(\sqrt{11} - 7)x + 4(47 - 12\sqrt{11}) = 0$

$x = \frac{1}{2}(4(7 - \sqrt{11}) \pm 4\sqrt{13 - 2\sqrt{11}}) = 2(7 - \sqrt{11}) \pm 2\sqrt{13 - 2\sqrt{11}}$

Der Taschenrechner zeigt, dass das Pluszeichen nicht möglich ist, da sich für x sonst ein Wert > 10 ergäbe, was nicht sein kann. Somit

$x = 2(7 - \sqrt{11}) - 2\sqrt{13 - 2\sqrt{11}}$, also die Lösung von oben.

Probe: Wir berechnen $2\sqrt{x}$ aus (**):

$2\sqrt{x} = 12 - 2\sqrt{11} - 14 + 2\sqrt{11} + 2\sqrt{13 - 2\sqrt{11}} = -2 + 2\sqrt{13 - 2\sqrt{11}}$. Damit ist

$x + 2\sqrt{x} = 14 - 2\sqrt{11} - 2\sqrt{13 - 2\sqrt{11}} - 2 + 2\sqrt{13 - 2\sqrt{11}} = 12 - 2\sqrt{11}$

In (♣) eingesetzt: $12 - 2\sqrt{11} + 2\sqrt{12 - 2\sqrt{11}} = 10$

$\sqrt{12 - 2\sqrt{11}} = \sqrt{11} - 1$ (in $\mathbb{R}_0^+$) $\Leftrightarrow$ $12 - 2\sqrt{11} = 11 - 2\sqrt{11} + 1$, wahr

121/22. a) $x \geq 0$; $(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$; $L = \{1\}$

b) $x \geq 0$; $L = \{4\}$ **c)** $x \geq 0$; $L = \{\ \}$

121/23. a) $D =]-1; +\infty[$; $z := \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x + 1}}$; $z_1 = 1$; $z_2 = 2$.

$L = \{2 - \sqrt{7}; 0; 1; 2 + \sqrt{7}\}$

b) Statt D mühsam zu bestimmen aus

$[x(7x + 2) > 0$ und $x^2 > 2]$ oder $[x(7x + 2) < 0$ und $x^2 < 2]$,

macht man die Probe:

$x = 1$: LS = 3; RS $= 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3$

$x = -\frac{9}{8}$: LS = 3; RS $= 2 + 3 \cdot \frac{1}{3} = 3$.

Also $L = \{-\frac{9}{8}; 1\}$

122/24. **a)** $0 < x < 1$; $\quad L = \{\frac{4}{5}\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus ([-1;0] \cup \{\frac{25}{24}\})$; $\quad L = \{\ \}$

122/25. **a)** $\frac{24}{25}(13 + \sqrt{69})$; keine Lösung ist $\frac{24}{25}(13 - \sqrt{69})$. **b)** $-14\frac{2}{7}; 4$

c) Umformung zu $4\sqrt{x^2 - 3x} = (x^2 - 3x) + 4$, $u := \sqrt{x^2 - 3x}$; $L = \{-1; 4\}$

d) $5 + \frac{1}{2}\sqrt{30} + \frac{1}{2}\sqrt{210 + 20\sqrt{30}}$

122/26. **a)** $\frac{1}{2}x + 4\sqrt{x} + 6 + 3 + 1 = 0$; $\quad L = \{100\}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}x} + \frac{8}{9}x + 2 = x$; $\quad L = \{72\}$

c) $x + \frac{1}{3}x + 18\sqrt{x} = 1200$; $\quad L = \{576\}$

Aufgaben zu 3.7.2

124/1. **a)** $-5\,;5$ **b)** $-6\,;6$ **c)** $-7\,;7$ **d)** $\pm\sqrt{\sqrt{2563}}$

e) $-11\,;11$ **f)** $-11\,;11$ **g)** $\pm 11\,;\pm\sqrt{\sqrt{5359}}$

124/2. **a)** $\pm 2\,;\pm\sqrt{3}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $-2\,;2$ **d)** $-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}$

e) $\pm\sqrt{\sqrt{11}-1}$

124/3. **a)** $-2\,;-1;\,1;\,2$ **b)** $-\sqrt{5}\,;\sqrt{5}$ **c)** $-2\,;-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\,;2$

d) $-3\,;-1;\,1;\,3$ **e)** $-5\,;5$ **f)** $-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}$

124/4. **a)** $\{\ \}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $\{\ \}$

124/5. **a)** $-\frac{7}{2}\sqrt{2}\,;0\,;\frac{7}{2}\sqrt{2}$ **b)** $-\frac{9}{4}\,;\frac{9}{4}$ **124/6.** $\pm 2\sqrt{3}$

124/7. **a)** $D=\mathbb{R}\setminus\{-6\,;\frac{1}{3}\}$; Nullstellen des Zählers: $-6\,;-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;6$
Also $L=\{-\frac{1}{3}\,;6\}$
b) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\,;2\}$; Nullstellen des Zählers: $-2\,;0\,;2$
Also $L=\{0\}$

124/8. **a)** Es sei $ax^4+bx^2+c=0$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß a, b und c positiv sind. Dann gilt

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

1. Fall: $b^2-4ac<0 \Rightarrow L=\{\ \}$
2. Fall: $b^2-4ac=0 \Rightarrow x^2=\frac{-b}{2a}<0$. Widerspruch, also $L=\{\ \}$.
3. Fall: $b^2-4ac>0$
Dann ist $\sqrt{b^2-4ac}<b$, der Zähler stets negativ, somit $x^2<0$, also $L=\{\ \}$.

b) Die Umkehrung ist falsch, wie **2 a** und **4 c** zeigen.

Aufgaben zu 3.7.3

127/1.	**a)** $x^2 - x + 1$		**b)** $x^2 + x + 1$		**c)** $x^2 - 2x + 4$	
	d) $4x^2 - 10x + 25$		**e)** $8x^3 + 12x^2 + 18x + 27$			

127/2. **a)** 6; $z^2 + 7z + 42 = 0$; $D = -119$

b) 1; $z^2 + 8z + 8 = 0$; $-4 \pm 2\sqrt{2}$

127/3. $(x-1)^3 = (x+1)^2 + 2$; $x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0$;
4; $x^2 + 1 = 0$; $D = -4$; Quadratseite = 5, Würfelkante = 3

127/4. 5; $x^2 - x + 7 = 0$; $D = -27$

127/5. **a)** 3; $x^2 - 7x - 21 = 0$; $\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{133})$

b) 11; $x^2 + 10x + 110 = 0$; $D = -340$

c) 10; $x^2 + 85x + 2725 = 0$; $D = -3675$

128/6. **a)** 2; $x^2 + 2x + 10 = 0$; $D = -36$

b) 2; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $-4; 2$

c) 5; $x^2 + 5x + 6 = 0$; $-3; -2$

128/7. **a)** 2; $2x^2 + 49x + 98 = 0$; $\frac{1}{2}(-49 \pm 7\sqrt{33})$

b) -2; $x^2 - 12x + 24 = 0$; $6 \pm 2\sqrt{3}$

c) 4; $x^2 + x + 4 = 0$; $D = -15$

128/8. **a)** -3; $x^2 - 6x - 2 = 0$; $3 \pm \sqrt{11}$

b) -2; $x^2 + 4x - 28 = 0$; $-2 \pm 4\sqrt{2}$

c) 5; $x^2 - 4x + 1 = 0$; $2 \pm \sqrt{3}$

d) -3; $x^2 - 9x + 3 = 0$; $\frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{69})$

e) -2; $x^2 + 4x - 7 = 0$; $-2 \pm \sqrt{11}$

f) 3; $x^2 + 9x - 4 = 0$; $\frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{97})$

g) 3; $x^2 - 3x - 6 = 0$; $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{33})$

h) -3; $x^2 - x - 5 = 0$; $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{21})$

128/9. a) $u := x^2$; $u^3 + 3u^2 = 20$; $u = 2$ oder $u^2 + 5u + 10 = 0$
$u = 2$: $x = -\sqrt{2}$ oder $x = \sqrt{2}$
$u^2 + 5u + 10 = 0$ hat -15 als Diskriminante.

b) $u := x^2$; $u^3 + 3u^2 + 10 = 15u$;
$u = 2$ oder $u^2 + 5u - 5 = 0$
$u = 2$ oder $u = \frac{1}{2}(-5 + 3\sqrt{5})$ oder $u = \frac{1}{2}(-5 - 3\sqrt{5})$
$x = \pm\sqrt{2}$ oder $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{5} - 10}$

128/10. a) -2; $x^2 - 2x - 2 = 0$; $1 \pm \sqrt{6}$

b) 6; $x^2 + 6x + 4 = 0$; $-3 \pm \sqrt{5}$

c) -3; $x^2 - 3x - 7 = 0$; $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{37})$

d) -6; $x^2 - 6x + 2 = 0$; $3 \pm \sqrt{7}$

e) 1; $x^2 + x - 18 = 0$; $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{73})$

f) 4; $x^2 + 4x - 2 = 0$; $-2 \pm \sqrt{6}$

128/11. a) $\sqrt{2}$; $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$; $\frac{1}{2}(-\sqrt{2} \pm \sqrt{6})$

b) **1)** 1; $x^2 + x - 7 = 0$; $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{29})$

2) 1; $x^2 - 8x - 8 = 0$; $4 \pm 2\sqrt{6}$

Aufgaben zu 3.7.4

133/1. Gleichung 3. Grades: $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0, \qquad a \neq 0$

r ist Lösung $\Leftrightarrow$ $ar^3 + br^2 - br - a = 0$

$$r^3(a + b\cdot\frac{1}{r} - b\cdot\frac{1}{r^2} - a\cdot\frac{1}{r^3}) = 0$$

$$-r^3(a\cdot\frac{1}{r^3} + b\cdot\frac{1}{r^2} - b\cdot\frac{1}{r} - a) = 0$$

$$a\cdot(\frac{1}{r})^3 + b\cdot(\frac{1}{r})^2 - b\cdot(\frac{1}{r}) - a = 0$$

das heißt, $\frac{1}{r}$ löst die Gleichung.

Gleichung 4. Grades: $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0, \qquad a \neq 0$

r ist Lösung $\Leftrightarrow$ $ar^4 + br^3 - br - a = 0$

$$-r^4(-a - b\cdot\frac{1}{r} + b\cdot\frac{1}{r^3} + a\cdot\frac{1}{r^4}) = 0$$

$$a\cdot(\frac{1}{r})^4 + b\cdot(\frac{1}{r})^3 - b\cdot(\frac{1}{r}) - a = 0$$

das heißt, $\frac{1}{r}$ löst die Gleichung.

133/2. Gleichung 3. Grades: $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$

$x = 1:$ $LS = a + b - b - a = 0 = RS$

Gleichung 4. Grades: $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$

$x = 1:$ $LS = a + b - b - a = 0 = RS$

133/3. **a)** $12x^2 - 25x + 1 = 0;$ $\quad L = \{-1; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}\}$

b) $x^2 - 4x + 1 = 0;$ $\quad L = \{-1; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$

133/4. **a)** $20z^2 + 19z - 442 = 0;$ $\quad L = \{-5; -\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; 4\}$

b) $20z^2 - 189z + 442 = 0;$ $\quad L = \{\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; 4; 5\}$

133/5. **a)** $18z^2 + 51z - 370 = 0;$ $\quad L = \{\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; 3; 6\}$

b) $36z^2 - 9z - 175 = 0;$ $\quad L = \{-\frac{4}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{6}(7 - \sqrt{13}); \frac{1}{6}(7 + \sqrt{13})\}$

133/6. **a)** $7z^2 + 36z - 100 = 0;$ $\quad L = \{-7; -\frac{1}{7}; 1\}$

b) $10z^2 - 29z = 0;$ $\quad L = \{\frac{2}{5}; \frac{5}{2}\}$

133/7. **a)** $z^2 - 2z = 0$; $\quad L = \{1\}$

b) $20z^2 + 16z - 21 = 0$; $\quad L = \{\ \}$

133/8. **a)** $z^2 + 2z - 15 = 0$; $\quad L = \left\{\frac{-5-\sqrt{21}}{2}; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $z^2 - 8z + 7 = 0$; $\quad L = \{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5}); \frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})\}$

133/9. **a)** $16z^2 - 72z + 81 = 0$; $\quad L = \{\frac{1}{8}(9-\sqrt{17}); \frac{1}{8}(9+\sqrt{17})\}$

b) $2z^2 - 9z + 11 = 0$; $\quad L = \{\ \}$

133/10. a) $z = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - zx + 1 = 0$

Die letzte Gleichung ist genau dann lösbar, wenn ihre Diskriminante nicht negativ ist,
das heißt, wenn $z^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |z| \geq 2$, q.e.d.

b) Doppellösungen gibt es nur, wenn $x^2 - zx + 1 = 0$ Doppellösungen hat. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass $|z| = 2$, also $z = -2$ oder $z = 2$ ist. Die Doppellösungen sind dann 1 bzw. -1.

c) $|z_1| > 2 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{z_1^2 - 4} < |z_1|$

Das heißt, zu z_1 wird immer weniger addiert bzw. von z_1 weniger subtrahiert als $|z_1|$, also gilt:

$z_1 > 0 \Rightarrow z_1 + \sqrt{z_1^2 - 4} > 0$ und $z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4} > 0$

$z_1 < 0 \Rightarrow z_1 + \sqrt{z_1^2 - 4} < 0$ und $z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4} < 0$.

133/11. a) $(x + 1)(12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12) = 0$

$12z^2 + 11z - 170 = 0$, $\quad L = \{-4; -1; -\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; 3\}$

b) $(x + 1)(2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2) = 0$

$2z^2 - 9z + 10 = 0$, $\quad L = \{-1; \frac{1}{2}; 1; 2\}$

c) $2z^3 - 13z^2 + 28z - 20 = 0$

Durch Probieren findet man 2 als Lösung, sodass man faktorisieren kann: $(z - 2)(2z^2 - 9z + 10) = 0$, $\quad L = \{\frac{1}{2}; 1; 2\}$

133/12. a) $(x-1)(3x^2+10x+3)=0$ $\qquad L=\{\frac{1}{3};1;3\}$

b) $(x-1)(x^2+1)=0$ $\qquad L=\{1\}$

133/13. a) $(x-1)(3x^3-7x^2-7x+3)=(x-1)(x+1)(3x^2-10x+3)=0$
$L=\{-1;\frac{1}{3};1;3\}$

b) $(x-1)(x^3-9x^2-9x+1)=(x-1)(x+1)(x^2-10x+1)=0$
$L=\{-1;5-2\sqrt{6};1;5+2\sqrt{6}\}$

c) $(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$ $\qquad L=\{-1;1\}$

133/14. a) $(x-1)(12x^4-4x^3-41x^2-4x+12)=0,$ $\qquad 12z^2-4z-65=0$
$L=\{-\frac{3}{2};-\frac{2}{3};\frac{1}{2};1;2\}$

b) $(x-1)(5x^4-26x^3+10x^2-26x+5)=0,$ $\qquad 5z^2-26z=0$
$L=\{\frac{1}{5};1;5\}$

c) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0,$ $\qquad z^2+z-1=0,$ $\qquad L=\{1\}$

133/15. a) $2z^3-13z^2+28z-20=0,$ Probieren: 2 ist Lösung.
$(z-2)(2z^2-9z+10)=0,$
$z_1=2;\quad z_2=2;\quad z_3=2{,}5$ $\qquad L=\{\frac{1}{2};1;2\}$

b) $(x-1)(2x^7-3x^6-7x^5+8x^4+8x^3-7x^2-3x+2)=$
$=(x-1)(x+1)(2x^6-5x^5-2x^4+10x^3-2x^2-5x+2)=0$
$2z^3-5z^2-8z+20=0$
$z_1=2;\quad z_2=-2;\quad z_3=\frac{5}{2}$ $\qquad L=\{-1;\frac{1}{2};1;2\}$

Aufgaben zu 3.8

137/1. **a)** $(2 \mid 5)\,;\,(5 \mid 2)$ **b)** $(-1 \mid -6)\,;\,(2 \mid 3)$ **c)** $(-1 \mid -2)\,;\,(2 \mid 1)$

137/2. **a)** $(-\frac{3}{2} \mid -5)\,;\,(3 \mid 4)$ **b)** $(-1 \mid \frac{1}{2})$ **c)** $\{\ \}$

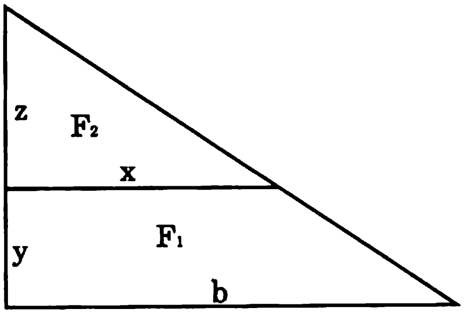
137/3. **a)** $(3\frac{1}{6} \mid 3\frac{5}{6})\,;\,(4 \mid 3)$ **b)** $(\frac{3}{2} \mid 3)\,;\,(3 \mid \frac{3}{2})$

137/4. **a)** $(\frac{7}{3} \mid \frac{7}{2})\,;\,(\frac{7}{2} \mid \frac{7}{3})$ **b)** $(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{3})\,;\,(\frac{8}{3} \mid -\frac{11}{14})$

137/5. Der Erdaushub beträgt $V = \frac{1}{2}(1\,\text{m} + \frac{1}{2}\,\text{m}) \cdot \frac{3}{4}\,\text{m} \cdot 2160\,\text{m} = 1215\,\text{m}^3$
$a :=$ Anzahl der Arbeiter, $t :=$ Anzahl der Tage
I $\quad a + t = 29\frac{1}{4}$
II $\quad a \cdot t \cdot 6 = 1215 \qquad (11\frac{1}{4} \mid 18)\,,\,(18 \mid 11\frac{1}{4})$
Lösung: 18 Arbeiter haben $11\frac{1}{4}$ Tage gearbeitet.

137/6. $F_1 = \frac{1}{2}(30 + x), \quad F_2 = \frac{1}{2}zx$
$F_1 - F_2 = 420$
$z - y = 20$
$z : (z + y) = x : 6$

$x^2 + 42x - 1080 = 0$
$y = \frac{20(30 - x)}{2x - 20}$
$z = y + 20$
$F_1 = \frac{1}{2}(30 + x)y, \quad F_2 = \frac{1}{2}zx,$



$x = -60$ oder $x = 18$ Als Lösung scheidet -60 aus.
Mit $x = 18$ erhält man $y = 40$, $z = 60$, $F_1 = 960$, $F_2 = 540$.

137/7. $x := \overline{TF}$, $y := \overline{SF}$, $x, y > 0$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x : y = (x+5) : 10 \\ \text{II} & \frac{1}{2}xy : 100 = 2 : 25 \\ \hline \text{I'} & 5x^2 - 8x - 40 = 0 \\ \text{II'} & y = 2x - \frac{16}{5} \end{array}$$

$x = \frac{1}{5}(4 + 6\sqrt{6})$, $\quad y = \frac{2}{5}(6\sqrt{6} - 4)$

137/8. I $\quad (x - y)(x + y) + xy = 4400$

II $\quad x + y = 100, \qquad x > y \qquad L = \{ (60 \,|\, 40), (240 \,|\, -140) \}$

Das zweite Lösungspaar ist algebraisch sinnvoll, aber geometrisch sinnlos. Es wird im Keilschrifttext auch nicht erwähnt.

138/9. Auf der Keilschrifttafel ist jeweils nur die zweite Lösung angegeben.

a) $\{ (20 \,|\, 30), (30 \,|\, 20) \}$ **b)** $\{ (-20 \,|\, -30), (30 \,|\, 20) \}$

c) $\{ (-3\frac{1}{2} \,|\, -3), (3\frac{1}{2} \,|\, 3) \}$ **d)** $\{ (-34\frac{18}{13} \,|\, -18\frac{1}{13}), (30 \,|\, 25) \}$

e) $\{ (20 \,|\, 30), (30 \,|\, 20) \}$

138/10. Die Babylonier haben jeweils nur die zweite Lösung angegeben.

a) $\{ (-20\frac{10}{13} \,|\, -23\frac{11}{13}), (30 \,|\, 10) \}$ **b)** $\{ (-38\frac{6}{13} \,|\, -27\frac{4}{13}), (40 \,|\, 25) \}$

c) $\{ (-42\frac{4}{13} \,|\, -36\frac{7}{13}), (50 \,|\, 25) \}$

138/11. a) $\{ (0 \,|\, 2), (\frac{10}{3} \,|\, \frac{8}{9}) \}$ **b)** $\{ (1 \,|\, 1), (19\frac{3}{8} \,|\, 6\frac{1}{4}) \}$

c) $\{ (-1 \,|\, 3), (19 \,|\, -27) \}$ **d)** $\{ (2 \,|\, -1) \}$

138/12. a) $\{(5-\sqrt{6}-\sqrt{31} \mid 5+\sqrt{6}+\sqrt{31}),(5-\sqrt{6}+\sqrt{31} \mid 5+\sqrt{6}-\sqrt{31})\}$

Probe in II

1. Lösung:

$$\text{LS} = \frac{(5-\sqrt{6}-\sqrt{31})(5+\sqrt{6}+\sqrt{31})}{5-\sqrt{6}-\sqrt{31}-5-\sqrt{6}-\sqrt{31}} = \frac{25-(\sqrt{6}+\sqrt{31})^2}{-2(\sqrt{6}+\sqrt{31})} =$$

$$= \frac{25-6-2\sqrt{186}-31}{-2(\sqrt{6}+\sqrt{31})} = \frac{6+\sqrt{186}}{\sqrt{6}+\sqrt{31}} = \frac{(6+\sqrt{186})(\sqrt{6}-\sqrt{31})}{6-31} =$$

$$= \frac{6\sqrt{6}-6\sqrt{31}+6\sqrt{31}-31\sqrt{6}}{-25} = \sqrt{6} = \text{RS}.$$

2. Lösung:

$$\text{LS} = \frac{(5-\sqrt{6}+\sqrt{31})(5+\sqrt{6}-\sqrt{31})}{5-\sqrt{6}+\sqrt{31}-5-\sqrt{6}+\sqrt{31}} = \frac{25-(\sqrt{31}-\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{31}-\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{25-31+2\sqrt{186}-6}{2(\sqrt{31}-\sqrt{6})} = \frac{-6+\sqrt{186}}{\sqrt{31}-\sqrt{6}} = \frac{(-6+\sqrt{186})(\sqrt{31}+\sqrt{6})}{31-6} =$$

$$= \frac{-6\sqrt{31}-6\sqrt{6}+31\sqrt{6}+6\sqrt{31}}{25} = \sqrt{6} = \text{RS}.$$

b) $\{(-36 \mid -\frac{9}{5}),(36 \mid \frac{9}{5})\}$ **c)** $\{(-\frac{20}{3} \mid 4)\}$

138/13. a) $\{(\frac{2}{7}(-9-10\sqrt{2}) \mid \frac{4}{7}(-3-\sqrt{2})),(\frac{2}{7}(-9+10\sqrt{2}) \mid \frac{4}{7}(-3+\sqrt{2}))\}$

b) $\text{I} \Leftrightarrow (x-y)^2 = -4$, also $L = \{\ \}$

138/14. a) $\{(0 \mid -3),(\frac{75}{28} \mid -\frac{17}{14})\}$ **b)** $\{(\frac{1}{5} \mid -2\frac{2}{5})\}$

138/15. a) $\{(-1 \mid -2),(-1 \mid 2),(1 \mid -2),(1 \mid 2)\}$

b) $\{(-1 \mid -3),(-1 \mid 3),(1 \mid -3),(1 \mid 3)\}$

138/16. a) $\{(0 \mid -4),(0 \mid 4)\}$ **b)** $\{(-2 \mid -3),(-2 \mid 3),(2 \mid -3),(2 \mid 3)\}$

138/17. a) $\{(0 \mid 0)\}$ **b)** $\{(-\sqrt{10} \mid -4),(-\sqrt{10} \mid 4),(\sqrt{10} \mid -4),(\sqrt{10} \mid 4)\}$

139/18. a) $\{(-\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2}),(-\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2}),(\frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2}),(\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2})\}$

b) $\{(-\frac{6}{5} \mid -\frac{5}{3}),(-\frac{6}{5} \mid \frac{5}{3}),(\frac{6}{5} \mid -\frac{5}{3}),(\frac{6}{5} \mid \frac{5}{3})\}$

139/19. **a)** $\{\ \}$ **b)** $\{(-\sqrt{7}\mid-\sqrt{7}), (-\sqrt{7}\mid\sqrt{7}), (\sqrt{7}\mid-\sqrt{7}), (\sqrt{7}\mid\sqrt{7})\}$

139/20. **a)** $\{(-\frac{5}{2}\mid-\frac{17}{2}), (\frac{1}{2}\mid 2)\}$ **b)** $\{(-2\mid 7), (8{,}7\mid-\frac{9}{14})\}$

c) $\{(-\frac{10}{13}\mid\frac{28}{13}), (2\mid 4)\}$ **d)** $\{(-\frac{107}{26}\mid-\frac{9}{26}), (-4\mid 0)\}$

139/21. **a)** $\{(3\mid 8), (5\mid 3)\}$

b) $\{(-\frac{13}{9}\mid-\frac{1}{9}\sqrt{455}), (-\frac{13}{9}\mid\frac{1}{9}\sqrt{455}), (2\mid-5), (2\mid 5)\}$

c) $\{(-\frac{47}{18}\mid\frac{20}{9}), (0\mid-3)\}$

d) $\{(2-\sqrt{19}\mid-1-\sqrt{43}), (2-\sqrt{19}\mid-1+\sqrt{43}), (2+\sqrt{19}\mid-1-\sqrt{43}),$
$(2+\sqrt{19}\mid-1+\sqrt{43})\}$

139/22. Die Babylonier nahmen $x > y$ an.

a)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{1}{3}\cdot 2u + \frac{1}{60}(2v)^2 = \frac{55}{3} \\ \text{II} & u^2 - v^2 = 600 \\ \hline \text{I}' & u^2 + 10u - 875 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -35 \ \text{oder}\ u = 25 \end{array}$$
$L_{xy} = \{(-10\mid-60), (30\mid 20)\}$

b)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{1}{3}\cdot 2u - \frac{1}{60}(2v)^2 = 15 \\ \text{II} & u^2 - v^2 = 600 \\ \hline \text{I}' & u^2 - 10u - 375 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -15 \ \text{oder}\ u = 25 \end{array}$$
$L_{xy} = \{(20\mid 30), (30\mid 20)\}$

c)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{1}{30}\cdot 2u + \frac{1}{60}(2v)^2 = \frac{10}{3} \\ \text{II} & u^2 - v^2 = 600 \\ \hline \text{I}' & u^2 + u - 650 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = -26 \ \text{oder}\ u = 25 \end{array}$$
$L_{xy} = \{(-26 + 2\sqrt{19}\mid-26 - 2\sqrt{19}), (30\mid 20)\}$

139/23. **a)** $\{(-3\mid-1), (-3\mid 1), (-1\mid-3), (-1\mid 3),$
$(1\mid-3), (1\mid 3), (3\mid-1), (3\mid 1)\}$

b) $\{(-5\mid-\frac{1}{2}), (-5\mid\frac{1}{2}), (5\mid-\frac{1}{2}), (5\mid\frac{1}{2})\}$

c) $\{(-\frac{1}{5}\sqrt{10}\mid-\frac{6}{5}\sqrt{2}), (-\frac{1}{5}\sqrt{10}\mid\frac{6}{5}\sqrt{2}), (\frac{1}{5}\sqrt{10}\mid-\frac{6}{5}\sqrt{2}), (\frac{1}{5}\sqrt{10}\mid\frac{6}{5}\sqrt{2}),$
$(-1\mid-2), (-1\mid 2), (1\mid-2), (1\mid 2)\}$

d) $\{(-3\mid-2), (-3\mid 2), (3\mid-2), (3\mid 2)\}$

139/24. a) $\{(-\frac{256}{61} \mid -\frac{230}{61}), (2 \mid -2)\}$

b) $\{(-1 \mid 1), (-\frac{1}{4} \mid \frac{3}{2}), (0 \mid 3), (\frac{3}{4} \mid \frac{7}{2})\}$

139/25. a) $\{(\frac{21}{27} \mid 14), (1 \mid 2)\}$

b) Setzt man $u := \frac{1}{x^2}$, $v := \frac{1}{y^2}$, so hat das u-v-System formal die Lösungsmenge $\{(-\frac{1}{3} \mid 0), (\frac{1}{3} \mid 0)\}$. Da aber $u \neq 0$ und $v \neq 0$ sein müssen, hat das Ausgangssystem die Lösungsmenge $\{\ \}$.

139/26. a) $\{(-30 \mid -20), (-20 \mid -30), (20 \mid 30), (30 \mid 20)\}$

b) $\{(-30 \mid -20), (-30 \mid 20)\}$

c) $\{(-30 \mid -20), (-\frac{20}{3}\sqrt{6} \mid -15\sqrt{6}), (\frac{20}{3}\sqrt{6} \mid 15\sqrt{6}), (30 \mid 20)\}$

140/27. $(x^4)^2 + 1200^2x^4 - 3\,200\,000^2 = 0$; $L = \{(-40 \mid -30), (40 \mid 30)\}$

140/28. a) $D = \{(x \mid y) \mid x \geq 0 \text{ und } y \geq -\frac{3}{2}x\}$; $L = \{(2 \mid 5)\}$

b) $D =]-\infty; 1]$

$L = \{(-7 - \frac{1}{2}\sqrt{42} \mid -4 - \sqrt{16 + \sqrt{42}}), (-7 - \frac{1}{2}\sqrt{42} \mid -4 + \sqrt{16 + \sqrt{42}}),$

$(-7 + \frac{1}{2}\sqrt{42} \mid -4 - \sqrt{16 + \sqrt{42}}), (-7 + \frac{1}{2}\sqrt{42} \mid -4 + \sqrt{16 + \sqrt{42}})\}$

140/29. a) $y \geq 0$ und $x \geq y$

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & \sqrt{x^2 - y^2} = x - 2, \text{ also } x \geq 2 \\
\text{II} & \frac{10}{9}y^2 = x^2 - 6x \\
\hline
\text{I}' & y^2 = 4x - 4 \text{ in II} \qquad L = \{(10 \mid 6)\}
\end{array}$$

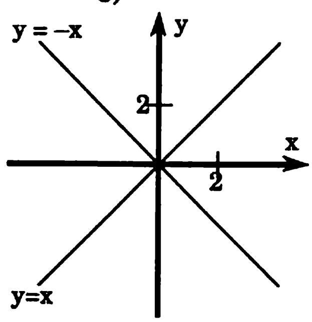
b) $x \geq \max\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}y, \frac{1}{2}y, -\frac{2}{7}y\}$

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & 5x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \text{ und } x \geq -y \\
\text{II} & \sqrt{(2x + y)^2 - 2x - 3} = 2x + y - 1 \\
\hline
\text{I} & 5x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \text{ und } x \geq -y \\
\text{II}' & (2x + y)^2 - 2x - 3 = (2x + y)^2 - 4x - 2y + 1 \\
\hline
\text{II}'' & x = 2 - y \text{ in I} \\
\text{I}' & 3y^2 - 13y + 10 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ oder } y = \frac{10}{3} \\
\hline
 & L = \{(1 \mid 1)\}
\end{array}$$

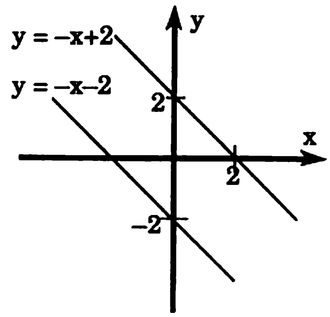
140/30. a) $L = \{(0 \mid 0)\}$

b) $L = \{(3 \mid -2)\}$

c)



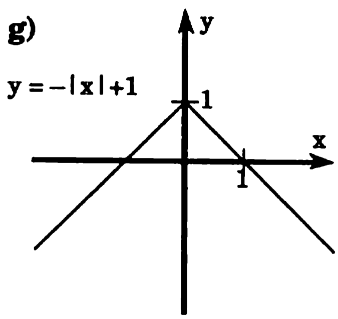
d)



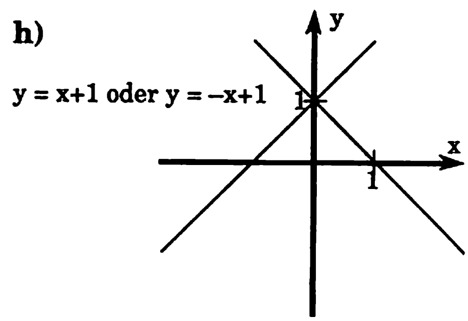
e) y-Achse und Gerade $y = \frac{1}{2}x$

f) x-Achse und Gerade $y = 3x - 2$

g)



h)



140/31. a) $\{(-\frac{1}{3}\sqrt{3}(5+\sqrt{5}) \mid -\frac{1}{3}\sqrt{3}(5-\sqrt{5})), (-\frac{1}{3}\sqrt{3}(5-\sqrt{5}) \mid -\frac{1}{3}\sqrt{3}(5+\sqrt{5})),$
$(\frac{1}{3}\sqrt{3}(5-\sqrt{5}) \mid \frac{1}{3}\sqrt{3}(5+\sqrt{5})), (\frac{1}{3}\sqrt{3}(5+\sqrt{5}) \mid \frac{1}{3}\sqrt{3}(5-\sqrt{5}))\}$

b) I $\quad x^2 + y^2 = x^2y^2 - 2xy$

II $\quad x^2 + y^2 + (x+y) = 20$

II' $\quad (xy)^2 - 2xy + xy = 20$

II'' $\quad (xy)^2 - xy - 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy = -4$ oder $xy = 5$

$L = \{(-2-2\sqrt{2} \mid -2+2\sqrt{2}), (-2+2\sqrt{2} \mid -2-2\sqrt{2}),$
$(\frac{1}{2}(5-\sqrt{5}) \mid \frac{1}{2}(5+\sqrt{5})), (\frac{1}{2}(5+\sqrt{5}) \mid \frac{1}{2}(5-\sqrt{5}))\}$

c) $(xy)^2 - 30xy + 144 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy = 6$ oder $xy = 24$
$L = \{(-4-\sqrt{10} \mid -4+\sqrt{10}), (-4+\sqrt{10} \mid -4-\sqrt{10}), (4 \mid 6), (6 \mid 4)\}$

d) $L = \{(4 \mid 6), (6 \mid 4)\}$

140/32. I $\quad x + y = 468$ und $x < y$

II $\quad x^2y = 5\,359\,375$

III $\quad xy^2 = 14\,706\,125$

I $\quad y = 468 - x$

II' $\quad 468x^2 - x^3 = 5\,359\,375$

III' $\quad 219\,024x - 936x^2 + x^3 = 14\,706\,125$

II' + III' $\quad -468x^2 + 219\,024x = 20\,065\,500$

$$x^2 - 468x + 42\,875 = 0$$

$$x = 125 \text{ oder } x = 343$$

Lösung kann 125 sein. Aus I: $y = 343$

Probe: II $\quad LS = 125^2 \cdot 343 = 5\,359\,375 = RS$

III $\quad LS = 125 \cdot 343^2 = 14\,706\,125 = RS$

141/33. I $\quad x + y + z = 14$

II $\quad x : y = y : z$

III $\quad 2x + 3y + 4z = 36$

Man fasst I und III als System für x und y auf:

I' $\quad x = 6 + z$

III' $\quad y = 8 - 2z$

II' $\quad 3z^2 - 38z + 64 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2$ oder $z = \frac{10}{3}$

$z = 2$ führt zum Tripel $(8 \mid 4 \mid 2)$. $z = \frac{10}{3}$ führt zum Tripel $(\frac{50}{3} \mid -\frac{40}{3} \mid \frac{10}{3})$, worunter sicher keine Zerlegung von 14 verstanden wird. Lässt man negative Summanden zu, so löst auch dieses Tripel die Aufgabe.

142/34. I $\quad x + y + z = 182$

II $\quad x : y = y : z$

III $\quad xy + yz + zx = 7644$

I $\quad x = 182 - y - z \quad$ in III

II $\quad xz = y^2 \quad$ in III

III' $\quad 182y = 7644$

III' $\quad y = 42$

I' $\quad x = 140 - z$

II' $\quad z^2 - 140\,z + 1764 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 14$ oder $z = 126$

$L = \{ (126 \,|\, 42 \,|\, 14), (14 \,|\, 42 \,|\, 126) \}$

Wegen der Symmetrie sind die Lösungen gleichwertig.

142/35. I $\quad x : y = y : z$

II $\quad x + y + z = 78$

III $\quad \frac{78}{x} + \frac{78}{y} + \frac{78}{z} = 18\frac{7}{9}$

Lösungsweg wie in Aufgabe **34**.

$L = \{ (6 \,|\, 18 \,|\, 54), (54 \,|\, 18 \,|\, 6), (48 - 6\sqrt{55} \,|\, -18 \,|\, 48 + 6\sqrt{55}),$
$(48 + 6\sqrt{55} \,|\, -18 \,|\, 48 - 6\sqrt{55}) \}$

Bei STIFEL gibt es nur die Lösung $(6 \,|\, 18 \,|\, 54)$.

142/36. I $\quad xy = 10$

II $\quad x : y = y : z$

III $\quad x^2 + y^2 = z^2$

I' $\quad y = \frac{10}{x}$

II' $\quad z = \frac{y^2}{x} = \frac{100}{x^3}$

III' $\quad x^2 + \frac{100}{x^2} = \frac{10\,000}{x^6} \quad \Leftrightarrow \quad x^8 + 100x^4 - 10\,000 = 0$

$$x = \sqrt{\sqrt{50(\sqrt{5} - 1)}}$$

$$y = \frac{10}{\sqrt{\sqrt{50(\sqrt{5}-1)}}} = \frac{10\sqrt{\sqrt{50(\sqrt{5}+1)}}}{\sqrt{\sqrt{2500(5-1)}}} = \sqrt{\sqrt{50(\sqrt{5}+1)}}$$

$$z = \frac{\left(\sqrt{\sqrt{50(\sqrt{5}+1)}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{50(\sqrt{5}-1)}}} = \frac{1}{10}\sqrt{50(\sqrt{5}+1)}\;\sqrt{\sqrt{50(\sqrt{5}+1)}}$$

142/37. I $\quad x:y=y:z$

II $\quad x+y+z=xyz$

III $\quad \frac{25}{x}+\frac{25}{y}+\frac{25}{z}=x+y+z$

I $\quad y^2=xz$

II' $\quad (x+z)+y=y^3$

III' $\quad \frac{25}{y}+\frac{25(x+z)}{xz}=y^3$

III'' $\quad \frac{25}{y}+\frac{25(y^3-y)}{y^2}=y^3$

$y^3(25-y^2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm 5$ in I und II' eingesetzt

I $\quad xz=25$

II' $\quad x+z=\pm 120$

II' $\quad z=\pm 120-x$

I' $\quad x^2 \mp 120x+25=0$

$L=\{(-60-5\sqrt{143}\,|\,-5\,|\,-60+5\sqrt{143}),\ (-60+5\sqrt{143}\,|\,-5\,|\,-60-5\sqrt{143}),$

$(60-5\sqrt{143}\,|\,5\,|\,60+5\sqrt{143}),\ (60+5\sqrt{143}\,|\,5\,|\,60-5\sqrt{143})\}$

also im Wesentlichen zwei verschiedene Zerlegungen, nämlich

$(-60-5\sqrt{143}\,|\,-5\,|\,-60+5\sqrt{143})$ und $(60-5\sqrt{143}\,|\,5\,|\,60+5\sqrt{143})$.

142/38. I $\quad x+y+z=76$

II $\quad x:y=y:z$

III $\quad y(x+z)=1248$

$L=\{(16\,|\,24\,|\,36),\ (36\,|\,24\,|\,16)\}$

142/39. I $\quad x:y=y:z=z:u \quad \Leftrightarrow \quad$ I' $\quad x:y=y:z \quad$ und II $\quad y:z=z:u$

III $\quad xyzu=81$

IV $\quad xy=6$

IV' $\quad x=\frac{6}{y}$

I'' $\quad z=\frac{y^2}{x}$

II' $\quad u=\frac{z^2}{y}$

III' $\quad y^8=36\cdot 81 \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm\sqrt{\sqrt{54}}=\pm\sqrt{3\sqrt{6}}$

$L=\{(-\sqrt{2\sqrt{6}}\,|\,-\sqrt{3\sqrt{6}}\,|\,-\frac{3}{2}\sqrt{2\sqrt{6}}\,|\,-\frac{3}{2}\sqrt{3\sqrt{6}}),(\sqrt{2\sqrt{6}}\,|\,\sqrt{3\sqrt{6}}\,|\,\frac{3}{2}\sqrt{2\sqrt{6}}\,|\,\frac{3}{2}\sqrt{3\sqrt{6}})\}$

142/40 I $\quad x+y+z+u=45$

II $\quad x:y=y:z=z:u \quad \Leftrightarrow$ II' $\quad x:y=y:z \quad$ und III $\quad y:z=z:u$

IV $\quad x^2+y^2+z^2+u^2=765$

Ansatz: $x=\lambda y, \quad y=\lambda z, \quad z=\lambda u$

also $\quad x=\lambda^3 u, \quad y=\lambda^2 u$

I' $\quad \lambda^3 u+\lambda^2 u+\lambda u+u=45$

IV' $\quad \lambda^6 u^2+\lambda^4 u^2+\lambda^2 u^2+u^2=765$

I' $\quad u=\dfrac{45}{\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1}$, $\lambda \neq -1$. Der Sonderfall $\lambda=-1$ führt in I auf $0=45$; falsch

IV'' $\quad 28\lambda^6-34\lambda^5-6\lambda^4-68\lambda^3-6\lambda^2-34\lambda+28=0$

Das ist eine reziproke Gleichung 1. Art.

$\lambda+\frac{1}{\lambda}:=\mu$

$(\lambda+\frac{1}{\lambda})^2=\lambda^2+2+\frac{1}{\lambda^2}=\mu^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2+\frac{1}{\lambda^2}=\mu^2-2$

$(\lambda+\frac{1}{\lambda})^3=\lambda^3+3(\lambda+\frac{1}{\lambda})+\frac{1}{\lambda^3}=\mu^3 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3+\frac{1}{\lambda^3}=\mu^3-3\mu$

IV'' $\quad 28(\lambda^3+\frac{1}{\lambda^3})-34(\lambda^2+\frac{1}{\lambda^2})-6(\lambda+\frac{1}{\lambda})-68=0$

IV''' $\quad 28(\mu^3-3\mu)-34(\mu^2-2)-6\mu-68=0$

$\mu(14\mu^2-17\mu-45)=0$

$\mu=0$ oder $\mu=-\frac{9}{7}$ oder $\mu=\frac{5}{2}$

1. Fall: $\mu=0 \quad \Leftrightarrow \lambda^2+1=0,$ keine Lösung

2. Fall: $\mu=-\frac{9}{7} \quad \Leftrightarrow 7\lambda^2+9\lambda+7=0,$ keine Lösung: Diskriminante $=-115$

3. Fall: $\mu=\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow 2\lambda^2-5\lambda+2=0 \quad \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$ oder $\lambda=2$

3.1 $\quad \lambda=2$

Aus I': $\quad (8+4+2+1)u=45 \quad \Leftrightarrow \quad u=3$

damit $\quad z=6, \quad y=12, \quad x=24$

3.1 $\quad \lambda=\frac{1}{2}$

Aus I': $\quad (\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1)u=45 \quad \Leftrightarrow \quad u=24$

damit $\quad z=12, \quad y=6, \quad x=3$

Also $\quad L=\{(3|6|12|24),(24|12|6|3)\}$

das heißt, die Summanden sind 3, 6, 12 und 24.

CARDANOs Werte führen auf die Gleichung

IV''' $\mu(\mu^2 - 3\mu - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 0$ oder $\mu = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{29})$

Wie oben erzeugt $\mu = 0$ keine Lösung.

$\mu = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{29}) \quad \Rightarrow \quad 2\lambda^2 - (3 - \sqrt{29})\lambda + 2 = 0$, Diskriminante < 0

$\mu = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{29}) \quad \Rightarrow \quad 2\lambda^2 - (3 + \sqrt{29})\lambda + 2 = 0$

$$\lambda = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{29} \pm \sqrt{22 + 6\sqrt{29}})$$

Damit erhält man nach mühsamer Rechnung

$u = \frac{1}{2}(13 - \sqrt{29} \mp \sqrt{22 + 6\sqrt{29}})$

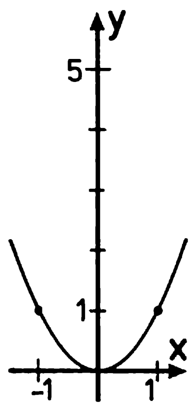
$z = \frac{1}{4}(-6 + 2\sqrt{29} \pm (5 - \sqrt{29})\sqrt{22 + 6\sqrt{29}})$

$y = \frac{1}{4}(-6 + 2\sqrt{29} \mp (5 - \sqrt{29})\sqrt{22 + 6\sqrt{29}})$

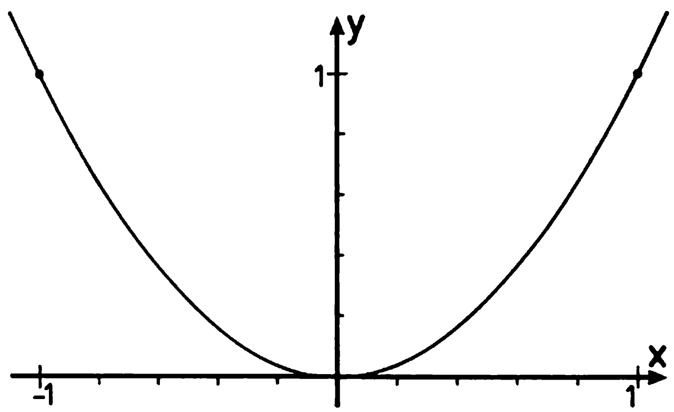
$x = \frac{1}{2}(13 - \sqrt{29} \pm \sqrt{22 + 6\sqrt{29}})$

Aufgaben zu 4.1

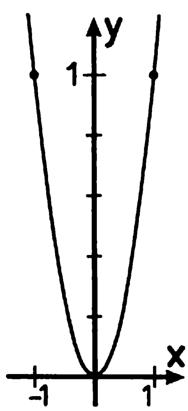
146/1. a)



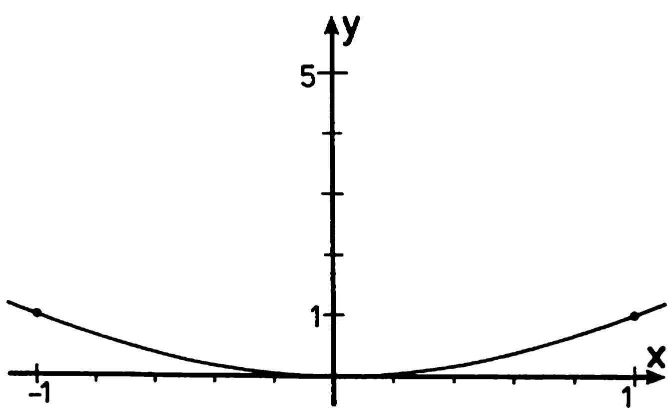
b)



146/2. a)



b)

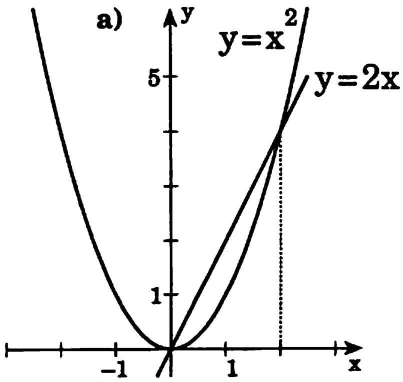


146/3. $P(x \mid y) \Rightarrow x^2 = 1 \cdot y$ (Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken $(0 \mid y)$, $(0 \mid -1)$, $(x \mid 0)$)

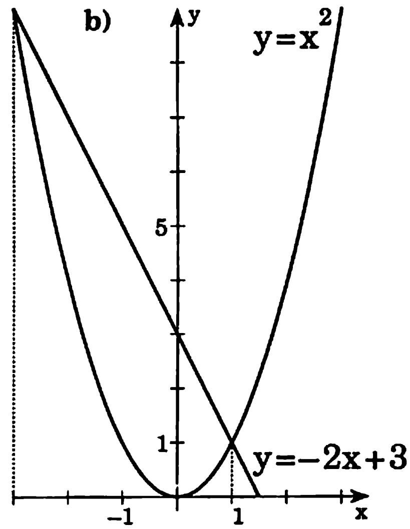
$\Rightarrow y = x^2$ (Parabelgleichung)

Aufgaben zu 4.2

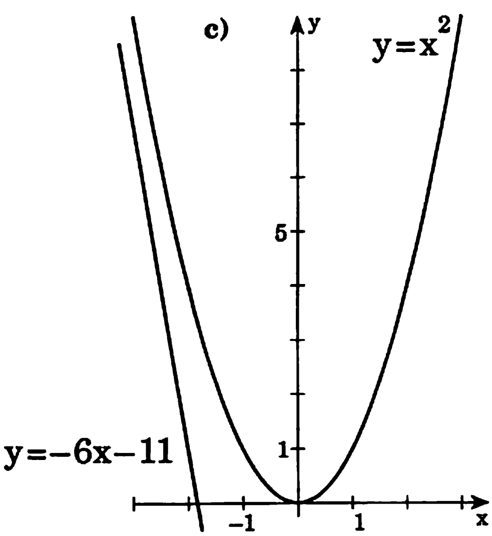
151/1.



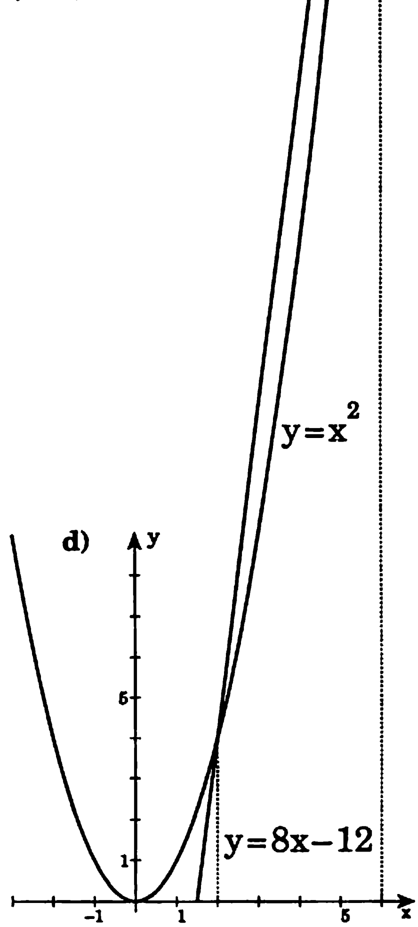
$x_1 = 0$; $x_2 = 2$



$x_1 = -3$; $x_2 = 1$

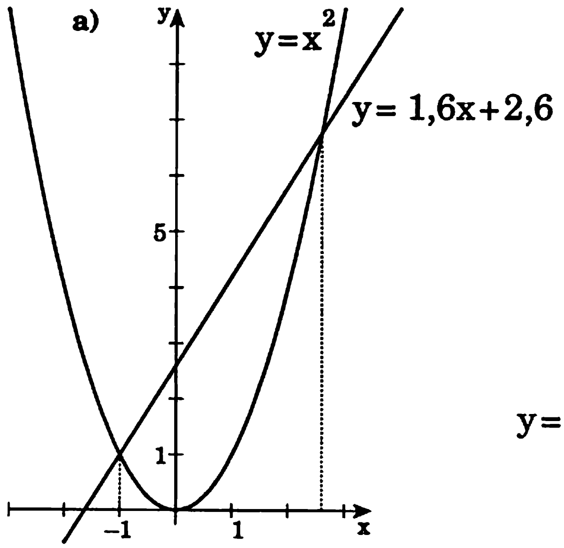


keine Lösung

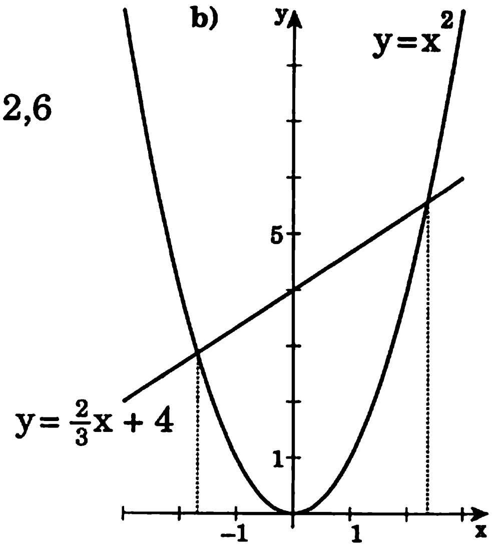


$x_1 = 2$; $x_2 = 6$

151/2.

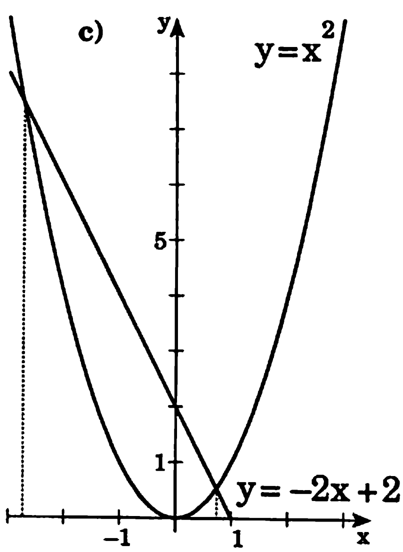


$x_1 = -1; \quad x_2 = 2{,}6$



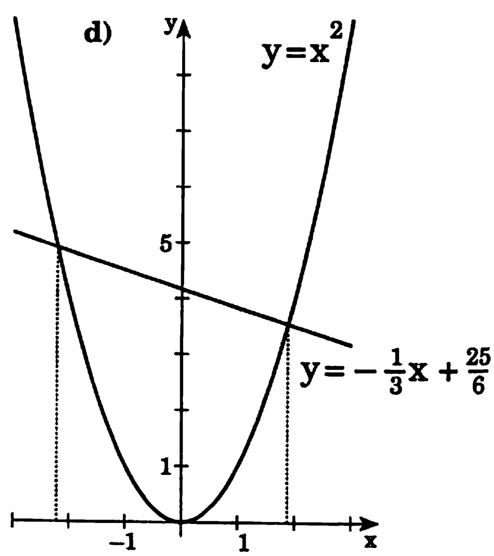
$x_1 = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{37}) \doteq -1{,}69...$

$x_2 = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{37}) = \ 2{,}36...$



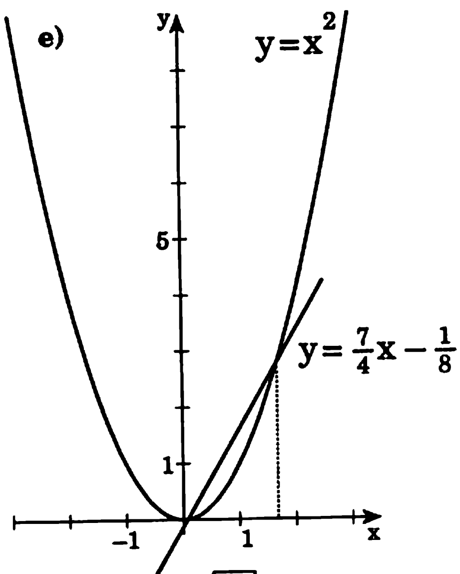
$x_1 = -1 - \sqrt{3} = -2{,}73...$

$x_2 = -1 + \sqrt{3} = \ 0{,}73...$



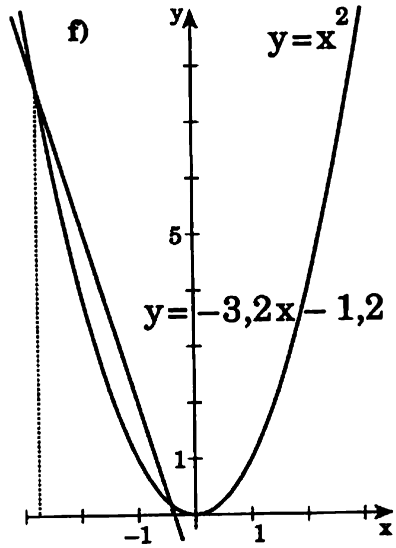
$x_1 = \frac{1}{6}(-1 - \sqrt{151}) = -2{,}21...$

$x_2 = \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{151}) = \ 1{,}88...$



$x_1 = \frac{1}{8}(7-\sqrt{41}) = 0{,}074...$

$x_2 = \frac{1}{8}(7+\sqrt{41}) = 1{,}67...$



$x_1 = -1{,}6-\sqrt{1{,}36} = -2{,}76...$

$x_2 = -1{,}6+\sqrt{1{,}36} = -0{,}43...$

151/3. **a)** $S_1(-2{,}5 \mid 6{,}25)$, $S_2(2 \mid 4)$

b) $S_1(3-\sqrt{6} \mid 15-6\sqrt{6})$, $S_2(3+\sqrt{6} \mid 15+6\sqrt{6})$

151/4. **a)** Passante **b)** Tangente, $S(-2 \mid 4)$ **c)** Tangente, $S(10 \mid 100)$

d) Sekante, $S_1(50-4\sqrt{155} \mid 20(249-20\sqrt{155}))$
$S_2(50+4\sqrt{155} \mid 20(249+20\sqrt{155}))$

e) Sekante, $S_1(-1 \mid 1)$, $S_2(4 \mid 16)$

f) Tangente, $S(1{,}25 \mid 1{,}5625)$

151/5. **a)** $y = 3x-\frac{9}{4}$; $S(\frac{3}{2} \mid \frac{9}{4})$ **b)** $y = -6x-9$; $S(-3 \mid 9)$

c) $y = 0$; $S(0 \mid 0)$

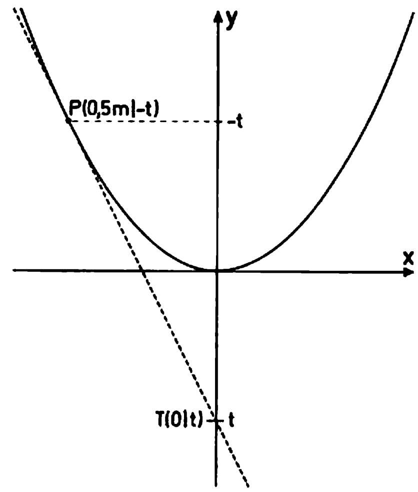
151/6. $y = \frac{7}{3}x+2$; Schnittpunkte $S_1(3 \mid 9)$, $S_2(-\frac{2}{3} \mid \frac{4}{9})$

151/7. **a)** Schnittgleichung: $x^2 = mx+t$,
Schnittstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2+4t})$,
wegen Berührung gibt es nur einen gemeinsamen Punkt B:
$D = 0$, also $m^2+4t = 0$, das heißt $m^2 = -4t$.

Abszisse von B $x = \frac{1}{2}m$

Ordinate von B $y = m(\frac{1}{2}m) + t = \frac{1}{2}m^2 + t = \frac{1}{2}(-4t) + t = -t$

Berührpunkt $B(\frac{1}{2}m \mid -t)$



b) $P(0{,}5m \mid -t) \Rightarrow T(0 \mid t)$

c) $T(0 \mid t) \Rightarrow P(0{,}5m \mid -t)$

151/8. **a)** $y = 2\sqrt{3}x - 3$; $S(\sqrt{3} \mid 3)$

b) $y = 6{,}4x - 10{,}24$; $S(3{,}2 \mid 10{,}24)$

151/9. **a)** $y = 6x - 9$; $S(3 \mid 9)$

b) $y = -8x - 16$; $S(-4 \mid 16)$

Aufgaben zu 4.3.1

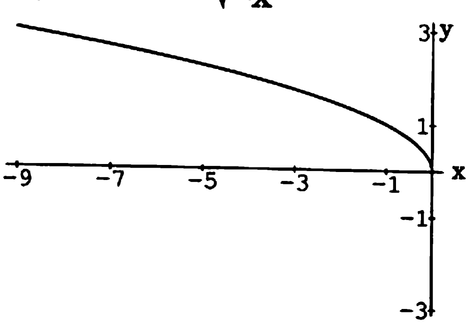
152/1. **a)** $D = \mathbb{R}_0^-$

x	0	−0,25	−0,5	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
$\sqrt{-x}$	0	0,5	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

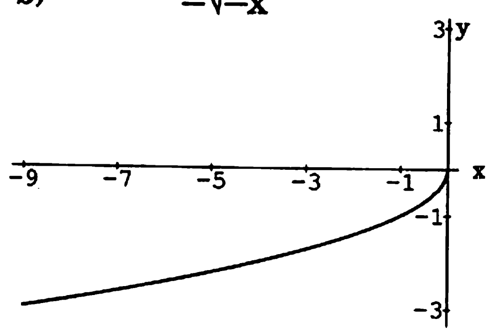
b) $D = \mathbb{R}_0^-$

x	0	−0,25	−0,5	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
$-\sqrt{-x}$	0	−0,5	−0,7	−1	−1,4	−1,7	−2	−2,2	−2,4	−2,6	−2,8	−3

a) $\sqrt{-x}$



b) $-\sqrt{-x}$



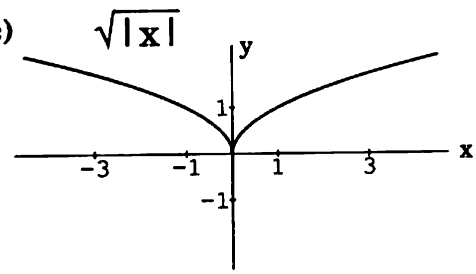
c) $D = \mathbb{R}$

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4
$\sqrt{\lvert x\rvert}$	2	1,4	1	0,7	0,5	0	0,5	0,7	1	1,4	2

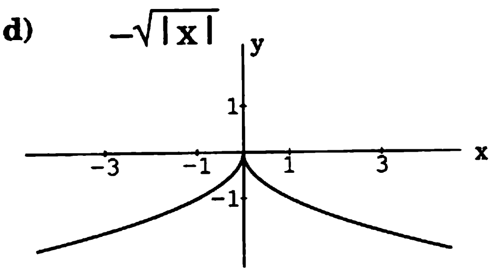
d) $D = \mathbb{R}$

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}25$	0	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4
$-\sqrt{\lvert x\rvert}$	-2	$-1{,}4$	-1	$-0{,}7$	$-0{,}5$	0	$-0{,}5$	$-0{,}7$	-1	$-1{,}4$	-2

c)

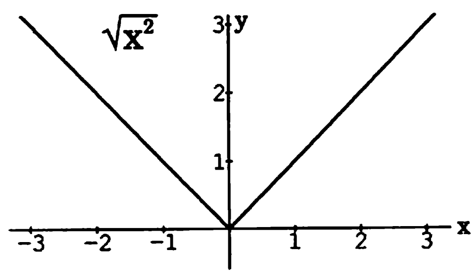


d)



152/2. a) $D = \mathbb{R}$

x	-9	-2	0	2	9
$\sqrt{x^2}$	9	2	0	2	9

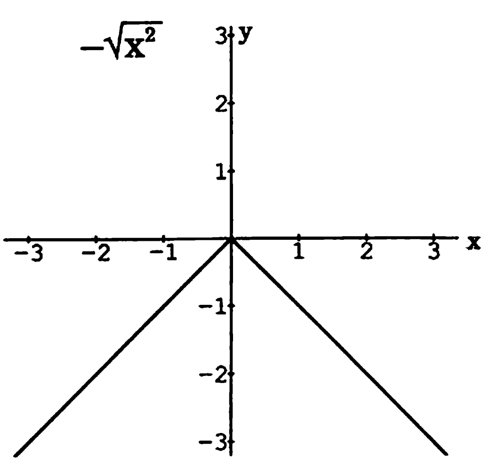


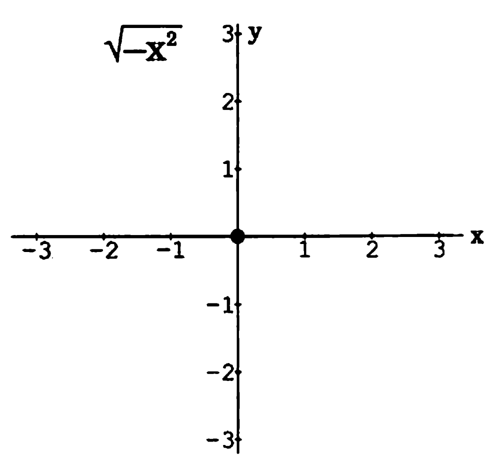
b) $D = \mathbb{R}$

x	-9	-2	0	2	9
$-\sqrt{x^2}$	-9	-2	0	-2	-9

c) $D = \{0\}$

x	0
$\sqrt{-x^2}$	9



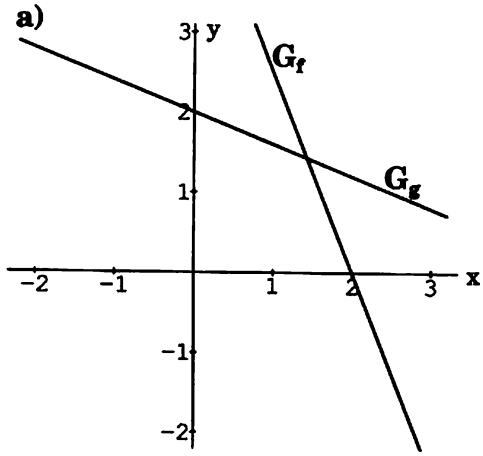


Aufgaben zu 4.3.2

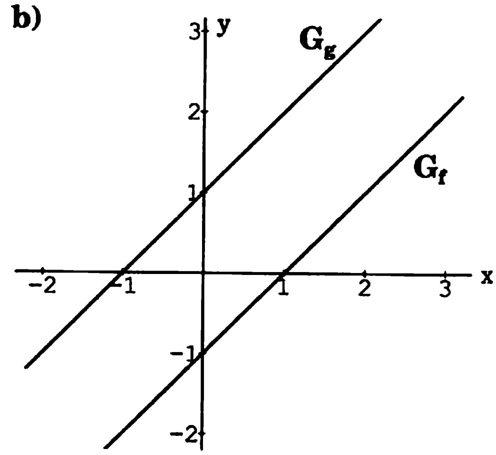
155/1. **a)** umkehrbar **b)** nicht umkehrbar

c) nicht umkehrbar **d)** umkehrbar

155/2. **a)**



b)



a) $y = \frac{5}{2}x + 5$ ist umkehrbar.

Umkehrfunktion $x = g(y) = -\frac{2}{5}y + 2$

Koordinatentausch $y = g(x) = -\frac{2}{5}x + 2$

b) $y = x - 1$ ist umkehrbar.

Umkehrfunktion $x = g(y) = y + 1$

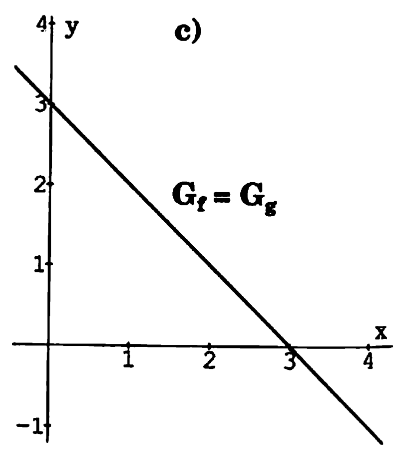
Koordinatentausch $y = g(x) = x + 1$

c) $y = -x + 3$ ist umkehrbar.

Umkehrfunktion $x = g(y) = -x + 3$

Koordinatentausch $y = g(x) = -y + 3$

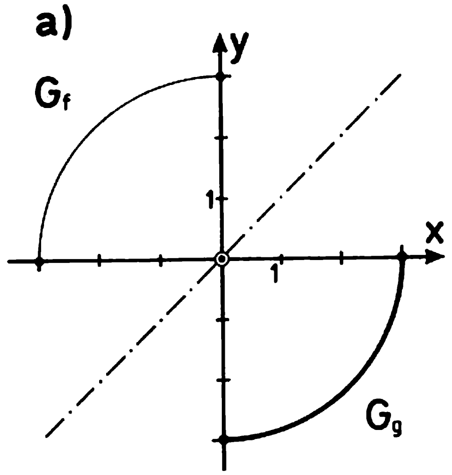
c)



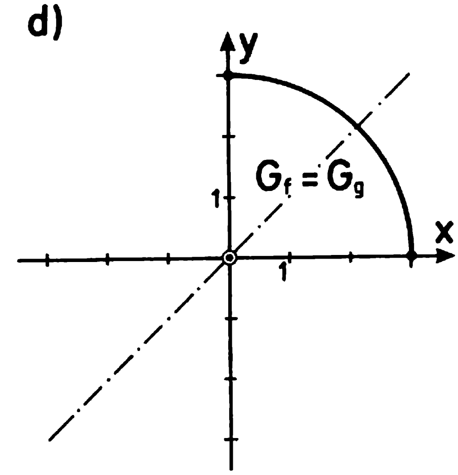
d) $y = 5$ ist nicht umkehrbar.

155/3. **a)**, **d)** : umkehrbar **b)**, **c)** : nicht umkehrbar

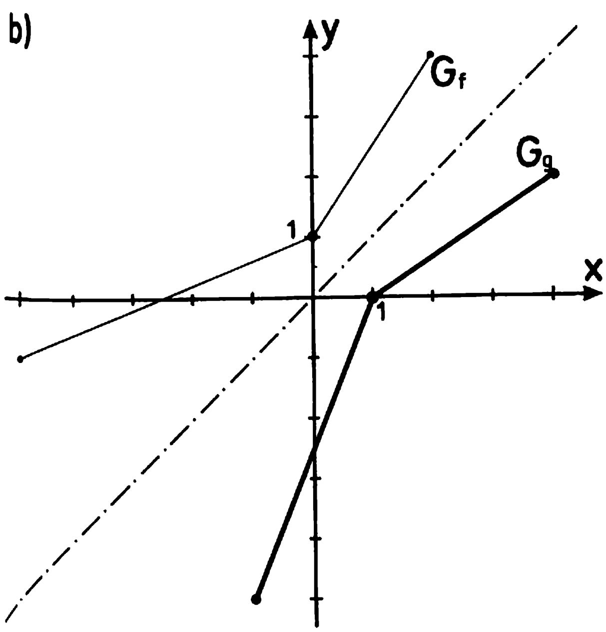
156/4. a)



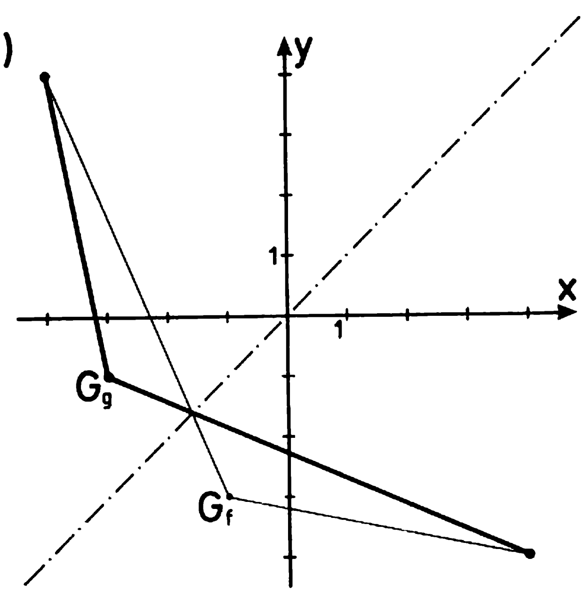
d)



b)



c)



156/5. Die Funktion ist nicht umkehrbar, weil eine Parallele zur x-Achse (z. B. y = 1) das Schaubild mehr als einmal schneidet.
Nach dem Augenmaß (!) sind (–1 | 2), (0 | 0) und (1 | 2) Knickpunkte.
Am besten stückelt man die Kurve viermal:

$-\infty < x \leq -1$: $y = 2x + 2$
$-1 < x \leq 0$: $y = -2x$
$0 < x \leq 1$: $y = 2x$
$1 < x < +\infty$: $y = -2x + 2$

156/5. **a)** Umkehrbar sind die Funktionen, deren Graphen die beiden schrägen Halbgeraden sind: Verlässt man sich wieder aufs Augenmaß (!), dann besteht Umkehrbarkeit in den Bereichen $-\infty < x \leq -1$ und $1 < x < +\infty$. Das waagrechte Mittelstück im Bereich $-1 < x \leq 1$ ist Schaubild einer Funktion, die nicht umkehrbar ist.

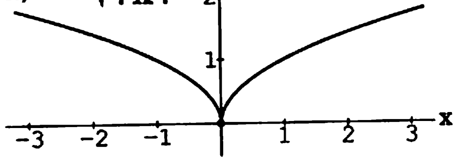
b) Letzte Augenmaß-Aufgabe:
Linker Halbkreis um $L(-r \mid 0)$ mit Radius r,
rechter Halbkreis um $R(r \mid 0)$ mit Radius r.
Die Funktionen, die die Halbkreise beschreiben, sind nicht umkehrbar. Die Zerlegung der Halbkreise in Viertelkreise führt zum Ziel: jede Funktion, die einen Viertelkreis beschreibt, ist umkehrbar.
Das ist der Fall in den Bereichen:
$-2r \leq x < -r$, $\quad -r \leq x < 0$, $\quad 0 \leq x < r$, $\quad r \leq x \leq 2r$.

Aufgaben zu 4.3.3

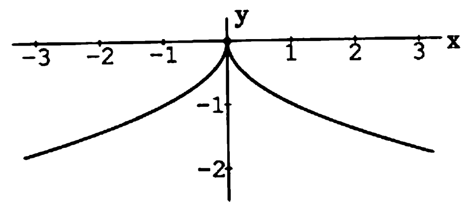
158/1. $f_1(x) = x^2$ mit $x \geq 0$, Umkehrfunktion: $g_1(x) = \sqrt{x}$ mit $x \geq 0$
$f_2(x) = x^2$ mit $x < 0$, Umkehrfunktion: $g_2(x) = -\sqrt{x}$ mit $x \geq 0$

158/2. $g(x) = x^2$ mit $x \geq 0$

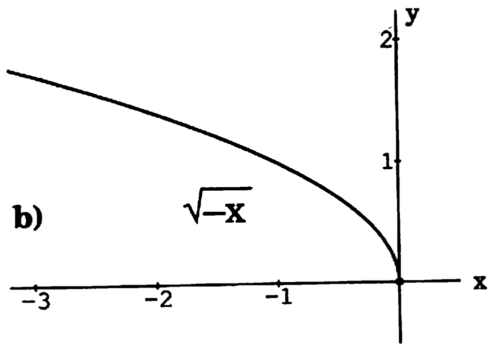
158/3. **a)** $\sqrt{|x|}$



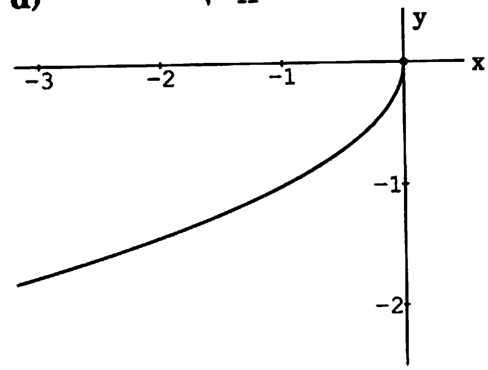
c) $-\sqrt{|x|}$



b) $\sqrt{-x}$



d) $-\sqrt{-x}$



a) $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_0^+$,
f ist nicht umkehrbar.

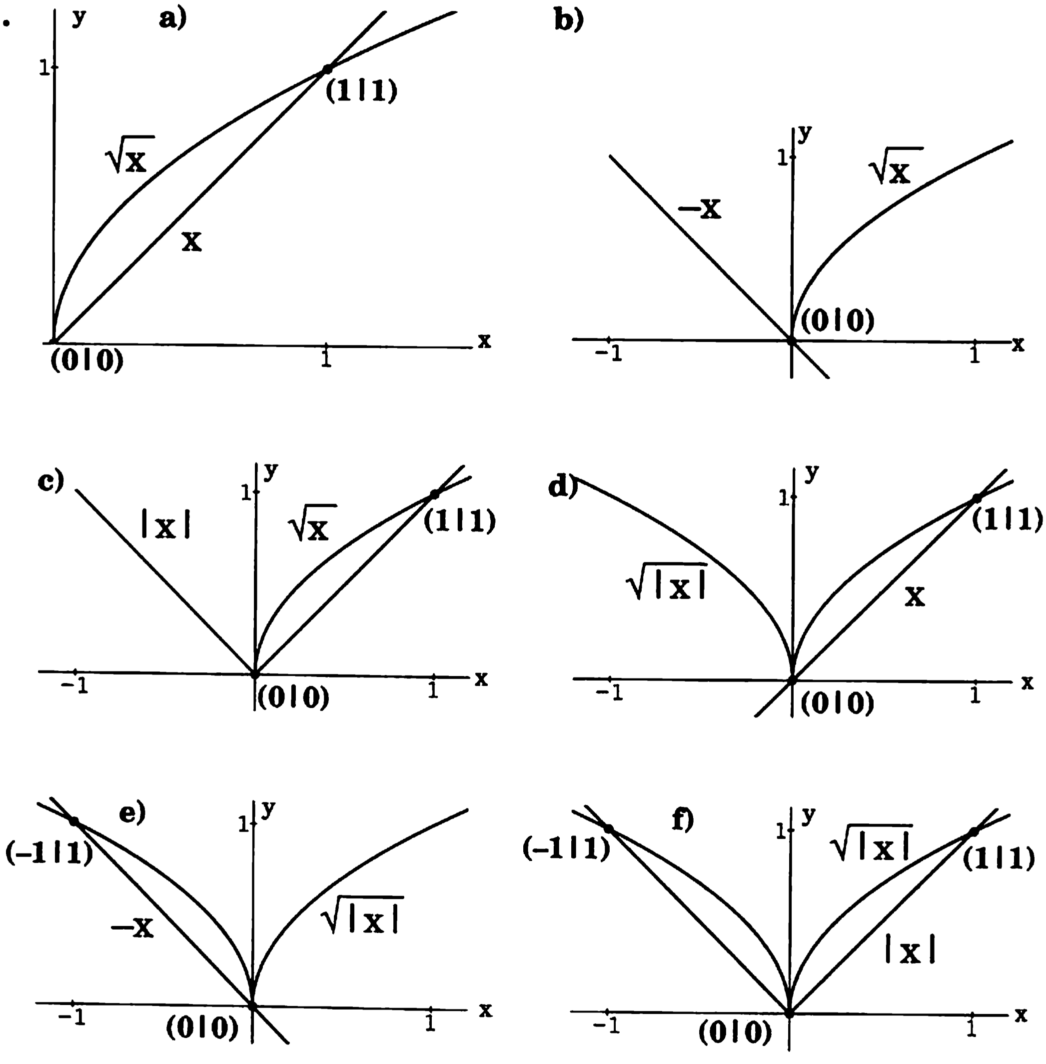
b) $D = \mathbb{R}_0^-$, $W = \mathbb{R}_0^+$,
$g(x) = -x^2$ mit $x \geq 0$

c) $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_0^-$,
f ist nicht umkehrbar.

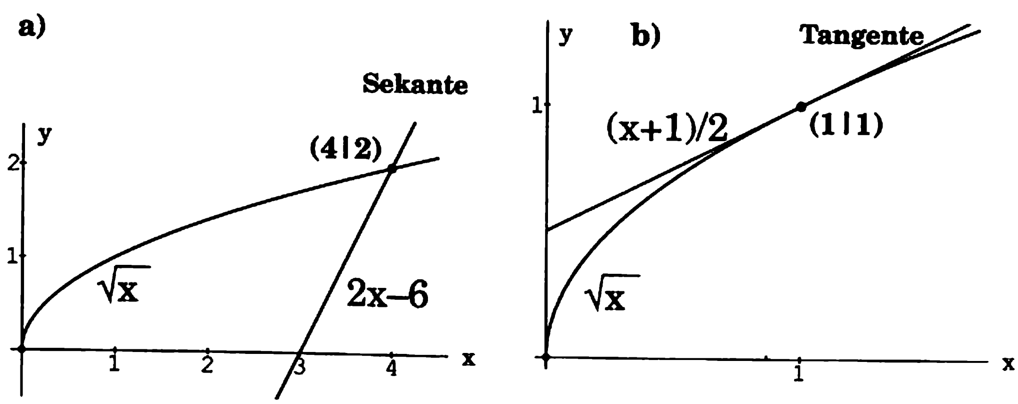
d) $D = \mathbb{R}_0^-$, $W = \mathbb{R}_0^-$,
$g(x) = -x^2$ mit $x \leq 0$

Aufgaben zu 4.3.4

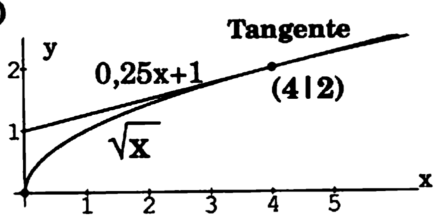
158/1.

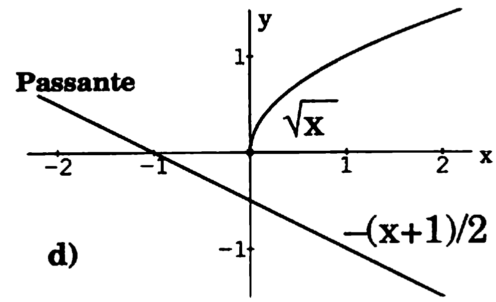


158/2. a)



158/2. c)





d)

158/3. a) $\sqrt{x} - \sqrt{a} = x - a$; $u := \sqrt{x}$; Normalform $u^2 - u + (\sqrt{a} - a) = 0$

Diskriminante $D = 1 - 4(\sqrt{a} - a) = 1 - 4\sqrt{a} + 4a = (1 - 2\sqrt{a})^2$

$u_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}} = \frac{1}{2}[1 \pm (1 - 2\sqrt{a})]$

$\sqrt{x_1} = \frac{1}{2}[1 + (1 - 2\sqrt{a})] = 1 - \sqrt{a}$, falls $a \le 1$; $x_1 = 1 - 2\sqrt{a} + a$

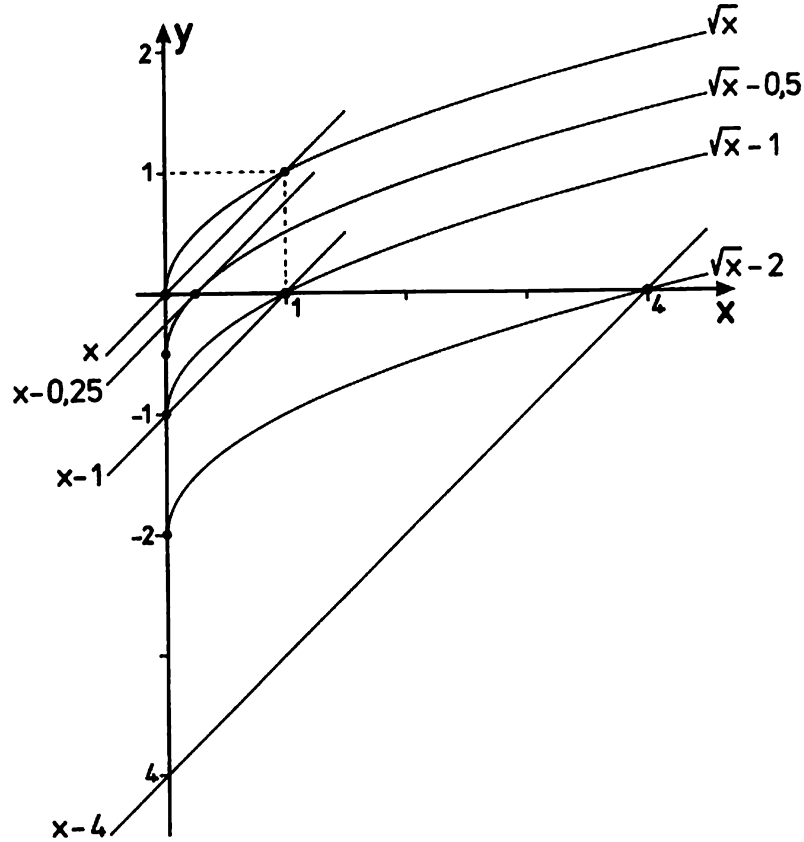
$\sqrt{x_2} = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2\sqrt{a})] = \sqrt{a}$; $x_2 = a$.

$a \le 1$: Zwei Schnittpunkte $S_1(1-2\sqrt{a} + a \mid 1-2\sqrt{a})$, $S_1(a \mid 0)$

$a > 1$: Einen Schnittpunkt $S(a \mid 0)$.

Sonderfall $D = 0$, $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$, Berührpunkt $(0{,}25 \mid 0)$

b)



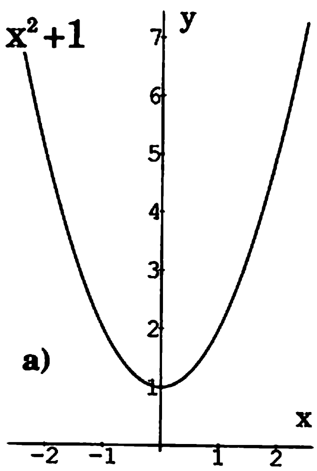
158/4. a) $x - 3\sqrt{x} + 3t = 0$; $u := \sqrt{x}$; Normalform $u^2 - 3u + 3t = 0$

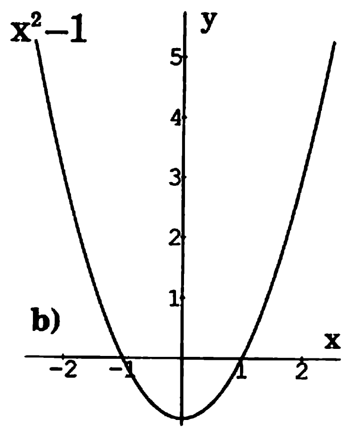
$D = 9 - 12t = 3(3 - 4t)$;

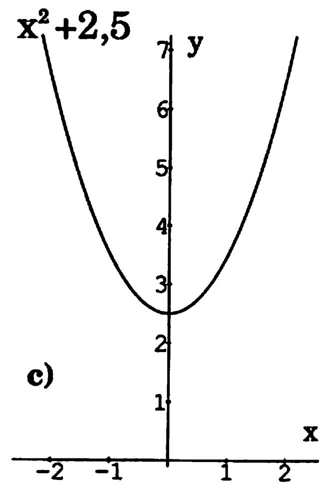
Tangente der Wurzelkurve: $D = 0$, also $t = \frac{3}{4}$

Aufgaben zu 5.1.1

161/1.





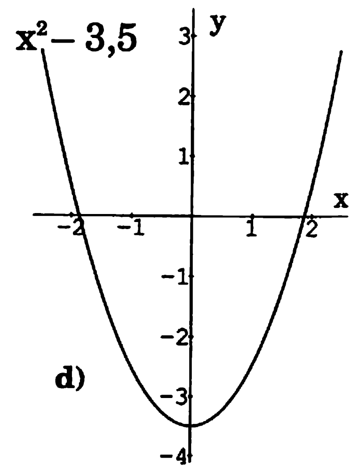


161/2. **a)** $S(0\,|-5)$, $W = [-5\,;+\infty[$

b) $S(0\,|\,100)$, $W = [100\,;+\infty[$

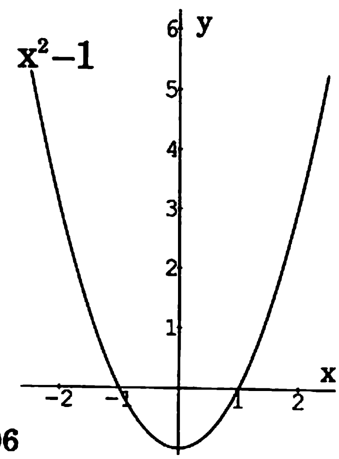
c) $S(0\,|-0{,}01)$, $W = [-0{,}01\,;+\infty[$

d) $S(0\,|-2\sqrt{2}\,)$, $W = [-2\sqrt{2}\,;+\infty[$

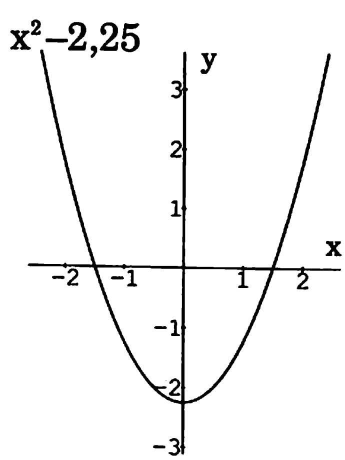


161/3.

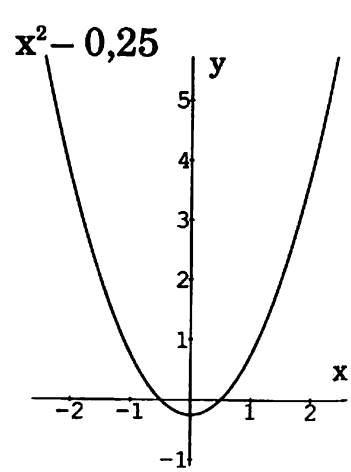
a) $\{-1\,;1\}$



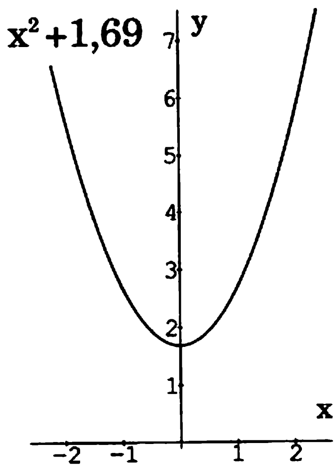
b) $\{-1{,}5\,;1{,}5\}$



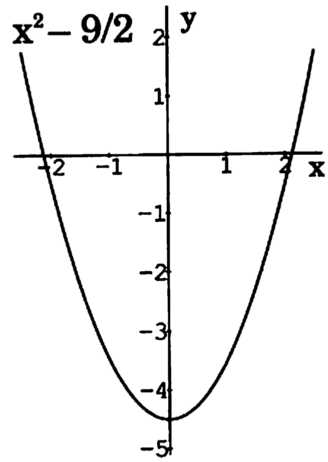
c) $\{-0{,}5\,;0{,}5\}$



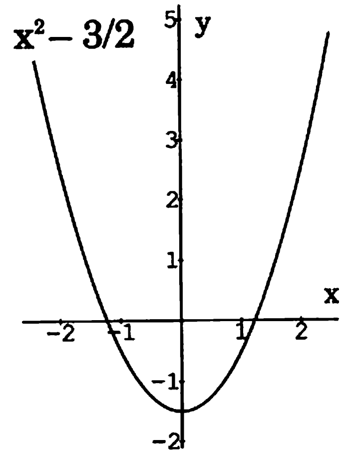
d) $\{\ \}$



e) $\{-1{,}5\sqrt{2}\,;\,1{,}5\sqrt{2}\}$

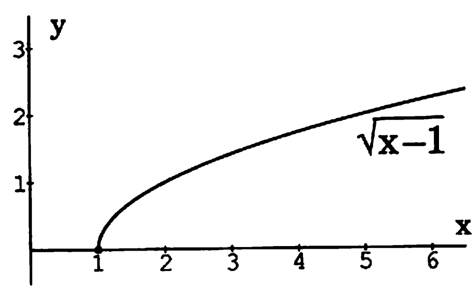


f) $\{-0{,}5\sqrt{6}\,;\,0{,}5\sqrt{6}\}$

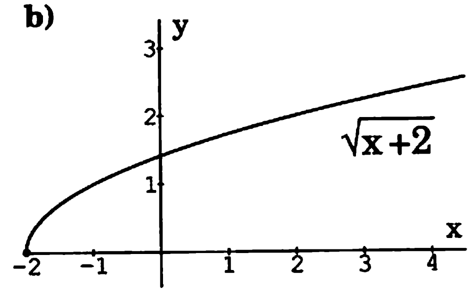


161/4.

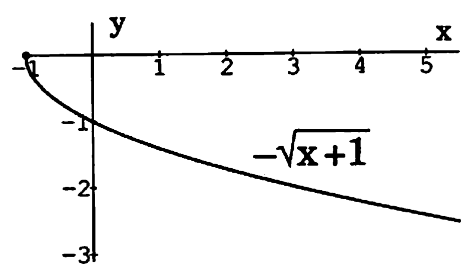
a)



b)



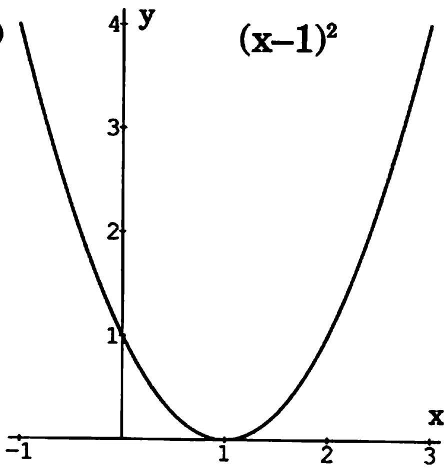
c)



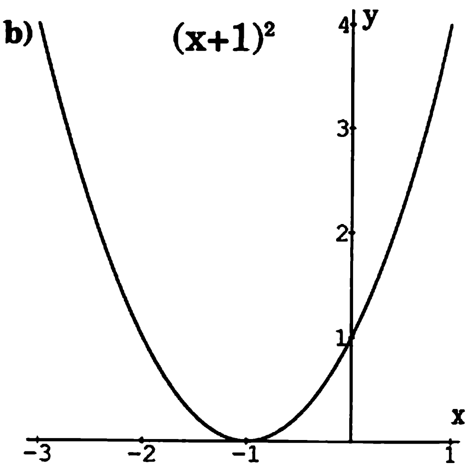
Aufgaben zu 5.1.2

162/1.

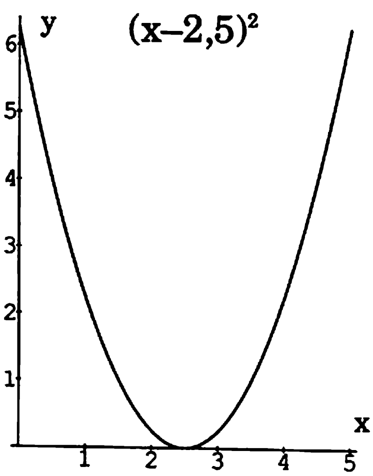
a)



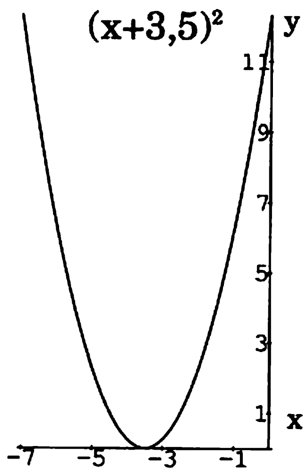
b)



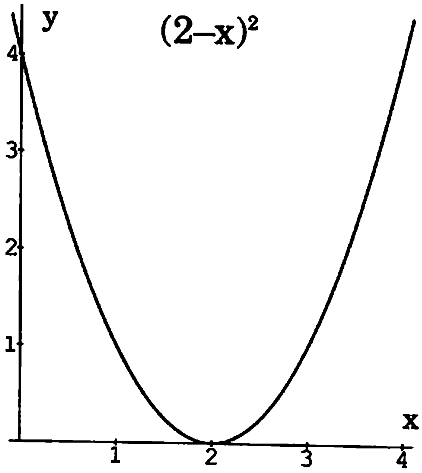
c)



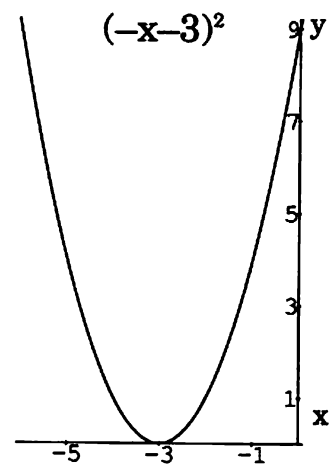
d)



e)



f)



162/2. **a)** $S(1{,}5 \mid 0),\ x = 1{,}5$ **b)** $S(-100 \mid 0),\ x = -100$

c) $S(2\sqrt{3} \mid 0),\ x = 2\sqrt{3}$ **d)** $S(3 \mid 0),\ x = 3$

e) $S(3 \mid 0),\ x = 3$ **f)** $S(-3 \mid 0),\ x = -3$

162/3. **a)** $S(1 \mid 0),\ x = 1$ **b)** $S(-3 \mid 0),\ x = -3$

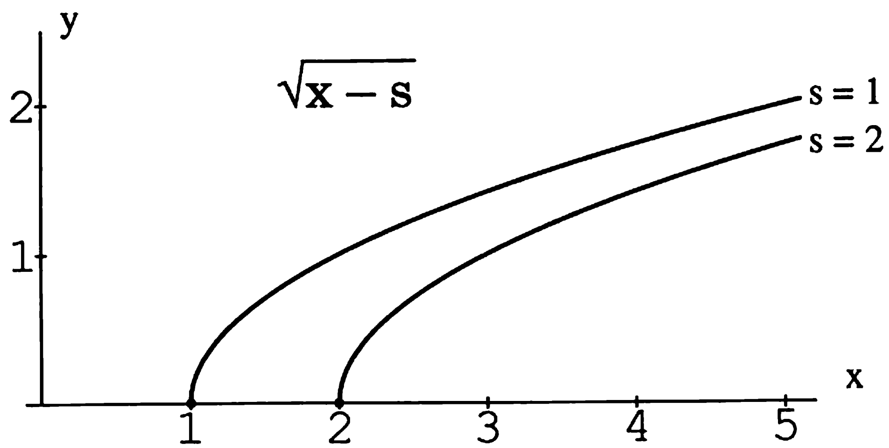
c) $S(-2{,}5 \mid 0),\ x = -2{,}5$ **d)** $S(0{,}01 \mid 0),\ x = 0{,}01$

162/4. **a)**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$\sqrt{x-3}$	–	–	–	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4

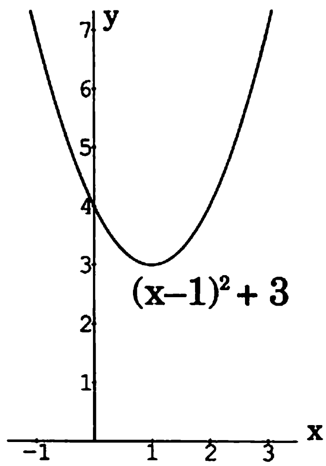
$g(x) = \sqrt{x-3}$ ist definiert für $x \geq 3$.
Der Graph von g entsteht aus dem der Wurzelfunktion durch Verschiebung um 3 nach rechts.

b)

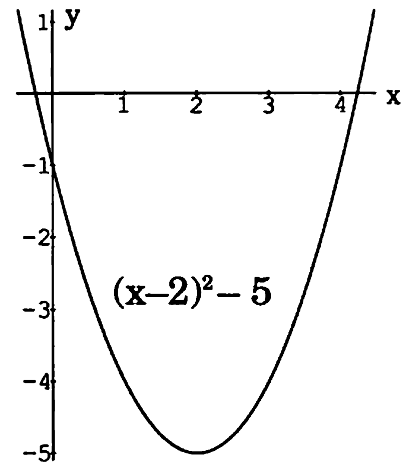


Aufgaben zu 5.1.3

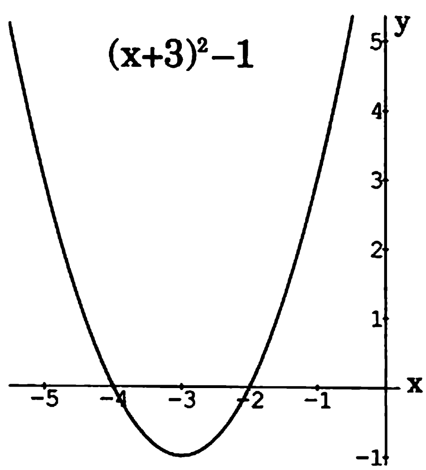
164/1. a)



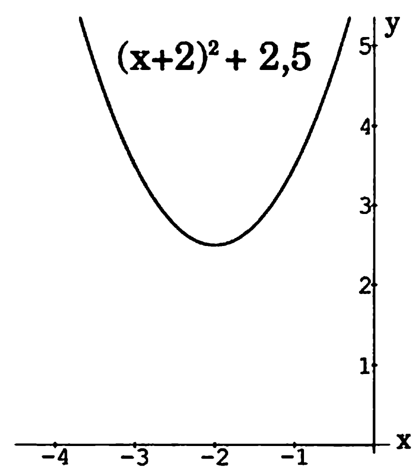
b)



c)



d)



164/2. a) $S(1{,}7 \mid 0{,}9)$, $x = 1{,}7$ b) $S(\sqrt{2} \mid 1{,}5)$, $x = \sqrt{2}$

c) $S(-2\sqrt{5} \mid 2\sqrt{5})$, $x = -2\sqrt{5}$ d) $S(1000 \mid -5003)$, $x = 1000$

164/3. a) $S(1 \mid -2)$, $x = 1$ b) $S(3 \mid 1)$, $x = 3$

c) $S(-2{,}5 \mid -6)$, $x = -2{,}5$ d) $S(0{,}05 \mid -0{,}0025)$, $x = 0{,}05$

164/4. a) $S(-0{,}5 \mid -5{,}25)$, $x = -0{,}5$
$y = (x + 0{,}5)^2 - 5{,}25$

b) $S(-3 \mid -9)$, $x = -3$
$y = (x + 3)^2 - 9$

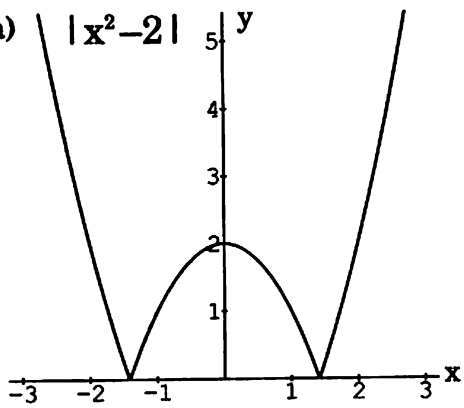
c) $S(2 \mid -1)$, $x = 2$
$y = (x - 2)^2 - 1$

d) Dem x-Wert 2 sind die y-Werte 3 und 4 zugeordnet. Eine solche Parabel gibt es nicht.

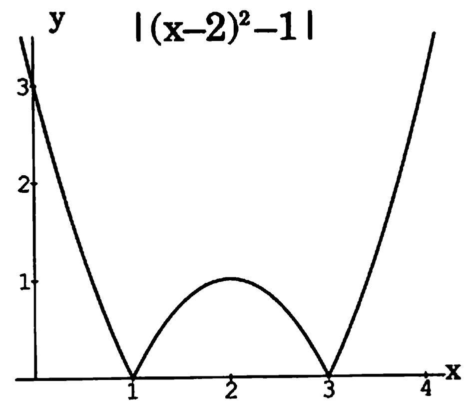
164/5. **a)** $y = (x+4)^2 + 9,\ s = -4,\ t = 9$ **b)** $y = (x-2)^2 - \frac{9}{4},\ s = 2,\ t = -\frac{9}{4}$

c) $y = (x + \frac{4}{3})^2 + 3,\ s = -\frac{4}{3},\ t = 3$

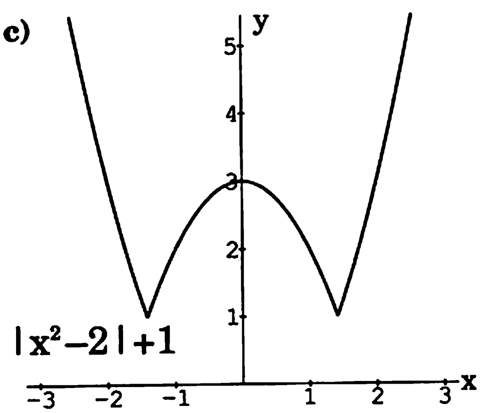
165/6. **a)**



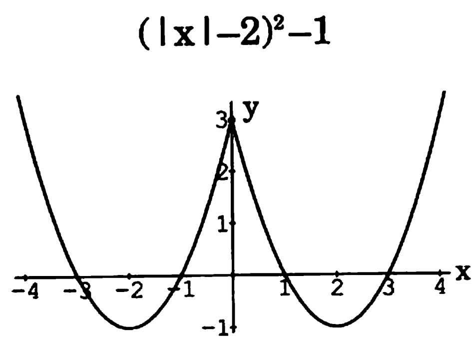
b)



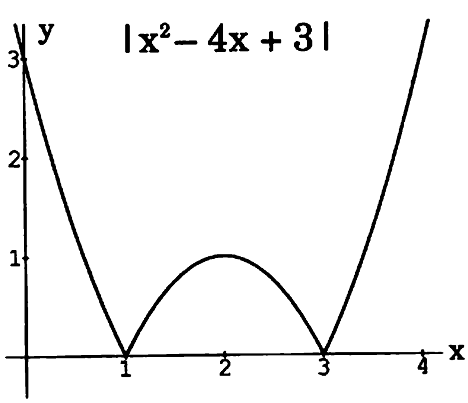
c)



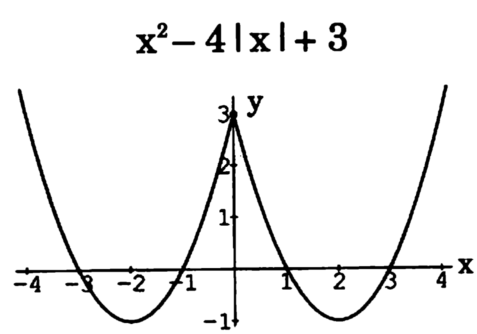
d)



e)

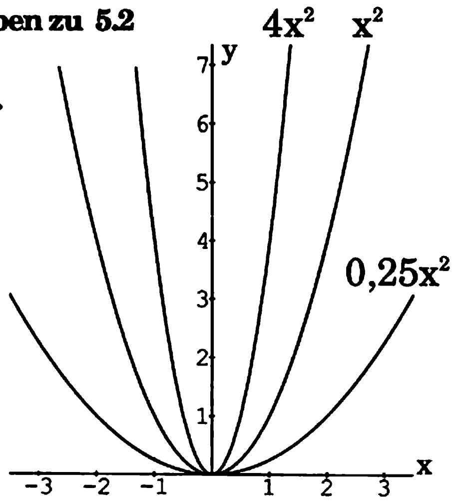


f)

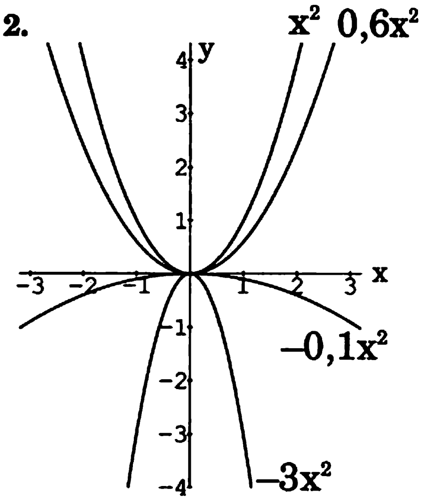


Aufgaben zu 5.2

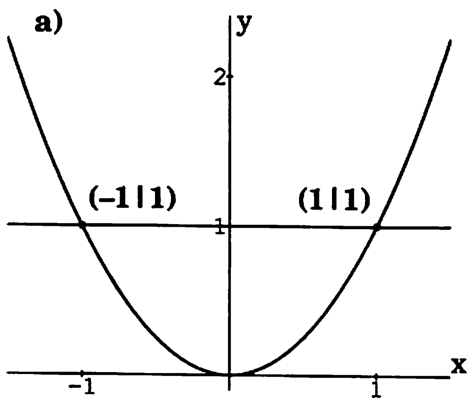
168/1.



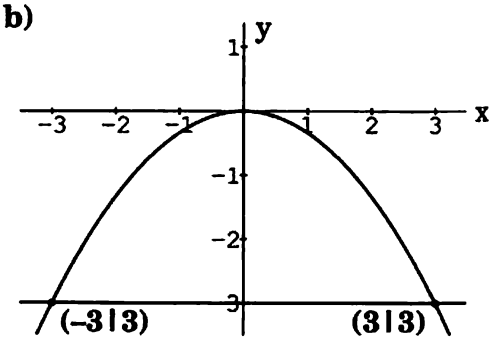
2.



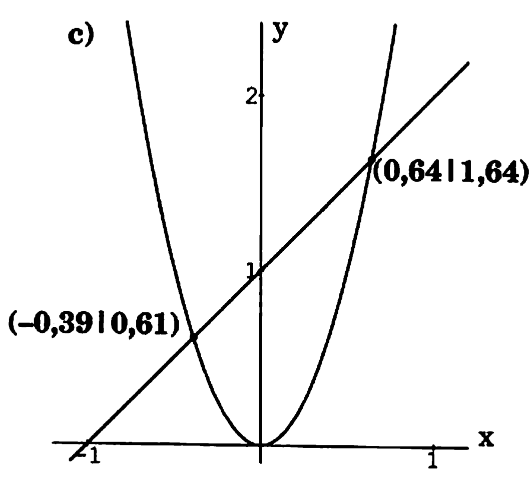
168/3. **a)**



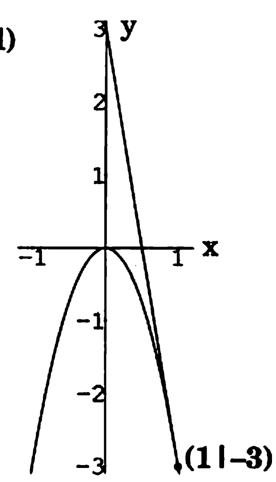
b)



c)



d)



Schnittpunkte ($\frac{1}{8}(1-\sqrt{17}$ | $\frac{1}{8}(9-\sqrt{17}$),

($\frac{1}{8}(9+\sqrt{17}$ | $\frac{1}{8}(1+\sqrt{17}$)

169/4. **a)** Brennpunkt F(0 | Brennweite = $\frac{1}{4a}$)

in $y = \frac{1}{12}x^2$ ist $a = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow 4a = 4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$,

die Brennweite ist 3 cm.

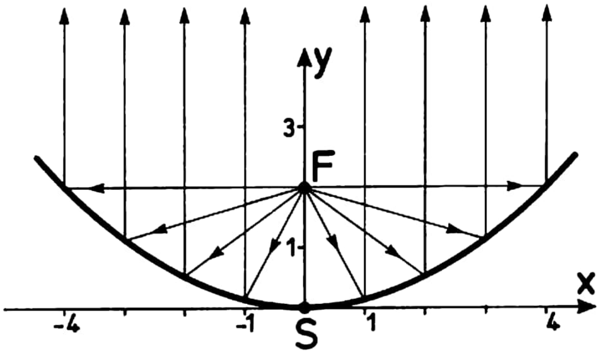
b) Scheitel: Ursprung

Spiegelachse: y-Achse

Brennpunkt: F(0 | 2)

Brennweite: 2 cm

$2 = \frac{1}{4a}$, also $a = \frac{1}{8}$, $y = \frac{1}{8}x^2$



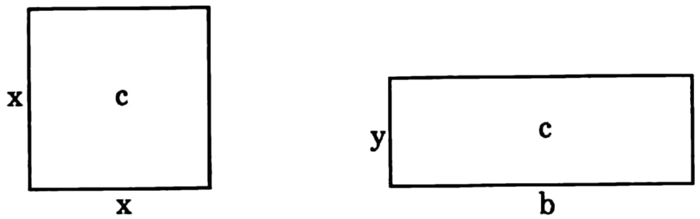
169/5. **a)** Da P auf der Parabel $y = ax^2$ liegt, gilt

$\overline{PQ}^2 = |x|^2 = x^2 = \frac{1}{a} \cdot y = \frac{1}{a}\overline{SQ}$.

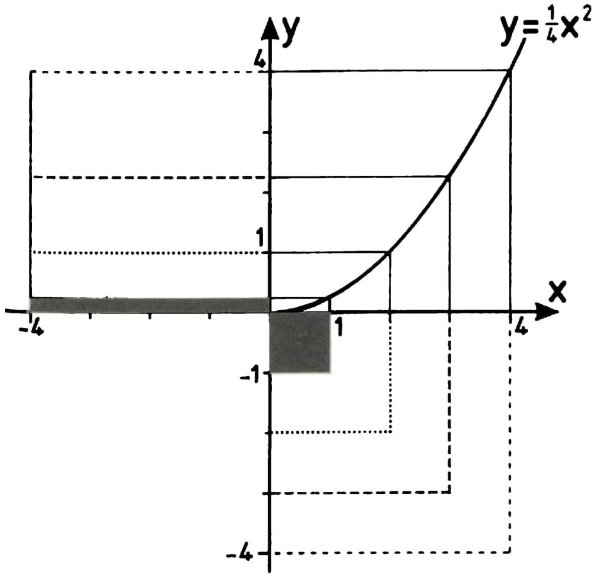
b) $c = x^2$ und

$c = yb$, also

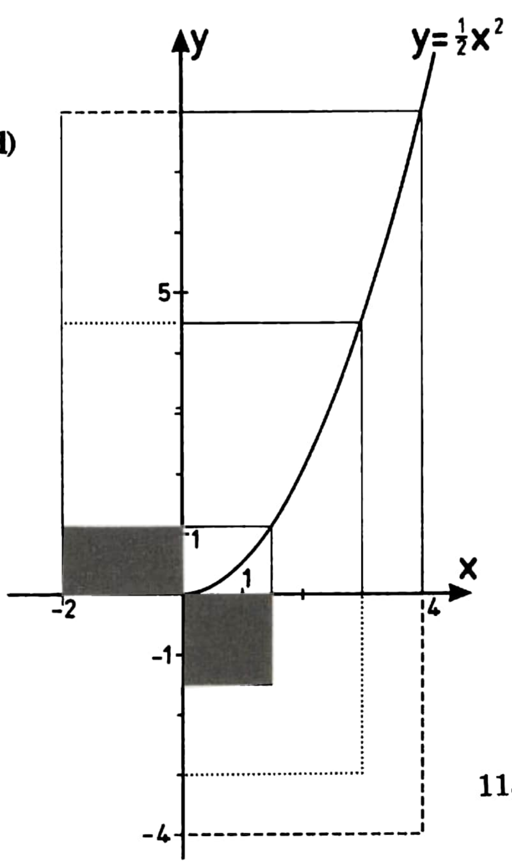
$y = \frac{1}{b}x^2$



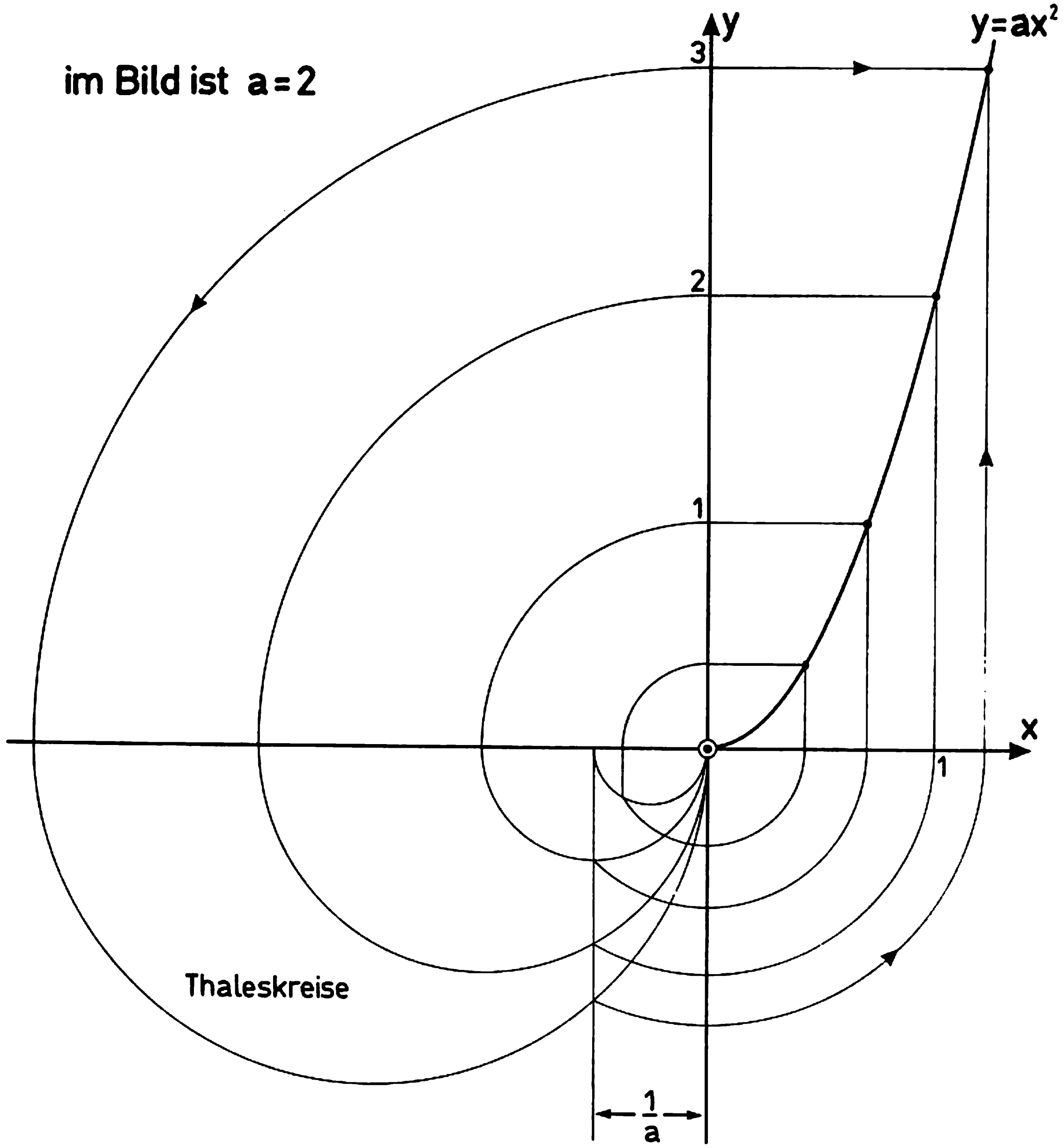
c)



d)



169/6. a)



Beachte:

$y > \frac{1}{a}$ $\Rightarrow$ y ist Hypotenuse, $\frac{1}{a}$ ist Hypotenusenabschnitt

$y < \frac{1}{a}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a}$ ist Hypotenuse, y ist Hypotenusenabschnitt

$y = \frac{1}{a}$ $\Rightarrow$ Der Kathetensatz ist nicht anwendbar:
Auf den Höhensatz ausweichen!

b), c) und d) Die Konstruktionen verlaufen analog.

170/7. a) $\overline{MP'}^2 + \overline{P'P}^2 = \overline{MP}^2$

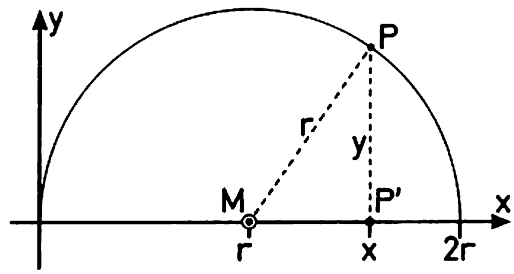
$(x - r)^2 + y^2 = r^2$

$x^2 - 2rx + y^2 = 0$

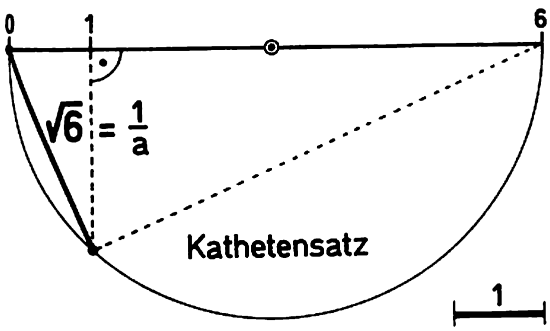
$y^2 = 2rx - x^2$

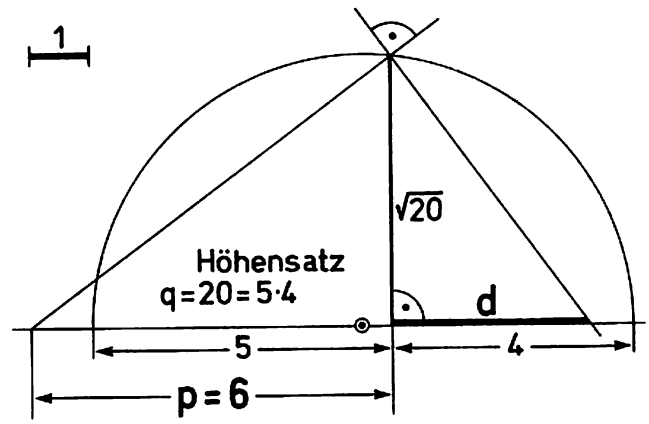
$y = \sqrt{x(2r - x)}$

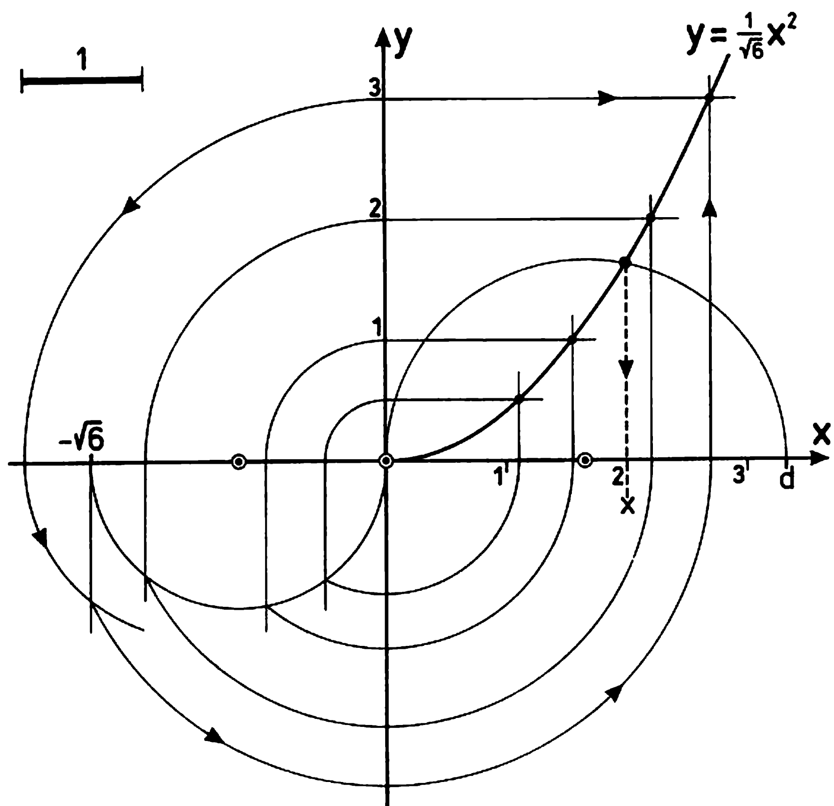
(weil y im ersten Quadranten liegt, scheidet die negative Wurzel als Lösung aus.)



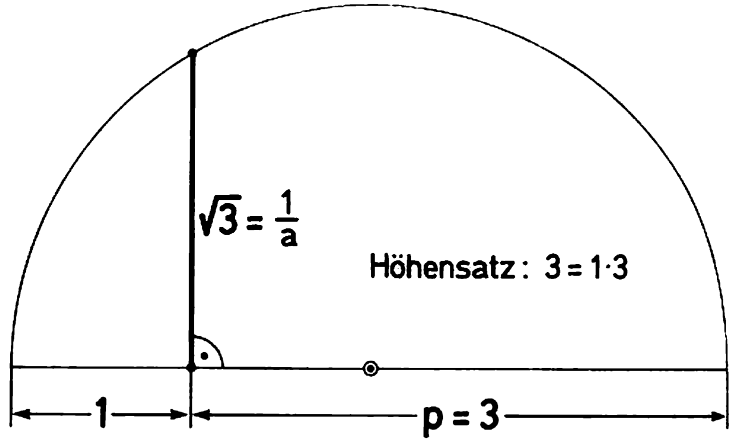
b) 1) $x = 2$



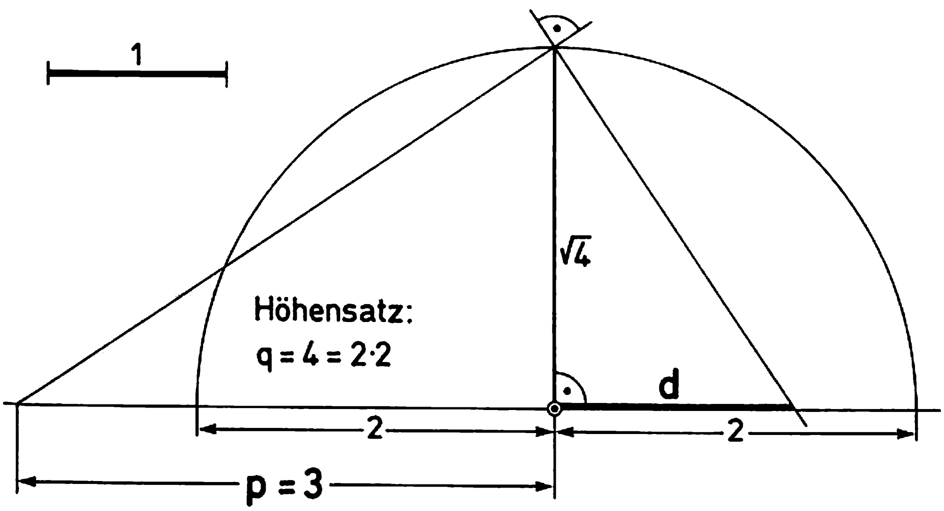




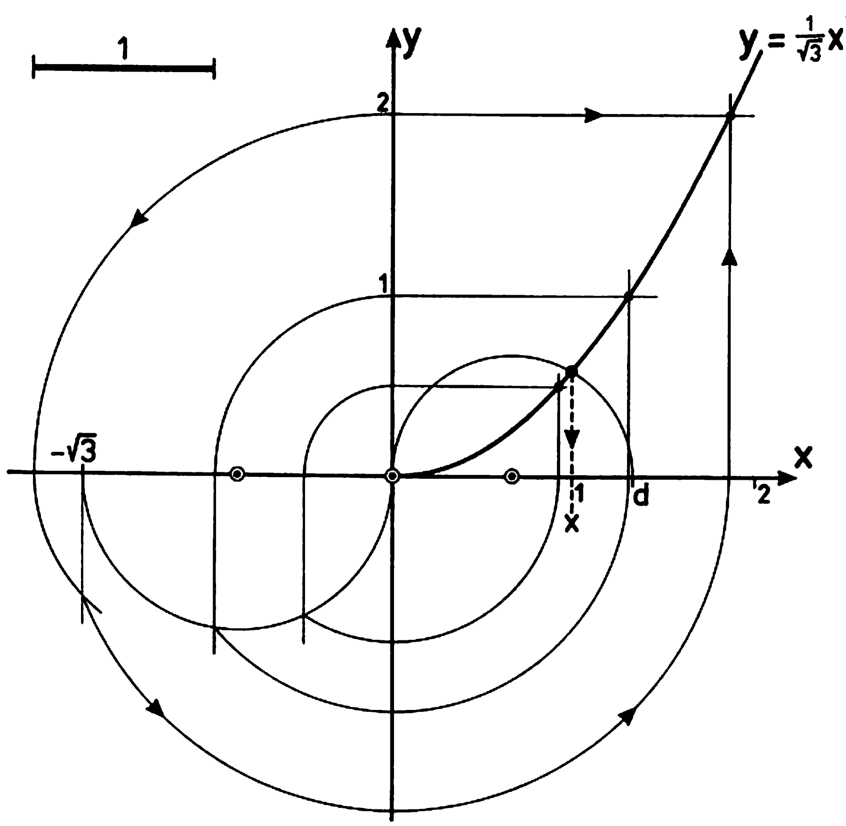
2) $x = 1$



√3 = 1/a
Höhensatz: 3 = 1·3
1
p = 3

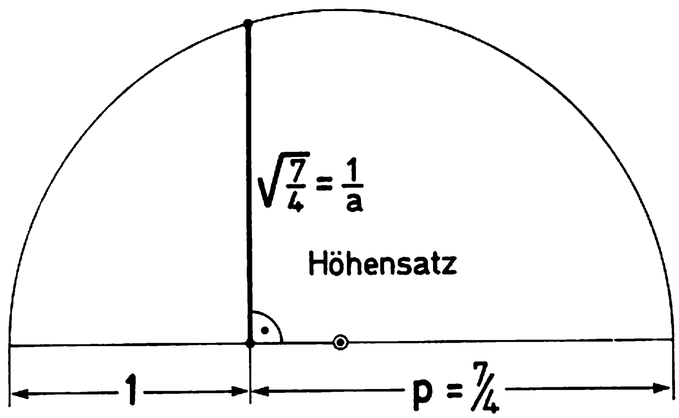


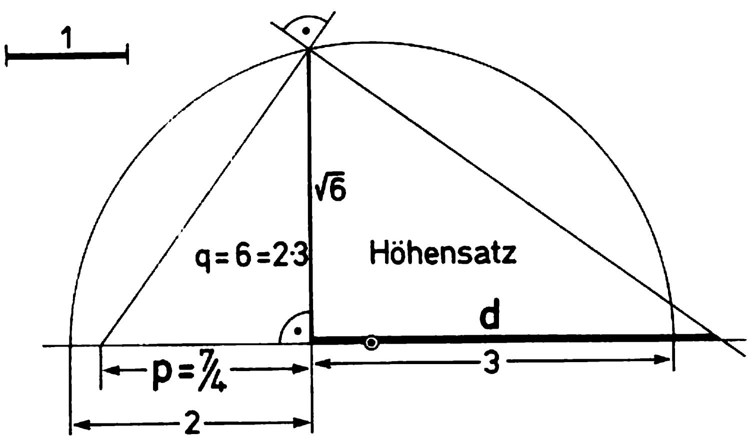
1
√4
Höhensatz:
q = 4 = 2·2
d
2
2
p = 3

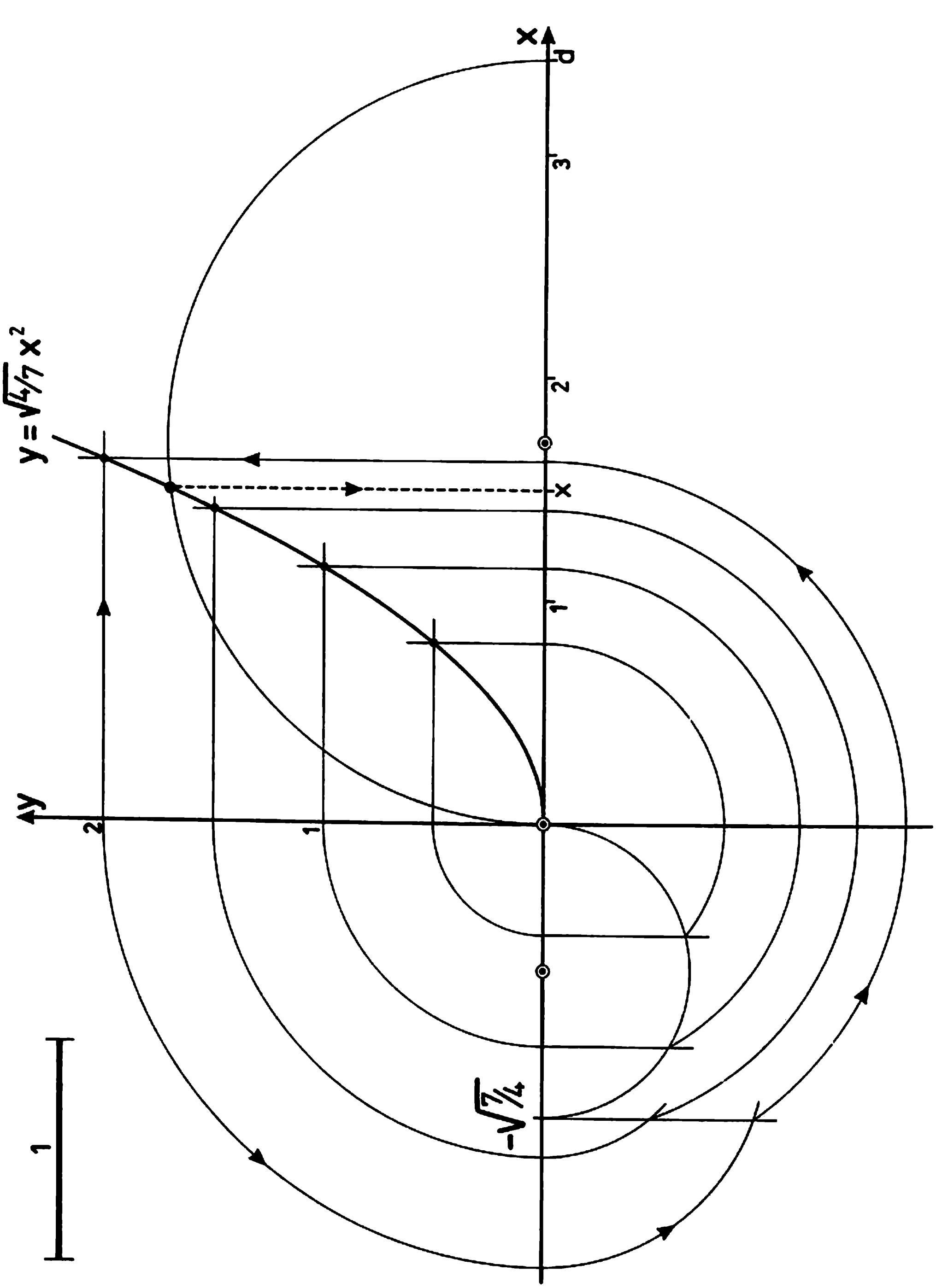


1
y
y = 1/√3 x²
2
1
−√3
x
1
x
d
2

3) $4x^3 + 7x = 24 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + \frac{7}{4}x = 6,$ Lösung: $x = \frac{3}{2}$



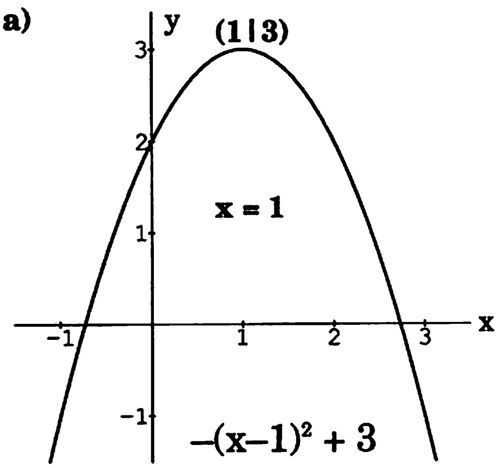




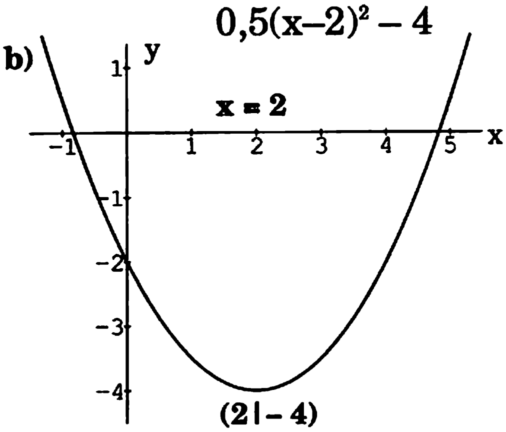
$y = \sqrt{4/7}\,x^2$
x
y
p
1
2
3
x
$-\sqrt{7/4}$
1

Aufgaben zu 5.3

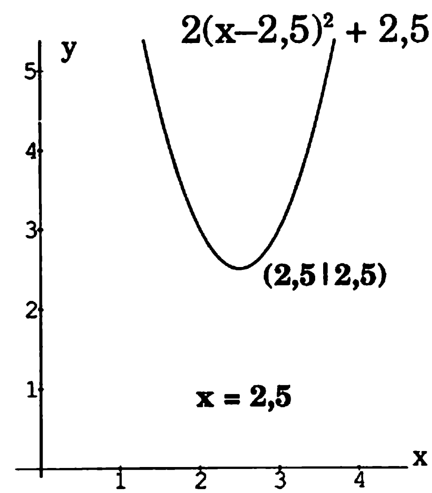
173/1. **a)**



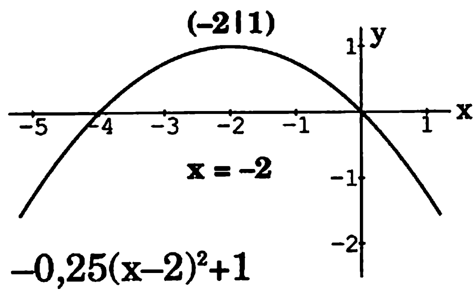
b)



c)

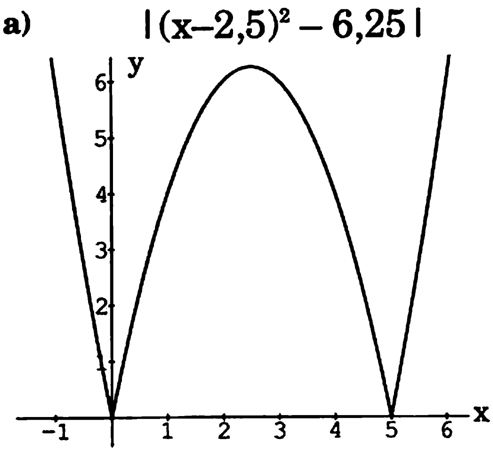


d)

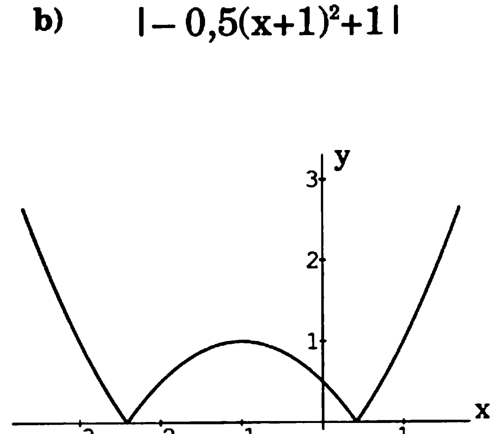


173/2. **a)** $a = -\frac{2}{3}$, $t = 4$ **b)** $a = \frac{1}{4}$, $t = -4$ **c)** $a = -0{,}44$, $t = 1{,}36$

173/3. **a)**



b)



173/4. **a)** $a = -1,\ s = 3,\ t = -5$ **b)** $a = 1,\ s = -2,\ t = -3$

c) $a = \frac{1}{2},\ s = -2,\ t = -2{,}5$ **d)** $a = -2,\ s = -3,\ t = 4$

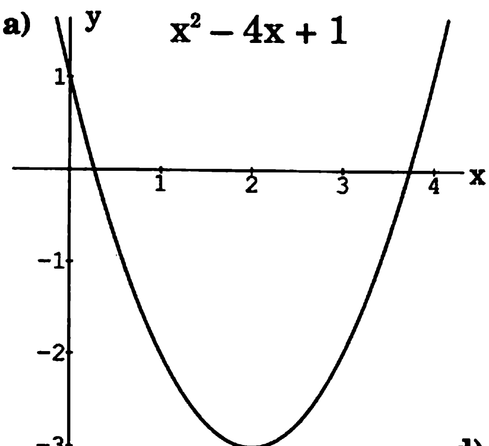
173/5. **a)** $(0\,|-8),\ \ x = 0$ **b)** $(\frac{1}{6}\,|-\frac{1}{12}),\ \ x = \frac{1}{6}$

c) $(7{,}5\,|-10),\ \ x = 7{,}5$ **d)** $(3\,|\,0),\ \ x = 3$

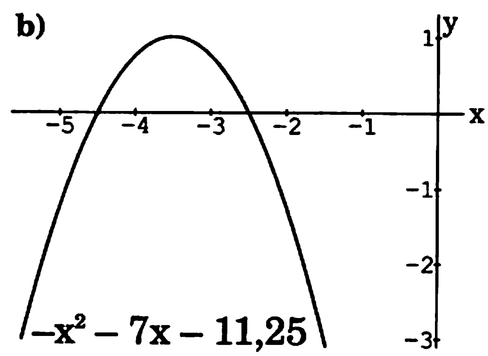
e) $(-\frac{3}{16}\,|-6\frac{9}{320}),\ \ x = -\frac{3}{16}$ **f)** $(\frac{3}{4}\,|-\frac{1}{4}),\ \ x = \frac{3}{4}$

g) $(-\frac{1}{2}\sqrt{5}\,|-2{,}25),\ \ x = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$ **h)** $(-\frac{1}{2}\sqrt{6}\,|\,4-\frac{3}{4}\sqrt{6}),\ \ x = -\frac{1}{2}\sqrt{6}$

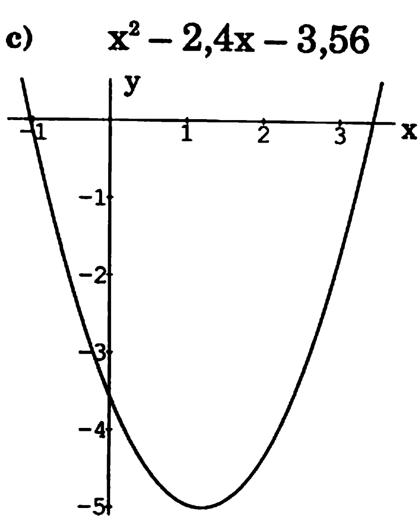
174/6. **a)**



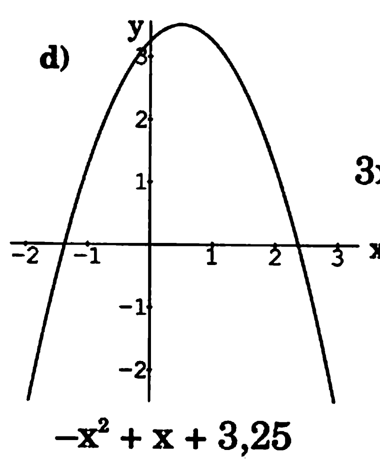
b)



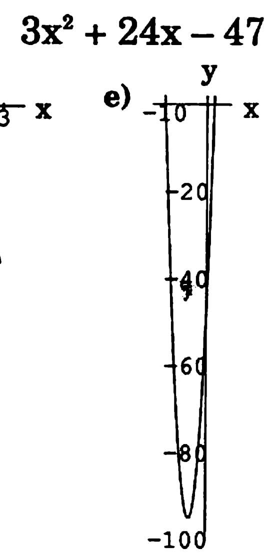
c)



d)

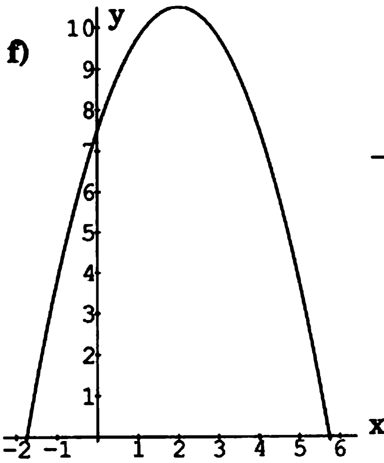


e)



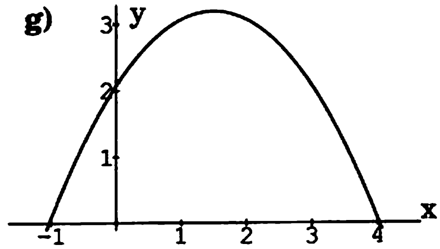
174/6.

f)



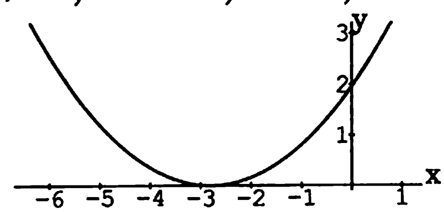
$-0{,}75x^2 + 3x + 7{,}5$

g)



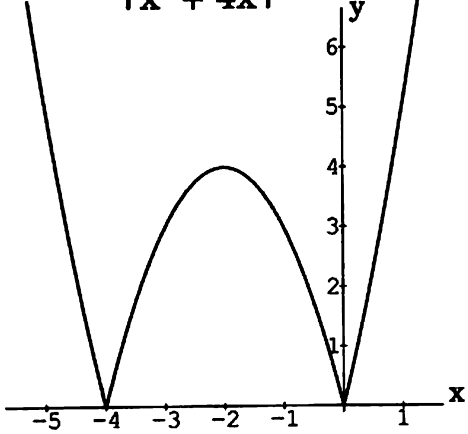
$-0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2{,}075$

h) $0{,}25x^2 + 1{,}4x + 1{,}96$

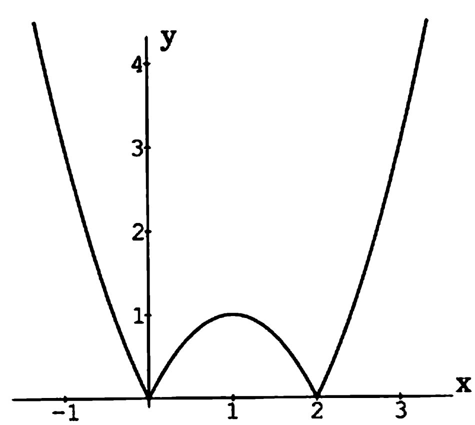


174/7. Geduld bis zur nächsten Auflage!

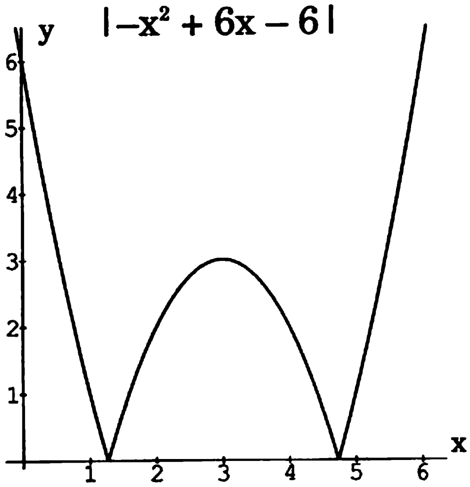
174/8. a) $|x^2 + 4x|$



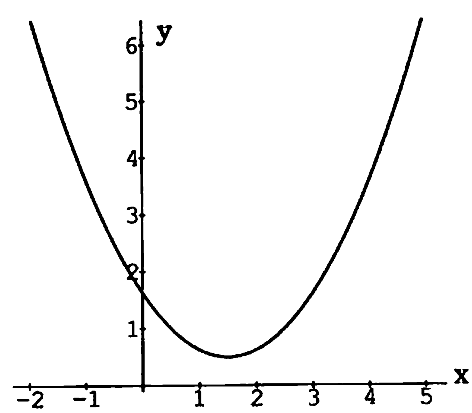
b) $|-x^2 + 2x|$



c) $|-x^2 + 6x - 6|$



d) $|-0{,}5x^2 + 1{,}5x - 1{,}625|$



174/9. **a)** $y = (x-2)^2$ **b)** $y = -\frac{3}{4}(x+\frac{1}{3})^2 + \frac{25}{12}$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$ **d)** $y = 4(x-\frac{1}{2})^2 - 7$

174/10. **a)** $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 1$ **b)** $y = -5(x-0{,}4)^2 + 0{,}8$

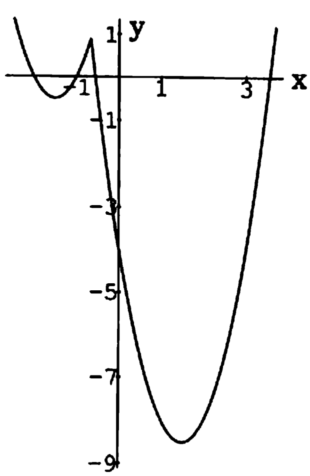
c) $y = \frac{1}{10}x^2 - 8$ **d)** $y = -\frac{8}{25}(x+2)^2 + 9$

174/11. **a)** $y = -(x-4)^2 - \frac{1}{2}$ **b)** $y = \frac{4}{5}(x+5)^2 - \frac{21}{5}$

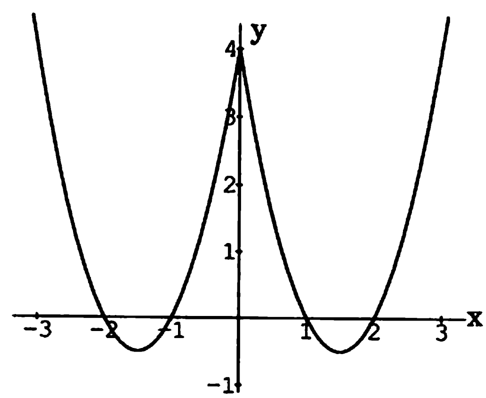
174/12. **a)** $y = -2x^2 + 6x - 4$ **b)** $y = 2x^2 + 6x + 4$ **c)** $y = -2x^2 - 6x - 4$

d) $y = 2x^2 - 2x$ **e)** $y = -2x^2 + 6x - 2$ **f)** $x = 2y^2 - 6y + 4$

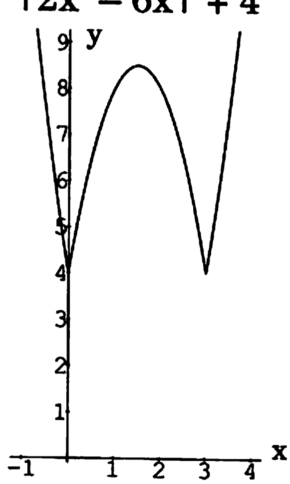
174/13. **a)** $2x^2 - 6|x + 4|$



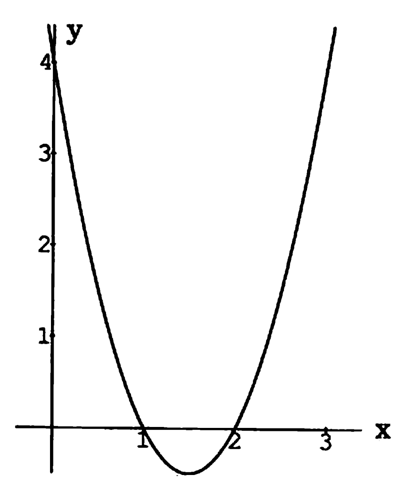
b) $2x^2 - 6|x| + 4$



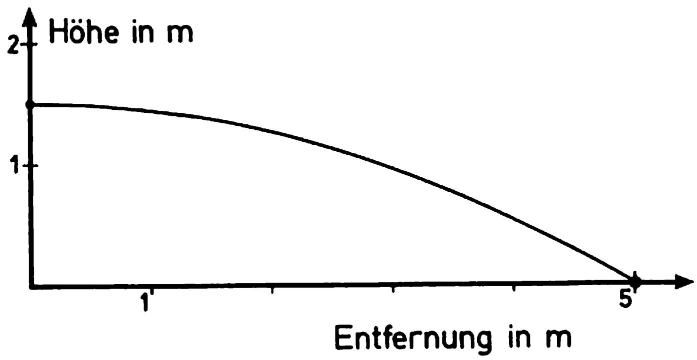
c) $|2x^2 - 6x| + 4$



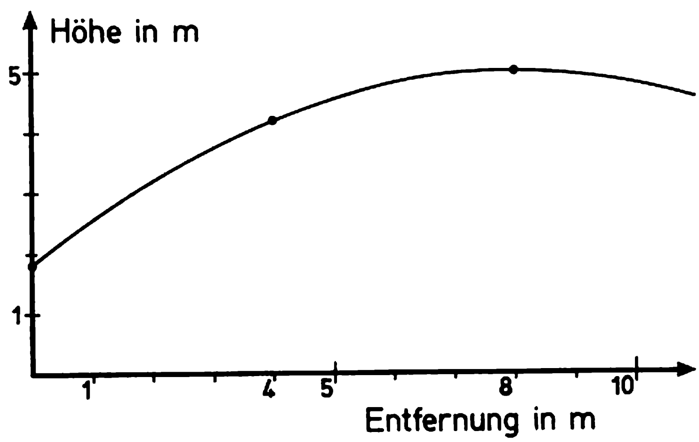
d) $|y| = 2x^2 - 6x + 4$



175/14.



175/15. a)



b) $y_{max} = 5$ m

c) $x_{Einschlag} = 18$ m

Aufgaben zu 5.4.1

177/1. **a)** $\{-2;2\}$ **b)** $\{0;4\}$ **c)** $\{-\frac{4}{5};\frac{2}{5}\}$

d) $\{-1;3\}$ **e)** keine **f)** $\{-\frac{3}{2}\}$

177/2. **a)** $(0\,|\,-1)$ **b)** $(2\,|\,-2)$ **c)** $(-\frac{1}{5}\,|\,-1\frac{4}{5})$

d) $(1\,|\,4)$ **e)** $(\frac{2}{3}\,|\,\frac{7}{6})$ **f)** $(-\frac{3}{2}\,|\,0)$

177/3. Ansatz nach VIETA: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

a) $-16 = a(0-2)(0-(-4))$; $a = 2$; $y = 2x^2 + 4x - 16$

b) $-1 = a(0-5)(0-(-1))$; $a = \frac{1}{5}$; $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - 1$

178/4. **a)** Aus $x_2 - x_1 = 4$ und $\frac{1}{2}(x_2 + x_1) = 3$ folgt $x_1 = 1,\ x_2 = 5.$

Ansatz: $y = a(x-3)^2 - 4$

$0 = a(1-3)^2 - 4 \Rightarrow a = 1$

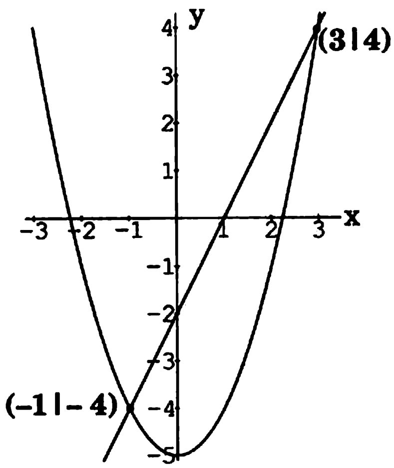
b) $-3 = a(8+3)(8-5) \Rightarrow a = -\frac{1}{11}$; $y = -\frac{1}{11}x^2 + \frac{2}{11}x + \frac{15}{11}$

Aufgaben zu 5.4.2

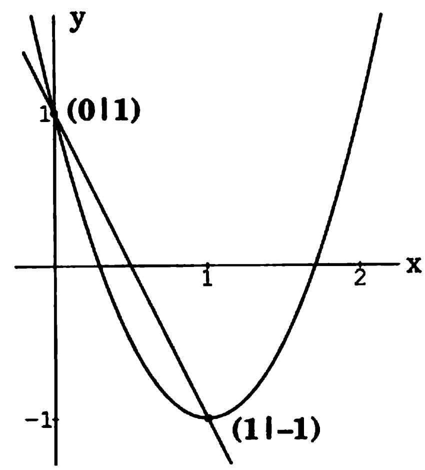
180/1. **a)** $(-1\,|\,-4)$, $(3\,|\,4)$ **b)** $(0\,|\,1)$, $(1\,|\,-1)$

c) $(-2\,|\,2)$, $(-1\,|\,\frac{1}{2})$ **d)** $(6\,|\,4)$ **e)** $(-3\,|\,1\frac{1}{4})$

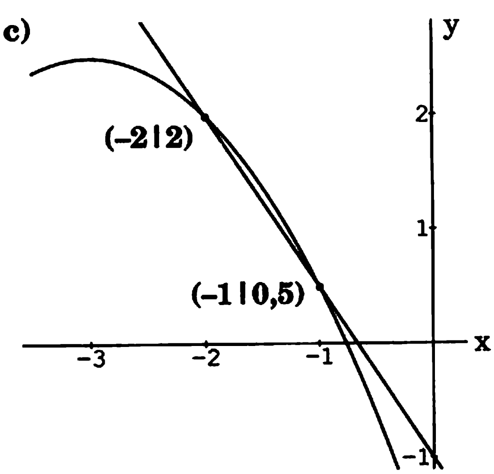
a)



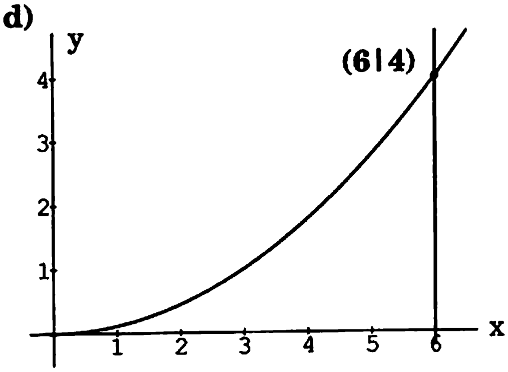
b)



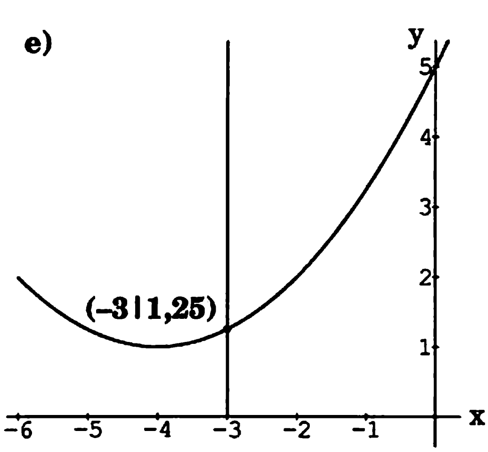
c)



d)



e)



180/2. a) $(-4\,|-4)$, $(6\,|\,9)$; $5\sqrt{5}$ b) kein Schnitt c) $(5\,|-3)$; 0

d) $(-2\,|-3)$, $(8\,|-\frac{11}{2})$; $\frac{5}{2}\sqrt{17}$ e) $(2\frac{2}{3}\,|-4\frac{13}{36})$, $(4\,|-5\frac{1}{4})$; $\frac{4}{9}\sqrt{13}$

180/3. S liegt auf g: $y_S = 2\cdot 3 - 1 = 5$, also $S(3\,|\,5)$.
P liegt auf g: $9 = 2x_P - 1$, also $P(5\,|\,9)$.
Die Parabel hat die Gleichung $y = a(x-3)^2 + 5$.
Da P auf der Parabel liegt, gilt $9 = a(5-3)^2 + 5 \Leftrightarrow a = 1$.
$y = x^2 - 6x + 14$ ist die gesuchte Gleichung der Parabel.

181/4. Die zweiten Schnittpunkte ergeben sich durch Einsetzen der Ordinaten in die Geradengleichung: $T_1(-2\,|-2)$ und $T_2(\frac{3}{2}\,|\,\frac{5}{8})$. Die Parabel hat wegen der angegebenen Symmetrie die Gleichung $y = ax^2 + t$.
T_1 und T_2 liegen auf der Parabel, also

I $\quad -2 = 4a + t$

II $\quad \frac{5}{8} = \frac{9}{4}a + t$

I' $\quad a = -\frac{3}{2}$

II' $\quad t = 4$

Damit gilt für die Schnittpunkte S_1 und S_2:
$2{,}5 = -\frac{3}{2}x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 1$. $S_1(-1\,|\,2{,}5)$ und $S_2(1\,|\,2{,}5)$

181/5. a) $P(-4\,|\,2)$

Schnittpunktgleichung: $\frac{1}{8}x^2 - mx - (2 + 4m) = 0$
Diskriminante = 0: $m^2 + 2m + 1 = 0$, also $m = -1$
Tangente: $y = -x - 2$

b) $P(-12\,|-8)$

Schnittpunktgleichung: $-\frac{1}{18}x^2 - mx - 12m + 8 = 0$
Diskriminante = 0: $9m^2 - 24m + 16 = 0$, also $m = \frac{4}{3}$
Tangente: $y = \frac{4}{3}x + 8$

c) $P(1\,|-\frac{18}{5})$

Schnittpunktgleichung: $-\frac{18}{5}x^2 - mx + m + \frac{18}{5} = 0$
Diskriminante = 0: $25m^2 + 360m + 1296 = 0$, also $m = -\frac{36}{5}$
Tangente: $y = -\frac{36}{5}x + \frac{18}{5}$

181/6. **a)** $P(\frac{1}{5} | -5\frac{1}{5})$

Schnittpunktgleichung: $-5x^2 + (10 - m)x - \frac{9}{5} + \frac{1}{5}m = 0$

Diskriminante = 0 : $m^2 - 16m + 64 = 0$, also $m = 8$;

Tangente: $y = 8x - \frac{34}{5}$

b) $P(0 | 47)$; Tangente: $y = -126x + 47$

c) Tangente in $P_1(0 | \frac{5}{4})$: $y = -3x + \frac{5}{4}$

Tangente in $P_2(15 | \frac{5}{4})$: $y = 3x - \frac{175}{4}$

181/7. **a)** $y = -\frac{5}{2}x + 9\frac{3}{4}$; $B_1(6 | -5\frac{1}{4})$

$y = \frac{3}{2}x + 1\frac{3}{4}$; $B_2(-2 | -1\frac{1}{4})$

b) $y = x$; $B_1(\frac{5}{2} | \frac{5}{2})$

$y = -9x$; $B_2(-\frac{5}{2} | \frac{45}{2})$

c) $y = 1$; $B_1(-\frac{7}{2} | 1)$

$y = -6x - 11$; $B_2(-\frac{1}{2} | -8)$

d) $y = 18x - 50$; $B_1(-1 | -68)$

$y = 30x - 50$; $B_2(1 | -20)$

e) $y = -2x + 8{,}2$; $B_1(3{,}5 | 1{,}2)$

$y = 3x + 3{,}2$; $B_2(-1{,}5 | -1{,}3)$

f) P liegt im »Parabelinnern«. Es gibt keine Tangente.

181/8. **a)** $\sqrt{x + a} = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow x^2 = 4(a - 1)$

a < 1: keine Lösung

a = 1: $\Rightarrow x = 0$, Lösung gemäß Probe

a > 1: $\Rightarrow x = -2\sqrt{a-1}$ oder $x = 2\sqrt{a-1}$

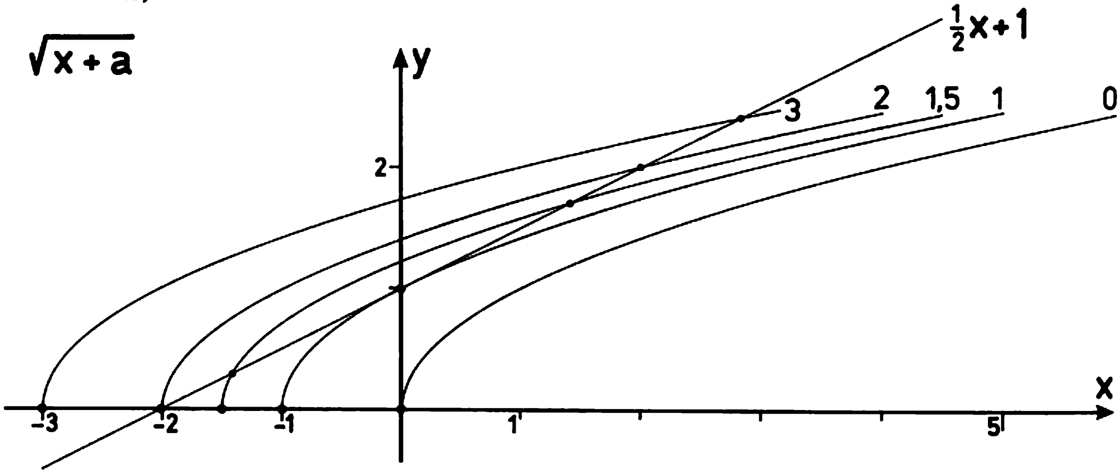
RS $= \pm\sqrt{a-1} + 1$. Wegen RS ≥ 0 ergibt sich im Fall des Minuszeichens $a \leq 2$. Damit gilt

$$RS = 1 \pm \sqrt{a-1} = \sqrt{1 \pm 2\sqrt{a-1} + a - 1} = \sqrt{\pm 2\sqrt{a-1} + a} = LS$$

Ergebnis:

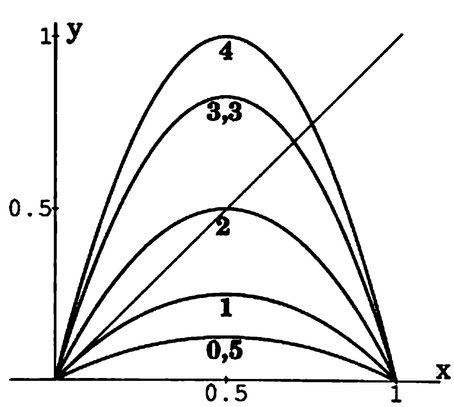
a	$-\infty < a < 1$	1	$1 < a \leq 2$	$2 < a < +\infty$
L	{ }	{0}	$\{-2\sqrt{a-1}; 2\sqrt{a-1}\}$	$\{2\sqrt{a-1}\}$

b)



a < 1:	keine Schnittpunkte, keine Lösung
a = 1:	Berührung, genau eine Lösung
1 < a ≤ 2 :	2 Schnittpunkte, 2 Lösungen
2 < a:	1 Schnittpunkt, 1 Lösung

181/9. a)



b)

a	$x_0 = 0{,}2$	$x_0 = 0{,}5$
0,5	(0,2 | 0,08)	(0,5 | 0,125)
	(0,08 | 0,037)	(0,125 | 0,0547)
	(0,037 | 0,018)	(0,0547 | 0,0258)
	(0,018 | 0,0087)	(0,0258 | 0,0126)
	(0,0087 | 0,0043)	(0,0126 | 0,0062)
1	(0,2 | 0,16)	(0,5 | 0,25)
	(0,16 | 0,1344)	(0,25 | 0,1875)
	(0,1344 | 0,1163)	(0,1875 | 0,1523)
	(0,1163 | 0,1028)	(0,1523 | 0,1291)
	(0,1028 | 0,0922)	(0,1291 | 0,1125)
2	(0,2 | 0,32)	(0,5 | 0,5)
	(0,32 | 0,4352)	(0,5 | 0,5)
	(0,4352 | 0,4916)	(0,5 | 0,5)
	(0,4916 | 0,4999)	(0,5 | 0,5)
	(0,4999 | 0,5)	(0,5 | 0,5)
3,3	(0,2 | 0,5280)	(0,5 | 0,825)
	(0,5280 | 0,8224)	(0,825 | 0,4764)
	(0,8224 | 0,4820)	(0,4764 | 0,8232)
	(0,4820 | 0,8239)	(0,8232 | 0,4804)
	(0,8239 | 0,4787)	(0,4804 | 0,8237)
4	(0,2 | 0,64)	(0,5 | 1)
	(0,64 | 0,9216)	(1 | 0)
	(0,9216 | 0,2890)	(0 | 0)
	(0,2890 | 0,8219)	(0 | 0)
	(0,8219 | 0,5854)	(0 | 0)

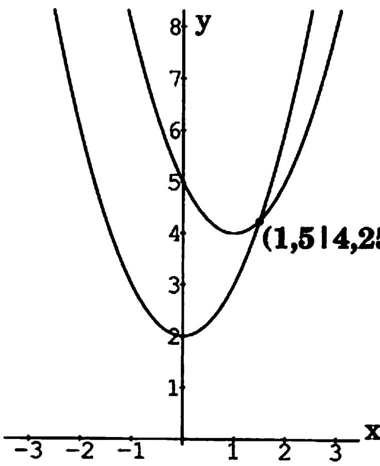
c) $f(x^*) = ax^*(1-x^*) = a(1-\frac{1}{a})(1-1+\frac{1}{a}) = x^*$, q.e.d.; $a \geq 0$ wegen $0 \leq x^*$

d)
$$\begin{aligned}
f(x_1) &= a\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a}-\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a}-\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}a\left(1+\tfrac{1}{a}-\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)\left(1-\tfrac{1}{a}+\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}a\left(1^2-\left(\tfrac{1}{a}-\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)^2\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}a\left(1-\tfrac{1}{a^2}+\tfrac{2}{a}\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}-1+\tfrac{2}{a}+\tfrac{3}{a^2}\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}\left(2+\tfrac{2}{a}+2\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)=\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a}+\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)=x_2
\end{aligned}$$

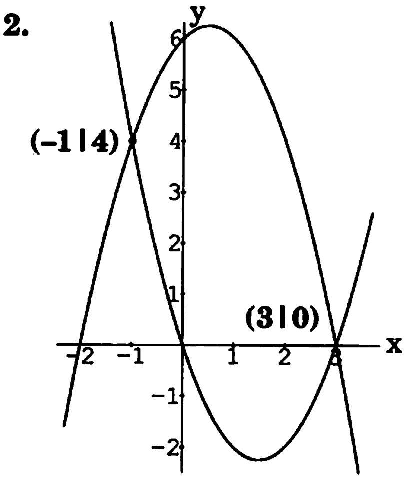
$$\begin{aligned}
f(x_2) &= a\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a}+\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a}+\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}a\left(1+\tfrac{1}{a}+\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)\left(1-\tfrac{1}{a}-\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}a\left(1^2-\left(\tfrac{1}{a}+\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)^2\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}a\left(1-\tfrac{1}{a^2}-\tfrac{2}{a}\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}-1+\tfrac{2}{a}+\tfrac{3}{a^2}\right)=\\
&= \tfrac{1}{4}\left(2+\tfrac{2}{a}-2\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)=\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{a}-\sqrt{1-\tfrac{2}{a}-\tfrac{3}{a^2}}\right)=x_1\text{, q.e.d.}
\end{aligned}$$

Aufgaben zu 5.4.3

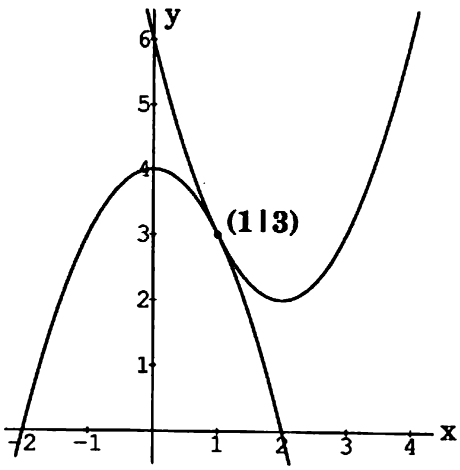
184/1.



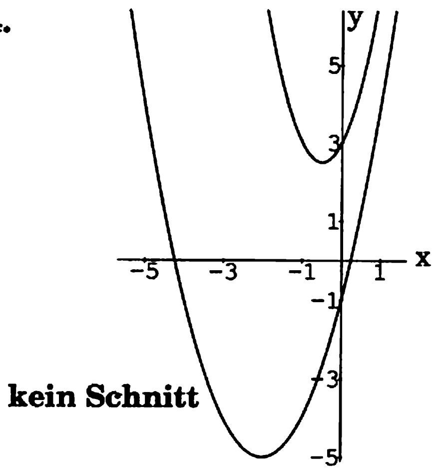
2.



184/3.

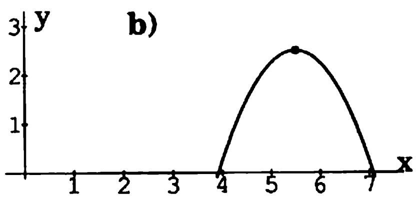


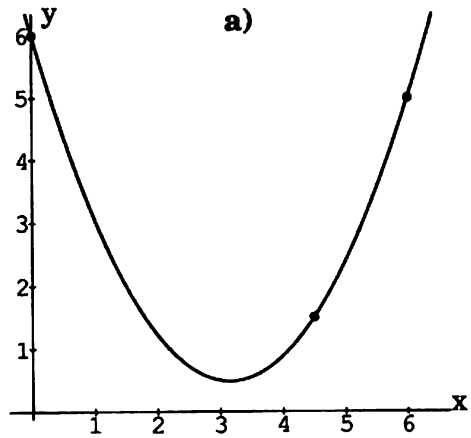
4.



184/5. $(A - a)x^2 + (B - b)x + (C - c) = 0$
für $A \neq a$ gibt es zwei Lösungen oder keine Lösung oder eine Doppellösung.
Nur für $A = a$ und $B \neq b$ gibt es **eine** einfache Lösung.
Wenn $A = a$ gilt, dann handelt es sich um kongruente Parabeln.

184/6.

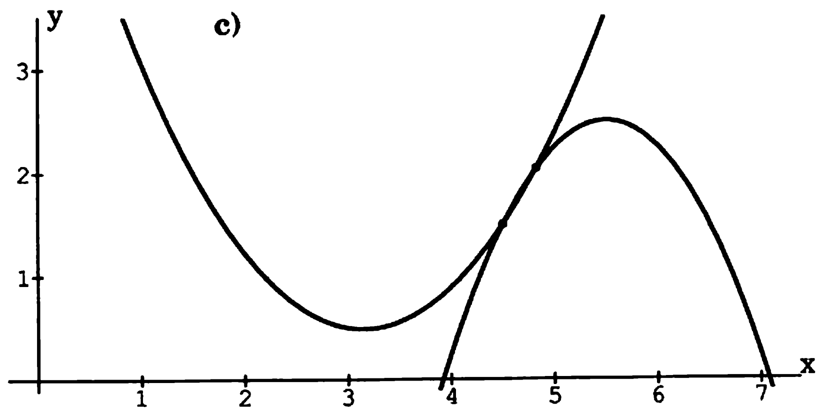




a) $p(x) = \frac{5}{9}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

b) $q(x) = -(x - 5{,}5)^2 + 2{,}5$

c) $S_1\left(\frac{135}{28} \middle| \frac{1599}{784}\right), S_2\left(\frac{9}{2} \middle| \frac{3}{2}\right)$



Aufgaben zu 6.1

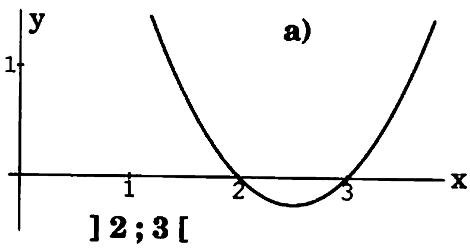
188/1. **a)** $\{\,\}$ **b)** $\mathbb{R} \setminus [-4;3]$ **c)** $\{1\}$ **d)** $[-7;1]$

188/2. **a)** $[2;4]$ **b)** $\mathbb{R} \setminus]-1;\frac{3}{2}[$ **c)** $\{\,\}$ **d)** $[-1;6]$

188/3. **a)** $\mathbb{R} \setminus [-1;1]$ **b)** $]0;1[$ **c)** $]-1;0[\,\cup\,]0;1[$

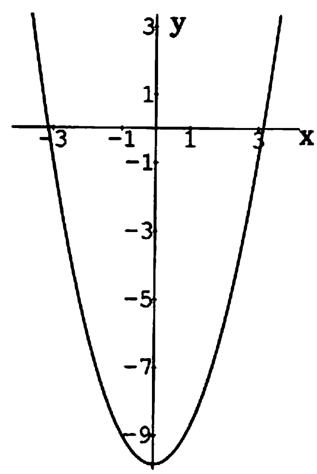
188/4.

a)



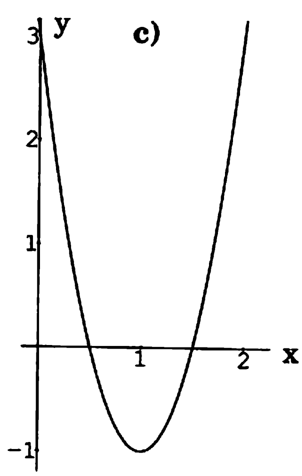
] 2 ; 3 [

b)



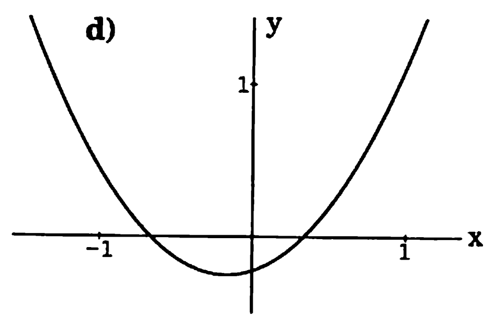
$\mathbb{R} \setminus [-3{,}14 ; 3{,}14]$

c)



$\mathbb{R} \setminus]\,0{,}5 ; 1{,}5\,[$

d)



$\mathbb{R} \setminus [-\tfrac{2}{3} ; \tfrac{1}{3}]$

188/5. **a)** $]\frac{1}{2}(5-\sqrt{17});\ \frac{1}{2}(5+\sqrt{17})[$ **b)** $]\frac{1}{2}(3-\sqrt{41});\ \frac{1}{2}(3+\sqrt{41})[$

c) $]2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}[$ **d)** $]\frac{1}{2}(-1-\sqrt{41});\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{41})[$

188/6. **a)** $|x^2+5x| < 14$

1. Fall: $x^2+5x \geq 0$; $L_1 =]-7;-5] \cup [0;2[$

2. Fall: $x^2+5x < 0$; $L_2 =]-7;0[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-7;2[$

b) $|13x-x^2| \leq 30$

1. Fall: $(13-x)x \geq 0$; $L_1 = [0;3] \cup [10;13]$

2. Fall: $(13-x)x < 0$; $L_2 = [-2;0[\cup]13;15]$

$L = L_1 \cup L_2 = [-2;3] \cup [10;15]$

188/7. **a)** $]\sqrt{10};\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{41})[$ **b)** $\{\ \}$

188/8. **a)** $\mathbb{R} \setminus]-4;-1[$ **b)** $\mathbb{R} \setminus [-6;3]$ **c)** $\{-1\}$ **d)** $\mathbb{R}$

188/9. **a)** $x^2+2x-3<0$, $x \in]-3;1[$

b) $(2x-1)(x-1)^2 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$

188/10. **a)** $x > 7$ **b)** $x > 4+\sqrt{7}$ **c)** $x \in]-2;-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{2}{13};+\infty[$

d) $x \in]\frac{1}{4}(11-\sqrt{265});-\frac{2}{3}[\cup]2;\frac{1}{4}(11+\sqrt{265})[$

188/11. **a)** $k \in \mathbb{R} \setminus]-2;6[$ **b)** $k \in \mathbb{R} \setminus]-4;4[$ **c)** $k \in [1;9]$

188/12. **a)** $k > \frac{9}{4}$ **b)** $k \in]0;4[$

188/13. **a)** $D = \mathbb{R} \setminus]-2;1[$, $x \in \{3;-4\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus]0;3[$, $x \in \{-2;5\}$

189/13. **c)** $D = \mathbb{R} \setminus]-\frac{5}{2};1[$, $x \in \{2;-3\}$

d) $D = (\mathbb{R} \setminus]-3;0[) \cup \{-1\}$ $x \in \{1;-3\frac{7}{4}\}$

189/14. a) (28 , 72) , (29 , 71) , … , (50 , 50)

b) (12 , 88) , (13 , 87) , … , (50 , 50) **c)** Gibt es nicht.

189/15. a) $x \in \,]-3\,;2\,[$ **b)** $x \in \mathbb{R} \setminus ([-2\,;\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})] \cup [\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\,;3\,])$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus ([\,3-\sqrt{6}\,;3-\sqrt{2}\,] \cup \,]\,3+\sqrt{2}\,;3+\sqrt{6}\,])$

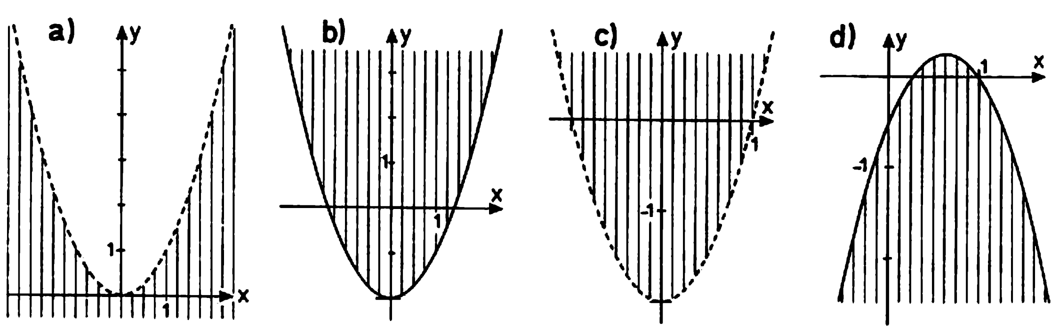
189/16. a) $x \in \,]-2\,;\frac{2}{3}[$ **b)** $x \in \,]-5\,;-\frac{23}{7}[$

d) $x \in \,]\frac{4}{3}\,;12\,[$ **e)** $x \in \mathbb{R} \setminus \,]\,0\,;2\,[$

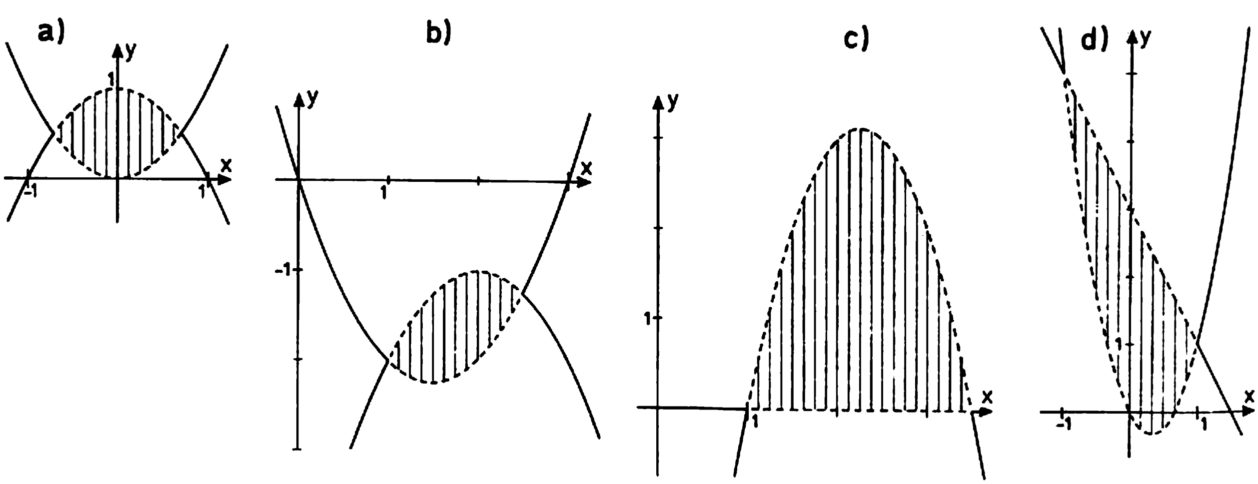
189/17. a) $x \in \mathbb{R} \setminus \,]-2\,;0\,[$ **b)** $x \in \,]\,1;+\infty\,[$

189/18. a) $n \leq 90$ und $n \in \mathbb{N}$ **b)** für $n \in \mathbb{N}$

189/19.



189/20.



Aufgaben zu 6.2

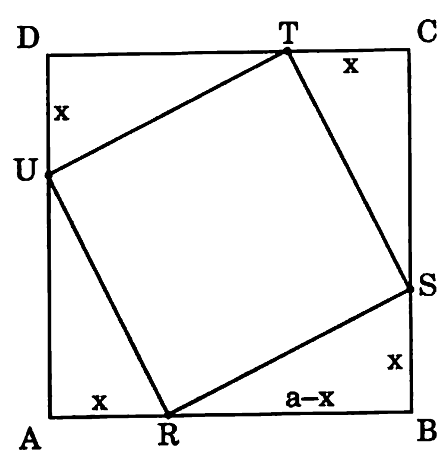
194/1. **a)** x := Länge des Rechtecks
Damit ist $\frac{1}{2}s - x$ die Breite und $(\frac{1}{2}s - x)x$ der Flächeninhalt, der maximal werden soll.
f: $x \mapsto -x + \frac{1}{2}sx$, $D_f =]\,0\,;\frac{1}{2}s\,[$
G_f ist ein nach unten offener Parabelbogen mit dem Scheitel $S(\frac{1}{4}s \mid \frac{1}{16}s^2)$. Das flächengrößte Rechteck bei vorgegebenem Umfang s ist ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{4}s$ und dem Inhalt $\frac{1}{16}s^2$.

b) 800 Streifen hätten einen Umfang von 1,680 km geliefert, die Quadratseite hätte 420 m betragen, die Burgfläche 17,64 ha. Tatsächlich hat der 60,5 m hohe Byrsa-Hügel einen Umfang von 1,4 km.

194/2. **a)** x := Länge , damit ist $\frac{1}{2}(s - x)$ die Breite
f: $x \mapsto \frac{1}{2}(s-x)x$, $D_f =]\,0\,;s\,[$, $S(\frac{1}{2}s \mid \frac{1}{8}s^2)$
Das flächengrößte Rechteck hätte eine Längsseite $\frac{1}{2}s$ und die beiden Breitseiten $\frac{1}{4}s$ mit Inhalt $\frac{1}{8}s^2$.

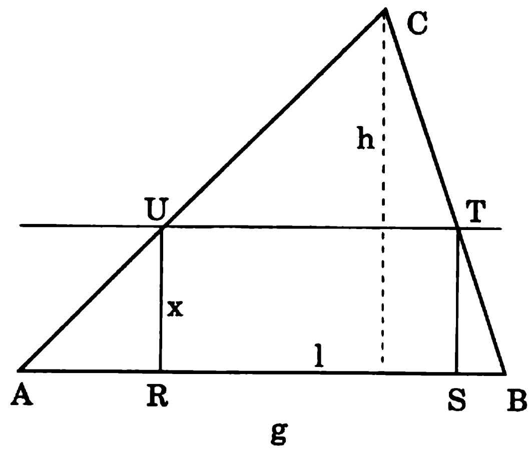
b) Die Burganlage wäre 840 m lang und 420 m breit, ihre Fläche 35,28 ha.

194/3. Die vier Dreiecke sind kongruent nach SWS, also ist RSTU eine Raute, und es ist zum Beispiel
I $\sphericalangle AUR = \sphericalangle BRS$. Ferner gilt
II $\sphericalangle AUR + \sphericalangle ARU = 90°$
III $\sphericalangle ARU + \sphericalangle URS + \sphericalangle BRS = 180°$
I und II in III eingesetzt, liefert
$\sphericalangle URS = 90°$, q.e.d.
Der Inhalt von RSTU ist
$(\sqrt{(a-x)^2 + x^2}\,)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$,
mit $x \in]\,0\,;a\,[$. Scheitel $(\frac{1}{2}a \mid \frac{1}{2}a^2)$
Die abzutragende Strecke ist $\frac{1}{2}a$,
der minimale Inhalt $\frac{1}{2}a^2$.



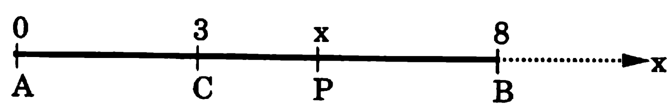
194/4. x := Länge des Rechtecks, Breite = $\sqrt{(2r)^2 - x^2}$, Inhalt = $\sqrt{4r^2x^2 - x^4}$
Die Radikandenfunktion R: $x \mapsto 4r^2x^2 - x^4$, $D_R =]\,0\,;\,2r\,[$ soll maximal werden.
Die Substitution $u := x^2$ liefert für $4r^2u - u^2$ den Scheitel $S(2r^2 \mid 4r^4)$.
Also liegt das Maximum bei $x = r\sqrt{2}$. Für die Breite ergibt sich ebenfalls $r\sqrt{2}$. Das flächengrößte Rechteck ist also ein Quadrat des Inhalts $2r^2$.

194/5. $g : l = h : (h - x)$
$l \cdot x$ soll maximal werden.
f: $x \mapsto \frac{g}{h}x(h - x)$, $D_f =]\,0\,;\,h\,[$
Scheitel $S(\frac{1}{2}h \mid \frac{1}{4}gh)$
Das maximale Rechteck hat die Seiten $\frac{1}{2}g$ und $\frac{1}{2}h$ und den Inhalt $\frac{1}{4}gh$, das heißt, die Parallele ist die Mittelparallele, und das Rechteck ist halb so groß wie das Dreieck.



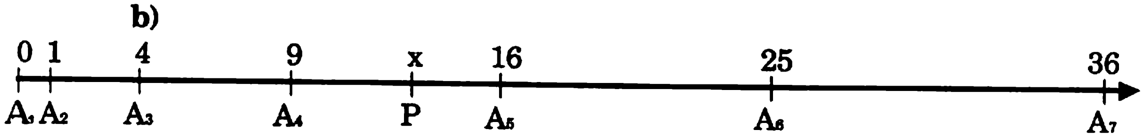
194/6. Motorboot $x = -90 + 8 \cdot t$
Ruderboot $y = -15 + 1 \cdot t$
$e = \sqrt{(-90 + 8t)^2 + (-15 + t)^2} = \sqrt{65t^2 - 1470t + 8325}$
Die minimale Entfernung nach $11\frac{4}{13}$ Sekunden beträgt $\frac{6}{13}\sqrt{65}$ Meter.
Das Motorboot befindet sich dann $\frac{6}{13}$ m hinter dem Kreuzungspunkt, das Ruderboot noch $3\frac{9}{13}$ m vor dem Kreuzungspunkt.

194/7. a)



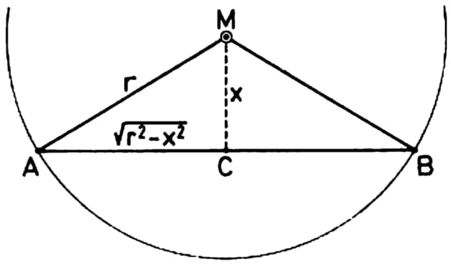
$x^2 + (x - 3)^2 + (x - 8)^2 = 3x^2 - 22x + 73$ soll minimal werden.
Scheitel $S(\frac{11}{3} \mid \frac{98}{3})$, $\overline{AP} = 3\frac{2}{3}$

b)

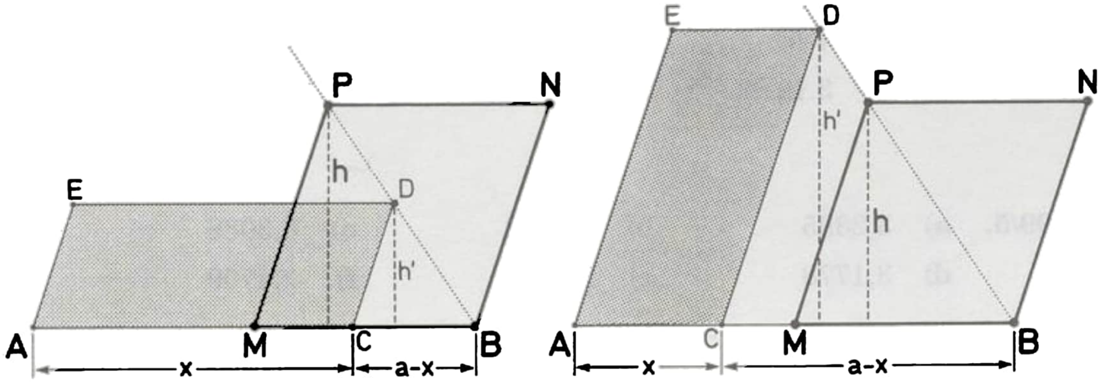


$x^2 + (x - 1)^2 + (x - 4)^2 + (x - 9)^2 + (x - 16)^2 + (x - 25)^2 + (x - 36)^2 =$
$= 7x^2 - 182x + 2275$ soll minimal werden.
Scheitelabszisse $= -\frac{-182}{2 \cdot 7} = 13$

195/8. $x\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2x^2 - x^4}$ soll maximal werden, $x \in]\,0\,; r\,[$
Substitution $u := x^2$, $f\colon\ u \mapsto r^2u - u^2$,
G_f ist Parabelbogen mit Scheitel $S(\frac{1}{2}r^2 \mid \frac{1}{4}r^4)$.
Also $x = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$. Somit ist $\overline{AC} = \overline{MC}$,
daher $\sphericalangle CAM = 45°$, $\sphericalangle AMB = 90°$.
Das flächengrößte Dreieck ist rechtwinklig.
Die Sehne hat die Länge $r\sqrt{2}$.
Der Inhalt ist $\frac{1}{2}r^2$.



195/9.



$(a - x) : \frac{a}{2} = \overline{CD} : \overline{MP} = h' : h$

$h' = \frac{2h}{a}(a - x)$

$A_{ACDE} = x \cdot h' = \frac{2h}{a}x(a - x)$ soll maximal werden. Scheitel $S(\frac{1}{2}a \mid \frac{1}{2}ah)$,
das heißt, C muss auf M fallen, und das Parallelogramm ACDE ist so groß wie das konstruierte Parallelogramm MBNP.

Aufgaben zum Anhang

198/1.	**a)**	6,4°C		**b)** 5,7°C		**c)** 17,8°C	
198/2.	**a)**	4.48 Uhr		**b)** 4.54 Uhr		**c)** 6.48 Uhr	
198/3.	**a)**	**1)**	89° 12,6'	**2)**	89° 6,2'	**3)**	89° 9,6'
199/3.	**b)**	**1)**	1961	**2)**	1978	**3)**	1987
	c)	**1)**	88° 58,7'	**2)**	89°16'		
199/4.	**a)**	**1)**	$+ 9^m$	**2)**	$+ 1^m$	**3)**	0^m
	b)	**1)**	3.12.88	**2)**	14.12.88	**3)**	24.12.88

199/5.	**a)** 3,2395		**b)** 3,3012		**c)** 3,3089	
	d) 3,1778		**e)** 3,1700		**f)** 3,4709	

199/6.	**a)**	absoluter Fehler: – 0,0009	relativer Fehler: $-3\cdot 10^{-2}\%$
	b)	absoluter Fehler: – 0,0003	relativer Fehler: $-1\cdot 10^{-2}\%$
	c)	absoluter Fehler: – 0,0002	relativer Fehler: $-6\cdot 10^{-3}\%$
	d)	absoluter Fehler: – 0,0002	relativer Fehler: $-6\cdot 10^{-3}\%$
	e)	absoluter Fehler: – 0,0002	relativer Fehler: $-6\cdot 10^{-3}\%$
	f)	absoluter Fehler: – 0,0068	relativer Fehler: – 0,2%

Je näher man an den Stützstellen ist, desto kleiner ist der Fehler. Bei f wird extrapoliert.

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

3., verbesserte und die Rechtschreibreform berücksichtigende Auflage 1997
Unveränderter Nachdruck 01 00 99 98 97
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Satz und Umschlag: Gert Krumbacher
Druck und Bindung: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau

ISBN 3-486-**03008**-6

ISBN 3-486-03008-6