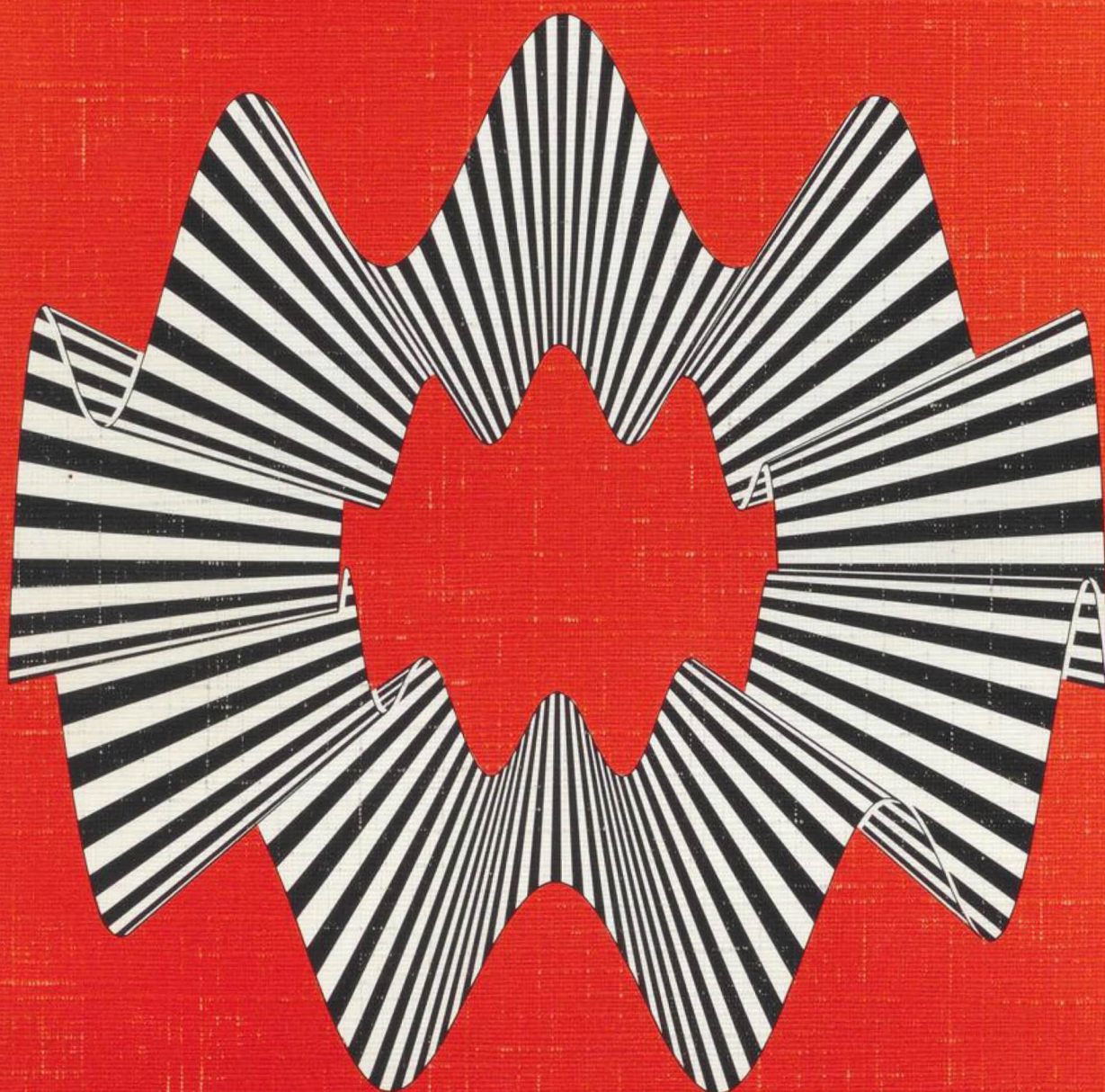


Barth · Krumbacher · Ossiander · Barth

Anschauliche Geometrie 10

Lösungen



Ehrenwirth

Anschauliche Geometrie 10

Friedrich Barth · Elisabeth Barth
Gert Krumbacher · Konrad Ossiander

Lösungen

Ehrenwirth

ISBN 3-431-03298-2
Alle Rechte bei Ehrenwirth Verlag GmbH,
Schwanthalerstraße 91, 80336 München
Printed in Germany 1996

1.Kapitel

Aufgaben zu 1.1 Grundlagen

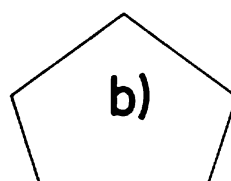
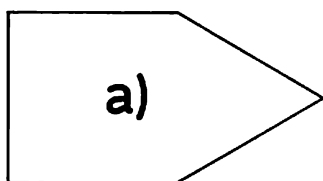
14/1. $n = 2k + 1, (k \geq 1)$

14/2. $n = 2k, (k \geq 2)$; in M schneiden sich $\frac{n}{2}$ Diagonalen.

14/3. a) $(12 - 2) \cdot 180^\circ = 1800^\circ$ b) $n = 100, \alpha_{100} = 176,4^\circ$

14/4. a) 60° b) 90° c) 108° d) 156° e) $\frac{2700^\circ}{17} \approx 158,8^\circ$
f) $\frac{2940^\circ}{17} \approx 172,9^\circ$ g) $\frac{2988^\circ}{17} \approx 175,8^\circ$ h) $\frac{3036^\circ}{17} \approx 178,6^\circ$ i) $\frac{45900^\circ}{257} \approx 178,6^\circ$

14/5.



14/6. a) $\alpha_n = \frac{n-2}{2} \cdot 180^\circ$ b) $(n - 2) \cdot 180^\circ$ c) 360° d) $\frac{1}{2} \alpha_n$ e) $\mu = \frac{360^\circ}{n}$

14/7. a) $d = \frac{1}{2} n(n - 3)$ b) $n - 2$

- 14/8. a) Ein regelmäßiges n -Eck hat n Symmetrieachsen. Ist n gerade, so sind die $\frac{n}{2}$ Mittelsenkrechten und die $\frac{n}{2}$ Winkelhalbierenden Symmetrieachsen. Ist n ungerade, so fallen die Mittelsenkrechten mit den Winkelhalbierenden zusammen.
b) n -Ecke mit geradem n sind punktsymmetrisch.

15/9. a) GB: $n = 7$ c) GB: Raute d) GB: Rechteck
f) GB: Dreieck und Quadrat

15/10. a) 3 b) 3 c) 7 d) 2 e) 19

- 15/11. Ein regelmäßiges p -Eck entsteht, wenn man die Ecke p mit der Ecke k verbindet, wobei p und k teilerfremd sind. Weil es $p-1$ solcher Zahlen k gibt und die Verbindung von p und k zum selben p -Eck führt wie die von p und $p - k$, gibt es $\frac{1}{2}(p - 1)$ regelmäßige p -Ecke.

Bemerkung: Für jedes n existieren so viele verschiedene (einander nicht ähnliche) regelmäßige Stern- n -Ecke, wie es ganze Zahlen k mit $1 < k < n/2$ gibt, die zu n teilerfremd sind.

15/12. a) $n=50$ b) $n=200$

Aufgaben zu 1.2 Konstruktionen

15/2. **a)** $192 = 2^6 \cdot 3$ **b)** $512 = 2^7 \cdot 4$ **c)** $1920 = 2^7 \cdot 15$

d) $17408 = 2^{10,17}$ **e)** $8\,589\,934\,594 = 2(2^{25} + 1)$

15/3. zum Beispiel: $\frac{360^\circ}{51} = 6 \cdot \frac{360^\circ}{17} - 1 \cdot \frac{360^\circ}{3}$, $\frac{360^\circ}{85} = 7 \cdot \frac{360^\circ}{17} - 2 \cdot \frac{360^\circ}{5}$

15/4. a) Weil alle regelmäßigen n -Ecke mit derselben Eckenzahl ähnlich sind, kann man aus einem n -Eck mit der Seite s' durch zentrische Streckung ($m = s/s'$) das n -Eck mit der Seite s konstruieren.

15/5. Vergleiche 4. a)

Aufgaben zu 1.3 Berechnungen

16/1. $c_6 = r \sqrt{3}$, $c_3 = r$, $s_3 = r \sqrt{3}$

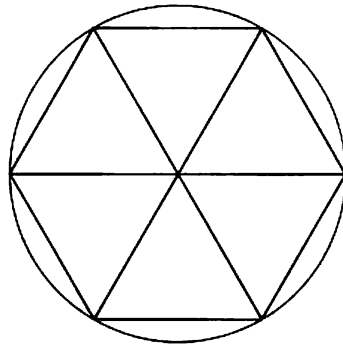
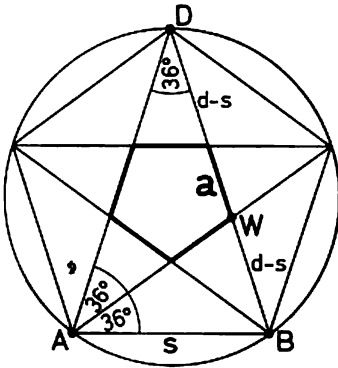
16/2. Das Achteck hat einen Umkreis, die Seiten haben die Länge $x = a(\sqrt{2} - 1)$; deshalb ist das Achteck regelmäßig.

16/3. $s_{17} \approx 3,3$

16/4. **a)** $s_4 = \sqrt{2}$ **b)** $c_4 = \sqrt{2}$, $c_{128} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$
 $s_{128} = \sqrt{4 - c_{128}^2} = 0,049\dots$

17/5 a) $n = 5$

n = 6



$$\Delta ABD \sim \Delta BWA: \frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$$

$$\Rightarrow d^2 - sd - s^2 = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{1}{2} s(1 + \sqrt{5})$$

$$a = d - 2(d - s) = 2s - d = \frac{1}{2} s(3 - \sqrt{5})$$

Das kleine Sechseck entartet
zu einem Punkt.

$$n = 8$$

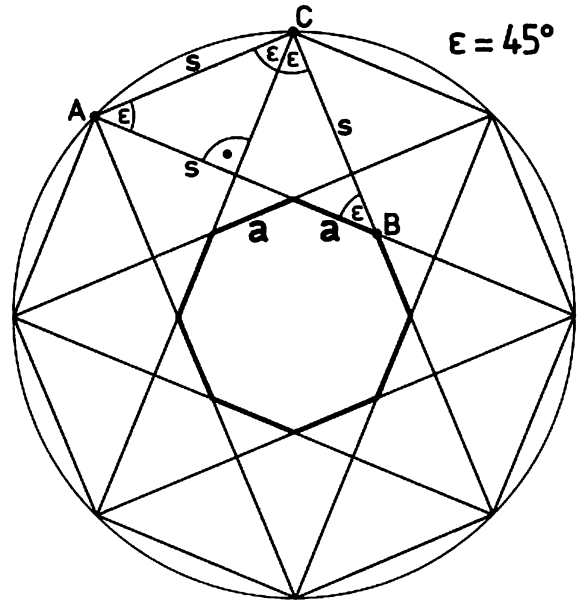
Pythagoras für $\triangle ABC$:

$$(s + a)^2 = 2s^2$$

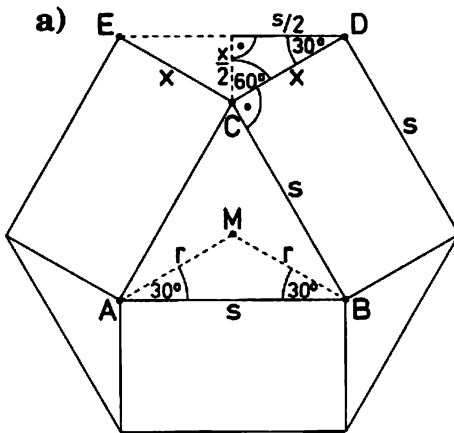
$$\Rightarrow a = s(\sqrt{2} - 1)$$

$$\text{b) } \frac{F_5}{f_5} = \frac{s^2}{a^2} = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$$

$$\frac{F_8}{f_8} = \frac{s^2}{a^2} = 3 + 2\sqrt{2}$$



17/6



Aus der Kongruenz des Bestimmungs-
dreiecks ABM und des Dreiecks DEC
(WSW-Satz) ergibt sich:

$$x = r \Rightarrow \frac{s}{x} = \sqrt{3}$$

$$\frac{F_6}{F_3} = \frac{2F_3 + 3sx}{F_3} = 6$$

$$\text{b) } 2x^2 = s^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{2} s \Rightarrow \frac{s}{x} = \sqrt{2}$$

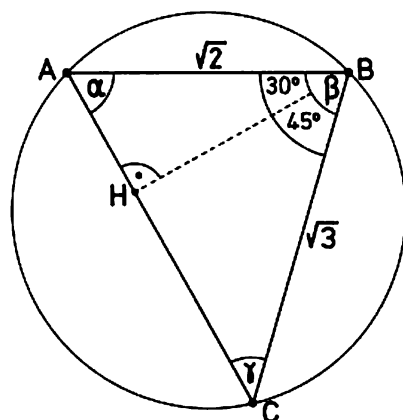
$$\frac{F_8}{F_4} = \frac{s^2 + 4 \cdot s^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}s^2}{s^2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{c) Wie in a) liefert die Kongruenz: } x = r = \frac{2s}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \Rightarrow \frac{s}{x} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

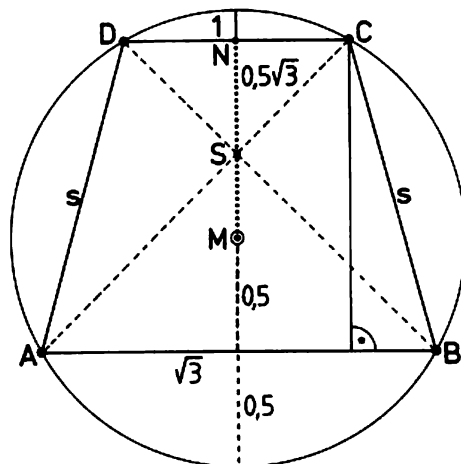
$$\frac{F_{10}}{F_5} = \frac{2F_5 + 5sx}{F_5} = 2 + \frac{5s^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\frac{5}{4}s^2 \cdot \frac{\sqrt{5+1}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}} = 2 + \frac{8}{\sqrt{5+1}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{d) } x = r = s \Rightarrow \frac{F_{12}}{F_6} = \frac{2F_6 + 6s^2}{F_6} = 2 + \frac{6s^2}{6 \cdot \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}} = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

- 17/7. Umfangswinkelsatz:
 $\alpha = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, $\gamma = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \beta = 75^\circ$
 $\overline{AH} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\overline{HB} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$
 ($\triangle AHB$ ist ein halbes
 gleichseitiges Dreieck.),
 $\overline{CH} = \overline{HB}$ (gleichschenkelig)
 $\Rightarrow \overline{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$



- 17/8. a) Pythagoras:
 $s^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$
 $\Rightarrow s = \sqrt{2}$
 b) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DBA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
 (Umfangswinkelsatz)
 $\Rightarrow \sphericalangle ASB = 90^\circ$
 c) $\triangle DSN$ ist gleichschenkelig-
 rechtwinklig $\Rightarrow \overline{DN} = \overline{NS} = \frac{1}{2}$
 d) $\alpha = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$,
 $\beta = 75^\circ$, $\gamma = \delta = 105^\circ$,
 $A = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$



- 17/9. a) $c_{10}^2 = 4 - s_{10}^2$, $c_5 = c_{10}^2 - 2$
 $\Rightarrow s_5 = \sqrt{4 - c_5^2} = \sqrt{4 - (c_{10}^2 - 2)^2} = \sqrt{4 - (4 - s_{10}^2 - 2)^2} =$
 $= \sqrt{4 - (2 - \frac{6-2\sqrt{5}}{4})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
 b) $c_{10} = \sqrt{4 - s_{10}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
 $c_{80} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + c_{10}}}}$, $s_{80} = \sqrt{4 - c_{80}^2} = 0,0785...$
 c) $\rho_{80} = \sqrt{1 - (s_{80}/2)^2} = 0,9992...$ d) $s_{80} = r \cdot 0,0785...$

17/11. a) $u_3 = 3\sqrt{3}$, $u_6 = 6$, $u_{12} = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}$,
 $F_3 = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, $F_6 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $F_{12} = 3$

b) $v_3 = 6\sqrt{3}$, $v_6 = 4\sqrt{3}$, $v_{12} = 24(2 - \sqrt{3})$,
 $G_3 = 3\sqrt{3}$, $G_6 = 2\sqrt{3}$, $G_{12} = 12(2 - \sqrt{3})$

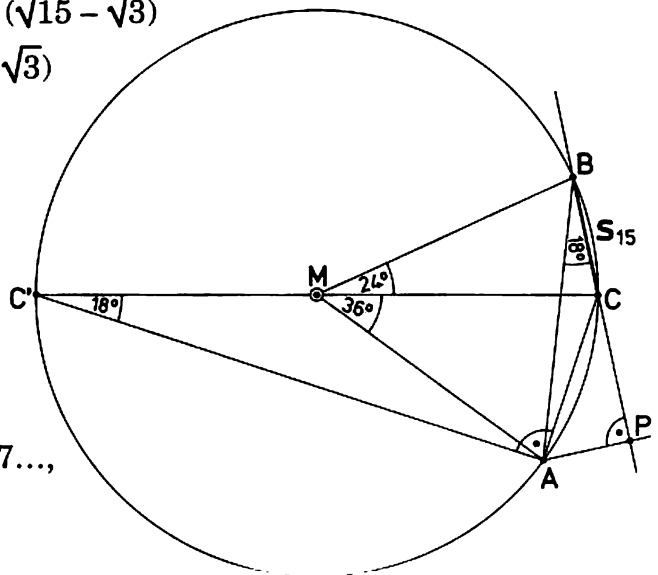
17/12. $u_{16} = 16r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, $F_{16} = 4r^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
 $v_{16} = 16r \sqrt{2 - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}$, $G_{16} = 8r^2 \sqrt{2 - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}$

17/13. Es gilt: $\triangle BAP \sim \triangle ACC'$. Wegen $\overline{CC'} = 2r$ und $\overline{BA} = r$ folgt aus der Ähnlichkeit $\overline{BP} = \frac{1}{2} \overline{C'A} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - s_{10}^2}$.

Wegen $\angle ACP = 30^\circ$ und $\angle CAP = 60^\circ$ ist $\triangle APC$ ein halbes gleichseitiges Dreieck.

$$\Rightarrow \overline{PC} = h = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \sqrt{3} s_{10}.$$

$$\begin{aligned} s_{15} &= \overline{PB} - \overline{PC} = \frac{1}{2} \overline{AC'} - \frac{1}{2} \sqrt{3} s_{10} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{16 - (6 - 2\sqrt{5})} - \frac{1}{4} (\sqrt{15} - \sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$



18/14. b) $s_5 = 2,5\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 5,87\dots$,
 $s_5^* = \sqrt{34} = 5,83\dots$

18/15. a) $\angle SM_1M_3 = 120^\circ \Rightarrow \overline{SM_3} = s_3$

b) $\angle SM_1M_2 = 60^\circ \Rightarrow \overline{SM_2} = s_6$

c) $\angle M_1TM_2 = 150^\circ$ (Umfangswinkelsatz für den Kreis um M_3)
 $\Rightarrow \angle M_1TM_3 = 75^\circ \Rightarrow \angle M_2M_1T = 15^\circ \Rightarrow \angle SM_1T = 45^\circ$
 $\Rightarrow \overline{RS} = s_8 = r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$$d) \angle M_1 M_3 T = 30^\circ \Rightarrow \overline{M_1 T} = s_{12} = r \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$e) \angle M_2 M_1 R = 15^\circ \Rightarrow \overline{M_2 R} = s_{24} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

18/16. b) Wegen $\overline{LC} = \overline{LD}$ gilt mit $\overline{MD} =: x$ im Dreieck LMC:

$$\overline{LC}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{MC}^2, (1/2 r + x)^2 = r^2 + (1/2 r)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + rx - r^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1), \text{ also } x = s_{10}.$$

$$\text{Mit } \overline{DC} =: y \text{ gilt: } y^2 = r^2 + s_{10}^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{5}{2} r^2 - \frac{1}{2} \sqrt{5} r^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \text{ also } y = s_5.$$

c) Pythagoras im Dreieck MDC liefert: $s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2$.

19/17. a) Ist M der Kreismittelpunkt, so gilt:

$$\overline{MD} = \frac{1}{2} \sqrt{5} a \quad (\text{Pythagoras in } \triangle AMD)$$

$$\Rightarrow \overline{UA} = \frac{1}{2} \sqrt{5} a - \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a(\sqrt{5} - 1) = s_{10}.$$

$$b) \overline{UD} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} a^2 (\sqrt{5} - 1)^2} \quad (\text{Pythagoras in } \triangle UAD)$$

$$\Rightarrow \overline{UD} = \frac{1}{2} a \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = s_5.$$

19/18. Wegen $s_n^2 = 4 - c_n^2$, $s_{2n}^2 = 4 - c_{2n}^2$, $s_{4n}^2 = 4 - c_{4n}^2$ und $c_{2n}^2 = 2 + c_n$

$$\text{gilt: } s_{2n}^3 = (4 - c_{2n}^2) \sqrt{4 - c_{2n}^2}.$$

Für die rechte Seite gilt:

$$(2s_{2n} + s_n) s_{4n}^2 = (2\sqrt{4 - c_{2n}^2} + \sqrt{4 - c_n^2})(4 - c_{4n}^2) =$$

$$= (2\sqrt{4 - c_{2n}^2} + \sqrt{4 - (c_{2n}^2 - 2)^2})(4 - 2 - c_{2n}) =$$

$$= (2\sqrt{4 - c_{2n}^2} + c_{2n} \sqrt{4 - c_{2n}^2})(2 - c_{2n}) = (4 - c_{2n}^2) \sqrt{4 - c_{2n}^2}$$

19/19. Mit $\overline{AB} = s_n$ gilt: $\overline{AE} = \frac{1}{2} s_{2n}$, $\overline{AG} = \overline{GN} = \frac{1}{2} t_{2n}$,

$$\overline{A_1 B_1} = t_n$$

$$a) \triangle ANR \sim \triangle GNE \Rightarrow \frac{s_{2n}}{\frac{1}{2} s_n} = \frac{\frac{1}{2} t_{2n}}{\frac{1}{2} s_{2n}} \Rightarrow s_{2n}^2 = \frac{1}{2} s_n t_{2n}$$

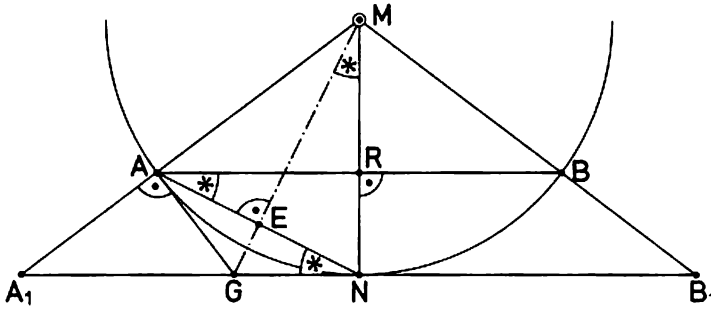
Multiplikation mit $4n^2$ ergibt:

$$u_{2n}^2 = n s_n \cdot 2 n t_{2n},$$

$$\text{also } u_{2n}^2 = u_n \cdot v_{2n}$$

$$\Rightarrow u_{2n} = \sqrt{u_n \cdot v_{2n}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \Delta A_1GA &\sim \Delta ARM \Rightarrow \overline{AM} : \overline{RM} = \overline{A_1G} : \overline{GA} \Rightarrow t_{2n} = \frac{s_n t_n}{s_n + t_n} \\
 \Delta A_1B_1M &\sim \Delta ABM \Rightarrow \overline{MN} : \overline{MR} = t_n : s_n \\
 \text{wegen } \overline{MN} &= \overline{AM} \text{ folgt: } \frac{t_n}{s_n} = \frac{\frac{1}{2}(t_n - t_{2n})}{\frac{1}{2}t_{2n}} \\
 \Rightarrow 2nt_{2n} &= \frac{2ns_n t_n \cdot n}{(s_n + t_n) \cdot n} \Rightarrow v_{2n} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}
 \end{aligned}$$



- 19/20.** Es sei $\overline{AB} = s_n$. Zeichnet man durch den Mittelpunkt N_1 von $[M_1N]$ die Parallele zu AB , so ist $\Delta A_1B_1M_1$ das Bestimmungsdreieck des $2n$ -Ecks mit gleichem

Umfang, denn $\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} s_n$

und $\sphericalangle A_1M_1B_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB$

(Umfangswinkelsatz).

Damit gilt:

$$\overline{N_1M_1} = r_{2n} = \frac{1}{2} \overline{NM_1}.$$

Wegen $\overline{NM_1} = r_n + R_n$

$$\text{folgt } r_{2n} = \frac{1}{2} (r_n + R_n).$$

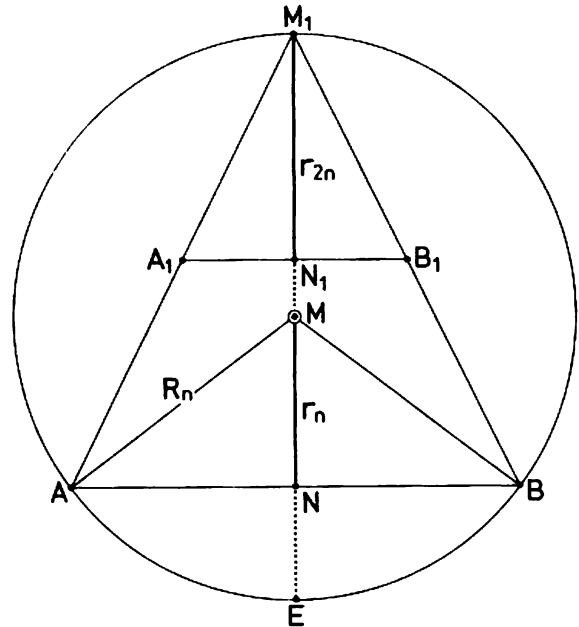
Wegen $\overline{AM_1} = 2R_{2n}$

$$\text{und } \overline{NM_1} = 2r_{2n}$$

liefert der Kathetensatz für ΔAEM_1 :

$$4R_{2n}^2 = 2R_n \cdot 2r_n$$

$$\Rightarrow R_{2n} = \sqrt{R_n r_{2n}}$$



- 19/21.** Ist M Mittelpunkt des großen Kreises, N Mittelpunkt des kleinen Kreises und T Berührungspunkt auf NC , so liefert Pythagoras mit $\overline{TC} = \overline{BC} = : x$
- $$(\frac{1}{2}r + x)^2 = r^2 + (\frac{1}{2}r)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1), \text{ also } x = s_{10}. \text{ (Aufgabe 16.b)}$$
- $\sphericalangle BMA = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ \Rightarrow \overline{AB} = s_{15}.$

2.Kapitel

Aufgaben zu 2.1 Umfang

36/1. a) $u \approx 60$, $f = -4,5\%$ b) $u \approx 62,8$, $f = -0,1\%$ c) $u \approx 62,857$, $f = 0,0\%$

36/2. a) $d \approx \frac{10}{3}$, $f = 4,7\%$ b) $d \approx 3,1847$, $f = 0,1\%$ c) $d \approx 3,1818$, $f = 0,0\%$

36/3. $v = \frac{2r\pi}{t} \approx 1115 \text{ km/h}$

4. $v \approx 107589 \text{ km/h}$

37/5. $\pi \approx 3,2$ $f = 19^\circ / \text{oo}$

6. $\pi \approx 3,125$ $f = -5^\circ / \text{oo}$

37/7. $\pi \approx 3,162\dots$ $f = 7^\circ / \text{oo}$

8. $\pi \approx 3,132\dots$ $f = -3^\circ / \text{oo}$

37/9. $\pi \approx 3,160\dots$ $f = 6^\circ / \text{oo}$

Die Dreiecke sind ähnlich: halber Umfang = $4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$, $3\pi \approx 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow \pi \approx \left(\frac{4}{3}\right)^3$

37/10. $\pi \approx 3,1462\dots$ $f = 1^\circ / \text{oo}$ $\frac{1}{\pi} \approx \sqrt{3} - \sqrt{2}$

37/11. $\pi \approx 3,1446\dots$ $f = 1^\circ / \text{oo}$

12. $\pi \approx 3,1428\dots$ $f = 0^\circ / \text{oo}$

37/13. $\pi \approx 3,1426\dots$ $f = 0^\circ / \text{oo}$

14. $\pi \approx 3,14166\dots$ $f = 0^\circ / \text{oo}$

37/15. $\pi \approx 3,141533\dots$ $f = 0^\circ / \text{oo}$

Konstruktion: $\overline{MB} = 1$, $\overline{BK} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\overline{CK} = 3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$w^2 = 4 + \left(3 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

38/16. $\pi \approx 3,14164\dots$ $f = 0^\circ / \text{oo}$

Konstruktion: $\pi \approx d + z$

d ist der Durchmesser des Kreises mit $r = 1,2$

z ist die Seite des regelmäßigen 10-Ecks, das dem Kreis einbeschrieben ist.

38/17. $\pi \approx 3,14164\dots$ $f = 0^\circ / \text{oo}$ $\pi \approx u = \sqrt{1,2^2 + 0,6^2} + 1,2 + 0,6 = \sqrt{1,8} + 1,8$

38/18. $\pi \approx 3,1416$ $f = 0^\circ / \text{oo}$

38/19. $\pi \approx 3,1415919\dots$ $f = 0^\circ/\infty$ Konstruktion: $a = \sqrt{1,46}$, $\frac{\pi}{a} \approx \frac{1,3}{0,5} \Rightarrow \pi \approx \frac{13}{50} \sqrt{146}$

38/20. $\pi \approx 3,1415932\dots$ $f = 0^\circ/\infty$

Konstruktion: $\pi \approx \frac{5}{4} + \frac{1}{8} \sqrt{229}$, wobei $\sqrt{229}^2 = 15^2 + 2^2$

38/21. $\pi \approx 3,14159292\dots$ $f = 0^\circ/\infty$ $k = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$

Berücksichtigung von d: $k = 3 + \frac{4687}{33102} \Rightarrow \pi \approx 3,1415926530\dots$

38/22. VIETE: 3,12144... WALLIS: 2,92571... NEWTON: 3,14151...
GREGORY: 3,33968... EULER: 2,92261..., 3,06139..., 3,13899..., 3,14134...

Aufgaben zu 2.2 Bogen und Bogenmaß

39/1. a) $\frac{\pi}{2}$; 1,57 b) $\frac{\pi}{12}$; 0,26 c) $\frac{\pi}{4}$; 0,79 d) $\frac{\pi}{6}$; 0,52
e) $\frac{\pi}{3}$; 1,05 f) $\frac{\pi}{180}$; 0,02 g) $\frac{497}{45} \pi$; 34,70 h) -3π ; -9,42
i) $-\frac{100}{9} \pi$; -34,91 j) $\frac{1}{4} \pi^2$; 2,47 k) $\sqrt{\frac{10}{18\pi}} \pi$; 1,32

39/2. a) $114,6^\circ$ b) $180,1^\circ$ c) $45,8^\circ$ d) $28,6^\circ$
e) $573,0^\circ$ f) $-15,4^\circ$ g) $58,3^\circ$ h) $57,3^\circ$

39/3. a) $b = \frac{\pi}{36}$ b) $b = 5$ c) $b = \frac{10}{3} \pi$ d) $\mu = 0,2$ e) $\mu = 1$
f) $\mu = \frac{1}{5} \pi$ g) $r = 1$ h) $r = \frac{1}{4} \pi$ i) $r = 1,5$

39/4. Minutenzeiger: 26,829m; 0,447m; 0,00745m
Stundenzeiger: 1,44m; 0,024m; 0,00040m

39/5. $a = \frac{2}{\pi\sqrt{2}-4} = \frac{\pi\sqrt{2}+4}{\pi^2-8}$

39/6. a) $r_E \approx 6366$ km, $r_M \approx 1735$ km, $r_S \approx 695507$ km
b) Entfernung Erde-Sonne: $1,5 \cdot 10^8$ km, $v_E \approx 29,9$ km/s
c) $d \approx 1,18 \cdot 10^{10}$ km

39/7. Mit den Näherungen $b \approx 1,435$ m für den Bogen und $d \approx r$ für den Abstand gilt: $d \approx 4933$ m.

39/8. a) $\frac{20}{3} \pi$ b) 5π c) $\frac{2}{5} \pi$

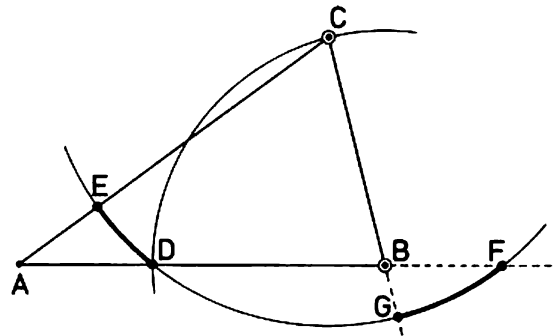
40/9. a) Dreieck ABC ist gleichseitig mit $a = 4$ und $h = 2\sqrt{3}$. b) $u = 4\pi$

40/10. a) $2\pi(36,5\text{m} + 0,05\text{m} + x) + 2 \cdot 84,39\text{m} = 400\text{m} \Rightarrow x = 25 \text{ cm}$
 b) $25 \cdot 2\pi \text{ m} \approx 157\text{m}$

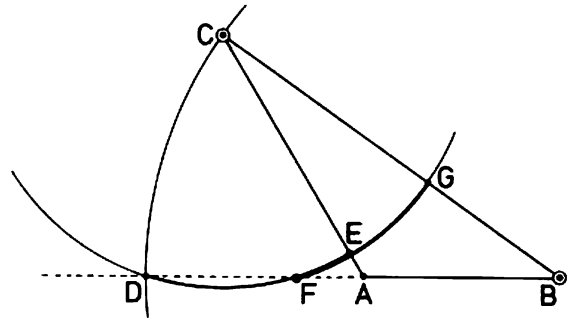
40/11. $u = 2\pi(1 + \sqrt{2})$

40/12. a) $\triangle DBC, \triangle DFC$ sind gleichschenkelig $\Rightarrow \angle BDC = \angle DCB = \angle CFD =: \varepsilon$
 Winkelsumme in $\triangle DBC \Rightarrow \varepsilon = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta$, ($\beta = \angle B$),
 $\Rightarrow \angle DCF = 180^\circ - 2\varepsilon = \beta \Rightarrow \angle DCE = \angle FCB$,
 denn $\angle ACB = \beta \Rightarrow \text{Bogen(DE)} = \text{Bogen(FG)}$.

b) Begründung analog a)



c) Begründung analog a)



d) $\beta = \gamma = 36^\circ \Rightarrow A = F, \frac{c}{a} = \frac{1}{\phi}$ (Goldener Schnitt)

40/13. $e' \approx 101010 \text{ m}$ 14. $u \approx 6,28 \text{ m}$ 15. $d \approx 3,18 \text{ mm}$

40/16. α) gleich schnell, $l = 4a\pi + 36a$

β) 2 mal so schnell, $l = 4,5\sqrt{2} a\pi + 6a\sqrt{2}$

γ) 6 mal so schnell, $l = 6a\pi + 17a$

δ) 7 mal so schnell, $l = \frac{11}{2}\sqrt{2} a\pi + 6a\sqrt{2}$

ε) 8 mal so schnell, $l = 7,25a\pi + 9a$

40/17. $u = 800\text{km} \cdot 50 = 40\,000\text{ km}$, $b = 2r\pi \cdot \frac{1}{50} \Rightarrow r = 6364\text{ km}$

Aufgaben zu 2.3 Fläche

42/1. a) $F = \pi$ b) $F = \pi/4$ c) $F = 4\pi$ d) $F = 5\pi$ e) $F = \pi^3$

f) $r = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ g) $r = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$ h) $r = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi}$ i) $r = \frac{\sqrt{\pi\sqrt{5}}}{\pi}$

42/2. a) $b = \frac{\pi}{2}$, $F = \frac{\pi}{2}$ b) $\mu = \frac{1}{2}$, $F = 1$ c) $\mu = 1$, $b = 2$

d) $r = \frac{3}{\pi}$, $F = \frac{3}{2\pi}$ e) $r = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$, $b = \sqrt{\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}}$

f) $r = 2$, $\mu = \frac{1}{2}$ g) $b = 1$, $F = \frac{1}{2}$ h) $r = 1$, $F = \frac{1}{2}$

i) $r = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ j) $r = \sqrt{2\pi}$, $b = \sqrt{2\pi}$

42/3. a) $F \approx 300$, $f = -4,5\%$ b) $F \approx 314$, $f = -0,1\%$ c) $F \approx 314,3$, $f = 0,0\%$

42/4. a) $d \approx 3,65$, $f = 2,3\%$ b) $d \approx 3,57$, $f = 0,0\%$ c) $d \approx 3,57$, $f = 0,0\%$

42/5. $f = \frac{3,125 - \pi}{\pi} = -0,5\%$ 6. a) $\frac{A_i}{A_u} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{A_i}{A_u} = \frac{1}{4}$

42/7. Beide Male gilt: $A_{\text{rest}} \approx 212,9\text{ cm}^2$

42/8. a) $d \approx 1,65\text{ cm}$, $u \approx 5,2\text{ cm}$, $A \approx 2,1\text{ cm}^2$

b) $d \approx 2,15\text{ cm}$, $u \approx 6,8\text{ cm}$, $A \approx 3,6\text{ cm}^2$

c) $d \approx 2,90\text{ cm}$, $u \approx 9,1\text{ cm}$, $A \approx 6,6\text{ cm}^2$

42/9. $A_{\text{kreis}} \approx 183 \text{ km}^2$

42/10. $u_{\text{kreis}} = 2r\pi < u_{\text{quadrat}} = 4r\sqrt{\pi} < u_{\text{rechteck}} = 3r\sqrt{2\pi}$
 $u_{\text{quadrat}} \approx 1,128u_{\text{kreis}}, \quad u_{\text{rechteck}} \approx 1,197u_{\text{kreis}}$

43/11. Erster Tag: $r_1 = 4$
 Bedingung für den n-ten Tag ($n \geq 2$): $r_n^2 \pi - r_{n-1}^2 \pi = r_1^2 \pi$
 Verlängerung am n-ten Tag: $v_n = r_n - r_{n-1} \Rightarrow v_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot r_1$

43/12. $u = 2\pi(R+r)$, $F = \pi(R^2 - r^2)$,
 diese Formeln gelten auch für nicht konzentrische Kreise.

43/13. a) $F = \pi$ b) $F = 3\pi$ c) $F = \pi/3$

43/14. $\frac{F_R}{F_r} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$, $\frac{T_R}{T_r} = \frac{R}{r}$, deshalb ist die Aussage falsch.

43/15. Wegen $\frac{1}{2} r \cdot 2r\pi = r^2 \pi$ stimmt die Aussage.

43/16. 10,67 DM beziehungsweise 24 DM

43/17. $\mu = 2$

18. $\mu = 4$

43/19. a) $\frac{\pi r^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{\frac{1}{4} r^2 \pi} \approx 68,6\%$ b) $\frac{r^2 \pi/9}{r^2 \pi/6} \approx 66,7\%$

c) $\frac{\pi r^2 (2\sqrt{3} - 3)^2}{\frac{1}{3} r^2 \pi} \approx 64,6\%$ d) $\frac{r^2 \pi/4}{r^2 \pi/2} = 50\%$

44/20. Pythagoras: $R_a^2 = r^2 + R_i^2 \Rightarrow R_a^2 \pi - R_i^2 \pi = r^2 \pi$

44/21. a) $2x^2 = r^2 \pi \Rightarrow x = r\sqrt{\pi/2}$ (Quadratfläche = Kreisfläche)

b) $\frac{1}{2} \cdot 2rx = \frac{1}{2} r^2 \pi \Rightarrow x = r\pi/2$ (Dreieckfläche = Halbkreisfläche)

c) $2x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} x\sqrt{2} (2r - \frac{1}{2} x\sqrt{2}) = r^2 \pi \Rightarrow x = \frac{1}{8} \sqrt{2} r\pi$
 (Sternfläche = Kreisfläche)

44/22. $F_{\text{lunulae}} = F_{\Delta} + F_{\text{HKa}} + F_{\text{HKb}} - F_{\text{HKc}} = ab + \frac{1}{8} a^2\pi + \frac{1}{8} b^2\pi - \frac{1}{8} c^2\pi = ab$
(wegen $a^2 + b^2 = c^2$)

44/23. Man zeichnet das rechtwinklige Dreieck mit dem großen Durchmesser als Hypotenuse c und dem weiß gezeichneten Durchmesser als Höhe h
ein: $F_{\text{arbelos}} = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2}\right)^2\pi - \frac{1}{2} r^2\pi - \frac{1}{2} s^2\pi = \frac{1}{2} \pi[(r+s)^2 - r^2 - s^2] =$
 $= rs\pi = \frac{2r \cdot 2s}{4} \pi = \left(\frac{h}{2}\right)^2\pi$
wegen $c/2 = r + s$ und $2r \cdot 2s = h^2$ (Höhensatz).

44/24. $F = ab + \frac{1}{4} a^2\pi + \frac{1}{4} b^2\pi - r^2\pi = ab$ wegen $r^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$

45/25. a) $F_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} a^2\pi - \frac{1}{2} a^2\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$
 $F_2 = \frac{1}{4}(2a)^2\pi - \frac{1}{2} a^2\pi - a^2 = a^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$

b) Beide Flächenstücke sind halb so groß wie in a).

45/26. a) $u = 5\pi$, $F = 2\pi$ b) $F_1 = \pi = F_2$

c) Man verbindet die linke untere Quadratecke mit dem Mittelpunkt des großen Halbkreises; die Gerade schneidet diesen Halbkreis in S. Ist M der Mittelpunkt des Vollkreises, so halbiert MS den Umfang.

45/27. a) $F = 6a^2\pi$ b) $F = \frac{4}{3} a^2\pi + 2a^2\sqrt{3}$ c) $F = 10a^2\pi$ d) $F = 15a^2\pi$
e) $F = \frac{7}{2} a^2\pi - 3a^2\sqrt{3}$ f) $F = 40a^2\pi$ g) $F = 8a^2(1 + \pi)$ h) $F = 5a^2\pi$

46/28. a) $r = 10$ b) $r = 2$ c) $6^4 + 4^2 = r^2$ (Pythagoras)
d) $6^2 = 4^2 + r^2$ (Pythagoras)

46/29. a) $R^2 = r \cdot 3r$ b) $R^2 = 2r \cdot 2r$ c) $R^2 = r \cdot 7r$
(Konstruktion zum Beispiel mit dem Höhensatz)

46/30. a) $r = 4$ (Aufgabe 20. !)

b) Man verwandelt den Kreis aus **a)** in den Kreissektor:

$$\frac{1}{6} R^2 = r^2 \Rightarrow R^2 = 2r \cdot 3r \text{ (Höhensatz)}$$

46/31. a) $R = \frac{1}{2}\sqrt{2} \ r$ (halbe Quadratdiagonale)

b) $R_1^2 = \frac{1}{3} r^2$ (Höhensatz), $R_2^2 = \frac{2}{3} r^2$ (Höhensatz)

46/32. a) $R_H^2 = 2r^2$ (Höhensatz)

b) $r^2 = \frac{1}{2} R_H^2$ (Höhensatz)

46/33. $R = 4\sqrt{2}$ (Quadratdiagonale)

46/34. a) $u = 4a\pi$, $F = a^2\pi$

b) $u = 2a\pi$, $F = \frac{25}{49} a^2\pi$

c) $u = 3\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 8a^2$

d) $u = 2a\pi$, $F = \frac{3}{7} a^2\pi$

e) $u = 6\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 8a^2\pi$

f) $u = \frac{14}{3} a\pi$, $F = \frac{19}{3} a^2\pi - 4\sqrt{3} a^2$

a^2

g) $u = 4\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 8a^2 + 4a^2\pi$

h) $u = 4a\pi$, $F = 4a^2 + a^2\pi$

i) $u = 3a\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 3a^2\pi + 3a^2 - 2a^2\sqrt{2} \pi$

j) $u = 6a\pi$, $F = 4a^2 + 3a^2\pi$

k) $u = \frac{8}{3} a\pi$, $F = \frac{8}{3} a^2\pi - 2a^2\sqrt{3} \pi$

l) $u = 3a\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 3a^2\pi - a^2 - a^2\sqrt{2} \pi$

m) $u = 2\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 8a^2 - 2a^2\pi$

n) $u = \sqrt{2} \ a\pi$, $F = a^2\pi - 2a^2$

o) $u = 4a\pi$, $F = a^2\pi + 4a^2$

p) $u = 2a\pi$, $F = 2a^2\pi - 4a^2$

q) $u = 4\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 10a^2\pi - 8a^2$

r) $u = 2\sqrt{2} \ a\pi$, $F = 4a^2$

s) $u = 4a\pi$, $F = 12a^2 - 2a^2\pi$

48/35. a) $u = 2a\pi$, $F = \frac{1}{2}\sqrt{3} \ a^2 + \frac{1}{3} a^2\pi$ **b)** $u = a\pi$, $F = \sqrt{3} \ a^2 - \frac{1}{2} a^2\pi$

c) $u = \frac{4}{3}\sqrt{3} \ a\pi$, $F = \frac{1}{2}\sqrt{3} \ a^2 + \frac{2}{3} a^2\pi$ **d)** $u = 5a\pi$, $F = \sqrt{3} \ a^2 + \frac{5}{2} a^2\pi$

e) $u = \frac{5}{3} a\pi$, $F = \sqrt{3} \ a^2 - \frac{1}{12} a^2\pi$ **f)** $u = a\pi + \frac{2}{3}\sqrt{3} \ a\pi$, $F = \frac{5}{2} a^2\pi - 3\sqrt{3} \ a^2$

$$\text{g) } u = \frac{5}{3} a\pi + 10a, \quad F = 4\sqrt{3} a^2 + \frac{5}{6} a^2\pi$$

$$\text{h) } u = 3a\pi, \quad F = \frac{3}{2}\sqrt{3} a^2 + \frac{1}{4} a^2\pi \quad \text{i) } u = 6a\pi, \quad F = 4\sqrt{3} a^2$$

$$49/36. \quad \text{a) } u = 4a + 2a\pi, \quad F = 4a^2$$

$$\text{b) } u = 4a\sqrt{2}(1 + \pi), \quad F = 16a^2$$

$$\text{c) } u = 8a(1 + \pi), \quad F = 36a^2 - 8a^2\pi \quad \text{d) } u = 4a\sqrt{2}(2 + \pi), \quad F = 32a^2 + 4a^2$$

$$\text{e) } u = \frac{5}{2}\sqrt{2} a\pi + 10\sqrt{2} a, \quad F = 8a^2 + \frac{5}{2} a^2\pi$$

$$\text{f) } u = 2\sqrt{2} a\pi + 12\sqrt{2} a, \quad F = 18a^2$$

$$49/37. \quad F_{ABCD} = \frac{1}{4} r^2\sqrt{3} + \frac{1}{6} r^2\pi, \quad u = 2r + r\sqrt{3} + \frac{1}{3} r\pi$$

$$F_{ABFE} = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{4} r^2\pi, \quad u = 2r + r\sqrt{2} + \frac{1}{2} r\pi$$

$$F_{ABHG} = \frac{1}{4} r^2\sqrt{3} + \frac{1}{3} r^2\pi, \quad u = 3r + \frac{2}{3} r\pi$$

$$49/38. \quad \text{a) } u_Q = 16a, \quad u_K = 2a\sqrt{5} \pi, \quad u_K < u_Q, \quad f \approx -12,2\% \\ F_Q = 16a^2, \quad F_K = 5a^2\pi, \quad F_K < F_Q, \quad f \approx -1,8\%$$

$$\text{b) } u_A = 4a(1 + \sqrt{2}), \quad u_K = 3a\pi, \quad u_K < u_A, \quad f \approx -2,4\% \\ F_K = 2,25a^2\pi, \quad F_A = 7a^2, \quad F_A < F_K, \quad f \approx 0,98\%$$

50/39. Alle Teilfiguren (ob weiß oder schwarz) haben denselben Flächeninhalt. Es sind 47 Teilfiguren: 24 schwarze und 23 weiße.

Also sind schwarz $\frac{24}{47} \approx 51,05\%$

$$50/40. \quad F_{\text{salinon}} = \frac{1}{2} \pi(r_2 + 2r_1)^2 + \frac{1}{2} \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \\ = \frac{1}{2} \pi(r_2^2 + 4r_1r_2 + 4r_1^2 + r_2^2 - 2r_1^2) = \\ = \frac{1}{2} \pi(2r_2^2 + 4r_1r_2 + 2r_1^2) = \pi(r_1 + r_2)^2 = \pi r_B^2 = F_{BK}$$

$$50/41. \quad F_M = 6r^2\sqrt{3} - r^2\pi, \quad F_{Si} = 6r^2\sqrt{3} + 3r^2\pi - 4r^2\pi = 6r^2\sqrt{3} - r^2\pi$$

3.Kapitel

Aufgaben zu 3.1 Zylinder

59/1.	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	1	10	4	0,1	2	10	2	2	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
h	2	10	$\frac{1}{16}$	4,9	5	0,4	5	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
V	2π	1000π	π	$0,049\pi$	20π	40π	20π	1	$\frac{1}{4}\sqrt{2}\pi$
S	6π	400π	$32,5\pi$	π	28π	208π	28π	$1+8\pi$	2π
M	4π	200π	$\pi/2$	$0,98\pi$	20π	8π	20π	1	π

59/2. a) $V_x : V_y = 2:1$ $M_x : M_y = 1$ $S_x : S_y = 2:1$
 b) $V_x : V_y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $M_x : M_y = 1$ $S_x : S_y = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$
 c) $V_x : V_y = \frac{y}{x}$ $M_x : M_y = 1$ $S_x : S_y = \frac{xy+y^2}{xy+x^2}$

59/3. a) $V_x : V_y = 1:2$ $S_x : S_y = \frac{4\pi+1}{4\pi+4}$
 b) $V_x : V_y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $S_x : S_y = \frac{2\pi(1+\sqrt{5})+3+\sqrt{5}}{2\pi(1+\sqrt{5})+2}$
 c) $V_x : V_y = \frac{x}{y}$ $S_x : S_y = \frac{2\pi xy + x^2}{2\pi xy + y^2}$

60/4. a) $x = y = \sqrt[3]{100}$ b) $x = 8$ c) $x = \sqrt[3]{\frac{V_y^2}{\pi V_x}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{V_x^2}{\pi V_y}}$

60/5. $r = 39,9 \text{ cm}$, $F = 18r^2\pi \approx 9\text{m}^2$, man braucht also etwa 0,9 kg Farbe.

60/6. a) $V_w = \pi h \cdot r_i^2 \approx 1,18 \text{ l}$ b) $m \approx 1,06 \text{ kg}$

60/7. a) $V = \frac{1}{4} a^3\pi$, $S = \frac{3}{2} a^2\pi$ b) $V = \frac{1}{2} a^3\pi$, $S = a^2\pi(1+\sqrt{2})$

60/8. $a = r\sqrt{\pi}$, $V_z : V_w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \approx 113\%$

- 60/9. a) $S = \left(\frac{200}{3} \pi + 175\sqrt{3} \right) \text{ cm}^2 \approx 512,5 \text{ cm}^2$
 b) $m_R = \left(\frac{25}{3} \pi + \frac{25}{2}\sqrt{3} \right) \cdot 15 \cdot 7,9 \text{ kg} \approx 5,67 \text{ kg}, m_F \approx 3,64 \text{ kg}$

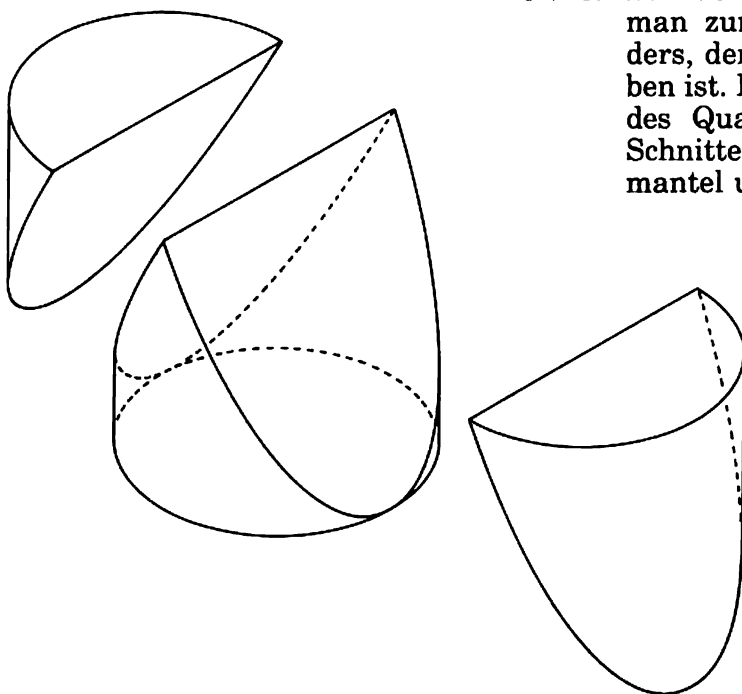
60/10. $h \approx 2,04 \text{ mm}$ 11. $d \approx 5,05 \text{ cm}$ 12. $a : d = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$

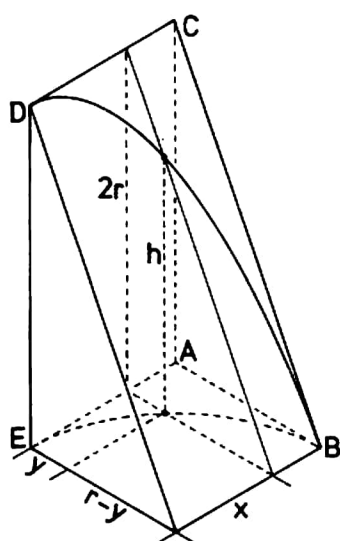
61/13. $l \approx 625,2 \text{ m}$ 14. $d \approx 0,103 \text{ cm}$ 15. $d \approx 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$

61/16. a)	$V = 1232\pi$	$S = 504\pi$	$A = 152$
b)	$V = 6264\pi$	$S = 2088\pi$	$A = 198$
c)	$V = 240\pi$	$S = 288\pi$	$A = 20$
d)	$V = 208\pi$	$S = 438\pi$	$A = 28$
e)	$V = 1096\pi$	$S = 1112\pi$	$A = 68$
f)	$V = 25a^3\pi$	$S = 58a^2\pi$	$A = 7a^2$
g)	$V = 2304\pi$	$S = 1312\pi$	$A = 192$

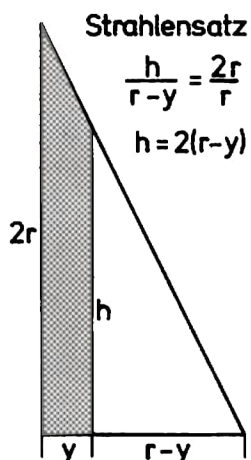
- 61/17. Zeichnet man Innen- und Außenmantel, so liefert Pythagoras als kürzesten Weg 5.

- 62/18. Zur Volumenberechnung betrachtet man zunächst ein Viertel des Quaders, dem der Zylinder einbeschrieben ist. Für den Restkörper ABCDE des Quaderachtels gilt (nach den Schnitten entlang dem Zylindermantel und der Ebene BCD):



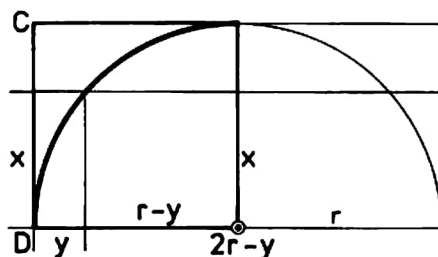


Frontsicht



Draufsicht

Sekanten-Tangenten-Satz
 $x^2 = y(2r - y)$



Für die dunkle Trapezfläche im Abstand x von D gilt:

$$F = r^2 - \frac{1}{2} (r-y) h = r^2 - \frac{1}{2} (r-y)^2 = 2ry - y^2 = x^2.$$

Nach Cavalieri ist der Restkörper volumengleich einer Pyramide, die eine quadratische Grundfläche (Seite r) und die Höhe r hat.

$$\Rightarrow V_{\text{rest}} = \frac{1}{3} r^3$$

$$V_{\text{stöpsel}} = V_{\text{Zylinder}} - (4 \cdot V_{\text{Quaderachtel}} - 4 \cdot V_{\text{rest}}) = 2r^3\pi - 4(r^3 - \frac{1}{3} r^3) = 2\pi r^3 - \frac{8}{3} r^3$$

62/19. a) $A = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi h(1 + r/h) = 2r\pi h \cdot \frac{8}{7} = 2\pi h \cdot \frac{8}{7} \cdot \sqrt{\frac{m}{\rho\pi h}} = \frac{16}{7} \sqrt{\frac{\pi h m}{\rho}}$

denn wegen $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{r^2\pi h}$ gilt $r = \sqrt{\frac{m}{\rho\pi h}}$.

b) $A = 2 \cdot 2r\pi h + 4r^2\pi = r\pi h(4 + \frac{4r}{h}) = r\pi h(4 + \frac{2}{7}) = r\pi h \cdot \frac{30}{7} =$

$$= \frac{30}{7} \pi h \sqrt{\frac{m}{2\rho\pi h}} = \frac{30}{7} \sqrt{\frac{m\pi h}{2\rho}}$$

denn wegen $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2r^2\pi h}$ gilt $r = \sqrt{\frac{m}{2\rho\pi h}}$.

c) $A_1 = 1,903 \text{ m}^2, \quad A_2 = 1,432 \text{ m}^2, \quad A_3 = 1,899 \text{ m}^2.$

Aufgaben zu 3.2 Kegel

62/1.

a)	$m = 13$	$V = 100\pi$	$S = 90\pi$	$M = 65\pi$
b)	$m = 10\sqrt{2}$	$V = \frac{1000}{3} \pi$	$S = 100(1 + \sqrt{2})\pi$	$M = 100\sqrt{2} \pi$
c)	$h = 3$	$V = 16\pi$	$S = 36\pi$	$M = 20\pi$
d)	$h = \frac{1}{3}$	$m = \frac{1}{30}\sqrt{181}$	$S = \frac{\pi}{100}(\sqrt{181} + 9)$	$M = \frac{1}{100}\sqrt{181} \pi$
e)	$r = 6$	$m = \sqrt{61}$	$S = 6\pi(\sqrt{61} + 6)$	$M = 6\sqrt{61} \pi$
f)	$h = \frac{4}{5}\sqrt{6}$	$m = 2$	$V = \frac{16}{375}\sqrt{6} \pi$	$S = 0,96\pi$
g)	$h = 2\sqrt{15}$	$m = 8$	$V = \frac{8}{3}\sqrt{15} \pi$	$M = 16\pi$
h)	$r = 1$	$h = \sqrt{3}$	$m = 2$	$V = \frac{1}{3}\sqrt{3} \pi$
i)	$r = 1$	$h = \sqrt{3}$	$V = \frac{1}{3}\sqrt{3} \pi$	$S = 3\pi$

62/2.

a)	$V_x : V_y = 2,4 = M_x : M_y$	$S_x : S_y = 10:3$
----	-------------------------------	--------------------

b) $V_x : V_y = \frac{1}{2}\sqrt{2} = M_x : M_y$ $S_x : S_y = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}$

c) $V_x : V_y = \frac{y}{x} = M_x : M_y$ $S_x : S_y = \frac{y^2 + y\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$

63/3.

a)	$V = \frac{1}{192}\sqrt{15} \pi$	b)	$V = \frac{3}{64}\sqrt{7} \pi$	c)	$V = \frac{\sqrt{3}}{24\pi^2}$	d)	$V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$
----	----------------------------------	----	--------------------------------	----	--------------------------------	----	------------------------------

63/4.

a)	$h = 1, \omega = 90^\circ$	b), c)	wegen $h > r$ gilt $\frac{1}{2}\omega < 45^\circ \Rightarrow \omega$ ist spitz
----	----------------------------	--------	--

63/5.

a)	$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \omega$ ist stumpf	b)	$\frac{h}{r} = \sqrt{3} \Rightarrow \omega$ ist spitz
----	--	----	---

c) $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \omega$ ist spitz d) $\frac{h}{r} = 1 \Rightarrow \omega = 90^\circ$

63/6.

a)	$\frac{r}{m} = \frac{1}{4}$	b)	$\frac{r}{m} = \frac{1}{2}$	7.	$\frac{V}{S} = \frac{m\sqrt{3}}{18}$
----	-----------------------------	----	-----------------------------	----	--------------------------------------

63/8. Aus $\frac{1}{2} m r \pi = r^2 \pi$, $m = \sqrt{r^2 + h^2}$ und $\frac{1}{3} r^2 \pi h = 100$ folgt $h = \sqrt[3]{\frac{900}{\pi}}$

63/9. a) $V = \frac{1}{24} \sqrt{3} a^3 \pi$, $S = \frac{3}{4} a^2 \pi$ b) $V = \frac{1}{4} a^3 \pi$, $S = \sqrt{3} a^2 \pi$

c) $V = \frac{9}{16} a^3 \pi$, $S = 2\sqrt{3} a^2 \pi$

63/10. a) $x = h(1 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{4})$ b) $x = h(1 - \frac{1}{2} \sqrt{2})$

63/11. a) $V = 5,625\pi \text{ cm}^3 \approx 17,7 \text{ cm}^3$

b) $h_1 = \frac{15}{2} \sqrt[3]{4} \text{ cm} \approx 11,9 \text{ cm}$ $V_1 = 22,5\pi \text{ cm}^3 \approx 70,7 \text{ cm}^3$

c) $r_2 = \frac{3}{2} \sqrt{2} \text{ cm} \approx 2,1 \text{ cm}$ $l_2 = \frac{15}{2} \sqrt{2} \text{ cm} \approx 10,6 \text{ cm}$
 $V_2 = \frac{45}{4} \sqrt{2} \pi \text{ cm}^3 \approx 50 \text{ cm}^3$

64/12. a) $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{8}{35}}$ c) $\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

64/13. a) $\frac{M_k}{M_z} = \sqrt{\frac{51}{8}} \frac{S_k}{S_z} = \frac{3(\sqrt{17}+1)}{2(4\sqrt{3}+1)}$ b) $\frac{M_k}{M_z} = \frac{3\sqrt{17}}{8} \frac{S_k}{S_z} = \frac{3(\sqrt{17}+1)}{14}$

64/14. $\frac{r}{h} = \frac{k/2 \cdot \sqrt{2}}{h-k} \Rightarrow k = \frac{2rh}{h\sqrt{2} + 2r}$ **15.** $r_u = 2r_e \Rightarrow \frac{V_u}{V_e} = \frac{4}{1}$

64/16. a) $V_R = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} R^2 \pi H = \frac{7}{8} V$ b) $V_R = \frac{31}{32} \cdot \frac{1}{3} R^2 \pi H = \frac{31}{32} V$

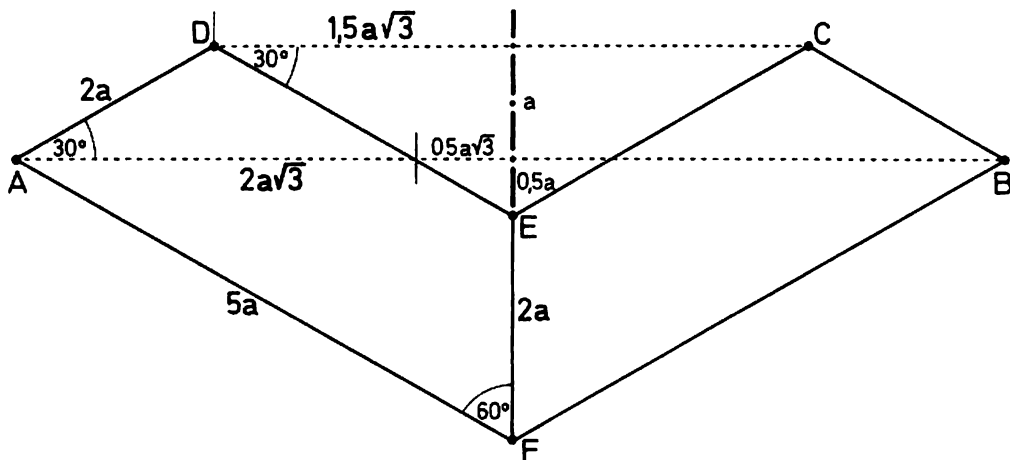
64/17. a) $V = \frac{4}{3} r^2 \pi h$ b) $V = \frac{5}{6} r^2 \pi h$

65/18. a) $V = \frac{1}{3} R^2 \pi H - \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot r \frac{H}{R} - r^2 \pi (H - r \cdot \frac{H}{R}) = \frac{1}{3} \pi H (R^2 - 3r^2 + 2r^3/R)$
b) $r = R/2$

65/19. a) $V = \frac{72}{\pi^2} \text{ m}^3 \approx 7,3 \text{ m}^3$ b) $V = \frac{24\sqrt{3}}{\pi^2} \text{ m}^3 \approx 4,2 \text{ m}^3$

65/20. α) $V_a = \frac{416}{3} \pi$ $S_a = (48 + 32\sqrt{2}) \pi$
 $V_b = \frac{544}{3} \pi$ $S_b = (112 + 32\sqrt{2}) \pi$
 $V_c = \frac{632\sqrt{2}}{3} \pi$ $S_c = (80 + 116\sqrt{2}) \pi$

β) $V_a = 11a^3\pi$ $S_a = 10a^2\sqrt{3} \pi$
 $V_b = 13a^3\pi$ $S_b = 14a^2\sqrt{3} \pi$



$$V_c = V_{ABCD} + V_{ABF} - V_{DCE}$$

$$= \frac{a\pi}{3} \left(\frac{25}{4} \cdot 3a^2 + \frac{5}{2} a\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} a\sqrt{3} + \frac{9}{4} \cdot 3a^2 \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{25 \cdot 3}{4} a^2 \pi \cdot \frac{5}{2} a - \frac{1}{3} \cdot \frac{9 \cdot 3}{4} a^2 \pi \cdot \frac{3}{2} a$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \pi \left(\frac{75}{4} + \frac{45}{4} + \frac{27}{4} + \frac{375}{8} - \frac{81}{8} \right) = 24,5a^3\pi$$

$$S_c = 25\sqrt{3} a^2\pi$$

65/21. a) $V = 1218\pi$ $S = 406\pi$ b) $V = 3\pi(\sqrt{7} + 4)$ $S = 27\pi$
c) $V = 102\pi$ $S = (85 + 7\sqrt{13})\pi$ d) $V = \frac{95}{3} \pi$ $S = (5\sqrt{26} + 13)\pi$
e) $V = 128\pi$ $S = 120\pi$ f) $V = \frac{4}{3} a^3\pi$ $S = (5 + 3\sqrt{2})\pi a^2$

65/22. $V = \frac{1}{3} \sqrt{b^2 - (c - a)^2} \pi(c^2 + ac + a^2)$ $M = (a + c)\pi \cdot b$

66/23. $\frac{m_{\text{unten}}}{m_{\text{oben}}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ 24. $R = 57 \text{ cm}$, $r = 28 \text{ cm}$, $h = 85 \text{ cm}$

66/25. $V = 2,57 \text{ m}^3$ 26. $V = 23\pi \text{ cm}^3 \approx 72 \text{ cm}^3$ 27. $f = \frac{1}{13} \approx 7,7\%$

- 66/28.** a) $V = 23\,238\pi$ $S = 4\,086\pi + 792\sqrt{5}\pi$ $A = 414$
- b) $V = 1814\pi$ $S = 350\pi + 108\sqrt{13}\pi + 60\sqrt{10}\pi$ $A = 100$
- c) $V = 23\,000\pi$ $S = 3\,600\pi$ $A = 1\,500$
- d) $V = 1\,360\,666\frac{2}{3}\pi$, $S = 25\,400\pi + 2\,400\sqrt{13}\pi + 5\,600\sqrt{5}\pi$, $A = 19\,000$
- e) $V = 432\pi$ $S = 237\pi + 21\sqrt{17}\pi$ $A = 42$
- f) $V = 22\,458\frac{1}{3}\pi$ $S = 2450\pi + 1250\sqrt{5}\pi$ $A = 550$
- g) $V = 144\pi$ $S = 96\pi + 24\sqrt{13}\pi$ $A = 12$

67/29. a) $s = 30\pi \text{ cm} \approx 94,2 \text{ cm}$

b) $r = 10 \text{ m}$, $m = 60 \text{ m}$
 $s = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot m = 30\sqrt{3} \text{ m} \approx 52 \text{ m}$; $h = \frac{1}{2} h_{\text{ges}} = 5\sqrt{35} \text{ m} \approx 14,8 \text{ m}$
kein kürzester Weg existiert, wenn der Mantelwinkel $\varphi \geq 90^\circ$ ist.

4.Kapitel

Aufgaben zu 4.1 Volumen und 4.2 Oberfläche

87/1.	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
r	1	10	0,01	6370	$\sqrt[3]{15}$	$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
d	2	20	0,02	12 740	$2\sqrt[3]{15}$	$2\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$	$\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	$\sqrt{2}$
V	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{4000}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi \cdot 10^{-6}$	$1,08 \cdot 10^{12}$	20π	1	$2,25\pi$	$\frac{1}{6\sqrt{\pi}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$
S	4π	400π	$4\pi \cdot 10^{-4}$	$5,10 \cdot 10^8$	$4\pi\sqrt[3]{225}$	$\sqrt[3]{36\pi}$	$18\pi\sqrt[3]{2}$	1	2π

87/2. a) $V = \frac{4}{3}\pi (d/2)^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$ b) $V = \frac{1}{3}S\sqrt{\frac{S}{4\pi}}$ c) $S = \pi d^2$ d) $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$
e) $S = 4A$ f) $S = \frac{4}{3}A\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ g) $S = \frac{u^2}{\pi}$ h) $V = \frac{u^3}{6\pi^2}$

87/3. a) $S = 78,5 \text{ mm}^2$, $V = 65,4 \text{ mm}^3$ b) $S = 153,9 \text{ cm}^2$, $V = 179,6 \text{ cm}^3$
c) $S = 45,8 \text{ cm}^2$, $V = 29,2 \text{ cm}^3$ b) $S = 286,5 \text{ cm}^2$, $V = 455,9 \text{ cm}^3$
e) $S = 1559,7 \text{ cm}^2$, $V = 5792,2 \text{ cm}^3$

87/4. $\rho = 1,24 \text{ g/cm}^3$ 5. $\rho = 5,54 \text{ g/cm}^3$ 6. 70,89%

87/7. $S_1 = 5,1121158 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, $S_2 = 5,0949492 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$, $\frac{\Delta S}{S_2} = 0,337\%$
 $V_1 = 1,0868631 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$, $V_2 = 1,0813931 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$, $\frac{\Delta V}{V_2} = 0,506\%$

87/8. Es laufen $497,4 \text{ cm}^3$ heraus.

87/9. $d = 0,197 \text{ cm}$ 88/10. $d = 44,8 \text{ mm}$

88/11. a) 8 b) 64 c) 512

88/12. a) 52,4% b) 52,4% c) 52,4% d) 52,4%

88/13. $m = \rho \cdot V \approx \rho \cdot A \cdot d = 7566 \text{ g}$ 14. $d = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$ 15. $m = 635 \text{ g}$

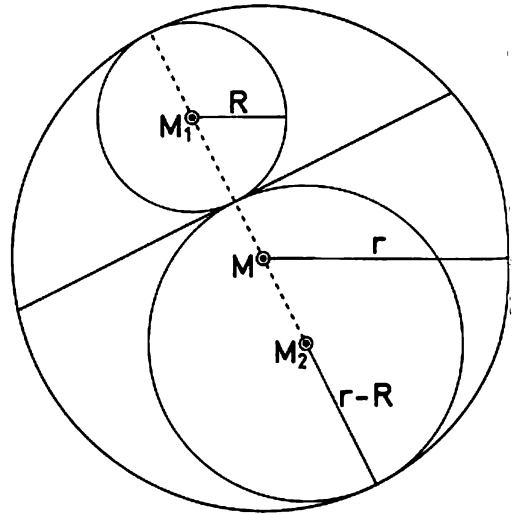
88/16. Der Öltropfen zerfließt zu einem Zylinder. Dieser hat den Radius $r = 6,5 \text{ cm} = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ und die Höhe h . Wenn die Moleküle nebeneinanderliegen, dann ist h zugleich auch der gesuchte Durchmesser:
 $V_{\text{öl}} = 0,01 \text{ mm}^3 = 0,01(10^{-3} \text{ m})^3 = 0,01 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3 = 10^{-11} \text{ m}^3$
 $r^2 \pi h = V_{\text{öl}} \Rightarrow h = \frac{V_{\text{öl}}}{r^2 \pi} = \frac{10^{-11} \text{ m}}{6,5^2 \cdot 10^{-4} \pi} \approx \frac{10^{-7} \text{ m}}{132,73} \approx 7,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

88/17. a) $A = \pi^3$ b) $A = 0,75\pi^3$ 18. $\frac{A}{A_{\text{ges}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

88/19. a) $r = 3$ b) $r = 3/2$ c) $r = 3/n$
 d) $\frac{\Delta E}{V} \sim \frac{1}{r} \Rightarrow$ Die kleine Kugel kühlt schneller aus.

89/20. $\frac{F_S}{F_D} = \frac{k \cdot 4/3 \pi r^3}{c \cdot r^2 \pi} = 1 \Rightarrow r = \frac{3c}{4k}$ (Konstanten: k, c)

89/21. $V_1 + V_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$
 $\frac{4}{3} \pi R^3 + \frac{4}{3} \pi (r - R)^3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$
 $\Rightarrow R^2 - rR + \frac{1}{3} r^2(1 - 1/n) = 0$
 $\Rightarrow R_{1,2} = \frac{1}{2} r \pm \frac{1}{6} r \sqrt{\frac{12}{n} - 3}$
 Abstände: $d_1 = R_1$ und $d_2 = R_2$
 kleinstes Volumen:
 $\frac{1}{n}$ und damit $\frac{12}{n}$ muß möglichst klein sein:
 $\frac{12}{n} = 3 \Rightarrow n = 4$ und $R_1 = R_2 = \frac{1}{2} r$.



89/22. a) $\frac{A_k}{A_z} = \frac{8}{3\pi}$ b) $\frac{V_k}{V_z} = \frac{16\sqrt{\pi}}{3\pi^2}$

89/23. a) $\frac{A_k}{A_z} = \frac{32}{3\pi^2}$ b) $\frac{V_k}{V_z} = \frac{128}{3\pi^3}$

89/24. $a \approx 1,6r$ 25. $a \approx 1,45r$ 26. $h = r \Rightarrow \frac{V_z}{V_k} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_z < V_k$

89/27. $h = 4r$, $m = r\sqrt{17}$, $\frac{A_{ke}}{A_{ku}} = \frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1 \Rightarrow A_{ke} > A_{ku}$

89/28. a) $R = 3r$ b) $\frac{A}{A_z} = \frac{9}{16}$

29. $V_s \approx 56,5 \text{ cm}^3$, $A_s \approx 141 \text{ cm}^2$

89/30. Tetraeder: $r_u = \frac{1}{4}\sqrt{6} a$ $r_i = \frac{1}{12}\sqrt{6} a$ $r_k = \frac{1}{4}\sqrt{2} a$
 Würfel: $r_u = \frac{1}{2}\sqrt{3} a$ $r_i = \frac{1}{2} a$ $r_k = \frac{1}{2}\sqrt{2} a$
 Oktaeder: $r_u = \frac{1}{2}\sqrt{2} a$ $r_i = \frac{1}{6}\sqrt{6} a$ $r_k = \frac{1}{2} a$

Tetraeder: a) $27 : 1 : 3\sqrt{3}$ b) $9 : 1 : 3$
 Würfel: a) $3\sqrt{3} : 1 : 2\sqrt{2}$ b) $3 : 1 : 2$
 Oktaeder: a) $3\sqrt{3} : 1 : 0,75\sqrt{6}$ b) $3 : 1 : 1,5$

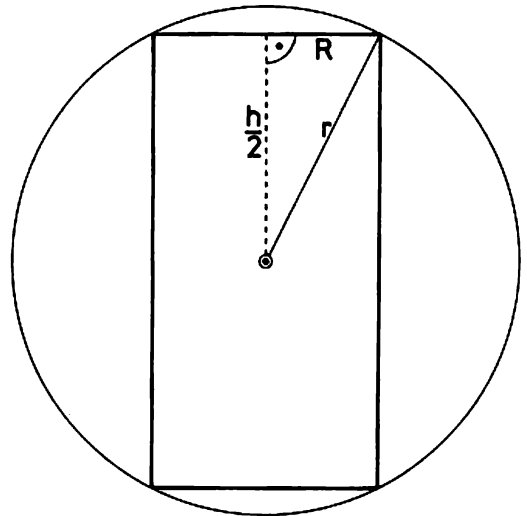
90/31. a) $\frac{V_T}{V_W} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{S_T}{S_W} = \frac{1}{2}$ c) $\frac{V_T}{V_O} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{S_T}{S_O} = \frac{3}{4}$

e) $\frac{V_W}{V_O} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ f) $\frac{S_W}{S_O} = \frac{3}{2}$ g) $\frac{V_T}{V_W} = \frac{\sqrt{6}}{36}$ h) $\frac{S_T}{S_W} = \frac{1}{6}$

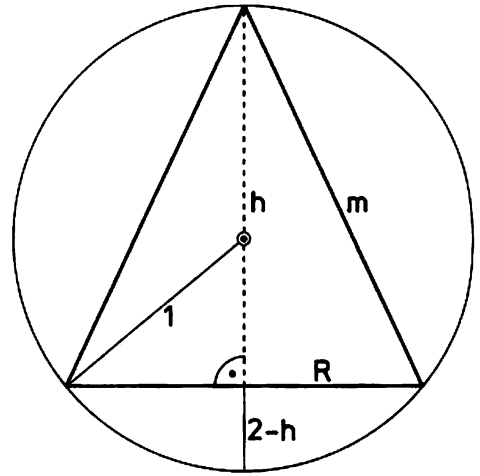
i) $\frac{V_T}{V_O} = \frac{1}{8}$ j) $\frac{S_T}{S_O} = \frac{1}{4}$

k) $\frac{V_W}{V_O} = \frac{9}{2\sqrt{6}}$ l) $\frac{S_W}{S_O} = \frac{3}{2}$

90/32. I: $2\pi R^2 + 2R\pi h = 2\pi r^2$
 $\Rightarrow R^2 + Rh = r^2$
 II: $R^2 + \frac{1}{4}h^2 = r^2$
 II-I: $\frac{1}{4}h^2 - Rh = 0 \Rightarrow h = 4R$
 in II eingesetzt ergibt $R = \frac{1}{5}\sqrt{5} r$



- 90/33. I: $m = \sqrt{R^2 + h^2}$
 II: $mR\pi + R^2\pi = 2\pi$
 III: $h(2-h) = R^2$ (Schnensatz)
 I und III in II eingesetzt ergibt:
 $\sqrt{2h - h^2 + h^2} \cdot \sqrt{2h - h^2 + 2h - h^2} = 2$
 Umstellen und Quadrieren ergibt:
 $0 = h^4 - 2h^3 + 4h^2 - 8h + 4$
 Lösungen: $h_1 \approx 0,6787$, $h_2 \approx 1,632$



- 90/34. a) $R = r\sqrt[3]{2/3} = \frac{1}{3} r\sqrt[3]{18}$
 b) $R = r\sqrt[3]{2/3} = \frac{1}{3} r\sqrt[3]{6}$

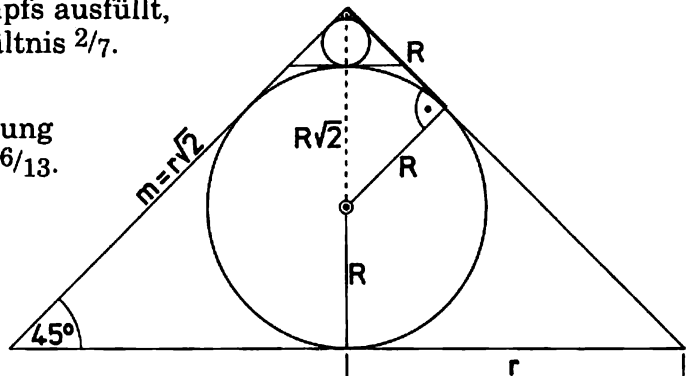
90/35. $R = \frac{1}{3} r\sqrt{3}$

36. $V_Z : V_{HK} : V_{Ke} = 3 : 2 : 1$

- 90/37. a) $\varphi = 45^\circ$: $R + R\sqrt{2} = r \Rightarrow R = (\sqrt{2} - 1)r$
 $V_{K1} = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2} - 1)^3 r^3$
 $V_{S1} = \frac{2}{3} \pi (\sqrt{2} - 1)r [r^2 + (3 - 2\sqrt{2})r^2 + (3 - 2\sqrt{2})^2 r^2]$
 $\frac{V_{K1}}{V_{S1}} = \frac{2}{7}$

Weil jede Kugel $2/7$ des Volumens
 des zugehörigen Stumpfs ausfüllt,
 ist das gesuchte Verhältnis $2/7$.

$\varphi = 60^\circ$:
 entsprechende Rechnung
 führt zum Verhältnis $6/13$.



- b) $\varphi = 45^\circ$:
 $S_{K1} = 4\pi (\sqrt{2} - 1)^2 r^2$
 $M_{S1} = \pi [r + r(3 - 2\sqrt{2})] \cdot (4 - 2\sqrt{2})r$
 das Verhältnis ist $\frac{S_{K1}}{M_{S1}} = \frac{1}{2}$
 $\varphi = 60^\circ$:
 entsprechende Rechnung führt zum Verhältnis $3/4$.
- c) $\varphi = 45^\circ$: $V_{ges} = \frac{2}{7} V_{Ke} = \frac{2}{7} r^3 \pi$, $S_{ges} = \frac{1}{2} M_{Ke} = \frac{1}{2} \sqrt{2} r^2 \pi$
 $\varphi = 60^\circ$: $V_{ges} = \frac{6}{13} \sqrt{3} r^3 \pi$, $S_{ges} = \frac{3}{2} r^2 \pi$

91/38. a) $V = \frac{4}{3} a^3\pi - 2 \cdot \frac{1}{3} a^3\pi = \frac{2}{3} a^3\pi$, $S = 4a^2\pi + 2\sqrt{2} a^2\pi$

b) $V = a^2\pi \cdot 2a - \frac{2}{3} a^3\pi - \frac{1}{3} a^2\pi a = a^3\pi$,
 $S = 2a\pi \cdot 2a + 2a^2\pi + a\sqrt{2} \pi a = 6a^2\pi + \sqrt{2} a^2\pi$

c) $V = 4d^2\pi \cdot 4d - \frac{2}{3} d^3\pi - \frac{1}{3} d \cdot 2\pi(4d^2 + 2d^2 + d^2) = \frac{32}{3} d^3\pi$,
 $S = 22d^2\pi + 3d^2\sqrt{5} \pi$

91/39. $V = 2\pi^2 ar^2$ $S = 4\pi^2 ra$

91/40. $V = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 2\pi \cdot 5 = 120\sqrt{3} \pi$ $S = 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\pi \cdot 5 = 120\sqrt{3} \pi$

91/41. Mit zwei Rotationen, zum Beispiel um $x = 4$ und $y = 0$, ergibt sich:

a) $V_1 = 24\pi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\pi \cdot d_1 \Rightarrow d_1 = 2 \Rightarrow x_s = 2$
 $V_2 = 28\pi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\pi \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y_s = \frac{7}{3} \Rightarrow S(2 | 7/3)$

b) $A_1 = 48\pi = 12 \cdot 2\pi \cdot d_1 \Rightarrow d_1 = 2 \Rightarrow x_s = 2$
 $A_2 = 60\pi = 12 \cdot 2\pi \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = 2,5 \Rightarrow y_s = 2,5 \Rightarrow S(2 | 2,5)$

91/42. a) $A = 4\pi r^2 = \pi r \cdot 2\pi d \Rightarrow d = 2r/\pi$

b) $V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} r^2 \pi \cdot 2\pi d \Rightarrow d = 4r/3\pi$

91/43. $V = r \cdot h \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} r = r^2\pi h$ $A = (2r + h) \cdot 2\pi \frac{rh + r^2}{2r + h} = 2r\pi h + 2r^2\pi$

92/44. Das Bild von Dürer (links) ist korrekt.
 Schaut man so auf eine Kugel, daß sich die Breitenkreise als Ellipsen zeigen, dann kann in einem (korrekten) Normalbild der Pol unmöglich aufm Umriß liegen!

Aufgaben zu 4.3 Kugelteile

92/1. a) $F = \pi/2$, $V = \pi/6$ b) $F = 75\pi$, $V = 125\pi$ c) $F = 200\pi/3$, $V = 2000\pi/9$

92/2. a) $F = 7\pi/18$ b) $F = 2\pi/3$ c) $F = 0$

92/3. a) $V = 7\pi/54$ b) $V = 2\pi/9$ c) $V = 0$

92/4. a) $\approx 180^\circ$ b) $\approx 180,00014^\circ$ c) $\approx 181,412^\circ$

92/5. a) $V = 11\pi/192$ b) $V = 81\pi$ c) $V = 2\pi/3$

d) $V = 301\pi/6$ e) $V = 13\pi/6$ f) $V = 2\pi/3$

93/6. a) $F = \pi/2$, $V = \pi/6$ b) $F = 2\pi$, $V = 2\pi/3$ c) $F = 12\pi$, $V = 8\pi$

93/7. a), b) $h = 2r/3$

93/8. a) $V = \frac{\pi}{6h} (\rho^2 + h^2)^2$, $F = \pi(\rho^2 + h^2)$

b) $V = \frac{2}{3} \pi r^2 (r \pm \sqrt{r^2 - \rho^2})$, $F = 2r\pi(r \pm \sqrt{r^2 - \rho^2})$
für $h > r$ gilt das Pluszeichen.

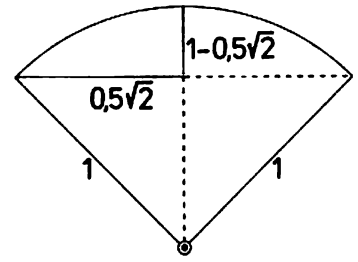
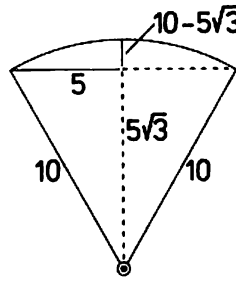
93/9. a) $F = \pi/2$ b) $F = 2$ c) $F = 2\pi$

93/10. $V = \frac{187}{24} \pi$ 11. $V_S = 50\% \cdot V_K$

93/12. $r = 13 \text{ cm}$, $V = \frac{4820}{3} \pi \text{ cm}^3 \approx 5047 \text{ cm}^3$

93/13. a) $h = r/2$, $V_S = 25\% \cdot V_K$ b) $h = 1,6r$, ($h = 2r$), $V_S = 80\% \cdot V_K$

93/14. a) $F = 250\pi - 100\pi\sqrt{3}$
 $V = \frac{200}{3} \pi (10 - 5\sqrt{3})$
 $= \frac{1000}{3} \pi (2 - \sqrt{3})$

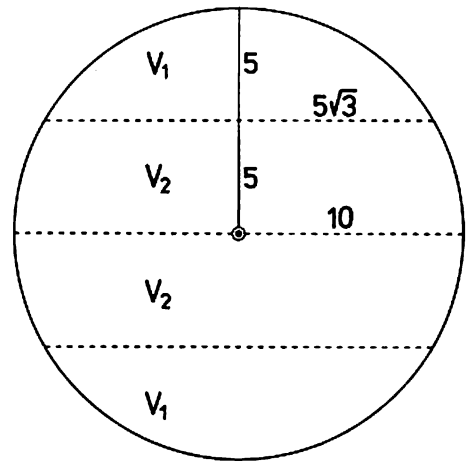


b) $F = 2\pi - 0,5\pi\sqrt{2}$
 $V = \frac{2}{3} \pi (1 - 0,5\sqrt{2})$

93/15. $r = \sqrt{2Rh}$, $h = R$, $r_{\max} = 2R$

93/16. $d = r/3$

93/17. a) Von den vier Stücken sind jeweils zwei gleich.
 $V_1 = \frac{1250}{6} \pi \text{ cm}^3$, $V_2 = \frac{2750}{6} \pi \text{ cm}^3$
 $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11}$

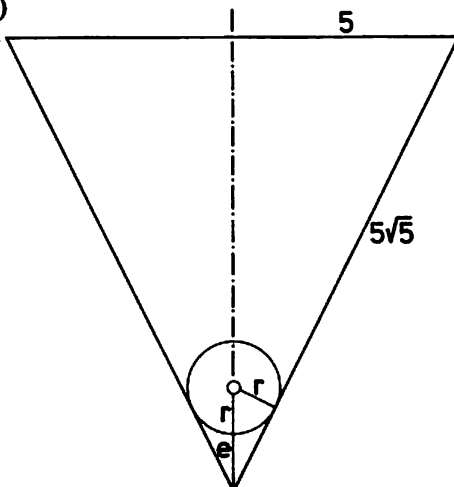


b) $S_1 = 175\pi \text{ cm}^2 \approx 550 \text{ cm}^2$
 $S_2 = 275\pi \text{ cm}^2 \approx 864 \text{ cm}^2$

93/18. a) $V \approx 4189 \text{ l}$ b) $V \approx 3009 \text{ l}$

94/19. a) $V = \frac{2}{3} \pi r^3 (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})$ b) $h_{\text{seg}} = r/2$, $V = \frac{7}{12} \pi r^3$

94/20. a)



b) $\frac{e+r}{r} = \frac{5\sqrt{5}}{5}$ (ähnliche Dreiecke)
 $\Rightarrow e = (\sqrt{5} - 1) \text{ cm} \approx 1,24 \text{ cm}$

c) $\frac{1}{3} r'^2 \pi h' = \frac{4}{3} \pi r_{\text{kir}}^3 + \frac{1}{3} r_o^2 \pi h_o$
 $r_o = 2,5 \text{ cm}$, $h_o = 5 \text{ cm}$
 $r' = \frac{1}{2} h'$ (Strahlensatz)
 $h' = \sqrt[3]{16 r_{\text{kir}}^3 + 4 r_o^2 h_o}$
 $h' = \sqrt[3]{16 + 125} \text{ cm} \approx 5,20 \text{ cm}$

- d) Das Saftvolumen ergibt sich als Differenz der Volumina von Kegel und Kugelsegment:
 $m = 2\text{cm}$ (Pythagoras)

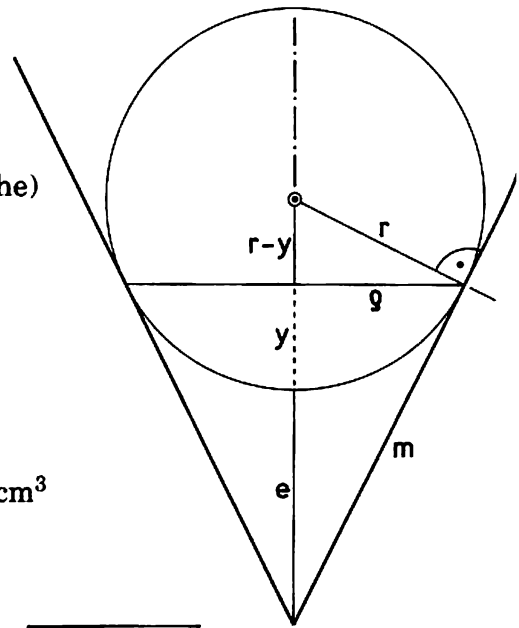
$$\frac{1}{2}(e+r) \cdot \rho = \frac{1}{2} mr \text{ (Dreiecksfläche)}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{2}{5} \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$h := e + y = \sqrt{m^2 - \rho^2} \\ = \sqrt{\frac{16}{5}} \text{ cm} = \frac{4}{5} \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$y = (1 - \frac{1}{5} \sqrt{5}) \text{ cm}$$

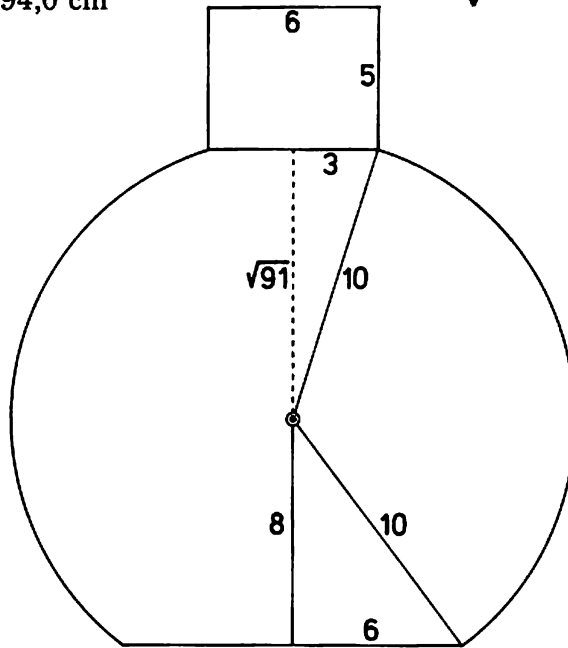
$$V = \frac{1}{3} \rho^2 \pi h - \frac{1}{3} y^2 \pi (3r - y) = \\ = \frac{2}{15} \pi (3\sqrt{5} - 5) \text{ cm}^3 \approx 0,716 \text{ cm}^3$$



e) $V_{\text{nach}} = \frac{250}{6} \pi - V_{\text{kir}} - V_{\text{anfang}} \\ = \frac{359}{12} \pi \text{ cm}^3 \approx 94,0 \text{ cm}^3$

94/21. a) $V \approx 4206 \text{ cm}^3$

b) $F \approx 1309 \text{ cm}^2$



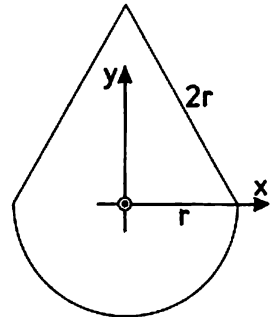
94/22. a) Schwerpunkt $S(x_s | y_s)$

$$x_s = 0 \text{ (Symmetrie)}$$

$$y_s = \frac{m_{ke} \cdot y_{ke} + m_{ku} \cdot y_{ku}}{m_{ges}} =$$

$$= \frac{\rho}{m_{ges}} \left(\frac{1}{3} \sqrt{3} r^3 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} r - \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r \right) = 0$$

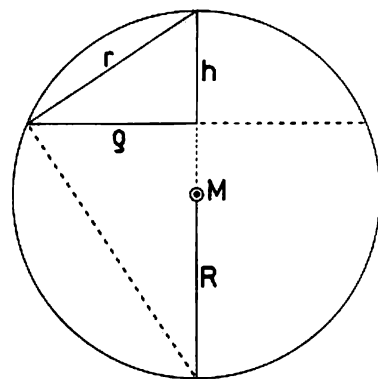
Das Weiberl bleibt in der jeweiligen Position stehen.



- b) Der Schwerpunkt muß in der Halbkugel liegen, es muß also sein:

$$\frac{1}{3} r^2 \pi h \cdot \rho_{ke} \cdot \frac{1}{4} h < \frac{4}{6} \pi r^3 \cdot \rho_{ku} \cdot \frac{3}{8} r \Rightarrow h < r \sqrt{3 \frac{\rho_{ku}}{\rho_{ke}}}$$

94/23. a) $2R \cdot h = r^2$ (Kathetensatz) $\Rightarrow h = \frac{r^2}{2R}$
 $\rho^2 = r^2 - h^2$ (Pythagoras)
 $\Rightarrow \rho^2 = r^2 - \frac{r^4}{4R^2} \Rightarrow \rho = \frac{r}{2} \sqrt{4 - \frac{r^2}{R^2}}$

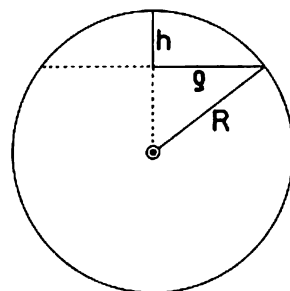


b) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r^2}{4R^2 - r^2}$

c) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{r^4(6R^2 - r^2)}{32R^6 - r^4(6R^2 - r^2)}$

94/24. $\rho = 4\text{cm}$, $h = 2\text{cm}$
 Bedingung: Auftrieb = Kugelgewicht

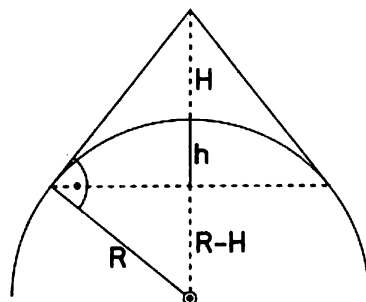
$\rho_w \cdot V_{\text{unten}} = \rho_h \cdot V_{\text{kugel}}$
 $\rho_w \cdot \frac{(2R - h)^2 \pi}{3} (R + h) = \rho_h \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$
 $\rho_w \cdot (2R - h)^2 (R + h) = \rho_h \cdot 4R^3$
 $\rho_h = 0,896 \text{ g/cm}^3$



94/25. $R^2 = (R + H)(R - h)$ (Kathetensatz)
 $\Rightarrow h = \frac{RH}{R + H}$

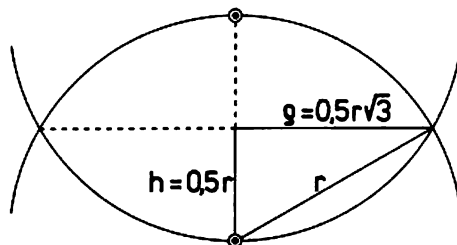
$\Rightarrow F = 4\pi R^2 \cdot \frac{H}{2(R + H)}$

a) 80 km^2 b) 4002 km^2 c) $120\,014 \text{ km}^2$



94/26. $H = 250 \text{ m}$

95/27. $V = 2 \cdot \frac{1/4 r^2 \pi}{3} (3r - r/2) = \frac{5}{12} \pi r^2$
 $F = 2r^2 \pi$



95/28. Vergleiche Aufgabe **27.**: $r = 3\text{cm}$, $h = 1,5\text{cm}$, $\rho = 0,5r\sqrt{3} \approx 2,6\text{cm}$

a) $F = \rho^2\pi \approx 21,2 \text{ cm}^2$

b) $F = 2 \cdot 2r\pi(r + h) \approx 169,6 \text{ cm}^2$

c) $V = 2 \cdot \frac{1}{3}(r + h)^2\pi \cdot \frac{3}{2}r \approx 191 \text{ cm}^3$

95/29. $F = 4\pi R^2 \cdot \frac{H}{2(R + H)}$ (siehe Aufgabe **25.**)

a) $H = 1 \text{ cm}$, $R = 10 \text{ cm}$, $F \approx 57 \text{ cm}^2$

b) $H = 10 \text{ cm}$, $F \approx 314 \text{ cm}^2$ b) $H = 990 \text{ cm}$, $F \approx 622 \text{ cm}^2$

95/30. $\rho^2 + x^2 = 800$

$\rho^2 + (x + 20)^2 = 2000$

$\Rightarrow x = 20$, $\rho = 20$

$h_1 = 20(\sqrt{5} - 2)$

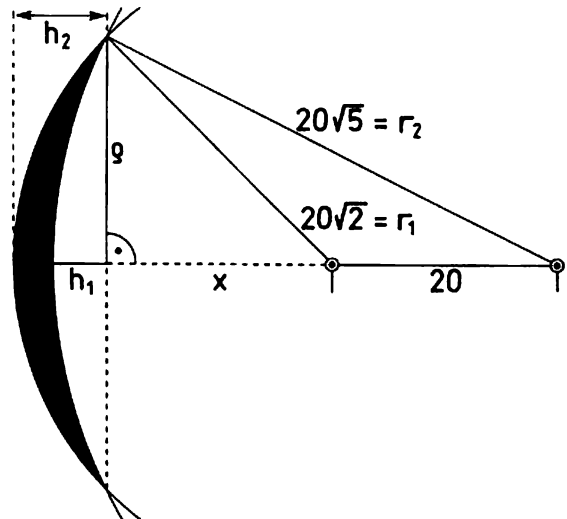
$h_2 = 20(\sqrt{2} - 1)$

$V = V_2 - V_1 =$

$= \frac{\pi}{3} h_2^2(3r_2 - h_2) - \frac{\pi}{3} h_1^2(3r_1 - h_1)$

$\approx 2,481 \text{ cm}^3$

$\Rightarrow m = 2\rho V \approx 12,4 \text{ g}$



5. Kapitel

Aufgaben zu 5.1 Tangens

112/1.

α	15°	1°	$1'$	$89,9^\circ$	$22,5^\circ$	15°	75°	36°	18°
$\tan \alpha$	0,268	0,017	$2,9 \cdot 10^{-4}$	573	$\sqrt{2} - 1$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1 - 2\sqrt{0,2}}$

112/2.

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$	1,00	1,107	1,57
$\tan x$	1,56	0,100	0,0123	0,325	0,666	–	1,55741	2	1990

112/3. a) 0,1003346 (0,1003346) b) 1,9151373 (1,9647597)

c) 0,9884664 (0,9992039) d) 0,5773421 (0,5773502)

112/4. a) 0,4998604 (0,499767) b) 0,0996686 (0,0996686)

c) 1,9171714 (1,2490458) d) 2873,4579 (1,2626273)

Für $x > 1$ klappt die Näherung nicht.

113/5. a) –0,2504 b) $-1,601 \cdot 10^{-4}$ c) $-1,595 \cdot 10^{-7}$

d) 0,7899 e) 0,9981 f) 1,000

113/6. a) $-\sqrt{3}/3$ b) nicht definiert c) $2/3$

113/7. a) 75° b) 13° c) 14° d) 23° e) 53° f) 37°

113/8. a) 45° b) 30° c) 60° d) $0^\circ; 60^\circ$ e) $0^\circ; 45^\circ$

f) $0^\circ; 60^\circ$ g) $30^\circ; 60^\circ$ h) $-45^\circ; -60^\circ$

113/9. Paßstraße: $16,7^\circ$ ↗ Nebenstraße: $11,3^\circ$ Auto-, Eisenbahn: $1,7^\circ$
 U-, S-Bahn: $5,7^\circ$ Kabelbahn: $11,3^\circ$ Zahnradbahn: $14,0^\circ$ ($25,6^\circ$)
 Standseilbahn: $42,0^\circ$ Drahtseilbahn: 45° ↘

113/10. a) 56 b) $\sqrt{3}$ c) $36,9^\circ$ d) $53,1^\circ$ e) 0,017 f) 57,3

g) 14° h) 76° i) 66° j) 66° k) 66° l) 66°

$$113/11. \quad b = 24\text{cm} \qquad 113/12. \quad \alpha = 12^\circ \qquad 114/13. \quad h = 21\text{m}$$

114/14. Beispiel München: $\varphi = 48,1^\circ$
 $l_{\max} = 5,4 \text{ m} \quad l_{\min} = 0,82 \text{ m}$
 Bei $\varphi = 23,5^\circ$ ist die Schattenlänge am 21. Juni gleich null.

$$114/15. \quad \text{a) } 26,6^\circ \quad \text{b) } 63,4^\circ \qquad 16. \quad h = d \cdot \tan \alpha$$

$$115/17. \quad \text{a) } \beta_1 = 51^\circ - 10^\circ = 41^\circ \qquad \text{b) } \beta_2 = 41,4^\circ + 10^\circ = 51,4^\circ$$

$$115/18. \quad 702 \text{ m} \qquad 19. \quad 4,4 \text{ m} \qquad 20. \quad \tan \alpha = 22/8 \Rightarrow \alpha \approx 70^\circ$$

$$115/21. \quad 24^\circ \qquad 22. \quad 6,7\text{cm}$$

$$115/23. \quad \text{a) } 39,8^\circ \quad \text{b) } 78,2^\circ \quad \text{c) } 45,2^\circ$$

$$115/24. \quad 22,6^\circ \text{ und } 67,4^\circ \qquad 25. \quad 26^\circ \text{ und } 154^\circ \qquad 26. \quad e = 4,2 \quad f = 48,3$$

$$115/27. \quad \alpha = 35^\circ \qquad 116/28. \quad F_1 = 3280 \quad F_2 = 13786$$

116/29. a) $\varphi = 70,5^\circ$ (Seitenverhältnis $\sqrt{2}$)
 b) $\varphi = 63,4^\circ$ (Seitenverhältnis $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

$$116/30. \quad F = 520 \qquad 31. \quad 80^\circ \qquad 32. \quad c = 10$$

$$116/33. \quad \tan \alpha = h/q \quad \tan \beta = h/p \Rightarrow \tan \alpha \tan \beta = h^2/pq = 1 \quad (\text{Höhensatz})$$

$$116/34. \quad h = \sqrt{pq} \quad (\text{Höhensatz}), \quad \tan \alpha = h/q = \sqrt{p/q}$$

$$116/35. \quad \text{a) } \frac{1}{2} s_n = \tan \frac{1}{2} \mu_n \Rightarrow s_n = 2 \tan \frac{1}{2} \mu_n$$

$$u_n = n \cdot s_n = 2n \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_n \Rightarrow \frac{u_n}{2\pi} = \frac{n \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_n}{\pi}$$

$$F_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot s_n = n \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_n \Rightarrow \frac{F_n}{\pi} = \frac{n \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_n}{\pi}$$

$$n = 3: \mu_3 = 120^\circ, \quad \frac{u_3}{2\pi} \approx 1,65 \qquad n = 5: \mu_5 = 72^\circ, \quad \frac{u_5}{2\pi} \approx 1,16$$

$$n = 8: \mu_8 = 45^\circ, \quad \frac{u_8}{2\pi} \approx 1,05$$

b) Ähnlich wie in a) ergibt sich:

$$n = 45, \quad \mu_{45} = 8^\circ, \quad \frac{u_{45}}{2\pi} \approx 1,0016278$$

$$n = 90, \quad \mu_{90} = 4^\circ, \quad \frac{u_{90}}{2\pi} \approx 1,0004064$$

$$n = 180, \quad \mu_{180} = 2^\circ, \quad \frac{u_{180}}{2\pi} \approx 1,0001016$$

$$n = 360, \quad \mu_{360} = 1^\circ, \quad \frac{u_{360}}{2\pi} \approx 1,0000254$$

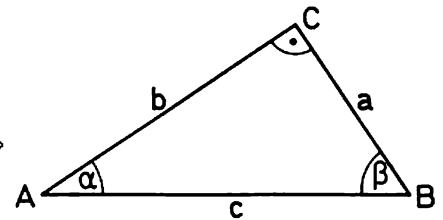
116/36. $\alpha_1 = 82,9^\circ \quad \alpha_2 = 71,6^\circ \quad \alpha_3 = 68,8^\circ \quad \alpha_4 = 45^\circ$
 $\alpha_5 = 37,9^\circ \quad \alpha_6 = 26,6^\circ \quad \alpha_7 = 11,3^\circ$

116/37. Hat die gegebene Gerade die Steigung m ,
 so haben ihre Lote die Steigung $-1/m$.

116/38. a) $26,6^\circ$ b) $36,9^\circ$ c) $59,0^\circ$ d) $31,0^\circ$ e) $63,4^\circ$ f) 45°

117/39. a) $26,6^\circ$ b) 31° c) $26,6^\circ$ d) 45° e) $71,6^\circ$ f) $59,0^\circ$

117/40. a) I $b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = 2b - a$
 II $b^2 = c^2 - a^2$
 $b^2 = (2b - a)^2 - a^2 \Rightarrow b = 4a/3$
 $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 36,9^\circ, \quad \beta \approx 53,1^\circ$



b) I $b^2 = ca$
 II $a^2 + b^2 = c^2$
 $a^2 + ca - c^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} c$
 $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{ac}} = \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \Rightarrow \alpha \approx 38,2^\circ \Rightarrow \beta \approx 51,8^\circ$

117/41. a) $\alpha = 36,9^\circ \quad \beta = 26,6^\circ \quad \gamma = 63,4^\circ \quad \delta = 71,6^\circ$
 $\epsilon = 18,4^\circ \quad \zeta = 26,6^\circ \quad \eta = 63,4^\circ \quad \vartheta = 53,1^\circ$

b) $\alpha = 63,4^\circ \quad \beta = 63,4^\circ \quad \gamma = 53,1^\circ \quad \delta = 45^\circ$
 $\epsilon = 63,4^\circ \quad \zeta = 71,6^\circ \quad \eta = 71,6^\circ \quad \vartheta = 108,4^\circ$

117/42. a) $\alpha = 71,6^\circ$ b) $\beta = 36,9^\circ$ c) $\gamma = 53,1^\circ$

d) Wäre das Achteck regelmäßig, so müßte jeder Innenwinkel 135° haben. Dies ist nicht der Fall, weil zum Beispiel der Winkel mit dem am höchsten liegenden Scheitel etwa $126,9^\circ$ mißt.

e) $\delta = 53,1^\circ$; nicht regelmäßig, denn der Winkel, dessen Scheitel dem Scheitel von δ am nächsten liegt, mißt etwa $126,9^\circ$.

f) $\varepsilon = 22,5^\circ$ g) $\zeta = 54,7^\circ$ h) $\eta = 53,1^\circ$, $\vartheta = 45^\circ$

118/43. a) $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{d}{2d} \Rightarrow \alpha \approx 53,1^\circ$

b) $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sqrt{1872}}{2f}$, $\alpha_W \approx 63,4^\circ$, $\alpha_N \approx 46,8^\circ$ $\alpha_T \approx 8,2^\circ$

c) $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sqrt{7200}}{2f}$, $\alpha_W \approx 80,6^\circ$, $\alpha_N \approx 55,9^\circ$ $\alpha_T \approx 9,7^\circ$

Beim Normalobjektiv stimmen Seh- und Aufnahmewinkel etwa überein.

120/44. a) Die Projektion der Raumdiagonale ist immer eine Flächendiagonale: $\varphi \approx 35,3^\circ$ b) $\varphi \approx 70,5^\circ$

120/45. a) $\varphi = 70,5^\circ$ b) $\beta = 109,4^\circ$

120/46. $\alpha \approx 35,3^\circ$ $\beta = 60^\circ$ $\gamma \approx 78,5^\circ$ $\delta \approx 101,5^\circ$

121/47. $\alpha \approx 54,7^\circ$ $\beta \approx 50,8^\circ$ $\gamma = 90^\circ$ $\delta \approx 19,5^\circ$

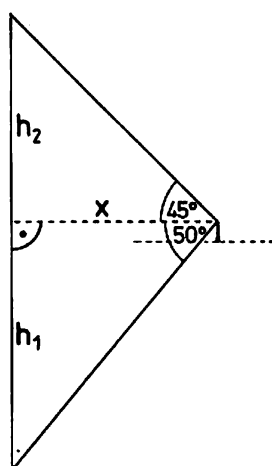
121/48. a) $\varphi \approx 35,3^\circ$ b) $\varphi = 45^\circ$

121/49. a) $\alpha)$ AH: 45° BH: $35,3^\circ$ CH: 45° DH: 90°
 $\beta)$ AM: $41,8^\circ$ BM: $41,8^\circ$ CM: $63,4^\circ$ DM: $63,4^\circ$
 $\gamma)$ AM: $26,6^\circ$ BM: $19,5^\circ$ CM: $26,6^\circ$ DM: 90°
 $\delta)$ AM: $24,1^\circ$ BM: $24,1^\circ$ CM: 45° DM: 45°

b) $\alpha)$ ADH: 90° ABH: 45° BCH: 45° DCH: 90°
 $\beta)$ ABM: 45° BCM: $63,4^\circ$ DCM: 90° ADM: $63,4^\circ$
 $\gamma)$ ADM: 90° ABM: $26,6^\circ$ BCM: $26,6^\circ$ DCM: 90°
 $\delta)$ ABM: $26,6^\circ$ BCM: 45° DCM: 90° ADM: 45°

c) Winkel zwischen den beiden Pyramidenflächen mit der gemeinsamen Kante:
 $\alpha)$ AH: 90° BH: 120° CH: 90° DH: 90°
 $\beta)$ AM: $108,4^\circ$ BM: $108,4^\circ$ CM: 90° DM: 90°
 $\gamma)$ AM: 90° BM: $143,1^\circ$ CM: 90° DM: 90°
 $\delta)$ AM: $129,2^\circ$ BM: $129,2^\circ$ CM: 90° DM: 90°

121/50. $h_1 = x \cdot \tan 50^\circ$,
 $h_2 = x \cdot \tan 45^\circ$
 $\Rightarrow h_1 = h_2 \cdot \tan 50^\circ$ I
 II $h_1 - h_2 = 140 \text{ m}$
 $\Rightarrow h = h_2 + 70 \text{ m} = 800 \text{ m}$



Aufgaben zu 5.2 Sinus

122/1.

α	15°	37°	1°	$1'$	$89,9^\circ$	72°	36°	15°	n. def.
$\sin \alpha$	0,259	0,602	0,017	$2,91 \cdot 10^{-4}$	1,000	$\frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4} \sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

122/2.

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$	0,3196	0,903	n. def.
$\sin x$	0,841	0,0998	0,0123	0,309	0,707	1	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$

122/3. a) 0,0998334 (0,0998334) b) 0,8912074 (0,8912073)

c) 0,7068251 (0,7068251) d) 0,5 (0,5)

122/4. a) 0,5775447 (0,5775822) b) 0,1001674 (0,1001674)

c) 0,3046926 (0,3046926)

122/5. a) 0,07598 b) $7,97 \cdot 10^{-5}$ c) $7,97 \cdot 10^{-8}$

d) 1,099 e) 1,0009 f) 1,000009

122/6. a) $1 - \sqrt{3}/2$ b) $\sqrt{2} - 1$ c) $2/3\sqrt{3}$

122/7. a) $\alpha = 18^\circ$ b) $\alpha = 27^\circ$ c) $\alpha = 25^\circ$ d) $\alpha = 15^\circ$

122/8. a) $\alpha = 30^\circ$ b) $\alpha = 60^\circ$ c) $\alpha = 45^\circ$ d) $\alpha = 0^\circ$

e) $\alpha = 0^\circ$ oder $\alpha = 90^\circ$ f) $\alpha = 0^\circ$ oder $\alpha = 30^\circ$

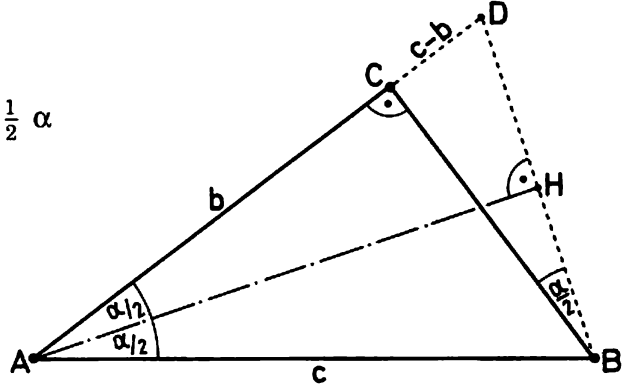
g) $\alpha = 30^\circ$ oder $\alpha = 90^\circ$ h) keine Lösung

- 123/9. a) $c = 58$ b) $a = \sqrt{3}/2$ c) $\alpha = 36,9^\circ$ d) $c = 57,3$
 e) $c = 1,0$ f) $\alpha = 22^\circ$ g) $\alpha = 11^\circ$ h) $\alpha = 60^\circ$ i) $\alpha = 75^\circ$

- 123/10. $\alpha = 64,2^\circ$ 11. $l = 5,85\text{m}$ 12. $\alpha = 1,34^\circ$, $h = 1,6\text{ cm}$

123/13. a) $\overline{DH} = \overline{HB} = c \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha$
 $\triangle BDC: \frac{c-b}{2c \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha} = \sin \frac{1}{2} \alpha$
 $\Rightarrow \sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{c-b}{2c}}$

b) analog a).



123/14. $s_n = 2 \sin \frac{1}{2} \mu_n$ $u_n = n \cdot s_n = 2n \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_n$
 $F_n = n \cdot \frac{1}{2} s_n \cdot \sin(90^\circ - \frac{1}{2} \mu_n) = n \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_n \cdot \sin(90^\circ - \frac{1}{2} \mu_n)$
 $\frac{u_n}{2\pi} = \frac{n \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_n}{\pi}$ $\frac{F_n}{\pi} = \frac{n \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_n \cdot \sin(90^\circ - \frac{1}{2} \mu_n)}{\pi}$

a) $\frac{u_3}{2\pi} \approx 0,827$ $\frac{F_3}{\pi} \approx 0,413$ b) $\frac{u_5}{2\pi} \approx 0,935$ $\frac{F_5}{\pi} \approx 0,757$
 c) $\frac{u_8}{2\pi} \approx 0,974$ $\frac{F_8}{\pi} \approx 0,900$ d) $\frac{u_{180}}{2\pi} \approx 0,9999$ $\frac{F_{180}}{\pi} \approx 0,9998$

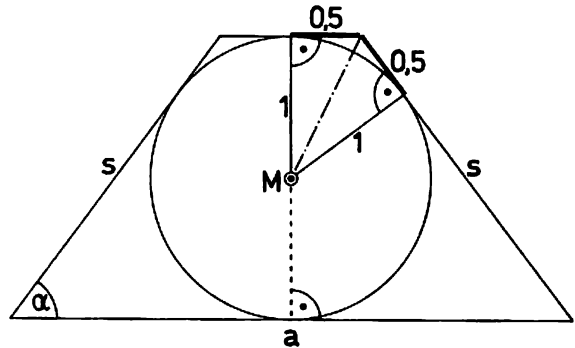
- 123/15. $\rho \approx 2,7$ $F \approx 29,2$ 16. $c \approx 6,2$ $F \approx 35,5$ 17. $s \approx 15,2$

123/18. a) $\tan \frac{1}{2} \gamma = 2 \Rightarrow \gamma \approx 126,9^\circ$
 $\Rightarrow \alpha \approx 53,1^\circ$

b) $s = 2,5$

c) $a = 2s - 1 = 4$

- 123/19. 10,6 und 22,7



123/20. $\mu = \frac{r}{m} \cdot 360^\circ$, $\sin \frac{1}{2} \omega = \frac{r}{m} \Rightarrow \sin \frac{1}{2} \omega = \frac{\mu}{360^\circ}$

a) 29° , 60° , $97,2^\circ$

b) 180° , $254,6^\circ$, $311,8^\circ$

124/21. a) 60° b) $53,1^\circ$ 22. 4,7 cm

124/23. $e = \frac{r}{\sin \alpha}$ $e_{\text{erde} - \text{mond}} = 384\,201 \text{ km}$ $e_{\text{erde} - \text{sonne}} = 1,49 \cdot 10^8 \text{ km}$

124/24. a) e: Entfernung Erde-Sonne
R: Radius der Sonne

$$\frac{x}{r} = \frac{x+e}{R} \quad (\text{Strahlensatz})$$

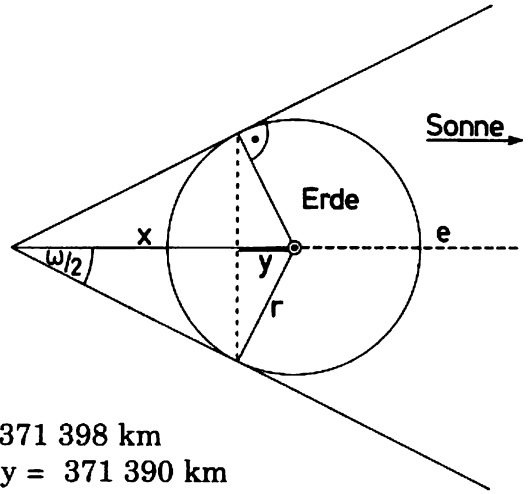
$$\Rightarrow x = \frac{er}{R-r} = 1\,376\,289 \text{ km}$$

$$\sin \frac{1}{2} \omega = \frac{r}{x} \Rightarrow \omega \approx 0,53^\circ$$

Kathetensatz:

$$r^2 = xy \Rightarrow y = 29,5 \text{ km},$$

$$h = x - y = 1\,376\,260 \text{ km}$$



b) ähnlich wie in a) ergibt sich: $x = 371\,398 \text{ km}$

$$r^2 = xy \Rightarrow y = 8 \text{ km}, \quad h = x - y = 371\,390 \text{ km}$$

124/25. a) $19,5^\circ$ b) $35,3^\circ$

Aufgaben zu 5.3 Kosinus

125/1.

α	15°	37°	1°	$1'$	$89,9^\circ$	18°	54°	75°	n. def.
$\cos \alpha$	0,966	0,799	0,9998	1,00	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\sqrt{10-4\sqrt{5}}$

125/2.

x	1	0,1	0,0123	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$	1,25	0,667	n. def.
$\cos x$	0,540	0,995	0,9999	0,951	0,707	0	$\pi/10$	$\pi/4$	$\pi/2$

125/3. a) 0,9950041 (0,9950041) b) 0,4535968 (0,4535961)

c) 0,7073882 (0,7073882) d) 0,8660254 (0,8660254)

- 125/4. a) 0,9932516 (0,993214) b) 1,4706289 (1,4706289)
c) 1,2661037 (1,2661037)

- 125/5. a) 1,163 b) 1,002 c) 1,000
d) 2,809 e) 2,006 f) 2,000

- 125/6. a) $\sqrt{3} - 1/2$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{3}$

- 125/7. a) $\alpha = 72^\circ$ b) $\alpha = 18^\circ$ c) $\alpha = 5^\circ$ d) $\alpha = 75^\circ$

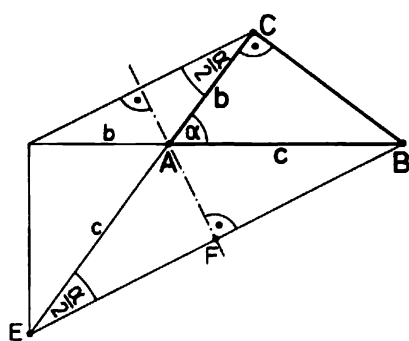
- 125/8. a) $\alpha = 60^\circ$ b) $\alpha = 30^\circ$ c) $\alpha = 45^\circ$ d) $\alpha = 90^\circ$
e) $\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 0^\circ$ f) $\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 60^\circ$
g) $\alpha = 60^\circ$ oder $\alpha = 0^\circ$ h) keine Lösung

126/9.

α	15°	60°	$53,1^\circ$	1°	89°	68°	79°	30°	15°
b	15	0,5	3	1	1	239	191	489 061	560 123
c	15,5	1	5	1,0002	57,3	638	1001	564 719	579 882

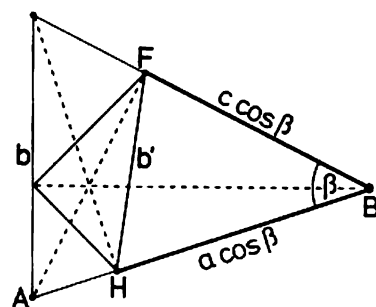
- 126/10. a) $\overline{EF} = \overline{FB} = c \cdot \cos \alpha/2$
 $\triangle EBC: \frac{c+b}{2c \cdot \cos \alpha/2} = \cos \alpha/2$
 $\Rightarrow \cos \alpha/2 = \sqrt{\frac{c+b}{2c}}$

b) analog a)



- 126/11. $\alpha \approx 56,3^\circ$ $h = 6$ $a \approx 10,8$ $p = 9$

- 126/12. $\triangle ABC \sim \triangle BFH$, denn β ist gemeinsamer Winkel und $\frac{c}{a} = \frac{c \cos \beta}{a \cos \beta} \Rightarrow b' = b \cos \beta$
analog: $a' = a \cos \alpha$, $c' = c \cos \gamma$



- 126/13. $\rho = r \cdot \cos 50^\circ$, $\frac{u_1}{u_2} = \frac{2r \cdot \cos 50^\circ \cdot \pi}{2r\pi} \approx 0,643$

126/14. a) $\rho \approx 4807,5 \text{ km}$ $b \approx 7384 \text{ km}$ ($\mu = 88^\circ$)

b) $\frac{s}{2\rho} = \sin 44^\circ \Rightarrow s \approx 6679 \text{ km}$ c) $\mu \approx 63,2^\circ$ $e \approx 7030 \text{ km}$

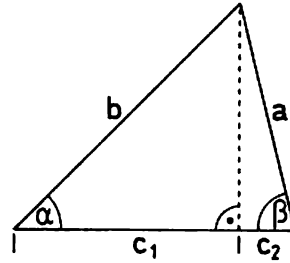
126/15. $A \approx 311 \text{ m}^2$

126/16. 1.Fall: $\beta < 90^\circ$:

$$c_1 = b \cos \alpha$$

$$c_2 = a \cos \beta$$

$$\Rightarrow c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$



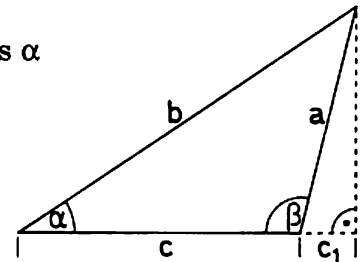
2.Fall: $\beta = 90^\circ$: $c = b \cos \alpha = a \cos \beta + \bar{b} \cos \alpha$

3.Fall: $\beta > 90^\circ$:

$$c = c + c_1 - c_1$$

$$= b \cos \alpha - a \cos(180^\circ - \beta)$$

$$= b \cos \alpha + a \cos \beta$$



ebenso gilt: $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$ $a = b \cos \gamma + c \cos \beta$

126/17. a) $AT/2 = \cos \alpha$, $AT = 2 \cos \alpha = 0,7167\dots$ $h_c = \sin \alpha$

$$\text{Fläche(ATC)} = \frac{1}{2} \overline{AT} h_c = \sin \alpha \cos \alpha = 0,3345\dots$$

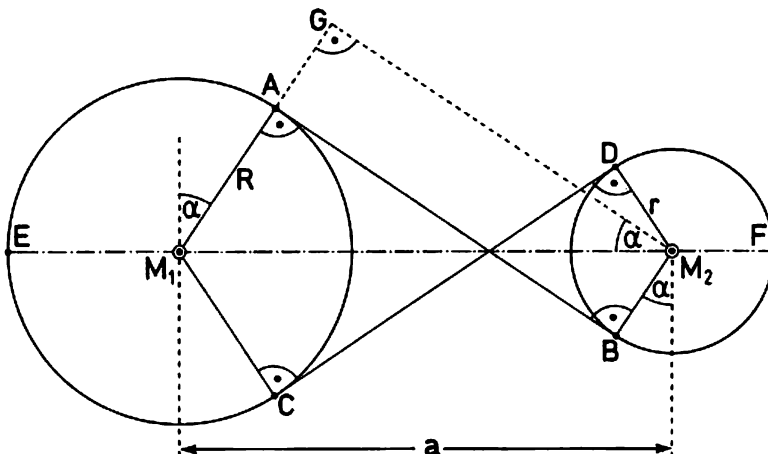
b) wenn $\text{Fläche(ABC)} = 2 \cdot \text{Fläche(ATC)}$ ist, dann muß sein $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AT}$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{h_c}{\frac{3}{2} \overline{AT}} = \frac{\sin \alpha}{3 \cos \alpha} = \frac{1}{3} \tan \alpha \quad \Rightarrow \beta \approx 41^\circ$$

126/18. $\text{Bogenlänge(CEA)} = R(\pi + 2\alpha)$, $\text{Bogenlänge(BFD)} = r(\pi + 2\alpha)$

$$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{GM_2} = a \cos \alpha$$

$$l = 2\overline{AB} + \text{Bogen(CEA)} + \text{Bogen(BFD)} = (R + r)(\pi + 2\alpha) + 2a \cos \alpha$$



127/19. a) Die zur Bildebene parallele Seite sei a, die andere b.

$$a' = a \quad b' = b \cos \varphi \\ \Rightarrow A' = a'b' = A \cos \varphi$$

b) $c' = ch' = h \cos \varphi$
 $\Rightarrow A' = A \cos \varphi$

c) Ergänzung zum Rechteck liefert nach a) und b):

$$A_{EFGH} = A_1 + A_2 + A_3 + A$$

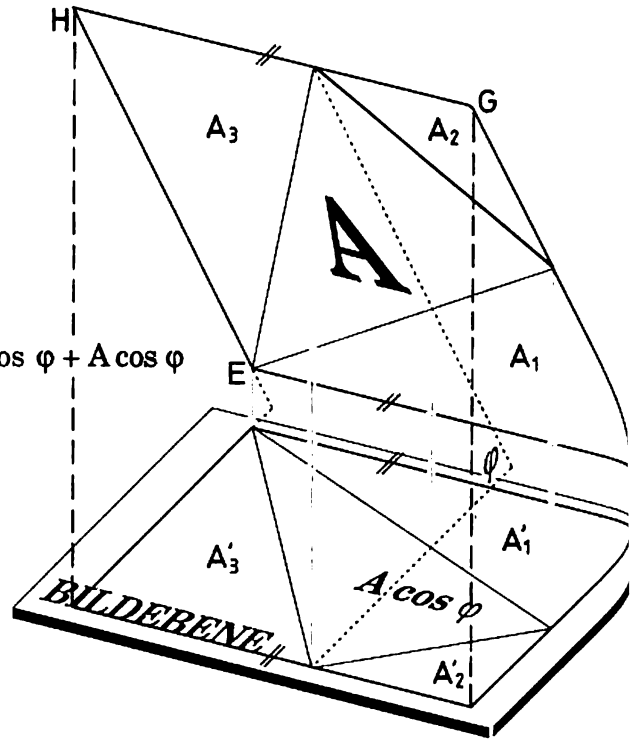
$$A'_{EFGH} = A_{EFGH} \cdot \cos \varphi$$

$$= (A_1 + A_2 + A_3 + A) \cdot \cos \varphi$$

$$= A_1 \cos \varphi + A_2 \cos \varphi + A_3 \cos \varphi + A \cos \varphi$$

$$= A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'$$

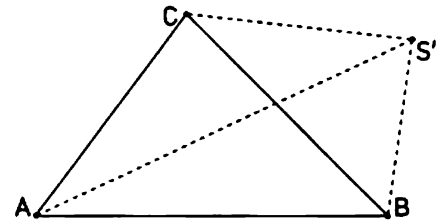
$$\Rightarrow A' = A \cos \varphi$$



127/20. Liegt die senkrechte Projektion S' der Spitze S in der Grundfläche oder auf dem Rand, so ergibt sich die Behauptung direkt aus Aufgabe 19.

Liegt S' außerhalb der Grundfläche, weil zum Beispiel λ stumpf ist, so gilt:

$$G = F_{ABS'} + F_{AS'C} - F_{BS'C} \\ = K \cdot \cos \kappa + M \cdot \cos \mu - L \cdot \cos(180^\circ - \lambda) \\ = K \cdot \cos \kappa + L \cdot \cos \lambda + M \cdot \cos \mu$$



Aufgaben zu 5.1 / 5.2 / 5.3

128/1.	a	b	c	h	p	q	F	α	β
a)	12	5	13	$\frac{60}{13}$	$\frac{35}{13}$	$\frac{25}{13}$	30	$67,4^\circ$	$22,6^\circ$
b)	0,88	1,05	1,37	$\frac{462}{685}$	$\frac{441}{548}$	$\frac{1936}{3425}$	0,462	40°	50°
c)	$\sqrt{13}$	$\frac{3}{2}\sqrt{13}$	6,5	3	2	4,5	9,75	$33,7^\circ$	$56,3^\circ$
d)	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	2,5	1	0,5	2	1,25	$26,6^\circ$	$63,4^\circ$
e)	2,5	1,875	3,125	1,5	2	1,125	2,34375	$53,1^\circ$	$36,9^\circ$
f)	$3\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$	10	3	9	1	15	$71,6^\circ$	$18,4^\circ$
g)	24	143,4	145,4	23,67	3,96	141,5	1720,8	$9,5^\circ$	$80,5^\circ$
h)	15	20	25	12	9	16	150	$36,87^\circ$	$53,13^\circ$

128/2.	a	c	h_a	h_c	r	α
a)	$\sqrt{468}$	24	20	18	13	$56,3^\circ$
b)	$\sqrt{200}$	14,9	$\sqrt{160}$	12	8,3	$58,3^\circ$
c)	$4\sqrt{13}$	24	$\frac{48}{13}\sqrt{13}$	8	13	$33,7^\circ$
d)	20	24	19,2	16	12,5	$53,13^\circ$
e)	8,9	16	7,2	4	10	$26,57^\circ$

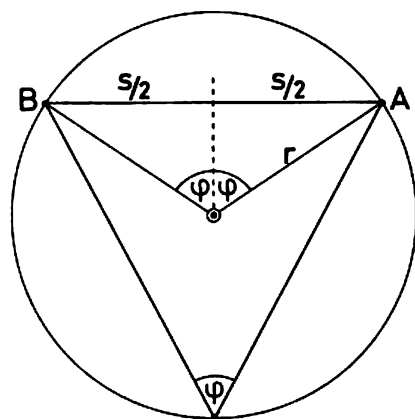
128/3. $h_c \approx 4,43$ $c \approx 5,42$ $a \approx 5,19$ $h_a \approx 4,62$

128/4. a) $v = a \cdot \cos \epsilon$ $u = a \cdot \tan \epsilon$ $w = a \frac{\tan \epsilon}{\tan \omega}$ $x = a \frac{\tan \epsilon}{\sin \omega}$
b) $u = a \cdot \tan \epsilon$ $u = \frac{a}{\cos \epsilon}$ $x = \frac{a}{\tan \epsilon}$ $w = \frac{a}{\sin \epsilon}$
c) $s = a \cdot \cos \epsilon$ $t = a \cdot \sin \epsilon$ $v = a \cdot \tan \epsilon$ $u = a \cdot \tan \epsilon \cdot \sin \epsilon$
 $z = a \frac{\tan \epsilon}{\tan \omega}$ $y = a \frac{\tan \epsilon}{\tan \omega} \cos \omega$ $x = a \cdot \tan \epsilon \cdot \sin \omega$
 $w = a \frac{\tan \epsilon}{\tan \omega} \sin \omega$
d) $v = a \cdot \cos \omega$ $z = a \cdot \sin \omega$ $y = a \cdot \sin \omega \cdot \sin \epsilon$
 $x = a \cdot \sin \omega \cdot \cos \epsilon$ $u = a \cdot \cos \omega \cdot \cos \epsilon$ $w = a \cdot \cos \omega \cdot \sin \epsilon$
e) $u = a \cdot \cos \omega$ $v = a \cdot \sin \omega$
 $w = \frac{1}{2} (u \cdot \tan \epsilon - a \cdot \sin \omega) = \frac{1}{2} a (\cos \omega \cdot \tan \epsilon - \sin \omega)$
 $y = \frac{1}{2} (a \cdot \cos \omega - a \frac{\sin \omega}{\tan \epsilon})$
 $x = \frac{w}{\sin \epsilon} = \frac{1}{2} a (\frac{\cos \omega \cdot \tan \epsilon}{\sin \epsilon} - \frac{\sin \omega}{\sin \epsilon}) = \frac{1}{2} a (\frac{\cos \omega}{\cos \epsilon} - \frac{\sin \omega}{\sin \epsilon})$
 $z = \frac{u}{\cos \epsilon} - x = \frac{1}{2} a (\frac{\cos \omega}{\cos \epsilon} + \frac{\sin \omega}{\sin \epsilon})$

129/5. $u = \frac{160}{3}\sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$

6. $F = 2r\pi \cdot h \cdot \frac{\varphi}{360} \approx 63 \text{ m}^2$

129/7. $\frac{s}{2r} = \sin \varphi \Rightarrow r = \frac{s}{2 \sin \varphi}$
Bogen(AB) = $2r\pi(1 - \frac{2\varphi}{360^\circ})$
 $= \frac{\pi \cdot s}{\sin \varphi} (1 - \frac{2\varphi}{360^\circ}) =$
 $= \frac{\pi \cdot AB}{\sin \varphi} (1 - \frac{2\varphi}{360^\circ})$



$$129/8. \quad h \approx 529 \text{ m} \quad 9. \quad \varphi \approx 8,2^\circ \quad s \approx 69,4 \text{ km}$$

$$130/10. \quad \text{a)} \quad 34,4 \text{ m} \quad \text{b)} \quad 2,9 \text{ cm} \quad \text{c)} \quad 4933 \text{ m}$$

$$130/11. \quad 1,47 \cdot 10^8 \text{ km} \quad 12. \quad 1,35 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$130/13. \quad \text{a)} \quad 4,04 \cdot 10^{13} \text{ km} \quad \text{b)} \quad 1,93 \cdot 10^{15} \text{ km} \quad \text{c)} \quad 1 \text{ parsec} \approx 3,09 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

$$131/14. \quad \text{a)} \quad v = a \frac{(\cos \alpha)^3}{\sin \alpha} \quad w = a \sqrt{1 + (\sin \alpha)^2 (\cos \alpha)^2}$$

$$\text{b)} \quad x = c(\cos \alpha)^2 \quad y = c \sin \alpha (\cos \alpha)^3$$

$$\text{c)} \quad y = a[1 - 2(\cos \beta)^2] \quad z = a(\sin \beta - \cos \beta)$$

$$\text{d)} \quad v = a(1 - \cos \beta) \quad w = a \sin \beta$$

$$131/15. \quad h = a \sin 37^\circ \approx 6 \quad q = \frac{h}{\tan 53^\circ} \approx 4,5 \quad \overline{CF} = h \sin 37^\circ \approx 3,6$$

$$\overline{BF} \approx 6,4 \quad \overline{FD} = \overline{FB} \sin 37^\circ \approx 3,9 \quad \overline{ED} \approx 2,9$$

$$\overline{AD} \approx 7,4 \quad \omega \approx 28^\circ \quad w \approx 8,3 \quad v \approx 6,7$$

$$\delta \approx 64^\circ \quad \sphericalangle(v, w) \approx 88^\circ$$

$$131/16. \quad \varepsilon = 90^\circ/6 = 15; \text{ Dreieckfläche: } F = \rho \cdot s \Rightarrow \rho = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \text{ (Inkreisradius)}$$

$$\overline{AM} = 2\rho = \sqrt{3} - 1 \quad \overline{CM} = \frac{\rho}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)}{\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

$$\overline{MP} = \overline{CM} \tan 15^\circ = \sqrt{2}(2 - \sqrt{3}) \quad \sphericalangle CMP = 90^\circ$$

$$132/17. \quad \text{a)} \quad \overline{OA_1} = w \cos \varphi \quad \overline{OA_2} = w (\cos \varphi)^2 \quad \overline{OA_i} = w (\cos \varphi)^i$$

$$\overline{OB_1} = \frac{w}{\cos \varphi} \quad \overline{OB_2} = \frac{w}{(\cos \varphi)^2} \quad \overline{OB_i} = \frac{w}{(\cos \varphi)^i}$$

$$\text{b)} \quad \varphi \approx 32,8^\circ \quad \text{c)} \quad \varphi \approx 45^\circ$$

$$\text{d)} \quad F_1 = \frac{1}{2} w^2 \tan \varphi \left[\frac{1}{(\cos \varphi)^2} - (\cos \varphi)^4 \right]$$

$$F_i = \frac{1}{2} w^2 \tan \varphi \left[\frac{1}{(\cos \varphi)^{2i}} - (\cos \varphi)^{2i+2} \right]$$

$$\text{e)} \quad \sphericalangle B_i + \sphericalangle A_{i+1} = 180^\circ, \text{ also sind es Sehnenvierecke}$$

$$r_1 = \frac{1}{2} w \sqrt{(\cos \varphi)^2 + \frac{1}{(\cos \varphi)^4} - 2}$$

$$r_i = \frac{1}{2} w \sqrt{(\cos \varphi)^{2i} + \frac{1}{(\cos \varphi)^{2i+2}} - 2}$$

132/18. Sekanten-Tangenten-Satz:

$$\overline{AD} \cdot \overline{AC} = \overline{AT}^2 \Rightarrow \overline{AD} = s/4$$

$$\overline{AE} = s/2 \Rightarrow \overline{DE} = s/4, \overline{BE} = s/2 \sqrt{3}$$

Pyth. in $\triangle DBE$ liefert: $y = \frac{s}{4} \sqrt{13}$

$$\overline{CT} = h = s/2 \sqrt{3}, \quad \overline{HB} = 2/3 h = s/3 \sqrt{3}$$

$\angle RMH = 30^\circ$

$$\overline{RH} = \overline{HM} \sin 30^\circ$$

$$= (h/2 - h/3) \cdot 1/2 = s/24 \sqrt{3}$$

$$\overline{RM} = \overline{HM} \cos 30^\circ = \frac{h}{12} \sqrt{3}$$

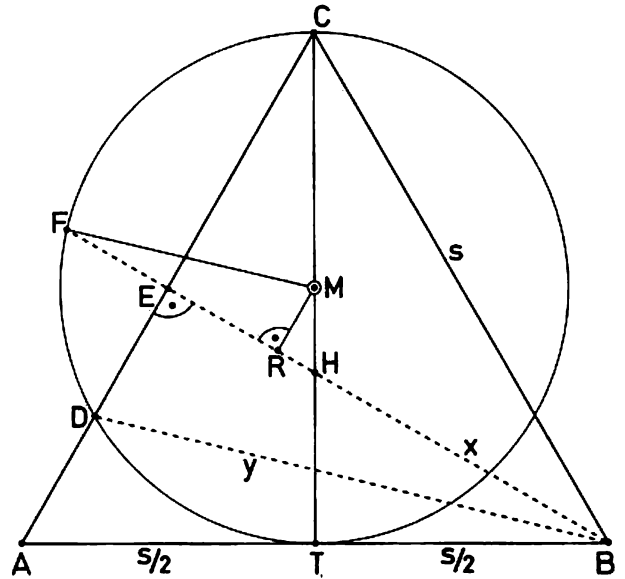
$$\overline{FR} = \sqrt{\overline{FM}^2 - \overline{RM}^2}$$

$$= \sqrt{1/4h^2 - 1/48h^2}$$

$$= \sqrt{11/48}h^2 = s/8 \sqrt{11}$$

$$x = s/3 \sqrt{3} + s/24 \sqrt{3} + s/8 \sqrt{11}$$

$$= s/8 (\sqrt{11} + 3\sqrt{3})$$



132/19. a) Sekanten-Tangenten-Satz:

$$\overline{AE} \cdot a = a^2/4 \Rightarrow$$

$$\overline{AE} = a/4,$$

$$\overline{BE} = 3a/4$$

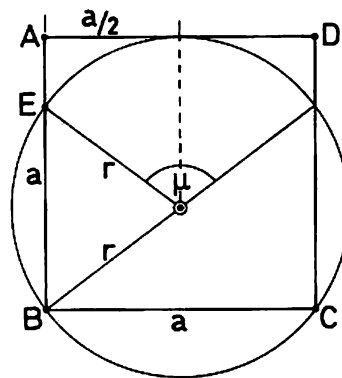
Pythagoras:

$$r^2 = (3a/8)^2 + (a/2)^2$$

$$\Rightarrow r = 5a/8$$

$$\sin \mu/2 = a/2r$$

$$\Rightarrow \mu \approx 106,3^\circ$$



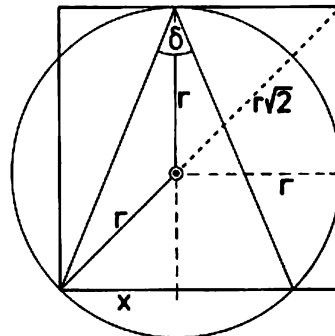
$$\mathbf{b) \quad r + r\sqrt{2} = a\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow r = a(2 - \sqrt{2})$$

$$x = a - r = a(\sqrt{2} - 1)$$

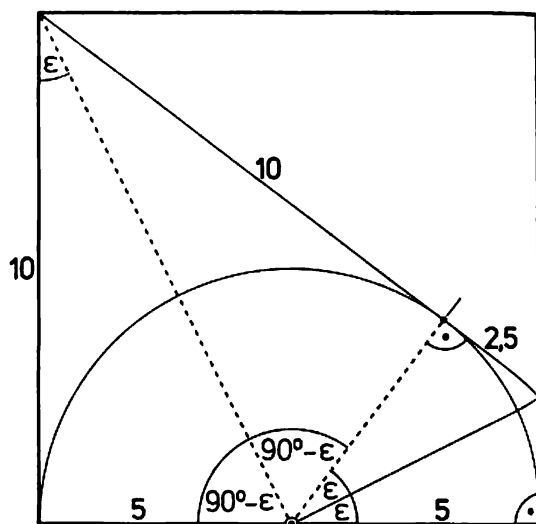
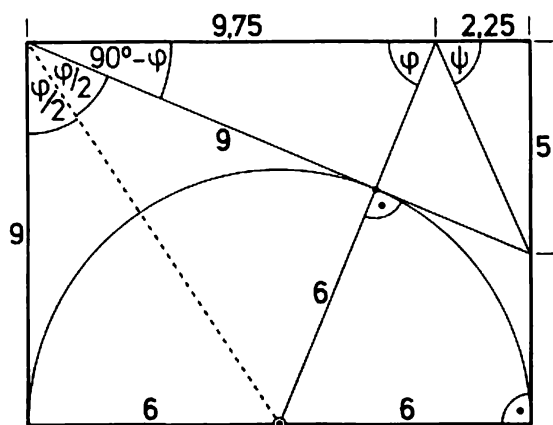
$$\tan \delta/2 = \frac{\sqrt{2}-1}{a} \cdot a$$

$$\Rightarrow \delta = 45^\circ$$



132/20. a) $\tan \varphi/2 = 6/9 \Rightarrow \varphi \approx 67,4^\circ$
 $\tan \psi = 5/2,25 \Rightarrow \psi \approx 65,8^\circ$

b) $\tan \varepsilon = 5/10 \Rightarrow \varepsilon \approx 26,6^\circ$
 $x = 12,5$



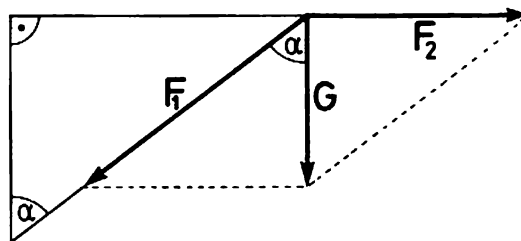
133/21. $\overline{EB} = 3\sqrt{5}$ $b = 2\sqrt{10}$ $\omega \approx 71,6^\circ$ $d = 2\sqrt{5}$ $c = 2\sqrt{5}$ $\varepsilon \approx 26,6^\circ$
 $g = 4$ $f = 5$ $e = \sqrt{5}$ $\lambda \approx 26,6^\circ$ $\varphi \approx 36,9^\circ$ $a = 4\sqrt{5}$

133/22. a) $F_1 = \frac{G}{\cos \alpha}$ $F_2 = G \tan \alpha$

b) $F_1 = \frac{F}{\cos \beta}$ $F_2 = F \tan \beta$

c) $F_{\text{seil}} = \frac{L}{2 \cos \gamma}$
 $F_{\perp} = \frac{1}{2} L \tan \gamma$

d) $F \approx 223 \text{ N}$



134/23. a) $N = G \cos \varphi$, $H = G \sin \varphi$

b) $\frac{H}{W} = \cos \varphi$, $W = \frac{H}{\cos \varphi} = G \tan \varphi$

c) Grenzfall: Haftkraft = Hangabtrieb
 $\mu \cdot G \cdot \cos \varphi_0 = G \cdot \sin \varphi_0 \Rightarrow \mu = \tan \varphi_0$
 Stahl auf Eis: $\varphi_0 \approx 1,5^\circ$

125/24. $\sin \alpha = 1,4/60 \quad F = G \cdot \tan \alpha \Rightarrow F \approx 9,2 \text{ N}$

Aufgaben zu 5.4 Trigonometrisches Sextett

134/1.	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
$\sin \alpha$	0,6	0,5	$\frac{1}{12}\sqrt{119}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0,877	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$
$\cos \alpha$	0,8	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0,48	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$\tan \alpha$	0,75	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{5}\sqrt{119}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1,827	$2+\sqrt{3}$

134/2. a) $\sin \alpha$ b) $\cos \alpha$ c) $(\tan \alpha)^2$ d) $1 + \cos \alpha$

e) $\frac{-2}{(\sin \alpha)^2 - 1} = \frac{2}{(\cos \alpha)^2}$ f) $\frac{1}{\cos \alpha}$ g) $\frac{1}{\cos \alpha}$

135/3. a) $\sin \alpha$ b) 0 (wegen $\alpha = 90^\circ$) c) $\frac{-4 \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2}$ d) $\frac{4}{\sin \alpha}$

135/4. a) $\frac{1}{\cos \alpha}$ b) $2(\sin \alpha)^2 - 1$ c) $\frac{1}{\cos \alpha}$ d) $-(\tan \alpha)^2$

135/5. a) $\sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}}$ b) $\frac{1}{(\cos \alpha)^2}$ c) $\frac{-1}{\cos \alpha}$ d) $2(\tan \alpha)^2$

135/6. a) $(1 + \cos \alpha)^2$ b) 2 c) $\sin \alpha$ d) $-(3 - 2 \sin \alpha)^2$

135/7. a) 1 b) $2 \tan \alpha$ c) $\frac{1}{\sin \alpha}$ d) $\frac{1}{\sin \alpha}$ e) $\tan \alpha$

6.Kapitel

Aufgaben zu 6.1 Trigonometrie am Einheitskreis

147/1. Die Punkte liegen auf dem Kreis um $M(0|0)$ mit Radius r .

147/2. a) $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $y = \pm \frac{1}{2}$ d) $y = \pm 1$
e) $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$ g) $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$ h) $x = 0$

147/3. a) $\sin(180^\circ - 120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $-\cos(180^\circ - 150^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
c) $-\tan(180^\circ - 135^\circ) = -1$ d) $-\sin(360^\circ - 315^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
e) $\cos(360^\circ - 360^\circ) = 1$ f) $-\tan(360^\circ - 330^\circ) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
g) $-\sin(240^\circ - 180^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ h) $-\cos(225^\circ - 180^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
i) $\tan(210^\circ - 180^\circ) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ j) $-\sin(360^\circ - 330^\circ) = -\frac{1}{2}$
k) $\cos(360^\circ - 300^\circ) = \frac{1}{2}$ l) $\tan(360^\circ - 360^\circ) = 0$
m) $-\sin(225^\circ - 180^\circ) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ n) $-\tan(360^\circ - 315^\circ) = -1$
o) $-\cos(240^\circ - 180^\circ) = -\frac{1}{2}$

147/4. a) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ b) $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ c) $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
d) $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e) $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ f) $\tan 45^\circ = 1$
g) $\sin 0^\circ = 0$ h) $\cos 0^\circ = 1$ i) $\tan 0^\circ = 0$
j) $-\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ k) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ l) $-\tan \frac{\pi}{4} = -1$

- 137/5. a) $\varphi = 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3}{2} \pi + k \cdot 2\pi, k \in \Omega$
 b) $\varphi = 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{1}{6} \pi + k \cdot 2\pi$ oder $\varphi = 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11}{6} \pi + k \cdot 2\pi$
 c) $\varphi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{1}{4} \pi + k \cdot \pi$
 d) $\varphi = 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5}{4} \pi + k \cdot 2\pi$ oder $\varphi = 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7}{4} \pi + k \cdot 2\pi$
 e) $\varphi = 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2}{3} \pi + k \cdot 2\pi$ oder $\varphi = 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4}{3} \pi + k \cdot 2\pi$
 f) $\varphi = 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2}{3} \pi + k \cdot \pi$
 g) $\varphi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{1}{3} \pi + k \cdot 2\pi$ oder $\varphi = 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2}{3} \pi + k \cdot 2\pi$
 h) $\varphi = k \cdot 360^\circ = k \cdot 2\pi$ i) $\varphi = 150^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{5}{6} \pi + k \cdot \pi$
 j) $\varphi = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + k \cdot 2\pi$
 k) $\varphi = 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi$ oder $\varphi = 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7}{6} \pi + k \cdot 2\pi$
 l) $\varphi = 135^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{3}{4} \pi + k \cdot \pi$

- 147/6. a) $\left\{ \frac{4}{3} \pi, \frac{5}{3} \pi \right\}$ b) $\left\{ \frac{2}{3} \pi, \frac{4}{3} \pi \right\}$ c) $\left\{ \frac{5}{6} \pi, \frac{11}{6} \pi \right\}$ d) $\left\{ \frac{1}{2} \pi \right\}$
 e) $\{ \pi \}$ f) $\left\{ \frac{1}{4} \pi, \frac{5}{4} \pi \right\}$ g) $\left\{ \frac{7}{6} \pi, \frac{11}{6} \pi \right\}$ h) $\left\{ \frac{1}{4} \pi, \frac{7}{4} \pi \right\}$
 i) $\left\{ \frac{2}{3} \pi, \frac{5}{3} \pi \right\}$ j) $\left\{ \frac{5}{4} \pi, \frac{7}{4} \pi \right\}$ k) $\left\{ \frac{5}{6} \pi, \frac{7}{6} \pi \right\}$ l) $\left\{ \frac{5}{6} \pi, \frac{11}{6} \pi \right\}$

- 148/7. a) $\varphi = 53,1^\circ$ oder $\varphi = 126,9^\circ$ b) $\varphi = 161,8^\circ$ oder $\varphi = 198,2^\circ$
 c) $\varphi = 76,0^\circ$ oder $\varphi = 256,0^\circ$ d) $\varphi = 191,5^\circ$ oder $\varphi = 348,5^\circ$
 e) $\varphi = 53,1^\circ$ oder $\varphi = 306,9^\circ$ f) $\varphi = 120,5^\circ$ oder $\varphi = 300,5^\circ$

- 148/8. a) $\left\{ 0, \pi, \frac{1}{6} \pi, \frac{5}{6} \pi \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{4} \pi, \frac{7}{4} \pi \right\}$ c) $\left\{ \pi, \frac{2}{3} \pi, \frac{4}{3} \pi \right\}$
 d) $\left\{ \frac{1}{3} \pi, \frac{4}{3} \pi, \frac{2}{3} \pi, \frac{5}{3} \pi \right\}$ e) $\{ 0,34 ; 2,8 \}$

- 148/9. a) $\cos \varphi = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{4}{3}$ b) $\sin \varphi = \frac{12}{13} \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{12}{5}$

- 148/10. $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ $\cos \varphi = \frac{4}{5}$

$$148/11. \quad \text{a) } \cos \varphi = 9/41 \quad \tan \varphi = 40/9 \quad \text{b) } \cos \varphi = 4/5 \quad \tan \varphi = 3/4$$

$$148/12. \quad \text{a) } \sin \frac{1}{2} \gamma - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{1}{2} \gamma - \cos \frac{180^\circ - \gamma}{2} \\ = \sin \frac{1}{2} \gamma - \cos (90^\circ - \frac{1}{2} \gamma) = \sin \frac{1}{2} \gamma - \sin \frac{1}{2} \gamma = 0$$

$$\text{b) } (\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 - \left(\sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 = (\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 - \left(\sin \frac{180^\circ - \alpha}{2} \right)^2 = \\ = (\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 - [\sin(90^\circ - \frac{1}{2} \alpha)]^2 = (\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 - (\cos \frac{1}{2} \alpha)^2 = 2(\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 - 1$$

$$\text{c) } \tan \frac{1}{2} \alpha \cdot \tan \frac{\beta + \gamma}{2} = \tan \frac{1}{2} \alpha \cdot \tan(90^\circ - \alpha/2) = 1$$

$$\text{d) } (\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 + \left(\sin \frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 + \tan \frac{1}{2} \gamma \cdot \tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ = (\sin \frac{1}{2} \alpha)^2 + [\sin(90^\circ - \frac{1}{2} \alpha)]^2 + \tan \frac{1}{2} \gamma \cdot \tan(90^\circ - \gamma/2) = 1 + 1 = 2$$

$$148/13. \quad \text{a) } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + \sin \delta = \\ = \sin \alpha + \sin (180^\circ - \alpha) + \sin \alpha + \sin (180^\circ - \alpha) = 4 \sin \alpha$$

$$\text{b) } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta = \\ = \cos \alpha + \cos (180^\circ - \alpha) + \cos \alpha + \cos (180^\circ - \alpha) = 0$$

$$148/14. \quad \text{a) } \sin(z \cdot \pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{für } z = 2k \\ 1 & \text{für } z = 4k + 1 \\ -1 & \text{für } z = 4k - 1 \end{cases} \quad \text{b) } \cos(z \cdot \pi) = \begin{cases} 1 & \text{für } z = 2k \\ -1 & \text{für } z = 2k + 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \tan(z \cdot \pi/3) = \begin{cases} 0 & \text{für } z = 3k \\ +\sqrt{3} & \text{für } z = 3k + 1 \\ -\sqrt{3} & \text{für } z = 3k + 2 \end{cases} \quad k \text{ ist jeweils ganz}$$

$$149/15. \quad \text{a) } \alpha \approx 36,9^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \cos \alpha = 0,8 \quad \tan \alpha = \frac{3}{4} \\ \alpha \approx 143,1^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -0,8 \quad \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{b) } \alpha = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \tan \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \alpha = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \tan \alpha = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{c) } \alpha \approx 65,4^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{12}\sqrt{119} \quad \tan \alpha = \frac{1}{5}\sqrt{119} \\ \alpha \approx 294,6^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{12}\sqrt{119} \quad \tan \alpha = -\frac{1}{5}\sqrt{119}$$

$$\text{d) } \alpha = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \tan \alpha = 1 \\ \alpha = 315^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \tan \alpha = -1$$

e) $\alpha = 150^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \tan \alpha = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 $\alpha = 210^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{2} \quad \tan \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

f) $\alpha \approx 118,7^\circ + 2k \cdot 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha \approx 0,877 \quad \cos \alpha \approx -0,480$
 $\alpha \approx 118,7^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha \approx -0,877 \quad \cos \alpha \approx 0,480$

g) $\alpha = 75^\circ + 2k \cdot 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha \approx 0,966 \quad \cos \alpha \approx 0,259$
 $\alpha = 75^\circ + (2k+1) \cdot 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha \approx -0,966 \quad \cos \alpha \approx -0,259$

149/16. Es können sich nur die Vorzeichen der Wurzeln ändern, sie stehen da:

a)

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\sin \alpha$	♥	+	-
$\cos \alpha$	-	♥	-
$\tan \alpha$	-	+	♥

b)

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\sin \alpha$	♥	-	-
$\cos \alpha$	-	♥	-
$\tan \alpha$	-	-	♥

c)

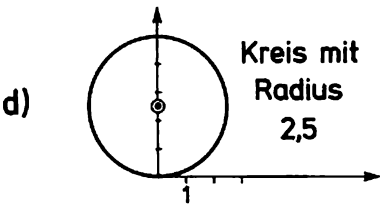
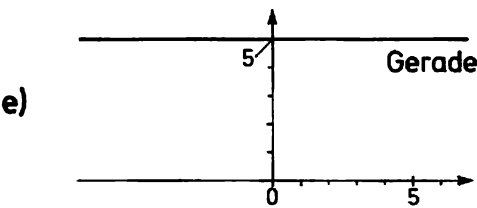
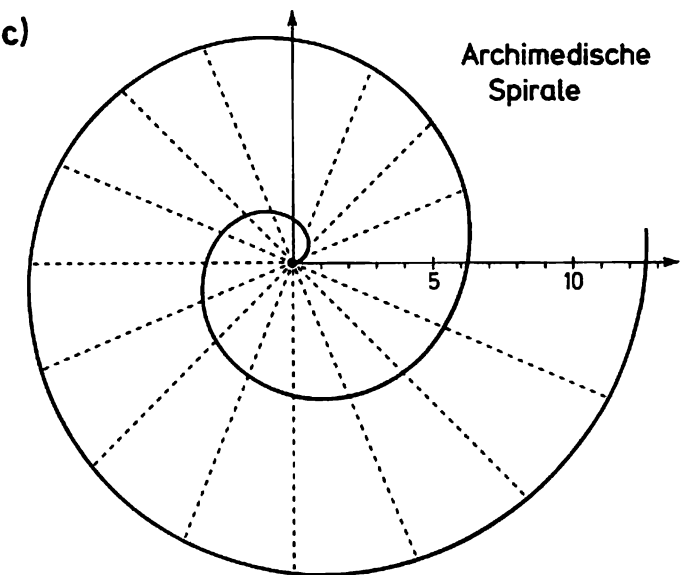
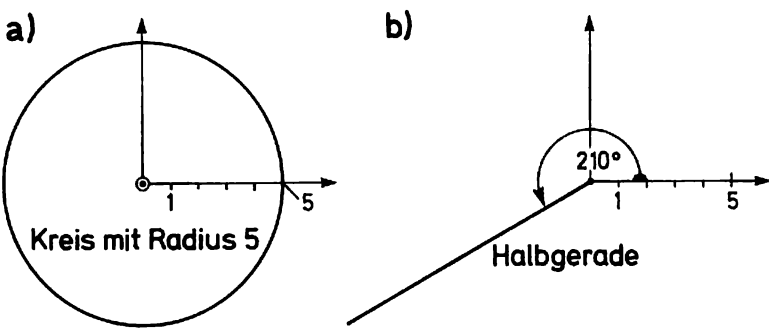
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
$\sin \alpha$	♥	-	+
$\cos \alpha$	+	♥	+
$\tan \alpha$	+	-	♥

149/17. **a)** $(3\sqrt{3} \mid 3)$ **b)** $(-0,3\sqrt{2} \mid 0,3\sqrt{2})$ **c)** $(-5 \mid -5\sqrt{3})$
d) $(-\sqrt{5} \mid 0)$ **e)** $(-0,5\sqrt{10} \mid 0,5\sqrt{10})$ **f)** $(0,439 \mid 0,240)$ **g)** $(0 \mid 0)$

149/18. **a)** $(53,1^\circ \mid 5)$ **b)** $(337,4^\circ \mid 13)$ **c)** $(151,9^\circ \mid 17)$
d) $(253,7^\circ \mid 25)$ **e)** $(45^\circ \mid \sqrt{2})$ **f)** $(330^\circ \mid 2)$ **g)** $(90^\circ \mid 1)$

149/19. **a)** $(1 \mid 0)$ $(-1/2 \mid 1/2\sqrt{3})$ $(-1/2 \mid -1/2\sqrt{3})$
b) $(1 \mid 0)$ $(0 \mid 1)$ $(-1 \mid 0)$ $(0 \mid -1)$
c) $(1 \mid 0)$ $(1/2 \mid 1/2\sqrt{3})$ $(-1/2 \mid 1/2\sqrt{3})$
 $(-1 \mid 0)$ $(-1/2 \mid -1/2\sqrt{3})$ $(1/2 \mid -1/2\sqrt{3})$
d) $(\cos \frac{n \cdot 360^\circ}{17} \mid \sin \frac{n \cdot 360^\circ}{17})$, $n = 0, 1, 2, \dots, 15, 16$

149/20.



Aufgaben zu 6.2 Berechnungen am allgemeinen Dreieck

149/1. a) $\gamma \approx 65^\circ$ $b = 6$ $a \approx 5,1$ b) $\alpha \approx 47^\circ$ $\beta \approx 23^\circ$ $b \approx 3,7$

c) $\beta_1 \approx 53,1^\circ$ $\gamma_1 \approx 96,9^\circ$ $c_1 \approx 9,9$
 $\beta_2 \approx 126,9^\circ$ $\gamma_2 \approx 23,1^\circ$ $c_2 \approx 3,9$ d) $\gamma = 90^\circ$ $\alpha = 30^\circ$ $a = 3$

150/2. a) $a \approx 6,6$ $\gamma \approx 75,5^\circ$ $\beta \approx 64,5^\circ$

b) $\alpha \approx 48,5^\circ$ $\gamma \approx 92,9^\circ$ $\beta \approx 38,6^\circ$

c) $\alpha \approx 36,9^\circ$ $\gamma \approx 90^\circ$ $\beta \approx 53,1^\circ$

d) $\alpha = 90^\circ$ $\gamma = 45^\circ$ $c = 4\sqrt{2}$

150/3. a) Sehnensformel: $c = 16 \sin 63^\circ \approx 14,3$ $a = 16 \sin 44^\circ \approx 11,1$
 $b = 16 \sin 73^\circ \approx 15,3$ $F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \approx 75,8$

b) $\angle BAH_a \approx 33,6^\circ$ $\beta \approx 56,4^\circ$ $\alpha \approx 50,6^\circ$
 $a \approx 4,8$ $b \approx 5,2$ $F = \frac{1}{2} ah_a \approx 12,1$

150/4. a) $F = ab = \frac{b^2}{\tan \omega}$

b) $v = b \cos \omega$, $\overline{AE} = b \sin \omega$
 $w^2 = a^2 + \overline{AE}^2 - 2a \cdot \overline{AE} \cos \omega \Rightarrow w = \frac{b}{\sin \omega} \sqrt{1 - 3(\sin \omega)^2 (\cos \omega)^2}$
 $F = \overline{EF} \cdot v = b^2 [1 - 2(\sin \omega)^2]$

c) $\cos \varphi = v/w \Rightarrow \varphi \approx 44,9^\circ$

d) Aus $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\frac{a}{e} \cdot \frac{b}{c}}{\sqrt{1 - 3(a/e)^2 (b/c)^2}}$ mit $e = \overline{AC}$ und $e^2 = a^2 + b^2$

folgt $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ oder $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ oder $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (Goldenes Rechteck)

150/5. a) $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \alpha \approx 36,9^\circ$

$x = \sqrt{8^2 + 20^2 - 2 \cdot 8 \cdot 20 \cdot \cos \alpha} \Rightarrow x = 4\sqrt{13} \approx 14,4$

$\cos \varepsilon = \frac{20^2 + \sqrt{208}^2 - 8^2}{2 \cdot 20 \cdot \sqrt{208}} \Rightarrow \varepsilon \approx 19,4^\circ$

b) Dreieck ABT: $\frac{a}{\sin 80^\circ} = \frac{1}{\sin 40^\circ}$

$a = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = 1,532\dots$

Dreieck AST: $x^2 = 1 + a^2 - 2a \cos 20^\circ$

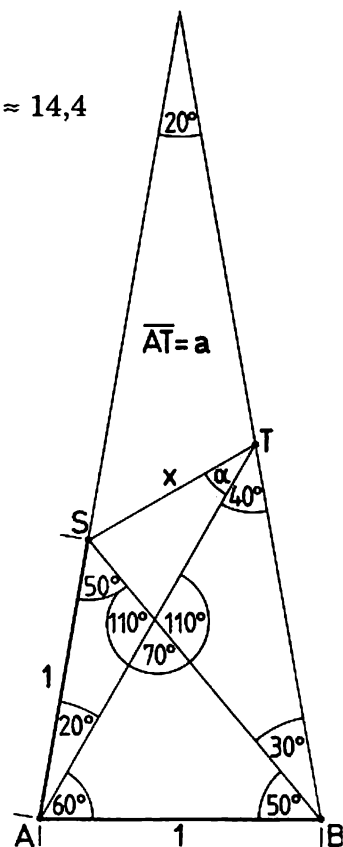
$\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\sin 20^\circ}{x}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sin 20^\circ}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos 20^\circ}}$

Der Taschenrechner kommt auf $\alpha \approx 30^\circ$.

Ist das ein Näherungswert,
der haarscharf bei 30° liegt,
oder ist der Wert exakt?

(Fortsetzung 167/27.)



150/6. a) $a : b : c = \sin \alpha : \sin(90^\circ - \alpha) : 1$

b) $a : b : c = \sin \alpha : \sin \alpha : \sin 2\alpha$

150/7. $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta} \approx 9,9$

$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha} \approx 5,7$

150/8. $x^2 + h^2 = 36$

$(6 - x)^2 + h^2 = 25 \Rightarrow x = \frac{47}{12}$

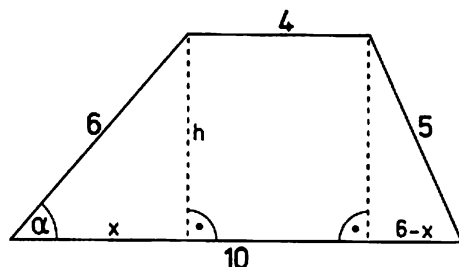
$\cos \alpha = \frac{47}{12 \cdot 6} \Rightarrow \alpha \approx 49,2^\circ \quad \delta \approx 130,8^\circ$

$\cos \beta = \frac{25}{12 \cdot 5} \Rightarrow \beta \approx 65,4^\circ \quad \gamma \approx 114,6^\circ$

oder mit Kosinussatz

$\cos \alpha = \frac{36 + 36 - 25}{2 \cdot 6 \cdot 6} \Rightarrow \alpha \approx 49,2^\circ$

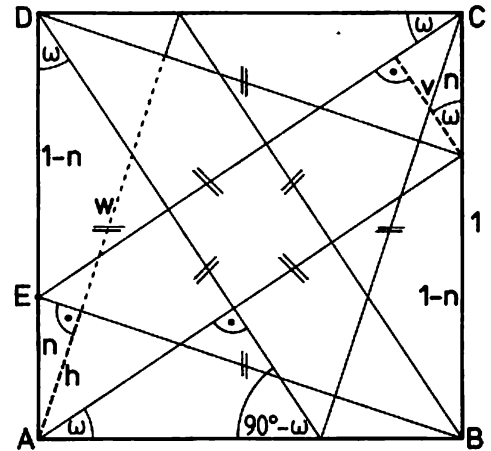
$\cos \beta = \frac{36 + 25 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 5} \Rightarrow \beta \approx 65,4^\circ$



151/9. a) Ist M der Kreismittelpunkt und S der Scheitel von φ , so gilt:

$\overline{MS} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \varphi \approx 54,7^\circ \quad \psi \approx 73,7^\circ$

b) α) $\tan \omega = 1 - n \Rightarrow n = 1 - \tan \omega$
 $v = n \cos \omega = (1 - \tan \omega) \cos \omega$
 $= \cos \omega - \sin \omega$
 $\frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot n \cdot 1$
 $\Rightarrow h = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$
 $\frac{w}{1-n} = \frac{h}{n} \quad (\text{Strahlensatz})$
 $\Rightarrow w = \frac{1-n}{\sqrt{1+n^2}}$
 $\Rightarrow w = \frac{\tan \omega}{\sqrt{1+(1-\tan \omega)^2}}$



β) Rauten mit einem 90°-Winkel sind Quadrate.

γ) Flächengleichheit bei $n = 1/2$,
das heißt $\omega \approx 26,6^\circ$

151/10. a) Mittelpunktswinkel: $\varphi_1 \approx 200,8^\circ \quad \varphi_2 \approx 159,2^\circ$

$$F = r^2 \pi \cdot \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{360^\circ} + 120 \cdot 11 \approx 2669,4$$

b) Mittelpunktswinkel des Sektors: $\varphi \approx 225,2^\circ$, Radius $r = 13$

$$F = F_{\text{sektor}} + F_{\text{dreieck}} = r^2 \pi \cdot \varphi / 360^\circ + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 \approx 392,2$$

c) Mittelpunktswinkel $\varphi \approx 56,1^\circ$

$$F = 2(r^2 \pi \cdot \varphi / 360^\circ - \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 30) \approx 172,8$$

d) Strahlensatz: $\frac{2}{r} = \frac{3}{3-r} \Rightarrow r = 1,2$

Mittelpunktswinkel: $\varphi \approx 96,4^\circ$

$$F = r^2 \pi \cdot \varphi / 360^\circ - 0,5 \cdot 2\sqrt{0,8} \cdot 0,8 \approx 0,5$$

e) Mittelpunktswinkel: $\varphi \approx 141,1^\circ$, Radius $r = 1,5$

$$F = r^2 \pi \cdot \varphi / 360^\circ - 0,5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0,5 \approx 2,1$$

151/11. a) $\overline{MM_a} =: h_1 \quad h_1 = \frac{1}{2} a \tan \beta \quad r = \frac{a}{2 \cos \beta}$

$$F_{\text{rechts}} = \frac{a^2 \pi}{4(\cos \beta)^2} \cdot \frac{180^\circ - 2\beta}{360^\circ} - \frac{1}{4} a^2 \tan \beta$$

$\overline{MM_b} =: h_2 \quad h_2 = \frac{1}{2} a \quad b = a \tan \beta$

$$F_{\text{links}} = \frac{a^2 \pi}{4(\cos \beta)^2} \cdot \frac{2\beta}{360^\circ} - \frac{1}{4} a^2 \tan \beta$$

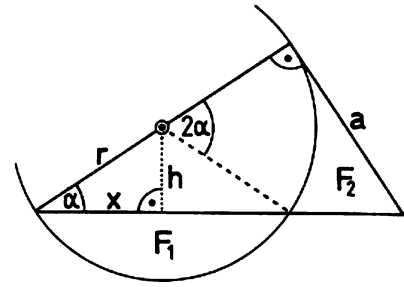
$$\text{b) } r = \frac{a}{2 \tan \beta} \quad x = r \cos \alpha = \frac{a(\cos \alpha)^2}{2 \sin \alpha}$$

$$h = x \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} a \cos \alpha$$

$$F_1 = \frac{a^2 \pi}{4(\tan \alpha)^2} \cdot \frac{180^\circ - 2\alpha}{360^\circ} - \frac{a^2(\cos \alpha)^3}{4 \sin \alpha}$$

$$F_2 = a \cdot r - x \cdot h - r^2 \pi \cdot \frac{2\alpha}{360^\circ}$$

$$= \frac{a^2}{2 \tan \alpha} - \frac{a^2(\cos \alpha)^3}{4 \sin \alpha} - \frac{a^2 \pi}{4(\tan \alpha)^2} \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$



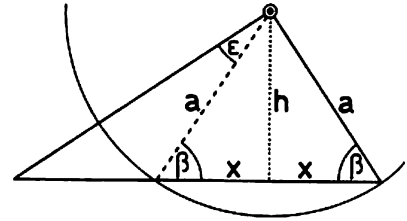
$$\text{c) } h = a \sin \beta \quad x = a \cos \beta \quad \epsilon = 2\beta - 90^\circ$$

$$F_{\text{unten}} = a^2 \pi \cdot \frac{180^\circ - 2\beta}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h$$

$$= a^2 \pi \cdot \frac{180^\circ - 2\beta}{360^\circ} - a^2 \sin \beta \cos \beta$$

$$F_{\text{links}} = \frac{1}{2} (c - 2x) h - a^2 \pi \cdot \frac{\epsilon}{360^\circ}$$

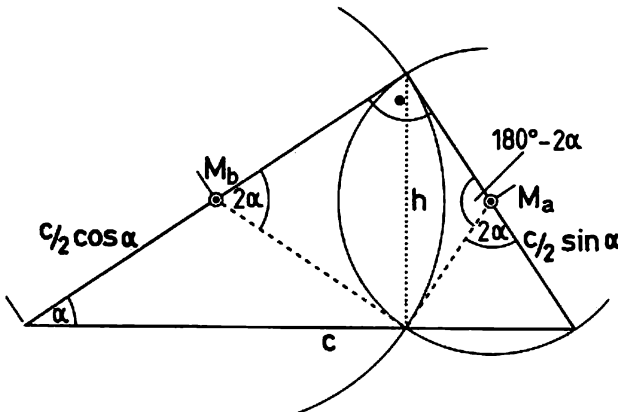
$$= \frac{1}{2} (a/\cos \beta - 2a \cos \beta) \cdot a \sin \beta - a^2 \pi \cdot \frac{2\beta - 90^\circ}{360^\circ}$$



$$\text{d) } h = c \cos \alpha \sin \alpha$$

$$F = (c/2 \cos \alpha)^2 \pi \frac{2\alpha}{360^\circ} + (c/2 \sin \alpha)^2 \pi \frac{180^\circ - 2\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{M_a M_b}$$

$$= \frac{1}{4} c^2 (\cos \alpha)^2 \pi \frac{2\alpha}{360^\circ} + \frac{1}{4} c^2 (\sin \alpha)^2 \pi \frac{180^\circ - 2\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{4} c^2 \sin \alpha \cos \alpha$$



$$\text{e) } F_{\text{links}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \tan \beta - a^2 \pi \cdot \frac{\beta}{360^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \tan \beta - a^2 \pi \cdot \frac{\beta}{360^\circ}$$

$$F_{\text{unten}} = F_{\text{sektor1}} + F_{\text{sektor2}} - F_{\text{dreieck}}$$

$$= a^2 (\tan \beta)^2 \pi \frac{90^\circ - \beta}{360^\circ} + a^2 \pi \cdot \frac{\beta}{360^\circ} - \frac{1}{2} a^2 \tan \beta$$

f) $F_1 = \text{Kreis Drittel} - \text{Fläche(EMC)}$

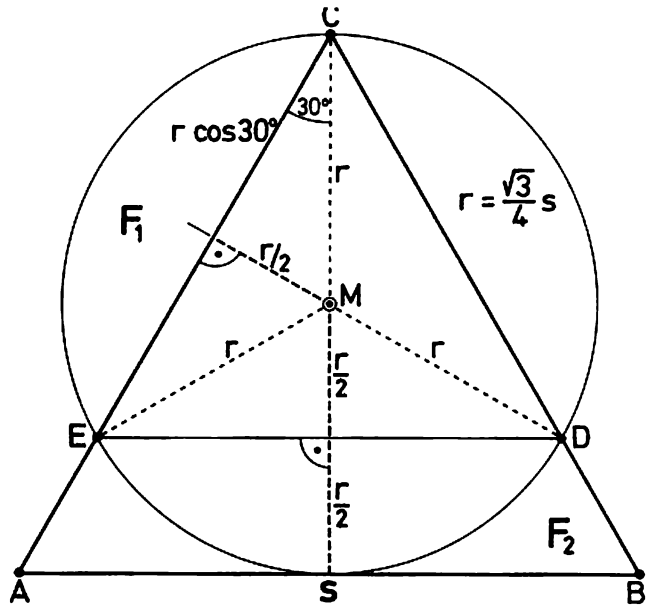
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} r^2 \pi - \frac{1}{2} r \cdot r \cos 30^\circ \\
 &= r^2 \left[\frac{1}{3} \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \right] \\
 &= \frac{3}{16} s^2 \left[\frac{1}{3} \pi - \frac{1}{4} \sqrt{3} \right] \\
 &= \frac{1}{64} (4\pi - 3\sqrt{3}) s^2
 \end{aligned}$$

$2F_2 = \text{Fläche(ABDE)} - F_1$

Fläche(ABDE)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (s + 2r \cos 30^\circ) \cdot \frac{1}{2} r \\
 &= \frac{1}{2} (s + \frac{1}{2} \sqrt{3} s \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{8} \sqrt{3} s \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \frac{3}{4}) \frac{1}{8} \sqrt{3} s^2 \\
 &= \frac{7}{64} \sqrt{3} s^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \frac{7}{128} \sqrt{3} s^2 - \frac{3}{32} \left[\frac{1}{3} \pi - \frac{1}{4} \sqrt{3} \right] s^2 \\
 &= \left[\frac{5}{64} \sqrt{3} - \frac{1}{32} \pi \right] s^2 = \frac{1}{64} (5\sqrt{3} - 2\pi) s^2
 \end{aligned}$$



152/12. a) Sekanten-Tangenten-Satz:

$$x \cdot 1 = (1/2)^2 \Rightarrow x = 1/4$$

$$\Rightarrow \overline{EG} = 3/4, \overline{AF} = 5/8,$$

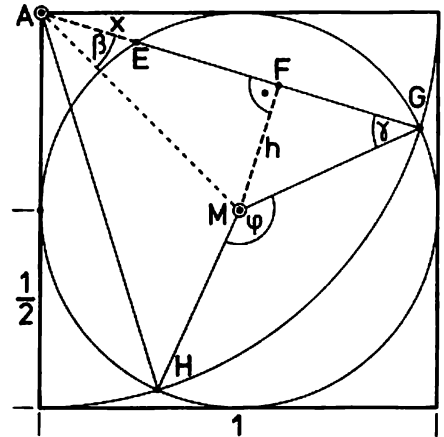
$$\overline{FG} = 3/8, \overline{AM} = 1/2 \sqrt{2}$$

$$h = \sqrt{7}/8 \text{ (Pythagoras in } \triangle AMF)$$

$$\Rightarrow \beta \approx 27,9^\circ, \gamma \approx 41,4^\circ, \varphi \approx 138,6^\circ$$

$$\begin{aligned}
 F &= F_{\text{kleiner sektor}} + F_{\text{AHMG}} - F_{\text{großer sektor}} \\
 &= (1/2)^2 \pi \frac{\varphi}{360^\circ} + 2 \cdot 1/2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7}/8 - 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{2\beta}{360^\circ}
 \end{aligned}$$

$$F \approx 0,15, u \approx 2,2$$



b) $\varepsilon \approx 26,6^\circ$

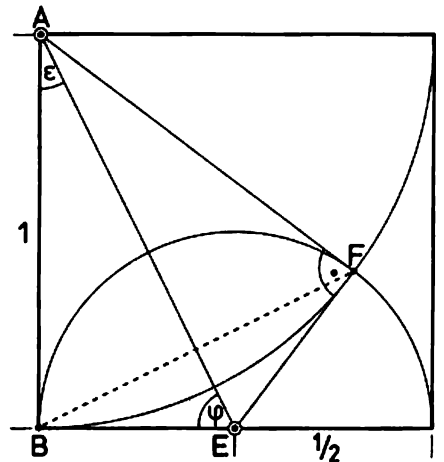
$$\varphi \approx 63,4^\circ$$

$$F = F_{\text{großer sektor}} + F_{\text{kleiner sektor}} - F_{\text{ABEF}}$$

$$\approx \pi \cdot \frac{53,1^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{4} \pi \cdot \frac{126,8^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}$$

$$F \approx 0,24$$

$$u \approx 2,0$$



152/13. a) Das Quadrat kann als Einheitsquadrat angenommen werden.

α) Linsenfläche: $F_1 = 2 \left[r^2 \pi \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \varphi/2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \right]$

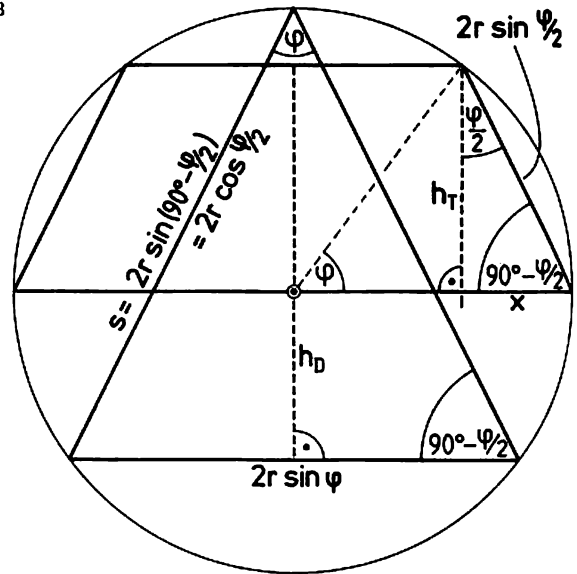
schwarze Fläche $F_2 = 2 \left[\frac{1}{2} - r\pi \cdot \frac{90^\circ - \varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \varphi/2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} \right]$

$F_1 = F_2 \Rightarrow r^2 \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \sqrt{2/\pi}$

β) $\sigma = \varphi$

b) $F_{\text{dreieck}} = 2 \cdot \frac{1}{2} h_D \cdot s \cdot \sin \frac{1}{2} \varphi = 2r (\cos \frac{1}{2} \varphi)^2 \cdot 2r \cos \frac{1}{2} \varphi \cdot \sin \frac{1}{2} \varphi$
 $= 4r^2 \sin \frac{1}{2} \varphi (\cos \frac{1}{2} \varphi)^3$

$F_{\text{trapez}} = (2r - x)h_T = [2r - 2r(\sin \frac{1}{2} \varphi)^2] \cdot 2r \cos \frac{1}{2} \varphi \sin \frac{1}{2} \varphi$
 $= 4r^2 \sin \frac{1}{2} \varphi (\cos \frac{1}{2} \varphi)^3$



152/14. Es gilt: $\triangle AFE \sim \triangle ABC$, denn:

α ist gemeinsam und $\frac{b \cos \alpha}{c \cos \alpha} = \frac{b}{c}$

$\Rightarrow \overline{EF} = a \cos \alpha$

analog: $\overline{FD} = b \cos \beta$,

$\overline{DE} = c \cos \gamma$

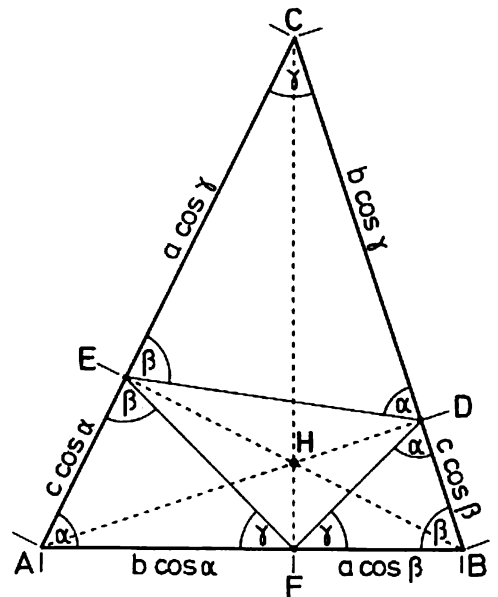
aus der Ähnlichkeit ergeben sich:

$\sphericalangle D = 180^\circ - 2\alpha$, $\sphericalangle E = 180^\circ - 2\beta$

$\sphericalangle F = 180^\circ - 2\gamma$.

Die Längen der abgeschnittenen Dreiecke AFE, FBD und DEC sind jeweils um den Faktor $\cos \alpha$, $\cos \beta$ bzw. $\cos \gamma$ verkleinert, ihre Flächeninhalte also um den Faktor $(\cos)^2$:

$F_{DEF} = F_{ABC} - F_{ABC} \cdot (\cos \alpha)^2 - F_{ABC} \cdot (\cos \beta)^2 - F_{ABC} \cdot (\cos \gamma)^2$
 $= \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin \alpha [1 - (\cos \alpha)^2 - (\cos \beta)^2 - (\cos \gamma)^2]$



- 152/15.** Das Dreieck hat die Seiten $c = 18 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$, $a = 14 \text{ cm}$.
 Der Kosinussatz ergibt die Winkel: $\alpha \approx 48,2^\circ$, $\beta \approx 58,4^\circ$, $\gamma \approx 73,4^\circ$
 $F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \sin \alpha \approx 107,3 \text{ cm}^2$

- 152/16.** Ist s_n die Seite, r_n der Umkreisradius des n -Ecks und

$\mu_n = \frac{360^\circ}{n}$ der Mittelpunktswinkel, so gilt:

$$\text{I: } \frac{s_n/2}{r_n} = \sin \frac{1}{2} \mu_n \quad \text{II: } \frac{s_{n+1}/2}{r_n} = \tan \frac{1}{2} \mu_{n+1} \quad n \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \cdot s_{n+1}}{n \cdot s_n} = \frac{(n+1) \cdot 2r_n \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_{n+1}}{n \cdot 2r_n \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_n} = \frac{(n+1) \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_{n+1}}{n \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_n}$$

$$u_4 = 1 \cdot \frac{4 \cdot \tan 45^\circ}{3 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{8}{9} \sqrt{3}$$

- 153/17.** Ist s_n die Seite, ρ_n der Inkreisradius des n -Ecks und

$\mu_n = \frac{360^\circ}{n}$ der Mittelpunktswinkel, so gilt:

$$\text{I: } \frac{s_n/2}{\rho_n} = \tan \frac{1}{2} \mu_n \quad \text{II: } \frac{s_{n+1}/2}{\rho_n} = \sin \frac{1}{2} \mu_{n+1} \quad n \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1) \cdot s_{n+1}}{n \cdot s_n} = \frac{(n+1) \cdot 2\rho_n \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_{n+1}}{n \cdot 2\rho_n \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_n} = \frac{(n+1) \cdot \sin \frac{1}{2} \mu_{n+1}}{n \cdot \tan \frac{1}{2} \mu_n}$$

$$u_4 = 1 \cdot \frac{4 \cdot \sin 45^\circ}{3 \cdot \tan 60^\circ} = \frac{2}{9} \sqrt{6}$$

Beweise

154/1. Fläche $\boxed{1} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

$$\text{Fläche } \boxed{2} = \frac{1}{2} ac \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

$$\text{Fläche } \boxed{3} = \frac{1}{2} ab \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$\text{Fläche } \boxed{4} = \frac{1}{2} bc \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

154/2. a) $b = 2r \sin \beta$ $h_c = b \sin \alpha \Rightarrow h_c = 2r \sin \alpha \sin \beta$

b) $F = \frac{1}{2} \cdot bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2r \sin \beta \cdot 2r \sin \gamma \cdot \sin \alpha = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$

$$\text{c) } F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha, \sin \alpha = \frac{a}{2r} \Rightarrow F = \frac{abc}{4r}$$

154/3. Zum Beispiel: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}$, in der Figur gilt wegen $AE \parallel DF$:

$\sphericalangle EAD = \sphericalangle ADF = 90^\circ$ (Thaleskreis bzw. Z-Winkel).

$$\sphericalangle ACE = \alpha + \beta \quad (\text{Außenwinkel})$$

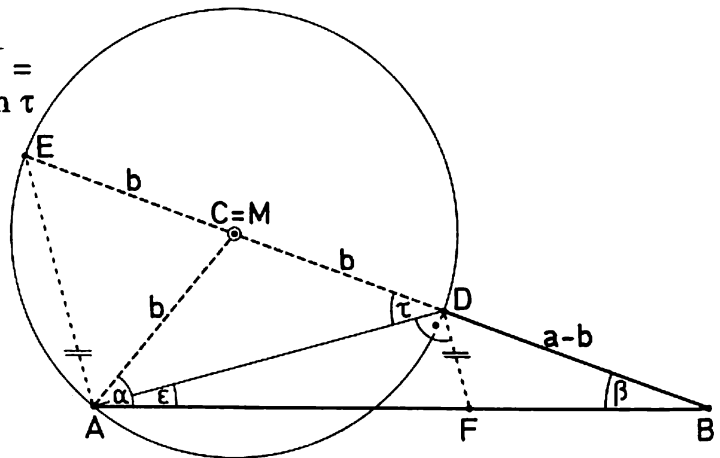
$$\Rightarrow \tau = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\text{Umfangswinkel über [AE]})$$

$$\varepsilon = \alpha - \tau = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

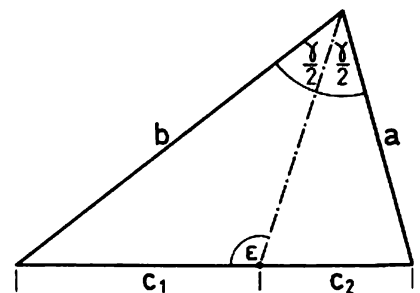
Strahlensatz:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} \tan \varepsilon : \overline{AD} \tan \tau$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}$$



154/4. **a)** $\frac{c_1}{b} = \frac{\sin \gamma/2}{\sin \epsilon} \frac{c_2}{a} = \frac{\sin \gamma/2}{\sin(180^\circ - \epsilon)}$
 $\Rightarrow \frac{c_1}{b} = \frac{c_2}{a} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a}$



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1}{2} c_1 \cdot w_\gamma \cdot \sin \varepsilon &= \frac{1}{2} b \cdot w_\gamma \cdot \sin \gamma/2 \\
 \frac{1}{2} c_2 \cdot w_\gamma \cdot \sin(180^\circ - \varepsilon) &= \frac{1}{2} a \cdot w_\gamma \cdot \sin \gamma/2 \\
 \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} &= \frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

154/5. In der Figur gilt:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD = \alpha/2$$

$$\sphericalangle DBF = 90^\circ = \sphericalangle BFE$$

(Thaleskreis bzw. Z-Winkel).

$$\sphericalangle DFB = 90^\circ - \alpha/2 \quad (\triangle DBF)$$

Sinussatz in $\triangle BCD$:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin(\beta + \alpha/2)}{\sin \alpha/2}$$

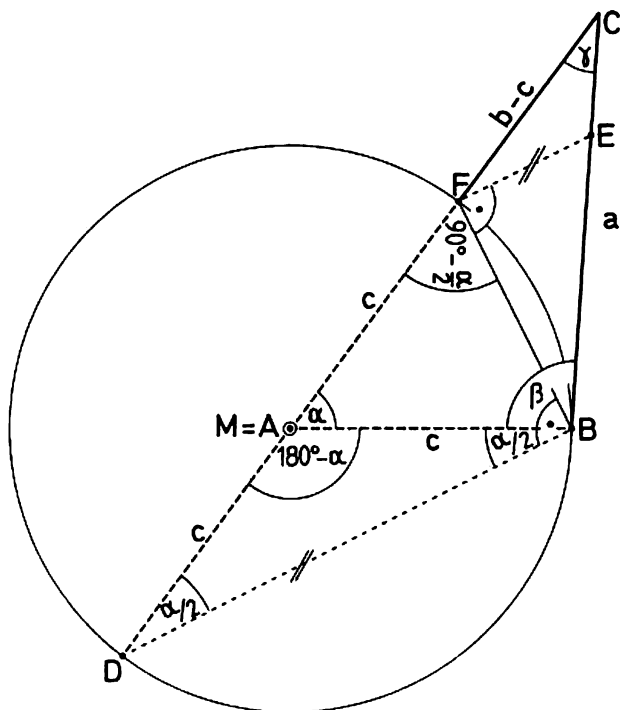
$$= \frac{\sin(90^\circ - \gamma/2 + \beta/2)}{\sin \alpha/2}$$

$$= \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Sinussatz in $\triangle BCF$:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin(90^\circ - \gamma - \alpha/2)}{\sin(90^\circ + \alpha/2)}$$

$$= \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$



154/6. Kosinussatz:

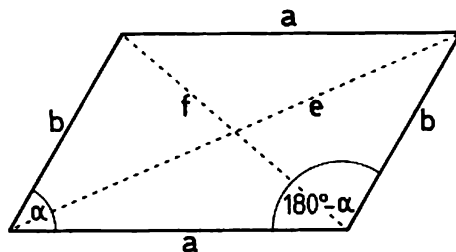
$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

Addition ergibt:

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$$

wegen $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.



$$154/7. \quad \text{a) } \tan \beta/2 = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-c)}} \quad \tan \gamma/2 = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

b) 1. Beweis

Wegen $2x + 2y + 2z = u$
(gleich lange Tangentenabschnitte)

gilt: $x + y + z = s$

$$\Rightarrow s - a = x, \quad s - b = y, \quad s - c = z$$

$$\Rightarrow \tan \alpha/2 = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{s-a} \quad (\clubsuit)$$

für die Fläche von $\triangle ABC$ gilt:

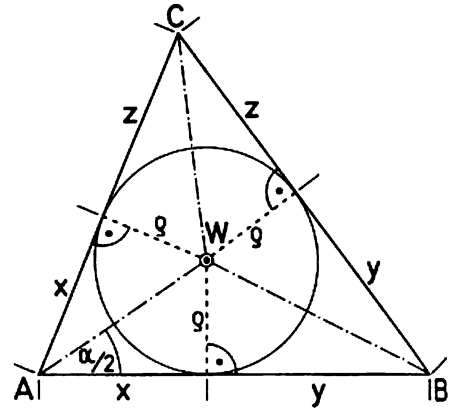
$$F = \frac{1}{2} ap + \frac{1}{2} bp + \frac{1}{2} cp = sp$$

$$\text{bzw. } F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{HERON})$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

ρ in $(\clubsuit)$ eingesetzt ergibt:

$$\tan \alpha/2 = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$



2. Beweis

$$x = s - a \quad y = s - b$$

wegen $x + z + v = x + y + w$

und $z + y = v + w$ gilt $w = z$

$$\Rightarrow BD = z = s - c,$$

damit ist $AD = x + y + z = s$.

$$\tan \alpha/2 = \frac{\rho}{s-a} \quad (\text{Dreieck AEW})$$

$$\tan \alpha/2 = \frac{\rho_a}{s} \quad (\text{Dreieck ADA}_w)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{s-a} = \frac{\rho_a}{s} \quad (\diamond)$$

Aus $\angle DBA_w = 90^\circ - \beta/2$ folgt:

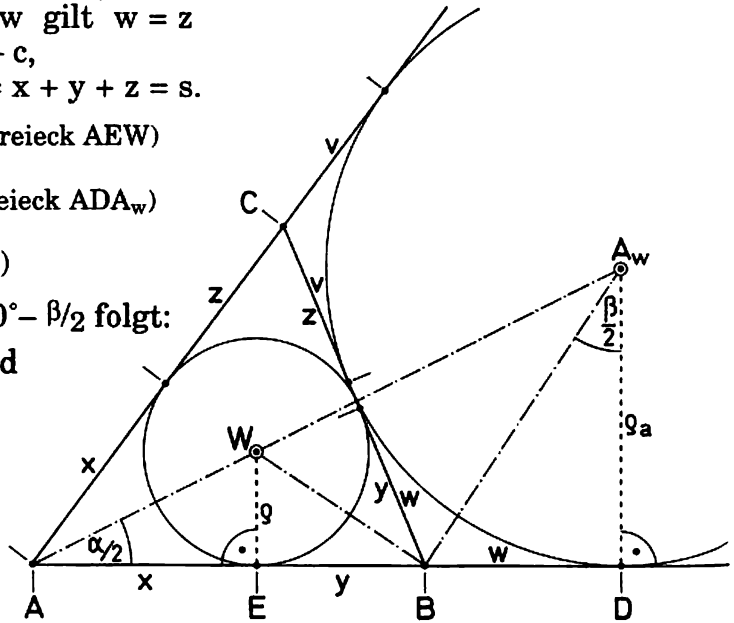
$$\angle BA_wD = \beta/2 \quad \text{und}$$

$$\angle WBA_w = 90^\circ.$$

$$\tan \beta/2 = \frac{\rho}{s-b} \quad (\text{Dreieck EBW})$$

$$\tan \beta/2 = \frac{s-c}{\rho_a} \quad (\text{Dreieck BDA}_w)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{s-b} = \frac{s-c}{\rho_a} \quad (\heartsuit)$$

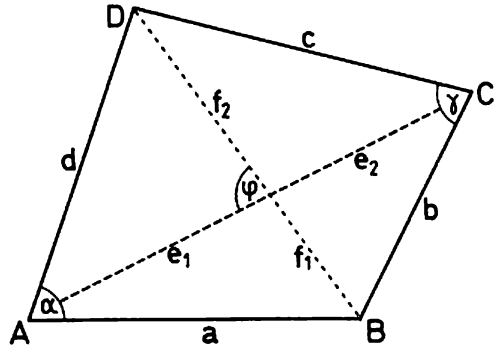


Multiplikation von $(\diamond)$ und $(\heartsuit)$ liefert: $\frac{\rho^2}{(s-a)(s-b)} = \frac{s-c}{s}$

$$\Rightarrow \rho^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$$

$$\rho \text{ in } \tan \alpha/2 = \frac{\rho}{s-a} \text{ eingesetzt, ergibt: } \tan \alpha/2 = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

155/8. a) $F = \frac{1}{2} [e_1 f_1 \cdot \sin(180^\circ - \varphi) + e_2 f_1 \cdot \sin \varphi + e_2 f_2 \cdot \sin(180^\circ - \varphi) + e_1 f_2 \cdot \sin \varphi]$
 $= \frac{1}{2} \sin \varphi [e_1(f_1 + f_2) + e_2(f_1 + f_2)]$
 $= \frac{1}{2} ef \sin \varphi$



b) $a^2 = e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos(180^\circ - \varphi)$
 $b^2 = f_1^2 + e_2^2 - 2f_1 e_2 \cos \varphi$
 $c^2 = e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos(180^\circ - \varphi)$
 $d^2 = e_1^2 + f_2^2 - 2e_1 f_2 \cos \varphi$
 $\Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 - d^2 = e_1^2 + f_1^2 + 2e_1 f_1 \cos \varphi + e_2^2 + f_2^2 + 2e_2 f_2 \cos \varphi$
 $- f_1^2 - e_2^2 + 2f_1 e_2 \cos \varphi - e_1^2 - f_2^2 + 2e_1 f_2 \cos \varphi$
 $= 2ef \cos \varphi$

c) Quadriert man a) und b), so ergibt sich:

$$16F^2 = 4 e^2 f^2 (\sin \varphi)^2$$

$$(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 = 4 e^2 f^2 (\cos \varphi)^2$$

$$\Rightarrow F^2 = \frac{1}{4} e^2 f^2 - \frac{1}{16} (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2$$

155/9. a) Aus $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$ und $e^2 = d^2 + c^2 + 2dc \cos \beta$
(denn $\delta = 180^\circ - \beta$) folgt: $e^2 = d^2 + c^2 + \frac{dc}{ab} (a^2 + b^2 - e^2)$ ♠

Aus $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$ und $f^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$
(denn $\gamma = 180^\circ - \alpha$) folgt: $f^2 = b^2 + c^2 + \frac{bc}{ad} (a^2 + d^2 - f^2)$ ♥

♠·ab: $ab e^2 = ab d^2 + ab c^2 + cd a^2 + cd b^2 - cd e^2$ 🍎

♥·ad: $ad f^2 = ad b^2 + ad c^2 + bc a^2 + bc d^2 - bc f^2$ ⊕

🍎 umgeformt: $e^2(ab + cd) = (bc + ad)(ac + bd)$ I

⊕ umgeformt: $f^2(ad + bc) = (ab + cd)(ac + bd)$ II

I·II: $e^2 f^2 = (ac + bd)^2 \Rightarrow ef = ac + bd$

b) Dividiert man die letzten beiden Gleichungen I und II aus a)

und zieht die Wurzel, so folgt: $\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$

155/10. a) Siehe Aufgabe 7. b) 2.Beweis

b) Setzt man p in $F = \frac{1}{2} ap + \frac{1}{2} bp + \frac{1}{2} cp = sp$ ein,
so ergibt sich die Formel von HERON.

155/11. Es sei $\angle AMB = 2\alpha$, $\angle PBA = \gamma$ und $\angle PAB = \beta$

$\Rightarrow \angle SAB = \angle SBA = \alpha$ (Sehnen-Tangenten-Winkel)

$\Rightarrow \angle SAP = \alpha - \beta$, $\angle SBP = \alpha - \gamma$

$l/x = \sin \beta$, $l/y = \sin \gamma$,

$w/x = \sin(\alpha - \beta)$, $v/y = \sin(\alpha - \gamma)$

Multiplikation ergibt:

$$\frac{l^2}{xy} = \sin \beta \sin \gamma$$

$$\frac{vw}{xy} = \sin(\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \beta)$$

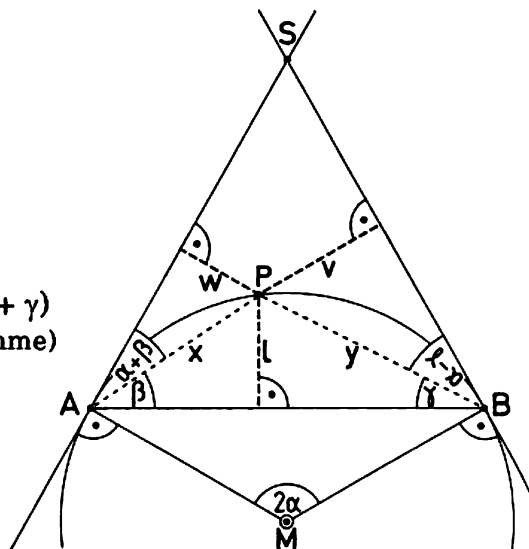
aus $\angle APB = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

(Umfangswinkelsatz bzw. Winkelsumme)

folgt: $\alpha = \beta + \gamma$, also gilt:

$$\sin(\alpha - \gamma) \sin(\alpha - \beta) = \sin \beta \sin \gamma$$

$$\Rightarrow l^2 = vw$$



156/12. a) $\angle BZE' = \varepsilon/2$

(Umfangswinkel; B sei der Z gegenüberliegende Durchmesser-Endpunkt)

$\angle BZA = \alpha/2$ (Umfangswinkel)

Kreisradius $r = 1$

$$\overline{BE'} = 2 \tan \varepsilon/2, \quad \overline{AB} = 2 \tan \alpha/2$$

$$\Rightarrow \overline{AE'} = 2 (\tan \alpha/2 - \tan \varepsilon/2)$$

b) Ist M Kreismittelpunkt und F Fußpunkt des Lots durch T auf ZB, so gilt:

$$\overline{MT} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)} \quad (\Delta MTA) \quad \overline{MF} = \overline{MT} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon) \quad (\Delta MFT)$$

mit $\tau := \frac{1}{2}(\alpha - \varepsilon)$ und $\sigma := \frac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)$ gilt:

$$\overline{MF} = \frac{\cos \sigma}{\cos \tau} \quad \text{und} \quad \overline{FT} = \overline{MT} \sin \sigma = \frac{\sin \sigma}{\cos \tau}$$

Strahlensatz:

$$\begin{aligned} \overline{FT} : \overline{FZ} &= \overline{BT} : \overline{BZ} \Rightarrow \overline{BT} = 2 \frac{\sin \sigma}{(1 + \cos \sigma / \cos \tau) \cos \tau} = 2 \frac{\sin \sigma}{\cos \tau + \cos \sigma} = \\ &= 2 \frac{\sin \sigma}{2 \cdot \cos \alpha/2 \cos \varepsilon/2} = \tan \alpha/2 + \tan \varepsilon/2 = \frac{1}{2}(\overline{BA'} + \overline{BE'}) \end{aligned}$$

$$\text{also } \overline{BT} = \frac{1}{2}(\overline{BA'} + \overline{BE'}) \Rightarrow 2(\overline{BE'} + \overline{ET'}) = \overline{BA'} + \overline{BE'}$$

$$\Rightarrow 2 \overline{ET'} = \overline{BA'} - \overline{BE'}, \text{ also } 2 \overline{ET'} = \overline{EA'}$$

156/13.

Lösung ohne Trigonometrie
Verlängert man [BC] über C hinaus, so ergibt sich A'.

Man zeigt, daß U Umkreis
mittelpunkt von $\triangle ABA'$ ist,
denn dann halbiert UT als
Lot auch die Sehne $[BA']$:

$$\delta A \cup B = \gamma$$

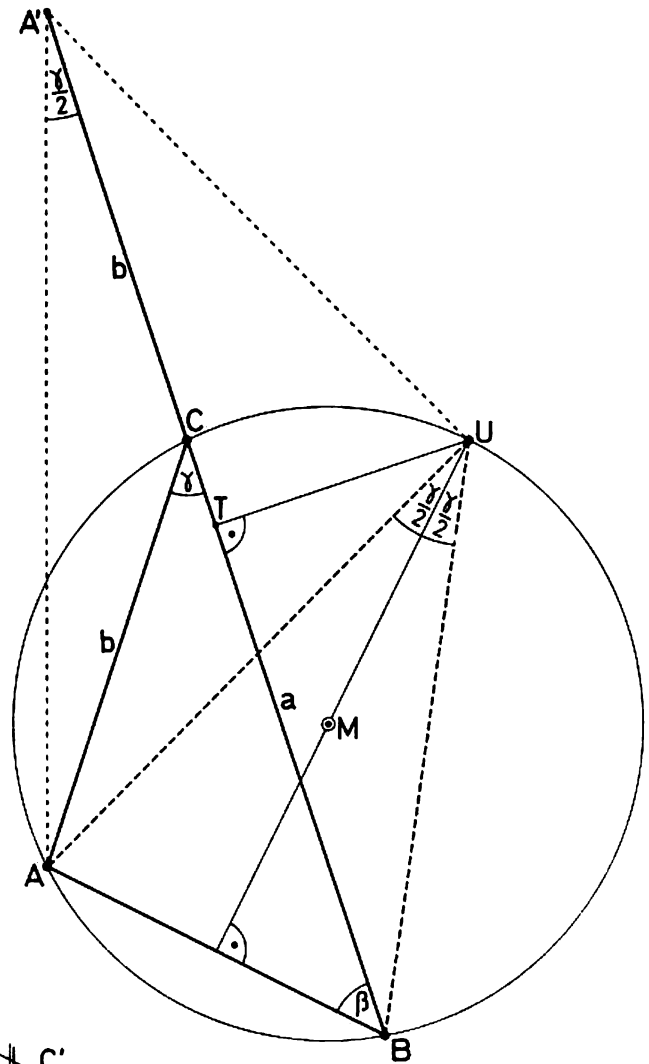
(Umfangswinkel über [AB])

$$\angle ACA' = 180^\circ - \gamma$$

$$\Rightarrow \angle AA'B = \gamma/2, \text{ denn}$$

$\Delta ACA'$ ist gleichschenkelig.

Deshalb liegt A' auf dem Kreis um U mit $r = \overline{BU}$.



Lösung mit Trigonometrie

$$2F_{ABC} = aw \sin \gamma/2 + bw \sin \gamma/2$$

$$2F_{ABC'} = cw \sin (\alpha + \gamma/2)$$

$$\Rightarrow a + b = c \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma/2)}{\sin \gamma/2}$$

$$(c/2) : \overline{BU} = \sin \gamma/2$$

$$\Rightarrow \overline{BU} = \frac{c}{2 \sin \gamma/2}$$

$$\overline{BT} : \overline{BU} = \cos(90^\circ - \gamma/2 - \beta)$$

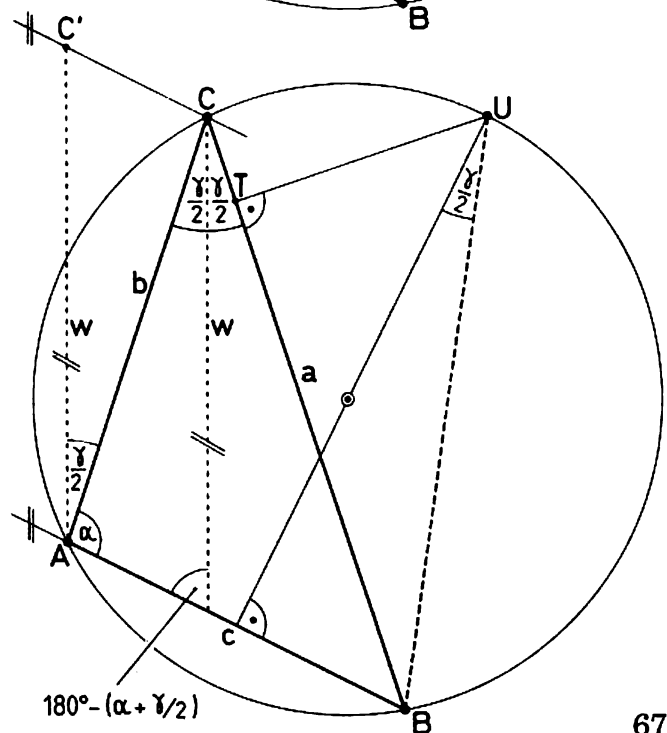
$$= \sin(\gamma/2 + \beta) =$$

$$= \sin[180^\circ - (\alpha + \gamma/2)]$$

$$= \sin (\alpha + \gamma/2)$$

$$\Rightarrow \overline{BT} = \frac{c \sin(\alpha + \gamma/2)}{2 \sin \gamma/2}$$

$$\Rightarrow \overline{BT} = \frac{a+b}{2}$$



156/14. a) Kathetensatz: $x^2 = bc \cos \alpha$
 $y^2 = cb \cos \alpha$
 $\Rightarrow x = y = \sqrt{bc \cos \alpha}$

b) $h_1^2 = x^2 - \overline{AF}^2 = bc \cos \alpha - c^2 (\cos \alpha)^2$
 $= c \cos \alpha \cdot (b - c \cos \alpha)$
 $= c \cos \alpha \cdot a \cos \gamma$

$v = b \sin \alpha \cos \alpha$

$w = b(\cos \alpha)^2$

$\overline{CE} = b - b(\cos \alpha)^2 = b(\sin \alpha)^2$,

$\overline{CF} = a \cos \gamma$

$z : v = \overline{CF} : \overline{CE} \Rightarrow$

$z = b \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{a \cos \gamma}{b(\sin \alpha)^2} = \frac{a \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha}$

$h^2 = h_1^2 - z^2$

$h^2 = ac \cos \alpha \cos \gamma - \frac{a^2 (\cos \alpha)^2 (\cos \gamma)^2}{(\sin \alpha)^2}$

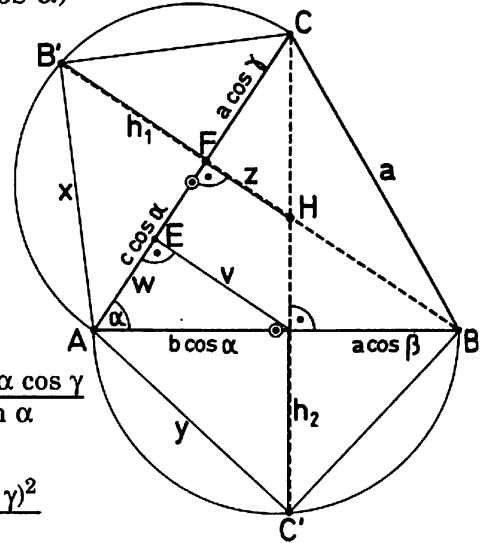
$h^2 = a \cos \alpha \cos \gamma \left[c - \frac{a \cos \alpha \cos \gamma}{(\sin \alpha)^2} \right]$

$h^2 = a \cos \alpha \cos \gamma \cdot \frac{c(\sin \alpha)^2 - a \cos \alpha \cos \gamma}{(\sin \alpha)^2}$

$h^2 = a \cos \alpha \cos \gamma \cdot \frac{c - \cos \alpha (c \cos \alpha + a \cos \gamma)}{(\sin \alpha)^2}$

$h^2 = a \cos \alpha \cos \gamma \cdot \frac{c - b \cos \alpha}{(\sin \alpha)^2} = \frac{a \cos \alpha \cos \gamma \cdot a \cos \beta}{(\sin \alpha)^2}$

$h = \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$



Näherungen

157/1. a) $a = \sqrt[3]{2}$

b) $G(1/2 \sqrt{3} \mid 1/2)$,

$H(1/2 \mid 1/2 \sqrt{3})$,

$M(-1 \mid 0)$,

$r_5 = \sqrt{3}$,

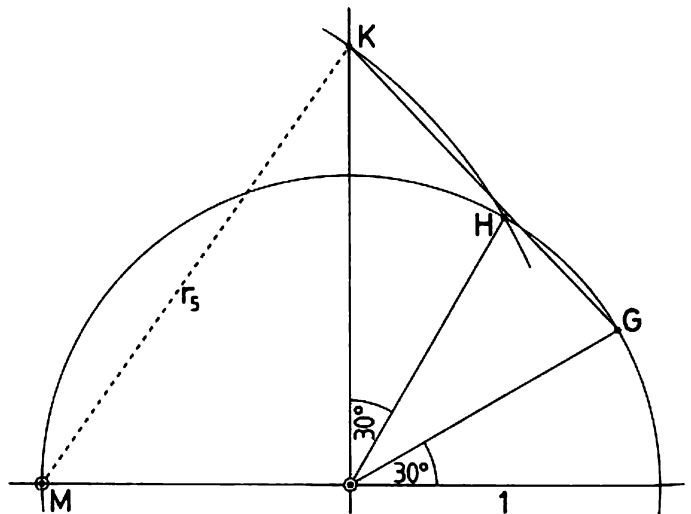
$K(0 \mid \sqrt{2})$

$\overline{GK} = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$

$= 1,259...$

Abweichung:

$f \approx -0,051\%$



158/2. $\sphericalangle UHY = 30^\circ$

$$\overline{HU} + \overline{UY} = \frac{2}{\cos 15^\circ} + 4 \tan 15^\circ = 3,1423\dots$$

Abweichung: $f \approx 0,024\%$

158/3. Der Radius des Kreises sei jeweils 1.

a) $\sphericalangle OMP = \mu$ $\sphericalangle MPZ = \varepsilon$ $\sphericalangle MZP = \alpha$

Sinussatz in $\triangle MPZ$: $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha} = \frac{2}{1}$. Wegen $\varepsilon = \mu - \alpha$ folgt

$$\frac{\sin(\mu - \alpha)}{\sin \alpha} = 2 \Rightarrow \frac{\sin \mu \cos \alpha - \cos \mu \sin \alpha}{\sin \alpha} = 2$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \mu}{2 + \cos \mu} \quad \overline{OP'} = 3 \tan \alpha = 3 \frac{\sin \mu}{2 + \cos \mu}$$

$$30^\circ: f \approx -0,043\% \quad 60^\circ: f \approx -0,761\% \quad 90^\circ: f \approx -4,51\%$$

b) Der Fußpunkt des Lots von P auf MZ sei H, $\mu = \sphericalangle HMP$.

$$\overline{HM} = \cos \mu, \quad \overline{HP} = \sin \mu, \quad t = \frac{1}{5}(1 - \cos \mu),$$

$$\overline{ZO} = 3 - t = \frac{1}{5}(14 + \cos \mu), \quad \overline{ZH} = 3 - 6t = \frac{1}{5}(9 + 6 \cos \mu)$$

$$\text{Strahlensatz: } \overline{OP'} : \overline{HP} = \overline{ZO} : \overline{ZH} \Rightarrow \overline{OP'} = \frac{14 + \cos \mu}{9 + 6 \cos \mu} \cdot \sin \mu$$

$$30^\circ: f \approx -0,00103\% \quad 60^\circ: f \approx -0,0716\% \quad 90^\circ: f \approx -0,97\%$$

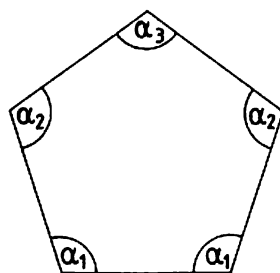
158/4. a) $\Delta \mu \approx 0,412^\circ$

b) Es sind zwar alle Seiten gleich lang, aber das Fünfeck ist nicht regelmäßig.

$$\alpha_1 = 108,366^\circ$$

$$\alpha_2 = 107,038^\circ$$

$$\alpha_3 = 109,192^\circ.$$



159/5. a) $\Delta \mu \approx 0,11^\circ$
 $\Delta \mu / \mu_7 \approx 0,2\%$

b) $\varepsilon = 51,318^\circ$
 $\Delta \varepsilon \approx 0,11^\circ$

159/6. a) $\Delta \mu \approx 0,812^\circ$ b) $\Delta \mu \approx 0,208^\circ$

7. $\Delta \mu \approx -0,058^\circ$

160/8. a) $\frac{u_k}{u_Q} = 0,9998\dots$ b) $\frac{F_k}{F_Q} = 0,9998\dots$ c) $\Delta \varepsilon \approx 0,101^\circ$

160/9. $\varphi_5 = 71,953^\circ$ $\varphi_7 = 51,518^\circ$ $\varphi_9 = 40,278^\circ$ $\varphi_{11} = 33,148^\circ$

160/10. $\Delta \mu_9 \approx 0,114^\circ$ $\Delta \mu_{15} \approx 0,094^\circ$ $\Delta \mu_{17} \approx 0,999^\circ$ $\Delta \mu_{20} \approx 0,288^\circ$

Vermessung

$$161/1. \quad \frac{s_1}{s} = \frac{\sin 20,72^\circ}{\sin 11,71^\circ} \quad h = s \sin \varphi + s_1 \sin \beta \approx 1302,8 \text{ m}$$

$$161/2. \quad \gamma = 40^\circ \quad a = s \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \approx 68,9 \text{ m} \quad b = s \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \approx 60,6 \text{ m}$$

$$161/3. \quad \overline{PB} = s \frac{\sin \alpha_1}{\sin 53,5^\circ} \quad \overline{BQ} = s \frac{\sin \alpha_2}{\sin 49,6^\circ}$$

$$x = \sqrt{\overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 - 2 \overline{PB} \overline{BQ} \cos 28,9^\circ} \approx 51,2 \text{ m}$$

$$161/4. \quad \overline{BK} = 2r \sin \frac{1}{2}(\varphi_B + |\varphi_K|) \approx 8724,5 \text{ km}$$

$$\text{Entfernung Berlin-Mond: } x = \overline{BK} \frac{\sin 86,6603^\circ}{\sin 1,3814^\circ} \approx 361\,283 \text{ km}$$

$$e = \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos 138,7378^\circ} \approx 366\,096 \text{ km}$$

$$e : r \approx 57,5$$

162/5. Tangenssatz in $\triangle ABC$:

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha_1 - \gamma_1) = \frac{t-s}{t+s} \cot \beta/2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \approx 38,9^\circ, \gamma_1 = 28,7^\circ$$

$$\alpha_2 \approx 61,4^\circ, \gamma_2 = 56,3^\circ$$

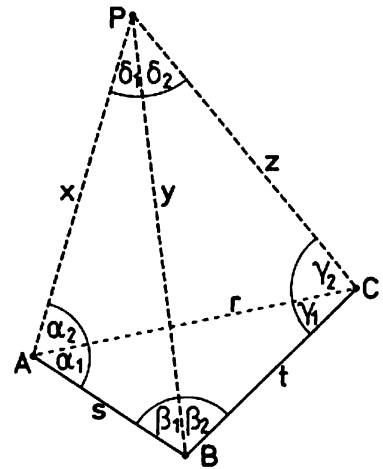
$$r = s \frac{\sin \beta}{\sin \gamma_1} \approx 125,14 \text{ m}$$

$$x = r \frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta} \approx 117,6 \text{ m}$$

$$z = r \frac{\sin \alpha_2}{\sin \delta} \approx 124,1 \text{ m}$$

Kosinussatz:

$$y = \sqrt{x^2 + s^2 - 2xs \cos \alpha} \approx 144,2 \text{ m}$$



162/6. $\varepsilon = \sphericalangle PAB$ $\tau = \sphericalangle BCP$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha} = \frac{y}{s}, \quad \frac{\sin \tau}{\sin \gamma} = \frac{y}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \varepsilon}{\sin \tau} = \frac{t \sin \alpha}{s \sin \gamma} \quad \text{I}$$

II: $\varepsilon + \tau = 176,5^\circ$

II in I: $\frac{\sin \varepsilon}{\sin(176,5^\circ - \varepsilon)} = \frac{t \sin \alpha}{s \sin \gamma}$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin 176,5^\circ \cos \varepsilon - \cos 176,5^\circ \sin \varepsilon} = \frac{t \sin \alpha}{s \sin \gamma}$$

$$\Rightarrow \tan \varepsilon = \frac{r \sin 176,5^\circ}{1 + r \cos 176,5^\circ}, \quad \text{wobei } r := \frac{t \sin \alpha}{s \sin \gamma}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \approx 57^\circ, \quad \tau \approx 119,5^\circ, \quad \beta_1 \approx 90^\circ, \quad \beta_2 \approx 34^\circ$$

$$\Rightarrow x \approx 139,5 \text{ m} \quad y \approx 117 \text{ m} \quad z \approx 75,2 \text{ m}$$

162/7. Es gelte: $AQPB \sim A'Q'P'B'$, wobei $\overline{A'B'} = s'$ und $x' = \overline{Q'P'} = 1 \text{ m}$ sind.

Sinussatz: $\frac{\overline{B'P'}}{1} = \frac{\sin \beta_1}{\sin 55,5^\circ} \quad \frac{\overline{A'P'}}{1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin 52,5^\circ}$

Kosinussatz: $s'^2 = \overline{B'P'}^2 + \overline{A'P'}^2 - 2\overline{B'P'} \cdot \overline{A'P'} \cos 24,5^\circ$

Ähnlichkeit: $\frac{x}{x'} = \frac{s}{s'} \Rightarrow x \approx 121,4 \text{ m}.$

Physik

162/1. a₁) Sinussatz: $\frac{F_Z}{G} = \frac{\sin \beta}{\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)]} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

$$\Rightarrow F_Z = G \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad F_D = G \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

a₂) $F_Z = G \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \quad F_D = G \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$

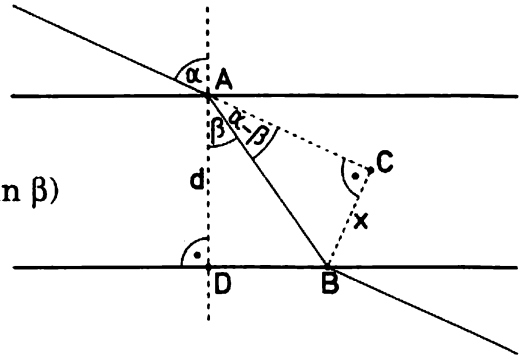
b₁) $F_1 = L \cdot \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma + \delta)} \quad F_2 = L \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta)}$

b₂) $F_1 = L \cdot \frac{\sin \delta}{\sin(\gamma - \delta)} \quad F_2 = L \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma - \delta)}$

c) $F_1 = G \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad F_2 = G \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

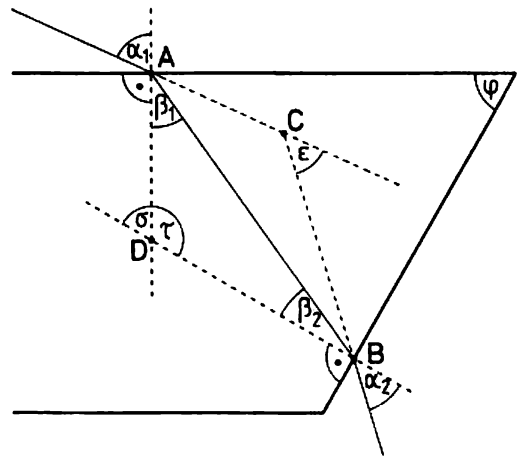
163/2. a) $x = \sin(\alpha - \beta) \cdot \text{Bogen}(AB)$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{d}{\cos \beta} \\ \Rightarrow x &= \frac{d}{\cos \beta} \sin(\alpha - \beta) \\ &= \frac{d}{\cos \beta} (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= d \left(\sin \alpha - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} \right) \\ &= d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta \sin \alpha} \right) \\ &= d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - (\sin \alpha)^2}} \right) \\ \Rightarrow x &\approx 18,9 \text{ mm}\end{aligned}$$



b) $\varepsilon = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$
(Außenwinkel in $\triangle ABC$)
 $\sigma = \beta_1 + \beta_2$
(Außenwinkel in $\triangle ADB$)
 $\varphi + \tau = 180^\circ$ und $\sigma + \tau = 180^\circ$
 $\sigma = \varphi = \beta_1 + \beta_2$
 $\Rightarrow \varepsilon = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi$

$$\begin{aligned}\sin \alpha_2 &= n \sin \beta_2 = n \sin(\varphi - \beta_1) \\ &= n \sin \varphi \cos \beta_1 - n \cos \varphi \sin \beta_1 \\ &= \sin \varphi \sqrt{n^2 - (\sin \alpha_1)^2} - \cos \varphi \sin \alpha_1 \\ \Rightarrow \varepsilon &= \alpha_1 + \arcsin[\sin \varphi \sqrt{n^2 - (\sin \alpha_1)^2} - \cos \varphi \sin \alpha_1] - \varphi \\ &\quad \text{(arc sin ist die Umkehrfunktion von sin)} \\ \Rightarrow \varepsilon &\approx 48,9^\circ\end{aligned}$$



163/3. Der Drehpunkt des Tonarms sei A, der Kreismittelpunkt M, die Schnittpunkte von Spitze und kleinem bzw. großem Kreis seien B bzw. C.

$$\triangle AMB: x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(90^\circ - \varepsilon)$$

$$\Rightarrow x^2 = a^2 + r^2 - 2ar \sin \varepsilon \quad \text{I}$$

$$\triangle AMC: x^2 = a^2 + R^2 - 2aR \sin \varepsilon \quad \text{II}$$

aus I: $\sin \varepsilon = \frac{1}{2ar} (a^2 + r^2 - x^2)$ in II eingesetzt:

$$x^2 = a^2 + R^2 - \frac{R}{r} (a^2 + r^2 - x^2)$$

$$x^2(1 - R/r) = a^2(1 - R/r) - rR(1 - R/r) \Rightarrow x = \sqrt{a^2 - rR} \approx 21,8 \text{ cm.}$$

7. Kapitel

174/1.

a) $\sin 90^\circ = 1$	$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$
b) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
c) $\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sin 90^\circ \cos 45^\circ - \cos 90^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
d) $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 210^\circ \cos 60^\circ - \cos 210^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$
e) $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$	$\cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$
f) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 90^\circ \cos 30^\circ + \sin 90^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
g) $\cos 180^\circ = -1$	$\cos 240^\circ \cos 60^\circ + \sin 240^\circ \sin 60^\circ = -1$
h) $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 210^\circ \cos 90^\circ - \sin 210^\circ \sin 90^\circ = \frac{1}{2}$
i) $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
j) $\tan 210^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{\tan 150^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 150^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
k) $\tan 180^\circ = 0$	$\frac{\tan 240^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 240^\circ \tan 60^\circ} = 0$
l) $\cos 360^\circ = 1$	$\cos 315^\circ \cos 45^\circ - \sin 315^\circ \sin 45^\circ = 1$

174/2.

a) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	
b) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	
c) $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$	d) $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$
e) $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 2 - \sqrt{3}$	f) $\tan 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = 2 + \sqrt{3}$
g) $\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ (regelmäßiges Zehneck)	
h) $\cos 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	i) $\tan 72^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

174/3.

a) $\cos x = \frac{\sqrt{1 - (\sin x)^2}}{1} = \frac{12}{13}$	$\cos y = \frac{3}{5}$
$\sin(x + y) = \frac{63}{65}$	$\sin(x - y) = -\frac{33}{65}$
b) $\sin x = \frac{\sqrt{1 - (\cos x)^2}}{1} = \frac{15}{17}$	$\sin y = \frac{5}{13}$
$\cos(x + y) = \frac{21}{221}$	$\cos(x - y) = \frac{171}{221}$

174/4.

a) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$	
$\cos 2\alpha = 1 - 2(\sin \alpha)^2 = \frac{119}{169}$	$\tan 2\alpha = \frac{120}{119}$

b) $\sin 2\alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$ $\cos 2\alpha = 0,28$ $\tan 2\alpha = \frac{24}{7}$

$$\text{c) } \sin \alpha = \frac{1}{5}\sqrt{5}, \cos \alpha = \frac{2}{5}\sqrt{5}, \sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \cos 2\alpha = \frac{3}{5}, \tan 2\alpha = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} 174/5. \quad \text{a) } \sin \alpha/2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - 0,6)} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \cos \alpha/2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 0,6)} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \quad \tan \alpha/2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sin \alpha/2 = \frac{1}{2} \quad \cos \alpha/2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \tan \alpha/2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 174/6. \quad \text{a) } \sin 15^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 30^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ \cos 15^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 30^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin 7,5^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 15^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\ \cos 7,5^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 15^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\ \tan 7,5^\circ &= \sqrt{15 + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{26 + 15\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin 22,5^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 45^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \cos 22,5^\circ &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 45^\circ)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \tan 22,5^\circ = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$174/7. \quad \text{a) } \sin 5x + \sin x = 2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} = 2 \sin 3x \cos 2x$$

$$\text{b) } \sin 7x - \sin 3x = 2 \cos 5x \sin 2x \quad \text{c) } \cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x$$

$$\text{c) } \cos 6x - \cos x = -2 \sin 3,5x \sin 2,5x$$

$$174/8. \quad \text{a) } \sin x + \cos y = \sin x + \sin(90^\circ - y) = 2 \sin \frac{x+90^\circ-y}{2} \cos \frac{x-90^\circ+y}{2}$$

$$\text{b) } \sin x - \cos y = \sin x - \sin(90^\circ - y) = 2 \cos \frac{x+90^\circ-y}{2} \sin \frac{x-90^\circ+y}{2}$$

$$175/9. \quad \text{a) } h_c = b \sin \alpha \quad x = 2 h_c \cos \alpha = 2b \sin \alpha \cos \alpha = b \sin 2\alpha$$

$$\text{b) } x = b \tan 2\alpha; \text{ aus } \tan \alpha = \frac{a}{b} \text{ folgt: } x = b \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} = \frac{2 a b^2}{b^2 - a^2}$$

175/10. a) $\triangle BCH_b: \beta_2 + \gamma = 90^\circ$

$\triangle BH_aH: \beta_2 + \tau = 90^\circ$

$\Rightarrow \tau = \gamma$

$\triangle CH_cB: \gamma_1 + \beta = 90^\circ$

$\triangle CHH_a: \gamma_1 + \varepsilon = 90^\circ$

$\Rightarrow \varepsilon = \beta$

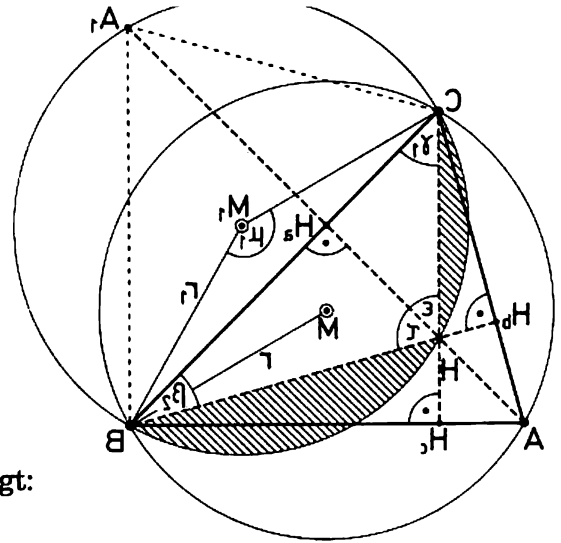
HBA_1C ist ein Sehnenviereck,
deshalb gilt: $\sphericalangle H + \sphericalangle A_1 = 180^\circ$.

Wegen $\varepsilon + \tau = \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha$ folgt:

$\sphericalangle A_1 = \alpha$, und daraus $\mu_1 = 2\alpha$.

Aus $\sin \alpha = \frac{a}{2r_1}$ und $\sin \alpha = \frac{a}{2r}$ (r: Umkreisradius) folgt: $r = r_1$.

Analog bekommt man: $r = r_2 = r_3$.



- b) Der Flächeninhalt F_1 der beiden schraffierten Segmente ergibt sich als Differenz des Sektors BM_1CH und der Dreiecke BCH und BM_1C :

$$F_1 = \frac{r^2 \pi \cdot 2\alpha}{360^\circ} - F_{\triangle BCH} - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha$$

Für die übrigen Segmentpaare gilt entsprechend:

$$F_2 = \frac{r^2 \pi \cdot 2\beta}{360^\circ} - F_{\triangle CHA} - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\beta$$

$$F_3 = \frac{r^2 \pi \cdot 2\gamma}{360^\circ} - F_{\triangle ABH} - \frac{1}{2} r^2 \sin 2\gamma$$

$$F_{3\text{linsen}} = \frac{r^2 \pi}{360^\circ} (\alpha + \beta + \gamma) - F_{\triangle ABC} - \frac{1}{2} r^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ und $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
folgt $F_{3\text{linsen}} = r^2 \pi - 2F_{\triangle ABC}$.

175/11. $a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60^\circ)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$\Rightarrow a'^2 - a^2 = 2bc [\cos \alpha - \cos(\alpha + 60^\circ)]$

$\Rightarrow a'^2 - a^2 = 2bc \cdot 2 \sin(\alpha + 30^\circ) \sin 30^\circ$

$\Rightarrow a'^2 = 2bc \sin(\alpha + 30^\circ) + a^2$

Aus $a = 2r \sin \alpha$, $b = 2r \sin \beta$, und $c = 2r \sin \gamma$ folgt:

$a'^2 = 8r^2 \sin(\alpha + 30^\circ) \sin \beta \sin \gamma + 4r^2 (\sin \alpha)^2$,

und aus $\sin(\alpha + 30^\circ) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha)$ folgt:

$a'^2 = 4r^2 [\sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + (\sin \alpha)^2]$

$a'^2 = 4r^2 [\sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + 1 + \cos \alpha (\sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha)]$

$a'^2 = 4r^2 [\sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + 1 + \cos \alpha (\sin \beta \sin \gamma + \cos(\beta + \gamma))]$

$a'^2 = 4r^2 [\sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma]$

$\Rightarrow a' = 2r \sqrt{\sqrt{3} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$

Sinussatz: $u = \frac{a \sin \alpha}{\sin \delta} = \frac{2r(\sin \alpha)^2}{\sin \delta}$

$$\text{In } (\heartsuit): \frac{1}{2} uw \sin \gamma + \frac{1}{2} uv \sin \beta = \frac{1}{2} vw \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \gamma}{\sin \delta \sin \phi} + \frac{\sin \alpha}{\sin \delta \sin \epsilon} = \frac{\sin \beta}{\sin \epsilon \sin \phi}$$

$$\Rightarrow \sin \gamma \sin \epsilon + \sin \alpha \sin \varphi = \sin \beta \sin \delta$$

$$\sin \gamma \sin(\beta - \alpha) + \sin \alpha \sin(\gamma - \beta) = \sin \beta \sin(\gamma - \alpha)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin \beta} + \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta - \alpha)} = 0.$$

a) Sehnenlänge: $\overline{AB} = 2 \sin \varphi/2$, Länge der Höhe durch den

φ	μ	ω
30°	$10,2^\circ$	$9,9^\circ$
60°	$21,8^\circ$	$19,1^\circ$
90°	$36,9^\circ$	$26,6^\circ$
120°	60°	30°

76

Vereinfache

177/1. a) $2 \cos \alpha$ b) $2 \sin \alpha$

177/2. a) $2(\sin \alpha)^2 + [(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2] [(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2] =$
 $= 2(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$

b) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

177/3. a) $2(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \alpha)(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \alpha) =$
 $= (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - (\frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha) = \sin \alpha$

c) $\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \alpha = \cos \alpha$

177/4. a) $\frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2(\cos \alpha)^2 - 1} = \frac{(1 + 2 \cos \alpha) \sin \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha) \cos \alpha} = \tan \alpha$

b) $\frac{(\cos \alpha)^2 + \sin \alpha \cos \alpha - (\cos \alpha)^2 + \sin \alpha \cos \alpha}{(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha$

177/5. a) $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \alpha - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \alpha =$
 $= (\cos \alpha)^2 \sin \beta + (\sin \alpha)^2 \sin \beta = \sin \beta$

b) $(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cos \alpha + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \sin \alpha =$
 $= (\cos \alpha)^2 \cos \beta + (\sin \alpha)^2 \cos \beta = \cos \beta$

c) $(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) +$
 $+ (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) =$
 $= 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin 2\alpha$

d) $(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) (\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) +$
 $+ (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) (\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma) =$
 $= \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma = \sin(\alpha - \gamma)$

177/6. a) $\frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$

b) $\frac{-\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = -\tan \alpha \tan \beta$

$$177/7. \quad \text{a) } \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{2 \cos \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \quad \text{b) } \frac{2 \sin \alpha \cos \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta} = \tan \alpha$$

$$\text{c) } \frac{-2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \sin \beta} = -\tan \alpha$$

$$177/8. \quad \text{a) } \frac{2(\cos \alpha/2)^2}{2(\sin \alpha/2)^2} = \frac{1}{(\tan \alpha/2)^2} \quad \text{b) } \frac{2(\cos \alpha/2)^2}{(2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2)^2} = \frac{1}{2(\sin \alpha/2)^2}$$

$$\text{c) } \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2(\cos \alpha/2)^2}{2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2} = \frac{1}{\tan \alpha/2}$$

$$\text{d) } \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \tan(45^\circ - \alpha/2)$$

$$177/9. \quad \text{a) } \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = (\tan \alpha/2)^2$$

$$\text{b) } \frac{2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \cos(90^\circ - \alpha)}{1 - \cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{(\tan(45^\circ - \alpha/2))^2}$$

$$\text{c) } \frac{(1 + \cos \beta) \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha) \sin \beta} = \frac{2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 \cdot 2(\cos \beta/2)^2}{2 \sin \beta/2 \cos \beta/2 \cdot 2(\cos \alpha/2)^2} = \frac{\tan \alpha/2}{\tan \beta/2}$$

$$177/10. \quad \text{a) } \frac{2(\sin \alpha/2)^2 + 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2}{2(\cos \alpha/2)^2 + 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2} = \frac{2 \sin \alpha/2 (\sin \alpha/2 + \cos \alpha/2)}{2 \cos \alpha/2 (\cos \alpha/2 + \sin \alpha/2)} = \tan \alpha/2$$

$$\text{b) } \frac{2(\cos \alpha/2)^2 - 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2}{2(\sin \alpha/2)^2 - 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2} = \frac{2 \cos \alpha/2 (\cos \alpha/2 - \sin \alpha/2)}{2 \sin \alpha/2 (\sin \alpha/2 - \cos \alpha/2)} = -\frac{1}{\tan \alpha/2}$$

$$177/11. \quad \text{a) } \frac{\cos 2\alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} = \frac{(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2}{1 - (\sin \alpha / \cos \alpha)^2} = (\cos \alpha)^2$$

$$\text{b) } \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{c) } \frac{2(\cos \alpha/2)^2 \sin \alpha/2}{2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2} = \cos \alpha/2$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \frac{1/2 (\cos 2\beta + \cos 2\alpha)}{(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) + (\cos \alpha)^2} = \\ & = \frac{1/2 (1 - 2(\sin \beta)^2 + 2(\cos \alpha)^2 - 1)}{(\cos \beta)^2} = \frac{(\cos \alpha)^2 - (\sin \beta)^2}{(\cos \beta)^2} \end{aligned}$$

Beweise

$$178/1. \quad \text{a) } \sin \alpha + \sin \alpha \cos 120^\circ + \cos \alpha \sin 120^\circ + \sin \alpha \cos 240^\circ + \cos \alpha \sin 240^\circ \\ = \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{3} \cos \alpha = 0$$

$$\text{b) } \tan \alpha + \frac{\tan \alpha + \tan 120^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 120^\circ} + \frac{\tan \alpha + \tan 240^\circ}{1 - \tan \alpha \tan 240^\circ} = \\ = \tan \alpha + \frac{\tan \alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \tan \alpha} + \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = \\ = \frac{\tan \alpha - 3(\tan \alpha)^3 + \tan \alpha - \sqrt{3}(\tan \alpha)^2 - \sqrt{3} + 3 \tan \alpha + \tan \alpha + \sqrt{3} + \sqrt{3}(\tan \alpha)^2 + 3 \tan \alpha}{1 - 3(\tan \alpha)^2} \\ = \frac{9 \tan \alpha - 3(\tan \alpha)^3}{1 - 3(\tan \alpha)^2} = 3 \tan 3\alpha \quad (\text{vergleiche 3.})$$

$$\text{c) } \cos \alpha [(\cos \alpha)(-1/2) - (\sin \alpha)(1/2\sqrt{3})][(\cos \alpha)(-1/2) - (\sin \alpha)(-1/2\sqrt{3})] = \\ = (\cos \alpha)(1/4) (\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha)(\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha) = \\ = 1/4 \cos \alpha [(\cos \alpha)^2 - 3(\sin \alpha)^2] = \\ = 1/4 \cos \alpha [4(\cos \alpha)^2 - 3] = 1/4 \cos 3\alpha \quad (\text{vergleiche 2.b})$$

$$\text{d) } \tan \alpha + \frac{\tan \alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \tan \alpha} \cdot \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = \frac{[(\tan \alpha)^2 - 3] \tan \alpha}{1 - 3(\tan \alpha)^2} = \\ = -\frac{3 \tan \alpha - (\tan \alpha)^3}{1 - 3(\tan \alpha)^2} = -\tan 3\alpha \quad (\text{vergleiche 3.})$$

$$178/2. \quad \text{a) } \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = \\ = 2 \sin x (\cos x)^2 + (1 - 2(\sin x)^2) \sin x = \\ = 2 \sin x (1 - (\sin x)^2) + \sin x - 2(\sin x)^3 = \\ = 3 \sin x - 4(\sin x)^3$$

$$\text{b) } \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ = (2(\cos x)^2 - 1) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x = \\ = 2(\cos x)^3 - \cos x - 2 \cos x (1 - (\cos x)^2) = \\ = 4(\cos x)^3 - 3 \cos x$$

$$178/3. \quad \tan(2x + x) = \frac{\frac{2 \tan x}{1 - (\tan x)^2} + \tan x}{1 - \frac{2 \tan x}{1 - (\tan x)^2} \cdot \tan x} = \frac{2 \tan x + \tan x - (\tan x)^3}{1 - (\tan x)^2 - 2(\tan x)^2} = \\ = \frac{3 \tan x - (\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2}$$

$$\begin{aligned}
 178/4. \quad \text{a) } \sin(3x + x) &= \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x = \\
 &= [3 \sin x - 4(\sin x)^3] \cos x + [4(\cos x)^3 - 3 \cos x] \sin x = \\
 &= -4(\sin x)^3 \cos x + 4(\cos x)^3 \sin x = \\
 &= 4 \sin x \cos x [-(\sin x)^2 + (\cos x)^2] = \\
 &= 4 \sin x \cos x [2(\cos x)^2 - 1] = \\
 &= 8 \sin x (\cos x)^3 - 4 \sin x \cos x \quad (\text{vergleiche 2.a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \cos(3x + x) &= \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x = \\
 &= [4(\cos x)^3 - 3 \cos x] \cos x - [3 \sin x - 4(\sin x)^3] \sin x = \\
 &= 4(\cos x)^4 - 3(\cos x)^2 - 3[1 - (\cos x)^2] + 4[1 - (\cos x)^2]^2 = \\
 &= 8(\cos x)^4 - 8(\cos x)^2 + 1 \quad (\text{vergleiche 2.b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 178/5. \quad \tan(3x + x) &= \frac{\tan 3x + \tan x}{1 - \tan 3x \tan x} = \frac{\frac{3 \tan x - (\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2} + \tan x}{1 - \frac{3 \tan x - (\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2} \cdot \tan x} = \\
 &= \frac{3 \tan x - (\tan x)^3 + \tan x - 3(\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2 - 3(\tan x)^2 + (\tan x)^4} = \frac{4 \tan x - 4(\tan x)^3}{1 - 6(\tan x)^2 + (\tan x)^4} \quad (\text{vergl. 3.})
 \end{aligned}$$

$$178/6. \quad \text{a) } \cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2, \text{ ist } \alpha = 2x \text{ und } \alpha \text{ spitz, so gilt:}$$

$$\cos \alpha = 2(\cos \alpha/2)^2 - 1 = 1 - 2(\sin \alpha/2)^2$$

$$\Rightarrow (\cos \alpha/2)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow (\sin \alpha/2)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \sin \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{b) } \tan \alpha/2 = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\begin{aligned}
 178/7. \quad \text{a) } \sin(45^\circ + \alpha) &= \cos[90^\circ - (45^\circ + \alpha)] = \cos(45^\circ - \alpha) = \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sin(45^\circ - \alpha) &= \cos[90^\circ - (45^\circ - \alpha)] = \cos(45^\circ + \alpha) = \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \tan(45^\circ + \alpha) = \frac{\tan 45^\circ + \tan \alpha}{1 - \tan 45^\circ \tan \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$\text{d) } \tan(45^\circ - \alpha) = \frac{\tan 45^\circ - \tan \alpha}{1 + \tan 45^\circ \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$\begin{aligned}
 178/8. \quad \text{a)} \quad \tan(45^\circ + \alpha) - \tan(45^\circ - \alpha) &= \\
 &= \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} - \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{(1 + \tan \alpha)^2 - (1 - \tan \alpha)^2}{(1 - \tan \alpha)^2} = \\
 &= \frac{4 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} = 2 \tan 2\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \tan(45^\circ + \alpha) + \tan(45^\circ - \alpha) &= \\
 &= \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = 2 \cdot \frac{1 + (\tan \alpha)^2}{1 - (\tan \alpha)^2} = 2 \cdot \frac{1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2}{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2} = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{(\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2} = \frac{2}{\cos 2\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 178/9. \quad \text{a)} \quad \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\sin 90^\circ + \sin \alpha}{\cos 90^\circ + \cos \alpha} = \frac{2 \sin(45^\circ + \alpha/2) \cos(45^\circ - \alpha/2)}{2 \cos(45^\circ + \alpha/2) \cos(45^\circ - \alpha/2)} = \tan(45^\circ + \alpha/2) \\
 \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} &= \frac{\cos 90^\circ + \cos \alpha}{\sin 90^\circ - \sin \alpha} = \frac{2 \cos(45^\circ + \alpha/2) \cos(45^\circ - \alpha/2)}{2 \cos(45^\circ + \alpha/2) \sin(45^\circ - \alpha/2)} = \\
 &= \frac{1}{\tan(45^\circ - \alpha/2)} = \tan[90^\circ - (45^\circ - \alpha/2)] = \tan(45^\circ + \alpha/2)
 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{\tan(45^\circ + \alpha/2)} = \tan[90^\circ - (45^\circ + \alpha/2)] = \tan(45^\circ - \alpha/2) \quad (\text{vergleiche a)})$$

$$\begin{aligned}
 178/10. \quad \text{a)} \quad \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha)^2}{\cos \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha)^2} \\
 \left[\frac{1}{(\cos \alpha)^2} \right] &= \frac{(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} = 1 + (\tan \alpha)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \cos 2\alpha = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2 = \frac{\frac{(\cos \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2} - \frac{(\sin \alpha)^2}{(\cos \alpha)^2}}{\frac{1}{(\cos \alpha)^2}} = \frac{1 - (\tan \alpha)^2}{1 + (\tan \alpha)^2}$$

$$\text{c)} \quad \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha)^2}}{1 + \frac{1 - (\tan \alpha)^2}{1 + (\tan \alpha)^2}} = \frac{2 \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha)^2 + 1 - (\tan \alpha)^2} = \tan \alpha$$

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1 - \frac{1 - (\tan \alpha)^2}{1 + (\tan \alpha)^2}}{\frac{2 \tan \alpha}{1 + (\tan \alpha)^2}} = \frac{1 + (\tan \alpha)^2 - 1 + (\tan \alpha)^2}{2 \tan \alpha} = \tan \alpha$$

$$179/11. \quad \text{a)} \quad \sin 55^\circ + \sin 5^\circ = 2 \sin \frac{55^\circ+5^\circ}{2} \cos \frac{55^\circ-5^\circ}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 25^\circ = \cos 25^\circ$$

$$\text{b)} \quad \sin 80^\circ - \sin 40^\circ = 2 \cos 60^\circ \sin 20^\circ = \sin 20^\circ$$

$$\text{c)} \quad \cos 170^\circ + \cos 70^\circ + \cos 50^\circ = 2 \cos 120^\circ \cos 50^\circ + \cos 50^\circ = -\cos 50^\circ + \cos 50^\circ = 0$$

$$\text{d)} \quad \sin 20^\circ + \sin 40^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ = \cos 10^\circ = \sin 80^\circ$$

$$\text{e)} \quad 8 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = 8 \cdot$$

$$\frac{1}{4} (-\sin 20^\circ + \sin 100^\circ + \sin 60^\circ - \sin 140^\circ) =$$

$$= 2 (\sin 60^\circ + \sin 100^\circ - \sin 140^\circ - \sin 20^\circ) =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} + 2 \cos 120^\circ \sin(-20^\circ) - \sin 20^\circ \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{3} - \sin(-20^\circ) - \sin 20^\circ \right] = \sqrt{3}$$

$$[\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4} [\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)]]$$

$$\text{f)} \quad 8 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 8 \cdot$$

$$\frac{1}{4} (\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 60^\circ + \cos 140^\circ) =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ + \cos 20^\circ \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} + 2 \cos 120^\circ \cos 20^\circ + \cos 20^\circ \right] = 2 \left[\frac{1}{2} - \cos 20^\circ + \cos 20^\circ \right] = 1$$

$$[\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4} [\cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta+\gamma)]]$$

$$\text{g)} \quad \tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 60^\circ \tan 80^\circ = \frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ} \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{8 \cdot 1} \sqrt{3} = 3$$

$$179/12. \quad \text{a)} \quad \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{6}$$

$$\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = 2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\text{b)} \quad x := \sin 75^\circ, \quad y := \sin 15^\circ:$$

$$x + y = \frac{1}{2} \sqrt{6}, \quad x - y = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{1}{2} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \Rightarrow x = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow 2y = \frac{1}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow y = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$179/13. \quad \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \frac{3 \tan \alpha - (\tan \alpha)^3}{1 - 3(\tan \alpha)^2} - \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2} - \tan \alpha =$$

$$= \tan \alpha \frac{[3 - (\tan \alpha)^2][1 - (\tan \alpha)^2] - 2[1 - 3(\tan \alpha)^2] - [1 - 3(\tan \alpha)^2][1 - (\tan \alpha)^2]}{[1 - 3(\tan \alpha)^2][1 - (\tan \alpha)^2]} =$$

$$= \tan \alpha \frac{[3 \tan \alpha - (\tan \alpha)^3] 2 \tan \alpha}{[1 - 3(\tan \alpha)^2][1 - (\tan \alpha)^2]} = \tan 3\alpha \tan 2\alpha \tan \alpha$$

$$179/14. \quad \text{a)} \quad \sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma} = \frac{2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{2 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}} = \tan \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha/2$$

$$2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 = \tan(90^\circ - \alpha/2)$$

$$2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 = \frac{1}{\tan \alpha/2}, \quad 2 (\sin \alpha/2)^2 = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\text{b)} \quad \sin \alpha = \cos \beta + \cos \gamma$$

$$\sin(\beta + \gamma) = 2 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}; \quad \sin [180^\circ - (\beta + \gamma)] = \sin(\beta + \gamma)$$

$$2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta+\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin \frac{\beta+\gamma}{2} = \cos \frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin \beta/2 \cos \gamma/2 + \cos \beta/2 \sin \gamma/2 = \cos \beta/2 \cos \gamma/2 + \sin \beta/2 \sin \gamma/2$$

$$\sin \beta/2 (\cos \gamma/2 - \sin \gamma/2) = \cos \beta/2 (\cos \gamma/2 - \sin \gamma/2)$$

$$\sin \beta/2 = \cos \beta/2 \Rightarrow \beta = 90^\circ \quad (\text{bzw. } \sin \gamma/2 = \cos \gamma/2 \Rightarrow \gamma = 90^\circ)$$

$$179/15. \quad \sin \alpha = \sin \beta \cdot 2 \cos \gamma = 2 \sin \beta \cos([180^\circ - (\alpha + \beta)]) =$$

$$= -2 \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = -[\sin(-\alpha) + \sin(\alpha + 2\beta)]$$

$$\Rightarrow 0 = -\sin(\alpha + 2\beta) \Rightarrow \alpha + 2\beta = 180^\circ$$

wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ gilt $\beta = \gamma$,
das heißt, das Dreieck ist gleichschenkelig.

$$179/16. \quad \text{a)} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \tan \gamma = \tan[180^\circ - (\alpha + \beta)] = -\tan(\alpha + \beta) = -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\Rightarrow \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma = -\tan \alpha - \tan \beta$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \quad \text{b)} \text{ analog a)}$$

$$179/17. \quad \text{a)} \quad \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 + 2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \alpha/2 + 2 \cos \alpha/2 \cos \frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 2 \cos \alpha/2 \cdot 2 \cos \beta/2 \cos \gamma/2 =$$

$$= 4 \cos \alpha/2 \cos \beta/2 \cos \gamma/2$$

$$\text{b)} \quad \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2 + 2 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 2 \sin \alpha/2 [\sin \frac{\beta+\gamma}{2} + \sin \frac{\beta-\gamma}{2}] =$$

$$= 2 \sin \alpha/2 \cdot 2 \sin \beta/2 \cos \gamma/2 =$$

$$= 4 \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \cos \gamma/2$$

$$\text{c)} \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 - 2 (\sin \alpha/2)^2 + 2 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 1 - 2 (\sin \alpha/2)^2 + 2 \sin \alpha/2 \cos \frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$= 1 - 2 \sin \alpha/2 [\sin \alpha/2 - \cos \frac{\beta-\gamma}{2}] =$$

$$= 1 + 2 \sin \alpha/2 \cdot 2 \sin \beta/2 \sin \gamma/2 =$$

$$= 4 \sin \alpha/2 \sin \beta/2 \sin \gamma/2 + 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma &= 2 (\cos \alpha/2)^2 - 1 - 2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2} = \\
 &= 2 \cos \alpha/2 [\sin \frac{\beta+\gamma}{2} - \sin \frac{\beta-\gamma}{2}] - 1 = \\
 &= 2 \cos \alpha/2 \cdot 2 \cos \beta/2 \sin \gamma/2 - 1 = \\
 &= 4 \cos \alpha/2 \cos \beta/2 \sin \gamma/2 - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 179/18. \text{ a) } \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) = \sin \gamma \\
 &= 2 \sin \alpha [-\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)] = \\
 &= -4 \sin \alpha \sin \beta \sin(-\gamma) = 4 \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$

$$\text{denn } \cos \alpha = -\cos(\beta + \gamma) \text{ und } \sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma &= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) = \\
 &= 2 \cos \alpha [\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma)] = \\
 &= 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma &= 2 (\cos \alpha)^2 - 1 + 2 \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) = \\
 &= 2 \cos \alpha [-\cos(\beta + \gamma) - \cos(\beta - \gamma)] - 1 = \\
 &= -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma &= 1 - 2 (\sin \alpha)^2 - 2 \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) = \\
 &= -2 \sin \alpha [\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma)] + 1 = \\
 &= -4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 180/19. \text{ a) } (\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 + (\sin \gamma)^2 &= \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\beta) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\gamma) = \\
 &= \frac{1}{2} [3 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)] = \\
 &= \frac{1}{2} [3 + 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1] = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\
 &\quad (\text{vergleiche 18. c)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } (\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 - (\sin \gamma)^2 &= \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\beta) - \frac{1}{2} (1 - \cos 2\gamma) = \\
 &= \frac{1}{2} [1 - (\cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma)] = \\
 &= \frac{1}{2} [1 + 4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - 1] = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\
 &\quad (\text{vergleiche 18. d)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } (\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 &= \\
 &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta) + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\gamma) = \\
 &= \frac{1}{2} (3 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) = \\
 &= \frac{1}{2} (3 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1) = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\
 &\quad (\text{vergleiche 18. c)})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & (\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 - (\cos \gamma)^2 = \\
 & = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta) - \frac{1}{2}(1 + \cos 2\gamma) = \\
 & = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2\gamma) = \\
 & = \frac{1}{2}(1 - 4 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + 1) = 1 - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\
 & \quad (\text{vergleiche 18. d)})
 \end{aligned}$$

$$180/20. \text{ a)} \quad \sigma = \varepsilon + \frac{1}{2}(\omega - \varepsilon) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \omega), \quad \tau = \frac{1}{2}(\omega - \varepsilon)$$

denn wegen $\overline{AB} = \overline{AF} = \overline{AD}$ gilt:

Dreieck AFD gleichschenkelig, AH ist Winkelhalbierende.

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & \text{Sei K Schnittpunkt von EF und BG, L Schnittpunkt von EF und AH:} \\
 & \text{Fläche(ABCD) + Fläche(ABEF) =} \\
 & = \text{Fläche(ABKL) + 2 \cdot Fläche(LKGH) + Fläche(ABKL) =} \\
 & = 2 \cdot \text{Fläche(ABGH)} \quad (\text{gescherte Parallelogramme})
 \end{aligned}$$

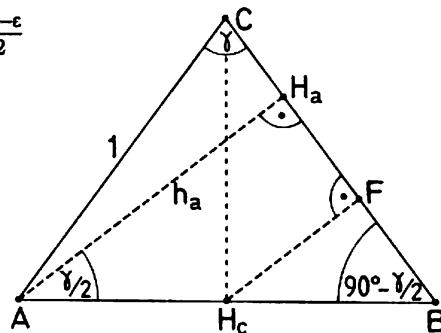
sei N Schnittpunkt von AD und EF, M Schnittpunkt von BC und EF:

$$\triangle BEM \cong \triangle AFN \quad \text{und} \quad \triangle NFD \cong \triangle MEC$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Fläche(ABCD) - Fläche(ABEF) = Fläche(ABCD) - Fläche(ABMN)} \\
 & = \text{Fläche(NMCD) = Fläche(FECD)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & \overline{AB}^2 \sin \omega + \overline{AB}^2 \sin \varepsilon = 2 \overline{AB} \cdot \overline{AH} \sin \sigma \\
 & \overline{AB}^2 \sin \omega + \overline{AB}^2 \sin \varepsilon = 2 \overline{AB}^2 \cdot \cos \tau \sin \sigma \\
 & \sin \omega + \sin \varepsilon = 2 \sin \sigma \cos \tau \\
 & \sin \omega + \sin \varepsilon = 2 \sin \frac{\omega + \varepsilon}{2} \cos \frac{\omega - \varepsilon}{2} \\
 & \overline{AB}^2 \sin \omega - \overline{AB}^2 \sin \varepsilon = \overline{FE} \cdot \overline{EC} \cdot \sin(90^\circ - \sigma) \\
 & \overline{AB}^2 \sin \omega - \overline{AB}^2 \sin \varepsilon = \overline{AB} \cdot 2 \overline{AB} \sin \tau \cos \sigma \\
 & \sin \omega - \sin \varepsilon = 2 \cos \sigma \sin \tau \\
 & \sin \omega - \sin \varepsilon = 2 \cos \frac{\omega + \varepsilon}{2} \sin \frac{\omega - \varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 180/21. \text{ a)} \quad & \frac{h_a}{c} = \cos \gamma/2, \quad \frac{h_a}{1} = \sin \gamma \\
 & \Rightarrow \sin \gamma = c \cos \gamma/2 \\
 & \text{wegen } \frac{c/2}{1} = \sin \gamma/2
 \end{aligned}$$



$$\text{b)} \quad F \text{ ist Mittelpunkt von } [BH_a], \text{ also gilt } \overline{CH_a} = \overline{CF} - \overline{FB}$$

$$\overline{CH_a} : 1 = \cos \gamma \Rightarrow \overline{CH_a} = \cos \gamma$$

$$\overline{FB} : c/2 = \sin \gamma/2 \Rightarrow \overline{FB} = c/2 \sin \gamma/2 = (\sin \gamma/2)^2$$

$$\overline{CF} : h_c = \cos \gamma/2 \Rightarrow \overline{CF} = h_c \cos \gamma/2 = (\cos \gamma/2)^2$$

$$\text{deshalb gilt auch: } \cos \gamma = (\cos \gamma/2)^2 - (\sin \gamma/2)^2$$

$$c) \overline{BC} - \overline{CH_a} = \overline{BH_a} = 2 \overline{BF} \Rightarrow 1 - \cos \gamma = 2 (\sin \gamma/2)^2$$

$$d) \frac{h_a}{1 + \cos \gamma} = \tan \gamma/2 \Rightarrow \frac{2 \sin \gamma/2 \cos \gamma/2}{1 + \cos \gamma} = \frac{\sin \gamma/2}{\cos \gamma/2}$$

$$\Rightarrow 1 + \cos \gamma = 2(\cos \gamma/2)^2$$

$$180/22. \quad \frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} a \sin \alpha + \frac{1}{2} b \sin \beta$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{\cos \alpha} \sin \alpha + \frac{1}{\cos \beta} \sin \beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$181/23. \quad \overline{AC} = b = 2r \sin \beta, \quad \overline{A'C} = b = 2r' \sin \beta$$

$$\Rightarrow r = r'$$

$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

$$2r \sin \gamma = 2r \sin \alpha \cos \beta + 2r \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

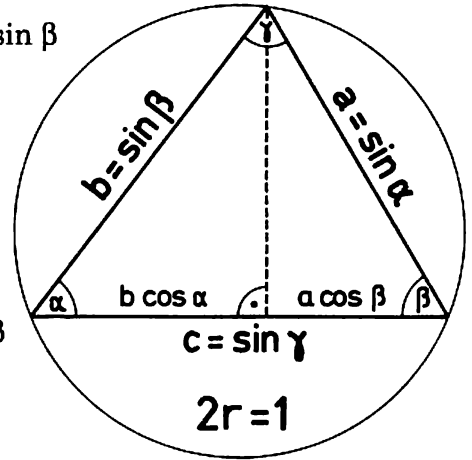
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Der Beweis klappt auch mit bloß einem Umkreis ($r = 0,5$), siehe Bild rechts:

$$c = \sin \gamma = \sin[180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$$

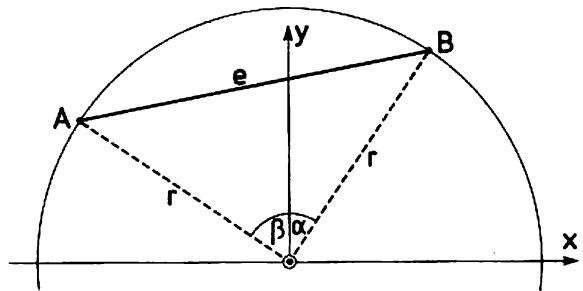
$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha, \text{ Einsetzen von } a, b \text{ und } c \text{ ergibt:}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$



$$181/24. \quad \text{I: } e^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{II: } e^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$



$$e^2 = (r \sin \alpha + r \sin \beta)^2 + (r \cos \alpha - r \cos \beta)^2$$

$$\text{I} = \text{II: } 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha + \beta) = r^2[(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2]$$

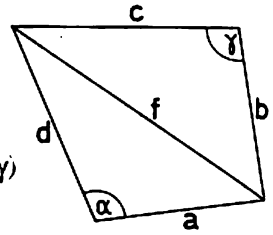
$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = (\sin \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \sin \beta + (\sin \beta)^2 +$$

$$+ (\cos \alpha)^2 - 2\cos \alpha \cos \beta + (\cos \beta)^2$$

$$- \cos(\alpha + \beta) = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

- 181/25. a) Die Flächenformel für die Teildreiecke ergibt
 $F = \frac{1}{2} ad \sin \alpha + \frac{1}{2} bc \sin \gamma = \frac{1}{2} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma)$



- b) Kosinussatz für die Teildreiecke

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha &= f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma \\ \Rightarrow a^2 + d^2 - b^2 - c^2 &= 2(ad \cos \alpha - bc \cos \gamma) \\ \Rightarrow (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4[a^2 d^2 (\cos \alpha)^2 + b^2 c^2 (\cos \gamma)^2 - 2abcd \cos \alpha \cos \gamma] \heartsuit \\ \text{aus a) folgt: } 4F &= 2(ad \sin \alpha + bc \sin \gamma) \\ \Rightarrow (4F)^2 &= 4[a^2 d^2 (\sin \alpha)^2 + b^2 c^2 (\sin \gamma)^2 + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma] \spadesuit \end{aligned}$$

$\heartsuit + \spadesuit$:

$$\begin{aligned} (4F)^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4[a^2 d^2 + b^2 c^2 + 2abcd (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma)] \\ (4F)^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4[a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma)] \\ 16F^2 &= -(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 4(a^2 d^2 + b^2 c^2) - 8abcd \cos(\alpha + \gamma) \\ 16F^2 &= -(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 4(a^2 d^2 + b^2 c^2) + 8abcd \cdot [1 - 2(\cos \frac{\alpha + \gamma}{2})^2] \\ 16F^2 &= -(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 4(a^2 d^2 + b^2 c^2) + 8abcd - 16abcd (\cos \frac{\alpha + \gamma}{2})^2 \\ 16F^2 &= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) - 16abcd (\cos \frac{\alpha + \gamma}{2})^2 \\ F &= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd (\cos \frac{\alpha + \gamma}{2})^2} \end{aligned}$$

- 181/26. Beim Sehnenviereck gilt $\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$,
 und wegen $\cos 90^\circ = 0$ ist die Fläche maximal.

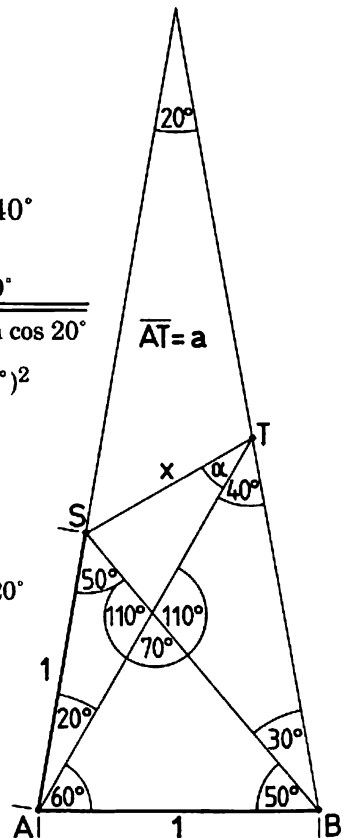
- 181/27. *Trigonometrische Lösung*

Dreieck ABT: $\frac{a}{\sin 80^\circ} = \frac{1}{\sin 40^\circ}$
 $a = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} = 2 \cos 40^\circ$

Dreieck AST: $x^2 = 1 + a^2 - 2a \cos 20^\circ$
 $\frac{\sin \alpha}{1} = \frac{\sin 20^\circ}{x} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sin 20^\circ}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos 20^\circ}}$

$$\begin{aligned} \text{Nenner}^2 &= 1 + a^2 - 2a \cos 20^\circ + (\cos 20^\circ)^2 - (\cos 20^\circ)^2 \\ &= 1 - (\cos 20^\circ)^2 + (a - \cos 20^\circ)^2 \\ &= (\sin 20^\circ)^2 + (2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ)^2 \\ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ &= -2 \sin 30^\circ \sin 10^\circ = -\sin 10^\circ \\ &= (\sin 20^\circ)^2 + (\cos 40^\circ - \sin 10^\circ)^2 \\ &= (\sin 20^\circ)^2 + (\cos 40^\circ - \cos 80^\circ)^2 \\ \cos 40^\circ - \cos 80^\circ &= -2 \sin 60^\circ \sin(-20^\circ) = \sqrt{3} \sin 20^\circ \\ &= (\sin 20^\circ)^2 + (\sqrt{3} \sin 20^\circ)^2 \\ &= (\sin 20^\circ)^2 + 3(\sin 20^\circ)^2 \\ &= 4(\sin 20^\circ)^2 \end{aligned}$$

Nenner = $2 \sin 20^\circ$
 $\Rightarrow \sin \alpha = 0,5 \Rightarrow \alpha = 30^\circ$



Elementargeometrische Lösung

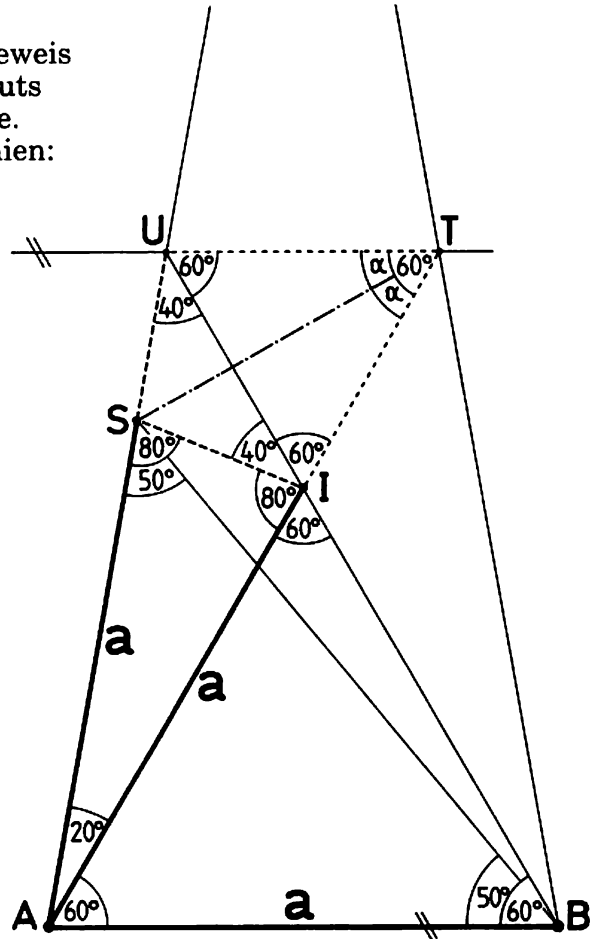
Viel eleganter dagegen ist der Beweis allein mit Winkelrechnung: es tuts schon der Lehrstoff der 7. Klasse.

Man zeichnet die beiden Hilfslinien:

BU mit $\angle ABU = 60^\circ$

UT mit $UT \parallel AB$

und weist mit Winkelrechnung nach, daß gilt:
Dreieck AIS ist gleichschenkelig,
Viereck SITU ist ein Drachen.



Gleichungen

182/1. a) $L = \{0,38...; 2,75...\}$ b) $L = \{0,71...; 5,57...\}$

182/2. a) $L = \{0; \pi/3; \pi; 5\pi/3\}$ b) $L = \{0; \pi\}$ c) $L = \{2,80...; 5,94...\}$

d) $L = \{0; \pi/3; 2\pi/3; \pi; 4\pi/3; 5\pi/3\}$ e) $L = \{\pi/3; \pi/2; 3\pi/2; 5\pi/3\}$

182/3. a) $L = \{0; \pi/6; 5\pi/6; \pi\}$ b) $L = \{0,67...; 5,60...\}$

c) $L = \{3\pi/8; 7\pi/8; \pi; 11\pi/8; 15\pi/8\}$

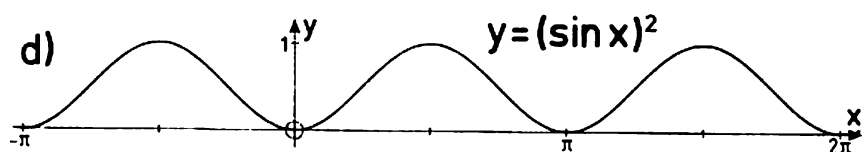
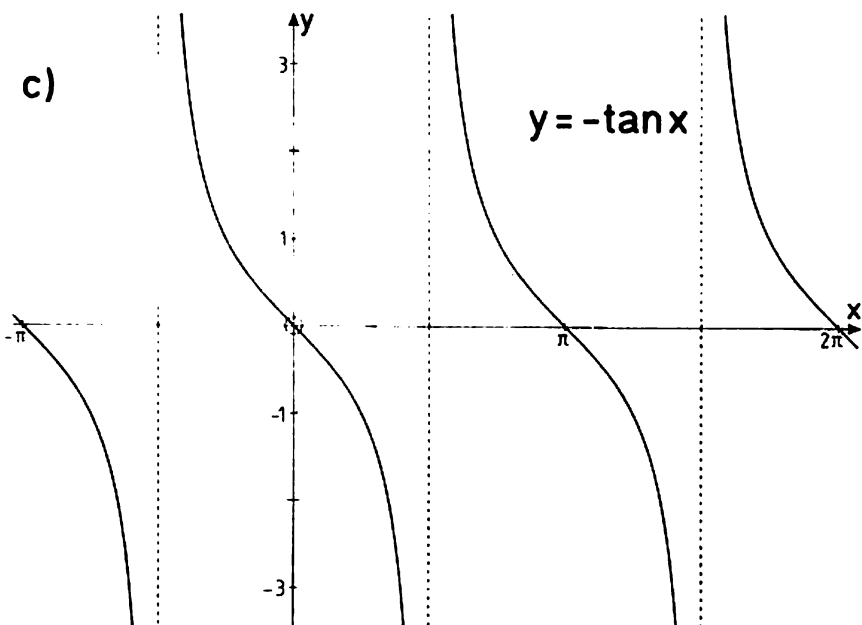
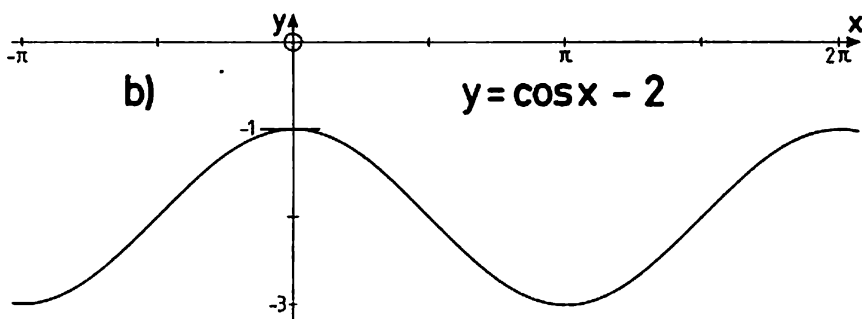
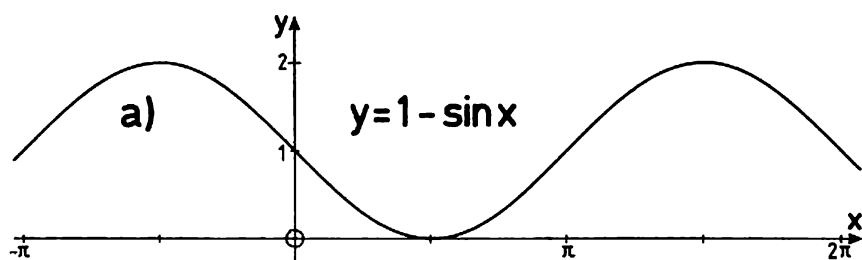
182/4. a) $L = \{1,75...; 6,09...\}$ b) $L = \{0,64...; 0,80...\}$ c) $L = \{2,33...; 2,49...\}$

- 182/5.** a) $L = \{\pi/4; 1,89...; 5\pi/4; 5,03...\}$ b) $L = \{\pi/4; 3\pi/4; \pi; 5\pi/4; 7\pi/4\}$
c) $L = \{0,92...; 2,15...; 4,06...; 5,30...\}$ d) $L = \{\pi/4; 0,92...; 5\pi/4; 4,06...\}$
- 182/6.** a) $L = \{1,76...; 4,90...\}$ b) $L = \{0,48...; 3,62...\}$
- 182/7.** a) $L = \{0,64...; 2,49...\}$ b) $L = \{0; 0,72...; 1,91...; \pi; 4,37...; 5,56...\}$
- 182/8.** a) $L = \{0,39...; 1,17...; 1,96...; 2,74...; 3,53...; 4,31...; 5,10...; 5,89...\}$
b) $L = \{1,10...; 1,24...; 1,89...; 2,03...; 4,24...; 4,39...; 5,03...; 5,17...\}$
- 182/9.** a) $L = \left\{ \frac{\pi}{16}(2k+1) \text{ mit } k = 0, 1, \dots, 15; \frac{\pi}{6} \cdot 2l \text{ mit } l = 0, 1, \dots, 5 \right\}$
b) $L = \left\{ \frac{\pi}{18} \cdot 2k \text{ mit } k = 0, 1, \dots, 17; \frac{\pi}{8} \cdot 2l \text{ mit } l = 1, 2, 3, 5, 6, 7 \right\}$
c) $L = \left\{ \frac{\pi}{20}(4k+1) \text{ mit } k = 0, 1, \dots, 9; \frac{\pi}{8}(4l+1) \text{ mit } l = 0, 1, 2, 3, 4 \right\}$
d) $L = \left\{ \frac{\pi}{12} \cdot 2k \text{ mit } k = 0, 1, \dots, 11 \right\}$
e) $L = \left\{ 0; \pi; \frac{\pi}{8}(2k+1) \text{ mit } k = 0, 1, \dots, 7; \frac{\pi}{24}(4l+3) \text{ mit } l = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 \right\}$
- 182/10** a) $L = \{0; \pi/2; 2\pi/3; \pi; 4\pi/3; 3\pi/2\}$ b) $L = \{\pi/4; 2\pi/3; 3\pi/4; 5\pi/4; 4\pi/3; 7\pi/4\}$
- 182/11.** a) $L = \{0; \pi/2; \pi; 3\pi/2; 1,25...; 2,51...; 3,76...; 5,02...\}$
b) $L = \{0; \pi; 0,62...; 1,88...; 4,39...; 5,65...\}$

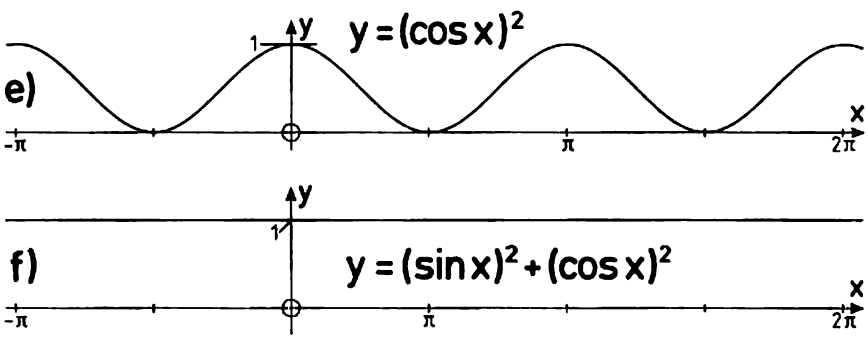
8. Kapitel

- 198/1.** $\sin(\pi/2 + x) = \sin \pi/2 \cos x + \cos \pi/2 \sin x = \cos x$
 $\sin(\pi/2 - x) = \sin \pi/2 \cos x - \cos \pi/2 \sin x = \cos x$
Achsensymmetrie zu $x = \pi/2$
- 198/2.** $\sin(\pi + x) = \sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x = -\sin x$
 $-\sin(\pi - x) = -(\sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x) = -\sin x$
Punktsymmetrie zu $(\pi|0)$
- 198/3.** $\cos(\pi/2 + x) = \cos \pi/2 \cos x - \sin \pi/2 \sin x = -\sin x$
 $-\cos(\pi/2 - x) = -(\cos \pi/2 \cos x + \sin \pi/2 \sin x) = -\sin x$
Punktsymmetrie zu $(\pi/2|0)$
- 198/4.** $\cos(\pi + x) = \cos \pi \cos x - \sin \pi \sin x = -\cos x$
 $\cos(\pi - x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = -\cos x$
Achsensymmetrie zu $x = \pi$
- 198/5.** $\tan(\pi + x) = \frac{\tan \pi + \tan x}{1 - \tan \pi \tan x} = \tan x$
 $-\tan(\pi - x) = -\frac{\tan \pi - \tan x}{1 + \tan \pi \tan x} = \tan x$
Punktsymmetrie zu $(\pi|0)$
- 198/5.** Symmetrieachsen der Sinuskurve: $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Symmetriezentren der Sinuskurve: $(k\pi|0), k \in \mathbb{Z}$
Symmetrieachsen der Kosinuskurve: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Symmetriezentren der Kosinuskurve: $(\pi/2 + k\pi|0), k \in \mathbb{Z}$
- 198/7.** $(0|0), (\pi|0), (2\pi|0)$

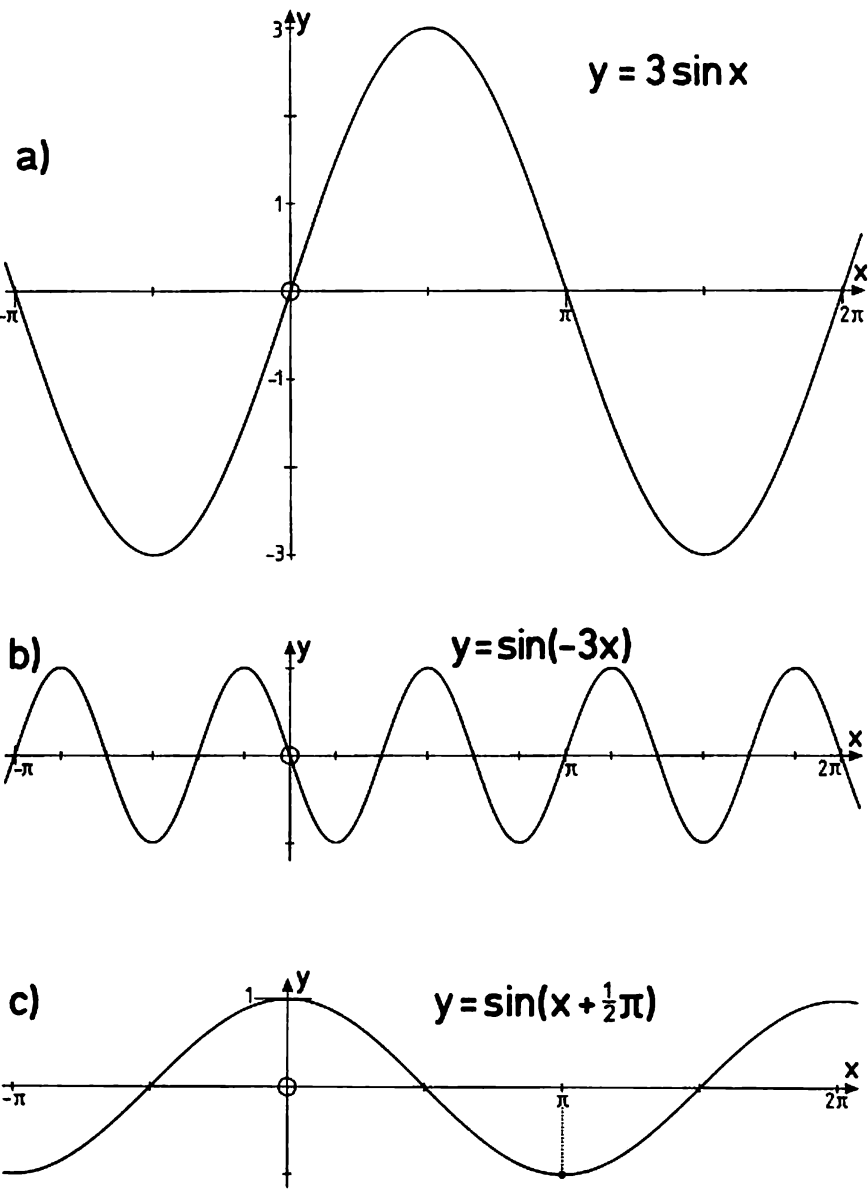
198/8.



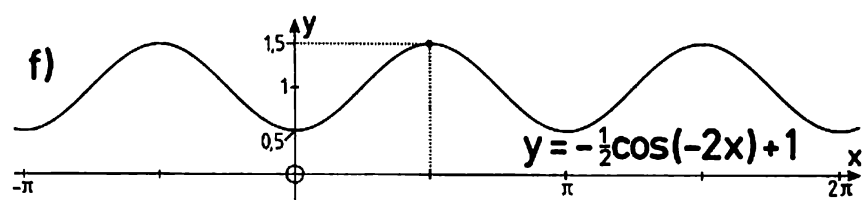
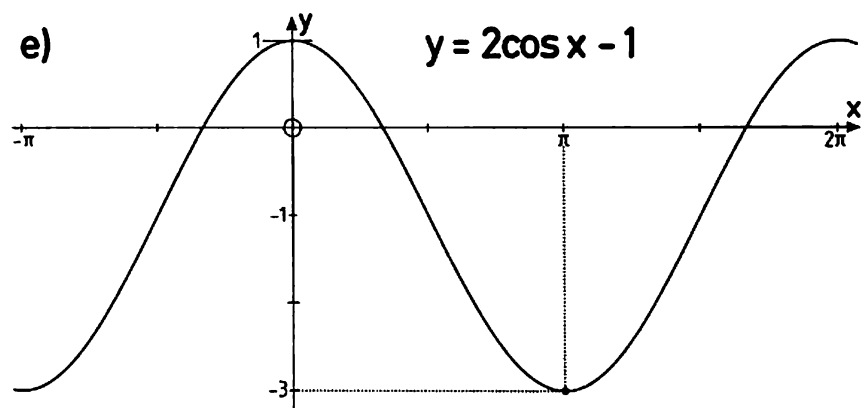
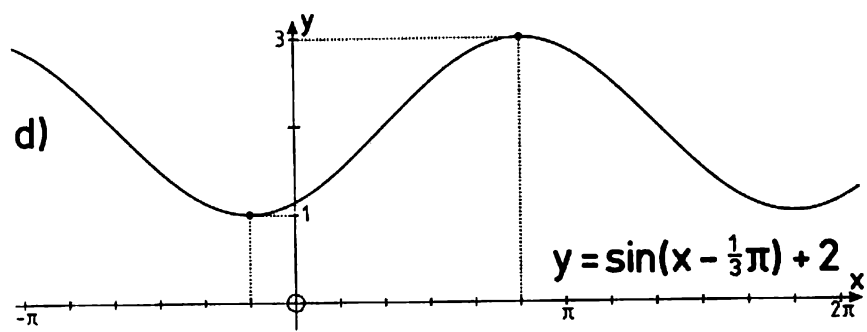
198/8.

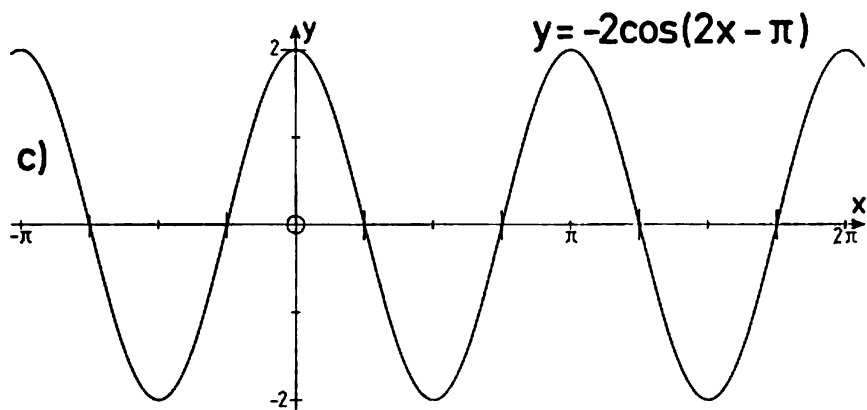
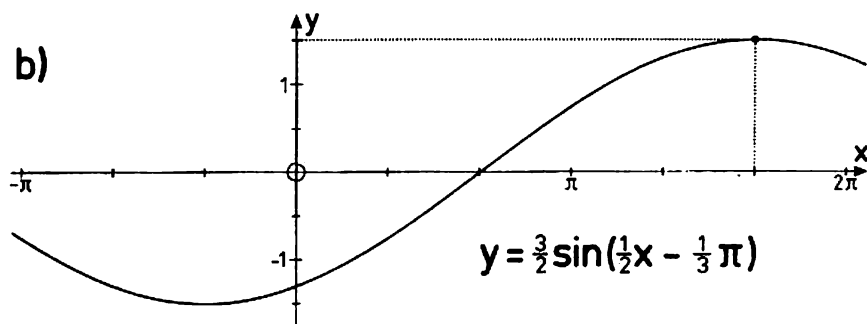
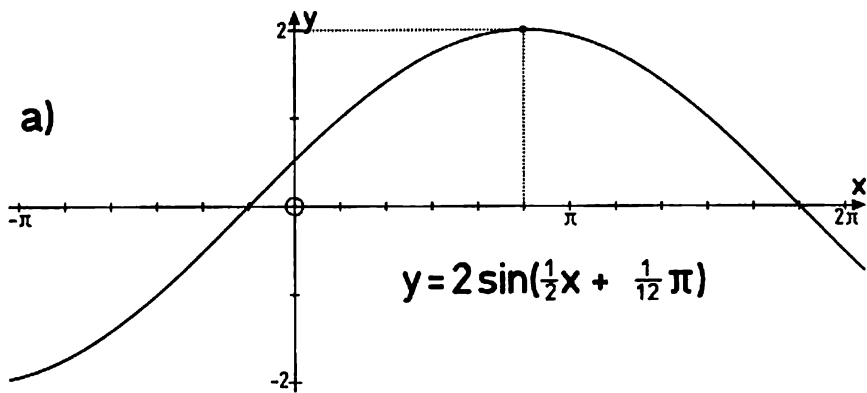


198/10.

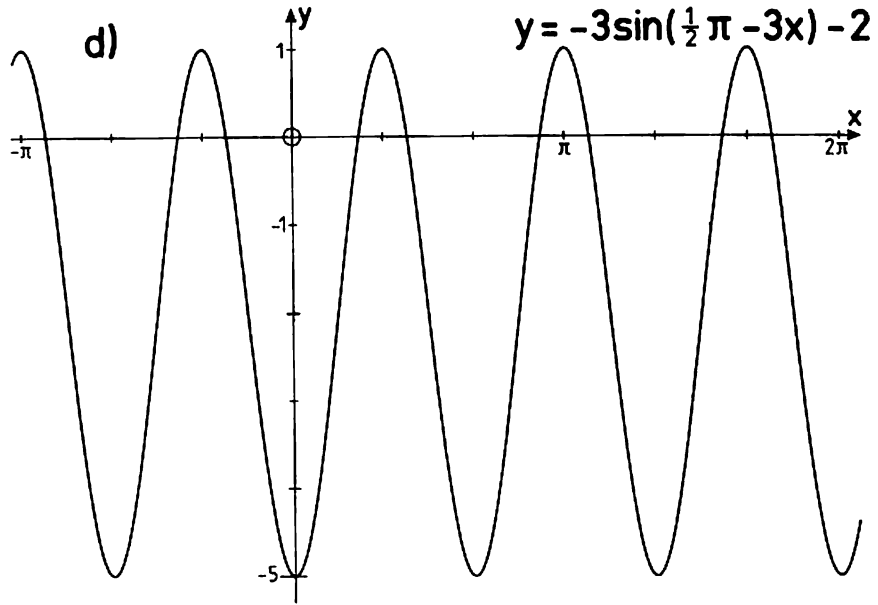


198/10.



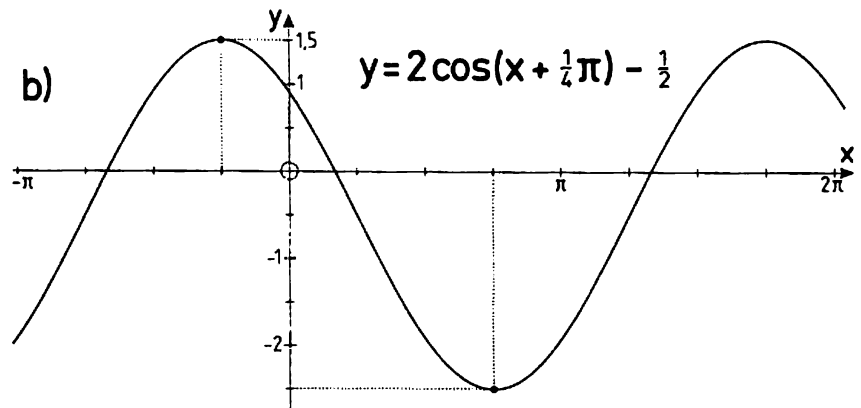
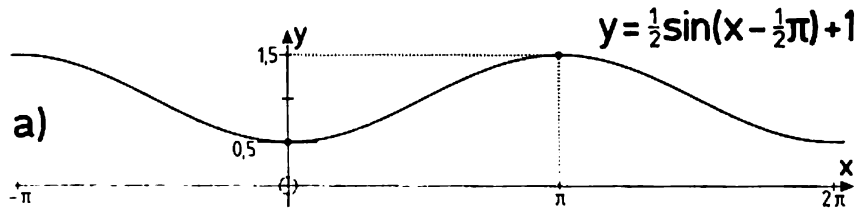


198/11.



198/12. a) Keine Nullstellen, Hochpunkte $(\pi + 2k\pi | 1,5)$,
Tiefpunkte $(2k\pi | 0,5)$, $k \in \mathbb{Z}$ Wertemenge: $W = [0,5 ; 1,5]$

b) Nullstellen: $x = 0,53... + k\pi$
Hochpunkte: $(-\pi/4 + 2k\pi | 1,5)$ Tiefpunkte: $(3\pi/4 + 2k\pi | -2,5)$
Wertemenge: $W = [-2,5 ; 1,5]$



199/13.	$\frac{x}{0,39}$	$\frac{x - \sin x}{0,0098}$	$\frac{x}{0,30}$	$\frac{\tan x - x}{0,0093}$	$\frac{x}{0,26}$	$\frac{\tan x - \sin x}{0,0089}$
	0,181	0,00099	0,143	0,00098	0,125	0,00098

199/14.	a)	$x = \pi$	$p = \pi$	$x = \pi/2$	$W = [-5 ; 5]$
	b)	$x = \pi/5$	$p = 2\pi/5$	$x = \pi/10$	$W = [-1 ; 1]$
	c)	$x = 5 + \pi$	$p = 2\pi$	$x = 5 + \pi/2$	$W = [-1 ; 1]$
	d)	$x = 5\pi$	$p = 10\pi$	$x = 2,5\pi$	$W = [-1 ; 1]$
	e)	$x = \pi$	$p = 2\pi$	$x = 3\pi/2$	$W = [-5 ; 5]$
	f)	$x = \pi/5$	$p = 2\pi/5$	$x = 3\pi/10$	$W = [-1 ; 1]$
	g)	$x = 5 - \pi$	$p = 2\pi$	$x = 5 - \pi/2$	$W = [-1 ; 1]$
	h)	$x = 5\pi$	$p = 10\pi$	$x = 7,5\pi$	$W = [-1 ; 1]$
	i)	$x = 2\pi/3$	$p = 2\pi$	$x = 7\pi/6$	$W = [-2 ; 2]$
	j)	$x = \pi/6$	$p = \pi$	$x = 5\pi/12$	$W = [-2 ; 2]$
	k)	$x = \pi/2$	$p = \pi$	$x = \pi/4$	$W = [-2 ; 2]$
	l)	$x = \pi/2$	$p = 4\pi$	$x = 7\pi/2$	$W = [-1,5 ; 1,5]$
	m)	$x = \pi/4$	$p = \pi$	$x = \pi/2$	$W = [-1 ; 1]$
	n)	$x = \pi/4$	$p = 6\pi$	$x = 7\pi/4$	$W = [-1 ; 1]$
	o)	$x = \pi/2$	$p = 4\pi/3$	$x = 5\pi/6$	$W = [-1 ; 1]$

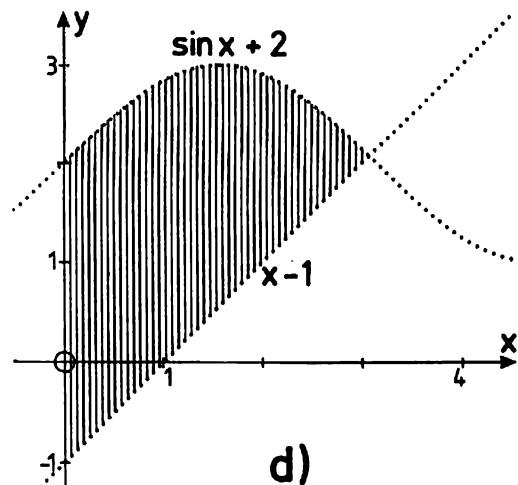
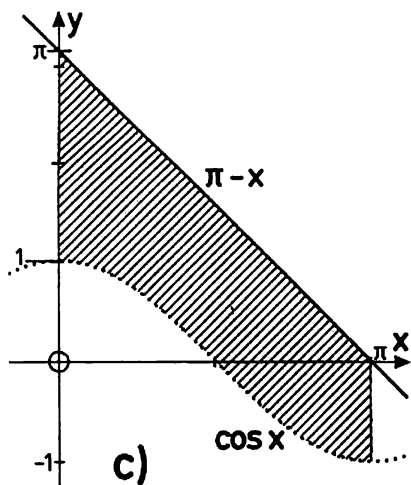
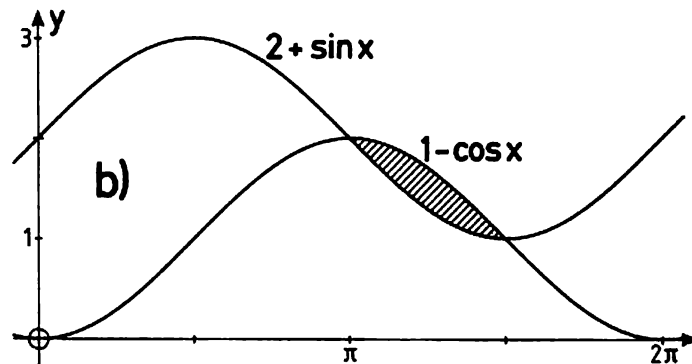
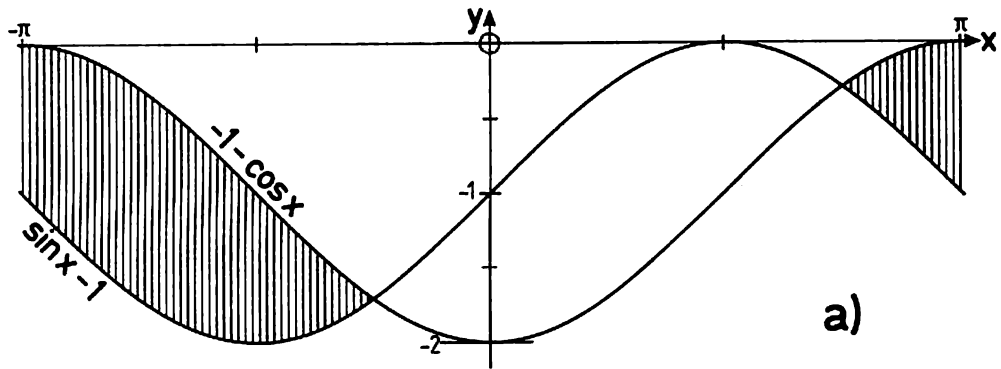
199/15. **a)** $A_1 = 2$ $A_2 = \pi/2 - 1$ **b)** $A_1 = 2 - \sqrt{2}$ $A_2 = 2\sqrt{2}$

200/16. **a)** $\sin(x - \pi/3)$ **b)** $-3 \sin x$ **c)** $\sin x/3$ **d)** $-2 \sin(x - \pi/3)$
e) $\sin 2(x + \pi/6)$ **f)** $-3/2 \sin 3/2x$ **g)** $3/2 \sin 1/2(x - 2/3\pi)$

201/17. **a)** $\sin(2x + \pi/2)$ **b)** $\sin(7/12x + \pi/12)$ **c)** $-5/2 \sin(7/4x - \pi/4)$

- 201/18. a) $y = \sin x$ b) $y = 0,5 \sin 2x$ c) $\frac{1}{\pi} \sin \pi x$
d) $10 \sin \frac{1}{10} x$ e) $\pi \sin \frac{1}{\pi} x$ f) $a \sin \frac{1}{a} x$

201/19.



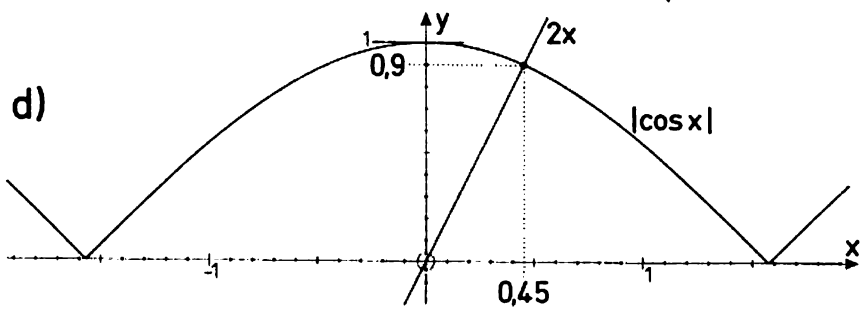
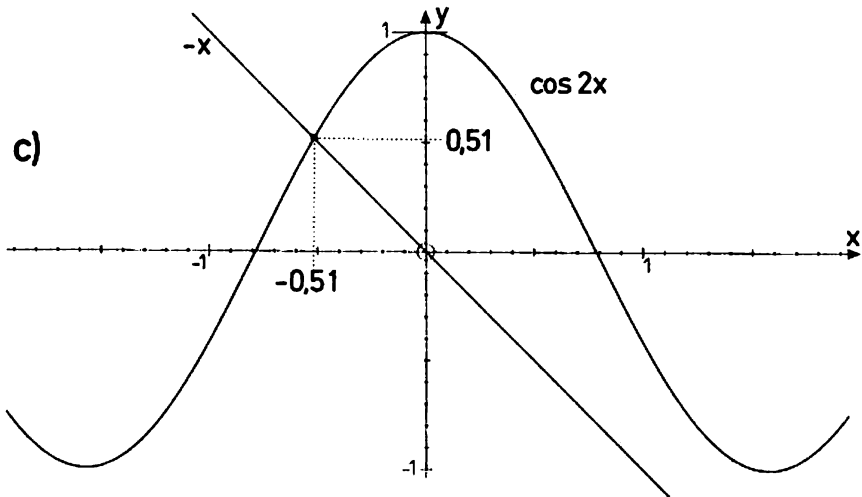
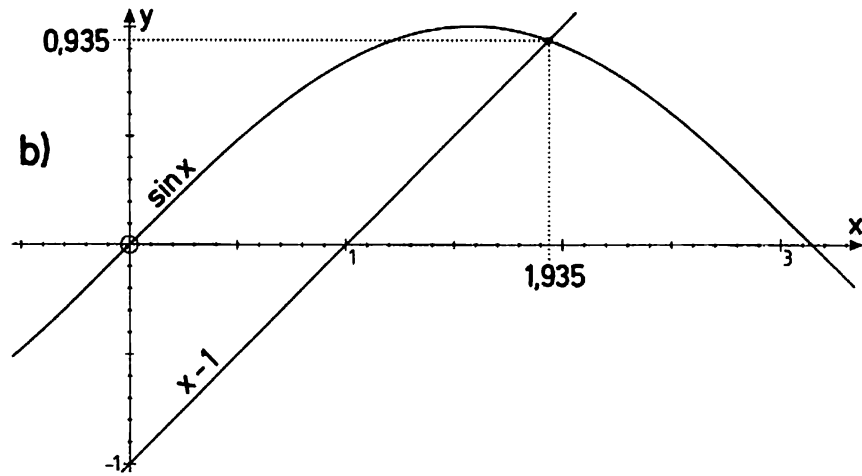
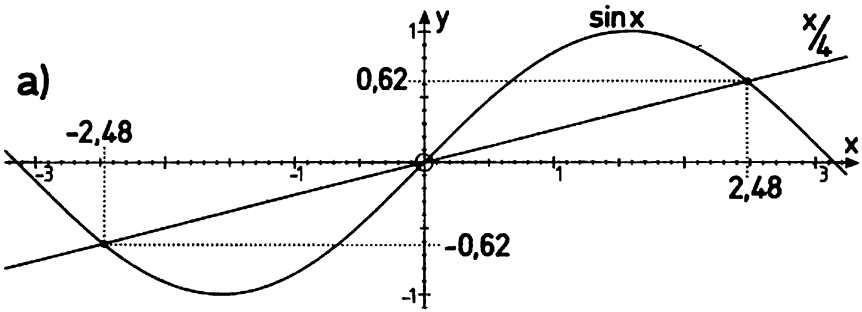
- 202/20.** a) $D = \mathbb{R}$, $p = 2\pi$ b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, $p = 2\pi$
 c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi\}$, $p = \pi$ d) $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $p = 2\pi$

- 202/21.** a) $x = 0,10\dots$ oder $x = 3,04\dots$ b) $x = 4,14\dots$ oder $x = 5,28\dots$
 c) $x = 0,32\dots$ oder $x = 1,24\dots$ oder $x = 3,46\dots$ oder $x = 4,39\dots$
 d) $x = 0,50\dots$ oder $x = 2,64\dots$ oder $x = 3,64\dots$ oder $x = 5,78\dots$
 e) $x = 0,00\dots$ oder $x = 2,09\dots$ oder $x = 3,14\dots$ oder $x = 5,23\dots$
 f) $x = 0,50\dots$ oder $x = 4,21\dots$

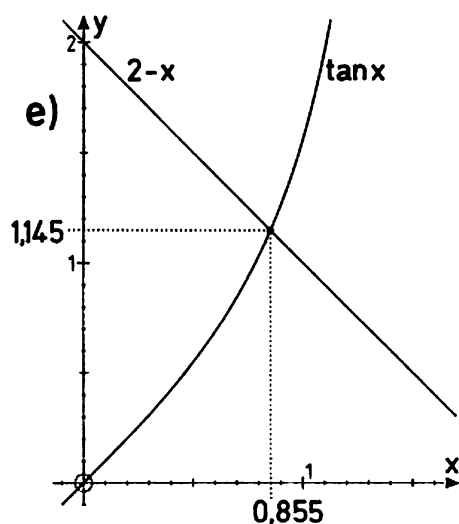
- 202/22.** a) $x = 1,77\dots$ oder $x = 4,51\dots$ b) $x = 1,99\dots$ oder $x = 4,28\dots$
 c) $x = 0,14\dots$ oder $x = 2,99\dots$ oder $x = 3,28\dots$ oder $x = 6,14\dots$
 d) $x = 0,49\dots$ oder $x = 2,64\dots$ oder $x = 3,64\dots$ oder $x = 5,78\dots$
 e) $x = 0,94\dots$ oder $x = 1,14\dots$ oder $x = 4,08\dots$ oder $x = 4,28\dots$
 f) $x = 2,21\dots$

- 202/23.** a) $x = 2,76\dots$ b) $x = 1,14\dots$ c) $x = 0,42\dots$ oder $x = 2,00\dots$
 d) $x = 0,14\dots$ oder $x = 2,99\dots$ e) $x = 0,00\dots$ oder $x = 2,09\dots$
 f) keine Lösung

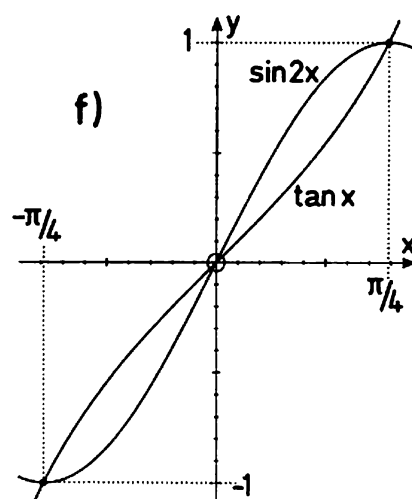
- 202/24.** a) $3,34\dots < x < 6,08\dots$ b) $0 \leq x \leq 2,55\dots$ oder $3,72\dots \leq x < 2\pi$
 c) $0 \leq x \leq 0,64\dots$ oder $0,92\dots \leq x \leq 3,78\dots$ oder $4,06\dots \leq x < 2\pi$
 d) $0 \leq x < 0,49\dots$ oder $2,64\dots < x < 3,64\dots$ oder $5,78\dots < x < 2\pi$
 e) $2,51\dots < x < 2,71\dots$ oder $5,65\dots < x < 5,85\dots$
 f) $0 \leq x < \frac{3}{4}\pi$ oder $3,92\dots < x < 2\pi$



202/25. e) Die Aufgabe in der ersten Auflage führt zur Schnittgleichung $\tan x = x$ und zur simplen Lösung $x = 0$. Von der zweiten Auflage an heißt die Schnittgleichung $\tan x = 2 - x$

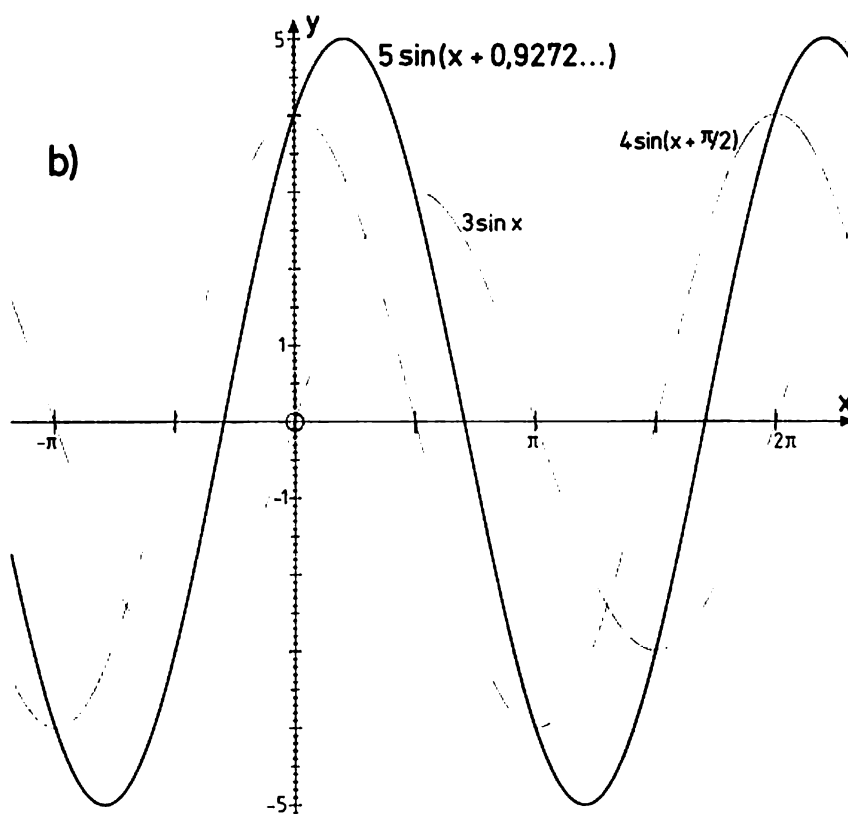


f) Lösungen $\pm\pi/4 + k\pi$

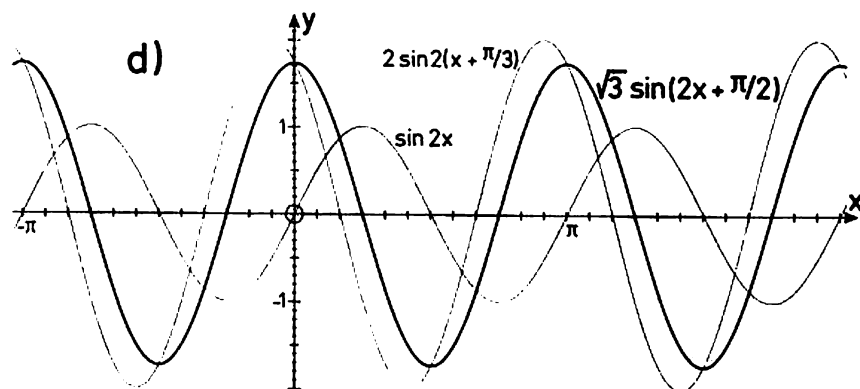
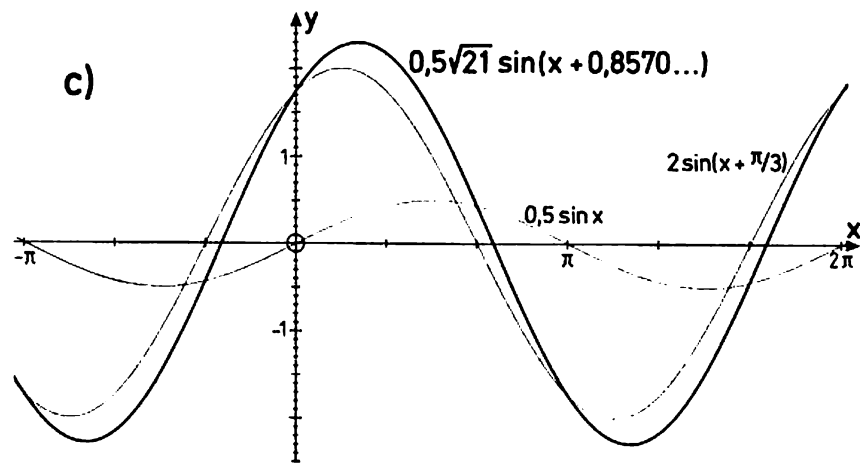
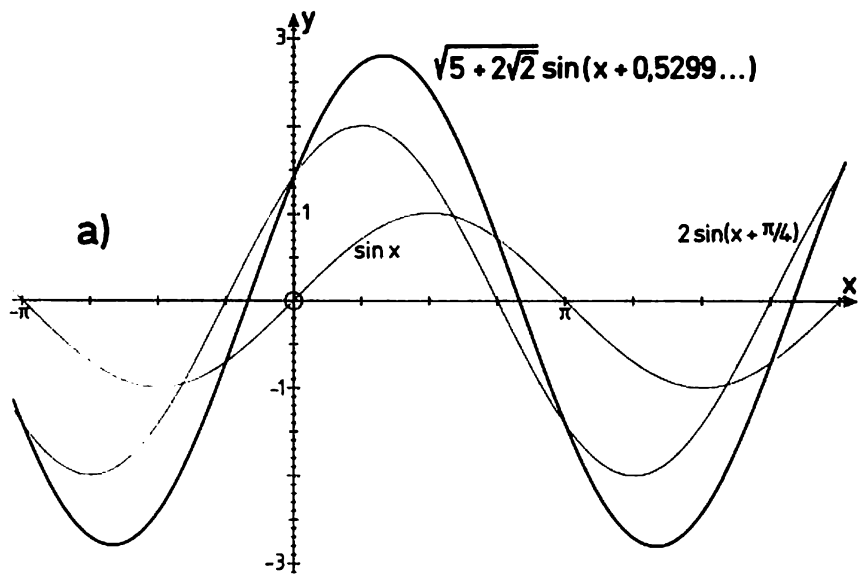


202/26. a) $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \sin(x + 0,5299\dots)$ **b)** $5 \sin(x + 0,9272\dots)$

c) $1/2\sqrt{21} \sin(x + 0,8570\dots)$ **a)** $\sqrt{3} \sin(2x + \pi/2)$



202/26.



202/27. $P(x|y) = P(r \cos \varphi | r \sin \varphi)$
 $r \sin(\alpha + \varphi) = r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi = x \sin \alpha + y \cos \alpha$

Aufgaben aus der Besonderen Prüfung (1985 bis 1988)

Planimetrie

263/I. a) $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\overline{MA} = \frac{1}{2}\sqrt{2} a$, $\overline{AD} = \sqrt{2} a - a$
 $\text{Bogen(AC)} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} a \pi = \frac{1}{4}\sqrt{2} a \pi$, $\text{Bogen(DC)} = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot a \pi = \frac{1}{4} a \pi$
 Umfang: $u = a \left[\frac{1}{4} \pi (\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2} - 1 \right]$

b) Fläche: $F = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} a^2 \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{8} a^2 \pi = \frac{1}{4} a^2$

263/II. a) Seite vom regelm. Achteck mit Diagonale 8: $\overline{HB} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

b) Fläche(ABMH) = $2 \cdot \frac{1}{2} \overline{MA} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{HB} = 8\sqrt{2}$

c) $\overline{AB} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow \text{Umfang } u = 32\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

d) wegen $\sphericalangle BAH = 135^\circ$ gilt: Bruchteil = $\frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{8} = 37,5\%$

e) Kreisbogenlänge = $\frac{3}{8} \cdot 2 \cdot \overline{AB} \pi = 3\sqrt{2 - \sqrt{2}} \pi \approx 7,2$

263/III. a) $\overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \overline{AB} \pi = a\sqrt{3}$, $F = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = a^2\sqrt{3}$

b) Fläche(schraff.) = $\frac{1}{2}(\overline{AB}/2)^2 \pi + \text{Fläche(ABC)} - \frac{1}{6} \overline{CD}^2 \pi$
 $= \frac{1}{2} a^2 \pi + \text{Fläche(ABC)} - \frac{1}{2} a^2 \pi = \text{Fläche(ABC)}$

264/IV. a) $e = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} s = \sqrt{3} s$, $F = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} s \cdot s = \sqrt{3} s^2$

b) $\frac{1}{2} sd = \frac{1}{4}\sqrt{3} s^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{3} s$

c) $\sphericalangle ADC = 120^\circ = \frac{1}{3} \cdot 120^\circ \Rightarrow b = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot s \cdot \pi = \frac{2}{3} s \pi$

d) Fläche(schraff.) = Fläche(Sektor ADC) – Fläche(Halbkreis DMC)
 $= \frac{1}{3} s^2 \pi - \frac{1}{2} (s/2)^2 \pi = \frac{1}{3} s^2 \pi - \frac{1}{8} s^2 \pi = \frac{5}{24} s^2 \pi$
 wenn $s = 4\text{cm}$, dann $F = \frac{10}{3} \pi \text{ cm}^2$

Trigonometrie

264/I. 1 $\overline{AT} = 795\text{m} \cdot \tan 67,5^\circ$, $\overline{BT} = 795\text{m} \cdot \tan 37^\circ$,
 $\overline{AB} = 795\text{m}(\tan 67,5^\circ - \tan 37^\circ) \approx 1320\text{ m}$

2. $1 + \sqrt{3} \sin x \cos x = (\cos x)^2 \Rightarrow 1 - (\cos x)^2 + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$
 $(\sin x)^2 + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \Rightarrow (\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin x = 0$
 $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = \pi \text{ oder } x = 2\pi$
 $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0 \mid : \cos x \Rightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ oder } x = \frac{5\pi}{3}$
 $L = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$

264/II. 1 $2 \cos(\pi/2 - x) - \sin(-x) + \cos 5\pi/6 = \sqrt{3}$
 $2 \sin x + \sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$
 $3 \sin x = \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow x = \pi/3$

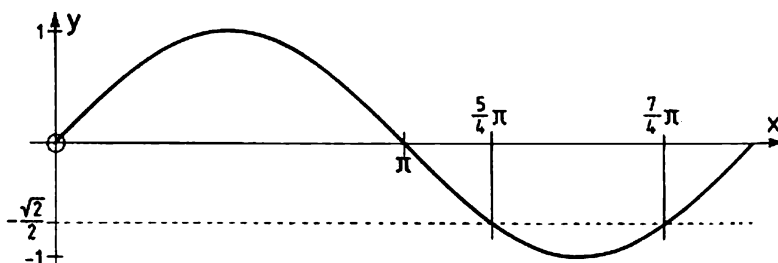
2. a) Abstand $a = 54,87\text{m} \cdot \tan 4,45^\circ \approx 4,27\text{m}$
b) Länge $l = \frac{\sin 25,55^\circ}{\sin 60^\circ} s \approx 27,59\text{m}$

265/III. 1 a) Nenner $= \sqrt{1 - \cos x} \cdot \sqrt{1 + \cos x} =$
 $= \sqrt{1 - (\cos x)^2} = \sqrt{(\sin x)^2} = |\sin x|$
 $D =] - \pi ; \pi [\setminus \{0\}$ beziehungsweise $x \notin \{-\pi, 0, \pi\}$

b) Zähler $= \cos(\pi/2 + x) = -\sin x$,
Nenner $= |\sin x| = \sin x$ (wegen $0 < x < \pi$) $\Rightarrow$ Term $= -1$

2. $\tan \alpha = \frac{h + s \cdot \sin \beta}{s \cdot \cos \beta} \Rightarrow \alpha \approx 49^\circ$

265/IV. 1 $2 \sin x + \sqrt{2} > 0$
 $\Rightarrow \sin x > -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $\Rightarrow 0 \leq x < \frac{5}{4}\pi \text{ oder } \frac{7}{4}\pi < x \leq 2\pi$



2. a) $\overline{BC} = 5\sqrt{95} \text{ mm} \approx 49 \text{ mm}$
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{95}}{12} \Rightarrow \alpha \approx 54^\circ$

b) $\delta = 360^\circ - 2\alpha \approx 251^\circ$
Bogen(CD) $= \frac{\delta}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 35 \text{ mm} \cdot \pi \approx 154 \text{ mm}$
Umfang $= 2\overline{BC} + \text{Bogen(CD)} \approx 251 \text{ mm}$

I.1. Die Ellipse als Zylinderschnitt

Lehrbuch Seite 214

1. a) $a = 45^\circ$, $b = 6$, $a = 6\sqrt{2} \approx 8,5$
 c) $a = 90^\circ$, $b = 6 = a$

b) $a = 60^\circ$, $b = 6$, $a = 4\sqrt{3} \approx 6,9$

2. a) $a = 5$, $b = 3$, $r = 3$, $a \approx 36,9^\circ$
 c) $a = 10$, $b = 4$, $r = 4$, $a \approx 23,6^\circ$

b) $a = 5$, $b = 4$, $r = 4$, $a \approx 53,1^\circ$

3. a) $r = 5$, $h = 24$, $b = 5$, $a = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$
 c) $2r = h$, $b = r$, $a = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$

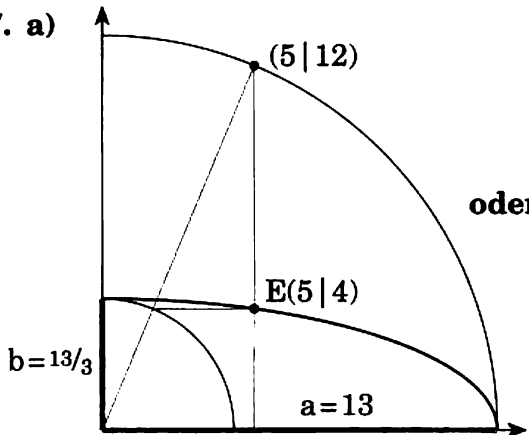
b) $r = h$, $b = r$, $a = \sqrt{(r/2)^2 + r^2} = r/2\sqrt{5}$

4. $a = 6$, $b = 4$

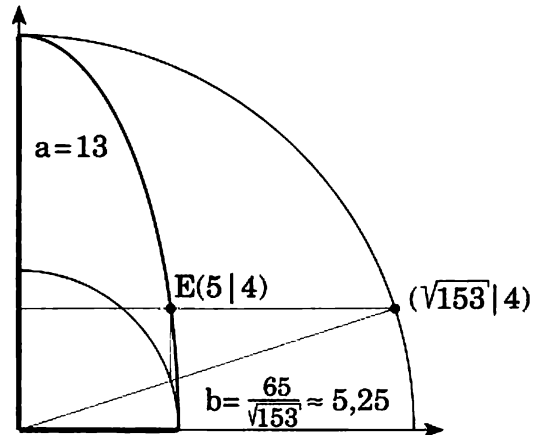
5. $a = 15/2$, $b = 5$

6. klar!

•7. a)



oder



- b) $b = 5$, $E(6|4)$, genau eine Lösung: $a = 10$ (waagrecht)

- c) $a = 10$, $E(6|6)$, genau eine Lösung: $b = 7,5$; dazu passen zwei kongruente Ellipsen: eine mit waagrechtem a und eine mit senkrechtem a .

8. $a = 6\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$

9. Die Streifenlänge $a+b=r$ ist die Entfernung von Zirkelspitze und Zirkelmine. Ein Punkt P der Haupt- oder Nebenachse sei Mittelpunkt eines Kreises mit Radius r . Dieser Kreis schneide die andere Ellipsenachse in U und V . PU und PV schneiden den Kreis um P mit dem Radius einer Halbachse in zwei Ellipsenpunkten.

10. Die Achsenpunkte der Sprosse, die die Leiterlänge 4 halbiert, rutschen auf einem Viertelkreis, weil nur für sie gilt $a = b = 2 = \text{Kreisradius}$.

I.1. Die Ellipse als Zylinderschnitt

Lehrbuch Seite 214

•11. a)

$P(-1,5 | 5)$, $Q(8,5 | 0)$,

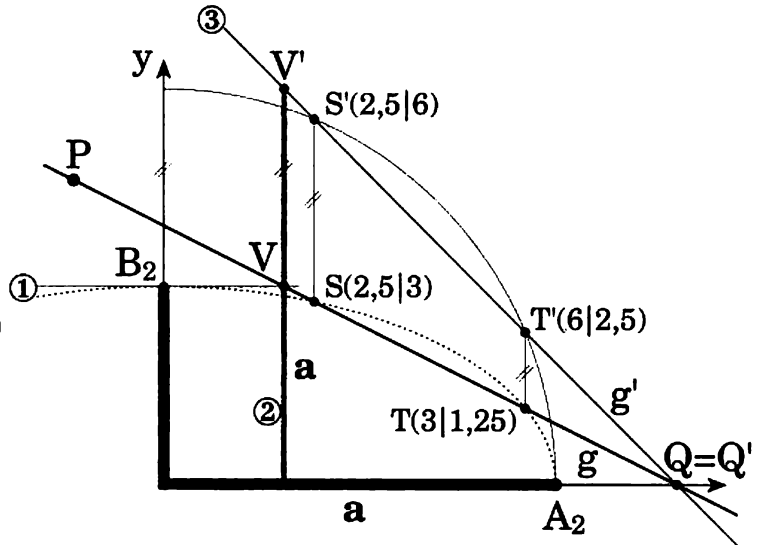
$A_2(6,5 | 0)$, $B_2(0 | 3,25)$

Die Schritte ① bis ③

zeigen die Streckung

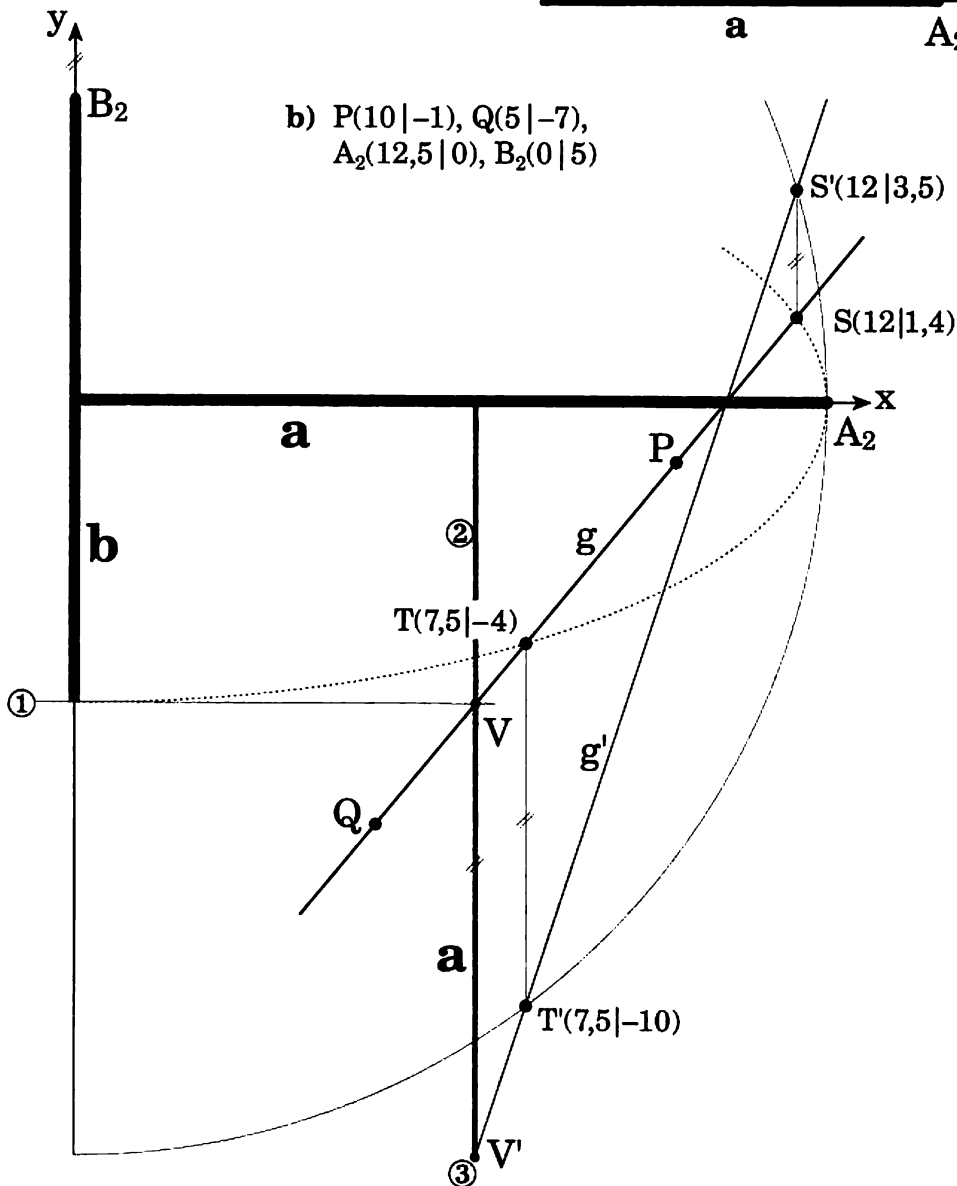
von g in y -Richtung:

$V(x | b)$ wird zu $V'(x | a)$



b) $P(10 | -1)$, $Q(5 | -7)$,

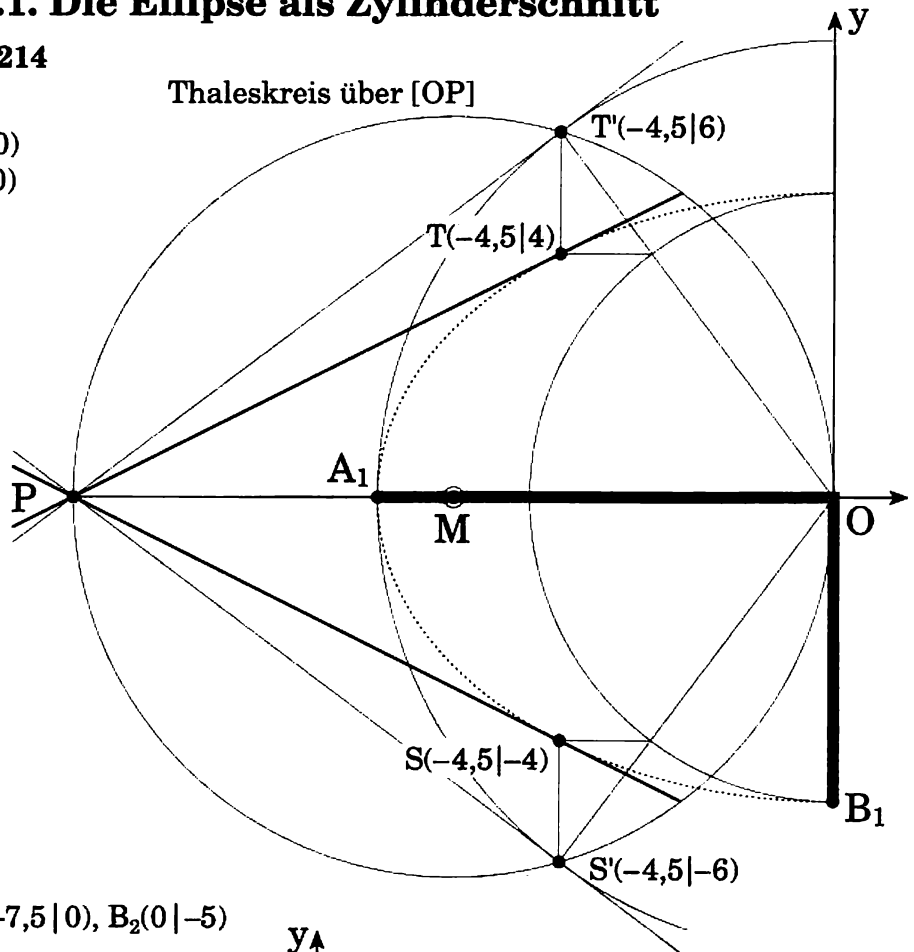
$A_2(12,5 | 0)$, $B_2(0 | 5)$



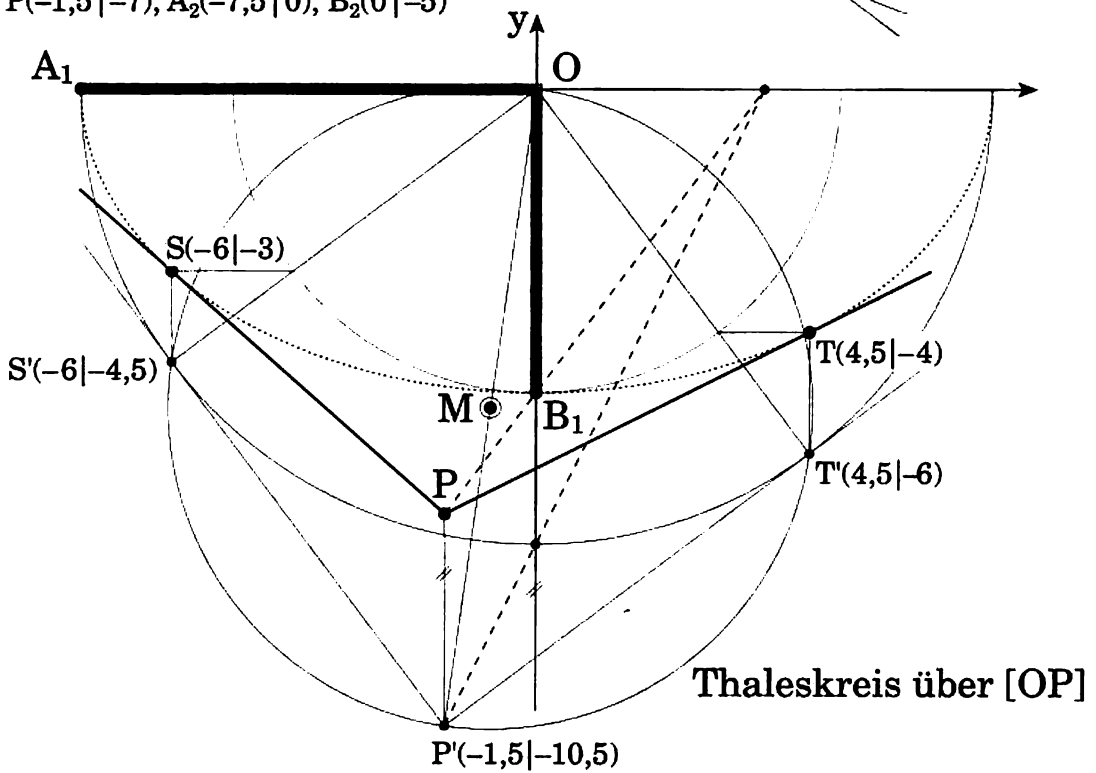
I.1. Die Ellipse als Zylinderschnitt

Lehrbuch Seite 214

- 12. a) $P(-12,5 | 0)$
 $A_2(-7,5 | 0)$
 $B_2(0 | -5)$



- b) $P(-1,5 | -7)$, $A_2(-7,5 | 0)$, $B_2(0 | -5)$



I.2. Die Mittelpunkt-Gleichung der Ellipse

Lehrbuch Seite 221

1. a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ b) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$

2. a) $a = 4, b = 2\sqrt{2}$, Querformat b) $a = 2, b = 1$, Querformat
c) $a = 1, b = 0,5$, Hochformat d) $a = 1,5; b = 1,25$, Querformat

3. a) $b = \sqrt{5}$ b) $a = 10\sqrt{2}$ c) $b = 3\sqrt{10}$ d) $a = 5\sqrt{13}$

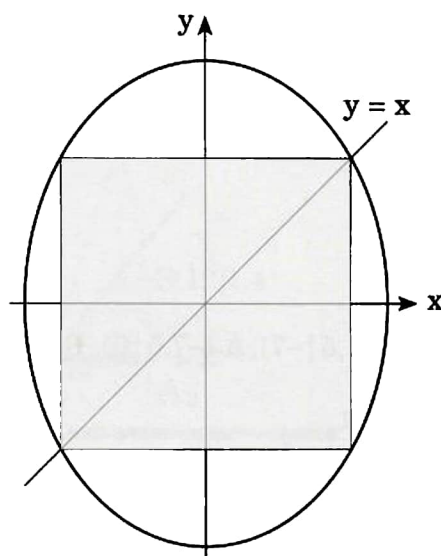
4. a) $\frac{x^2}{85} + \frac{y^2}{85/4} = 1$ b) $\frac{x^2}{145} + \frac{y^2}{1305/16} = 1$

c) $\frac{x^2}{545} + \frac{y^2}{545/16} = 1$ d) $\frac{x^2}{377} + \frac{y^2}{377} = 1$ (Kreis!)

Lehrbuch Seite 222

5. Die Winkelhalbierende $y = x$
schneidet die Ellipse in $(2,4 | 2,4)$
also ist $s = 4,8$.

6. Gerade $9y^2 = 4x^2 - 100x + 625$ eingesetzt
in die Ellipse $9x^2 + 4 \cdot 9y^2 = 9 \cdot 500$
ergibt $9x^2 + 16x^2 - 400x + 2500 = 4500$,
vereinfacht $25x^2 - 400x - 2000 = 0$,
dividiert durch $25x^2 - 16x - 80 = 0$,
faktoriert $(x - 20)(x + 4) = 0$ liefert die
 x -Werte 20 und -4 der Schnittpunkte.
20 und -4 eingesetzt in die Geradengleichung ergibt die y -Werte
der Schnittpunkte 5 und -11 . Schnittpunkte $(-4 | -11)$ und $(20 | 5)$



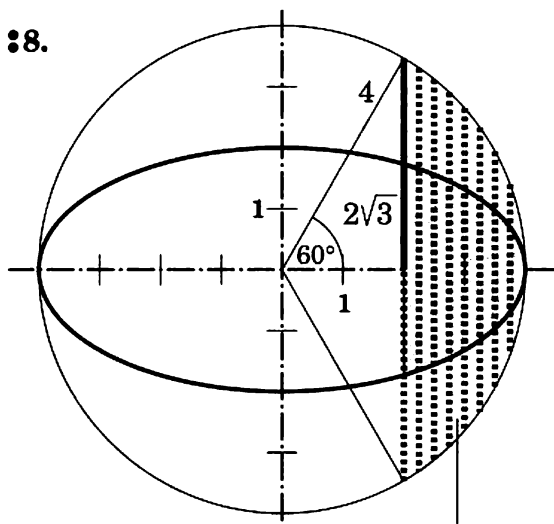
7. Formel ① $U_{\text{Ellipse}} \approx \pi \left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right]$

- a) $a = 5, b = 3$, Flächeninhalt $A = ab\pi = 15\pi \approx 47,1$
Umfang (1. Näherungsformel) $U \approx \pi(1,5 \cdot 8 - \sqrt{15})$, $U \approx 25,5$
b) $a = 10, b = 1$, Flächeninhalt $A = ab\pi = 10\pi \approx 31,4$
Umfang (1. Näherungsformel) $U \approx \pi(1,5 \cdot 11 - \sqrt{10})$, $U \approx 41,9$

I.2. Die Mittelpunkt-Gleichung der Ellipse

Lehrbuch Seite 222

8.

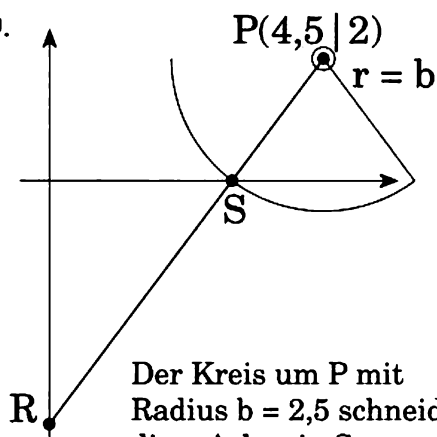


Kreissegment $F_k = \frac{1}{3} \cdot 16\pi - 4\sqrt{3} \approx 9,8$

Ellipsensegment $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Kreissegment}$

$$A = \frac{8}{3} \pi - 2\sqrt{3} \approx 4,9$$

9.



Der Kreis um P mit Radius $b = 2,5$ schneidet die x-Achse in S. Die Gerade PS schneidet die y-Achse in R.

$$a = [PR] = 7,5$$

10. Siehe Lehrbuch Seite 219

11. a) $r_b = 2b = a^2/b$, also $a^2 = 2b^2$, $a = b\sqrt{2}$

Jedes DIN A... Blatt bildet das Bestimmungsrechteck der Fagnano-Ellipse.

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2b^2 - b^2}, \text{ also } e = b$$

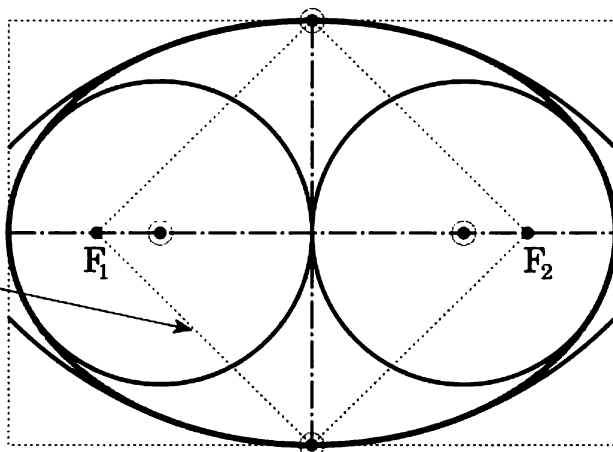
$$r_a = \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} b = \frac{1}{2} a$$

b) $b = 3$, $a = 3\sqrt{2} \approx 4,24$

Die kleinen Scheitelkrümmungs-Kreise berühren sich.

Bestimmungsrechteck = DIN A Rechteck

Quadrat der Seitenlänge a

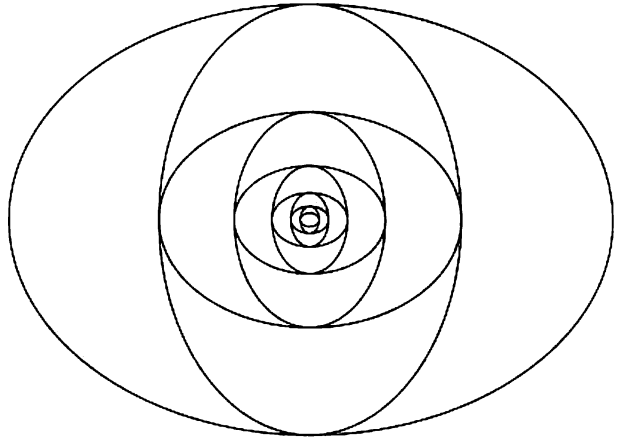


Lehrbuch Seite 222

11. c) $a = b\sqrt{2}$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} a = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

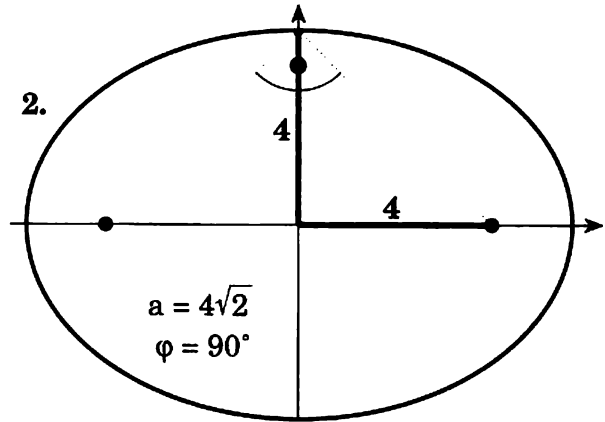
Ineingeschachtelte Fagnano-Ellipsen



I.3. Die Brennpunkte der Ellipse

Lehrbuch Seite 230

1.	a	b	e	ε
a)	4	2	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$
b)	4	$2\sqrt{3}$	2	0,5
c)	7	$\frac{7}{2}\sqrt{3}$	3,5	0,5
d)	5	3	4	0,8



3. $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ **a)** $0,5\sqrt{3} \approx 0,87$ **b)** $0,25\sqrt{7} \approx 0,66$ **c)** $0,1\sqrt{19} \approx 0,44$
 d) $0,05\sqrt{39} \approx 0,31$ **e)** $0,01\sqrt{199} \approx 0,14$

4. $\varepsilon_1 \approx 0,48$ $\varepsilon_2 \approx 0,65$ 5. $e_1 = 1,5\sqrt{3}$ $e_2 = 2\sqrt{3}$

6. $r_{\min} = 87,8 \cdot 10^6 \text{ km}$, $r_{\max} = 5232,5 \cdot 10^6 \text{ km}$
 $a = 0,5(r_{\min} + r_{\max}) \approx 2,66 \cdot 10^9 \text{ km}$, $e = a - r_{\min} \approx 2,572 \cdot 10^9 \text{ km}$
 $b^2 = a^2 - e^2$, $b \approx 0,678 \cdot 10^9 \text{ km}$, $\varepsilon = e/a \approx 0,967$

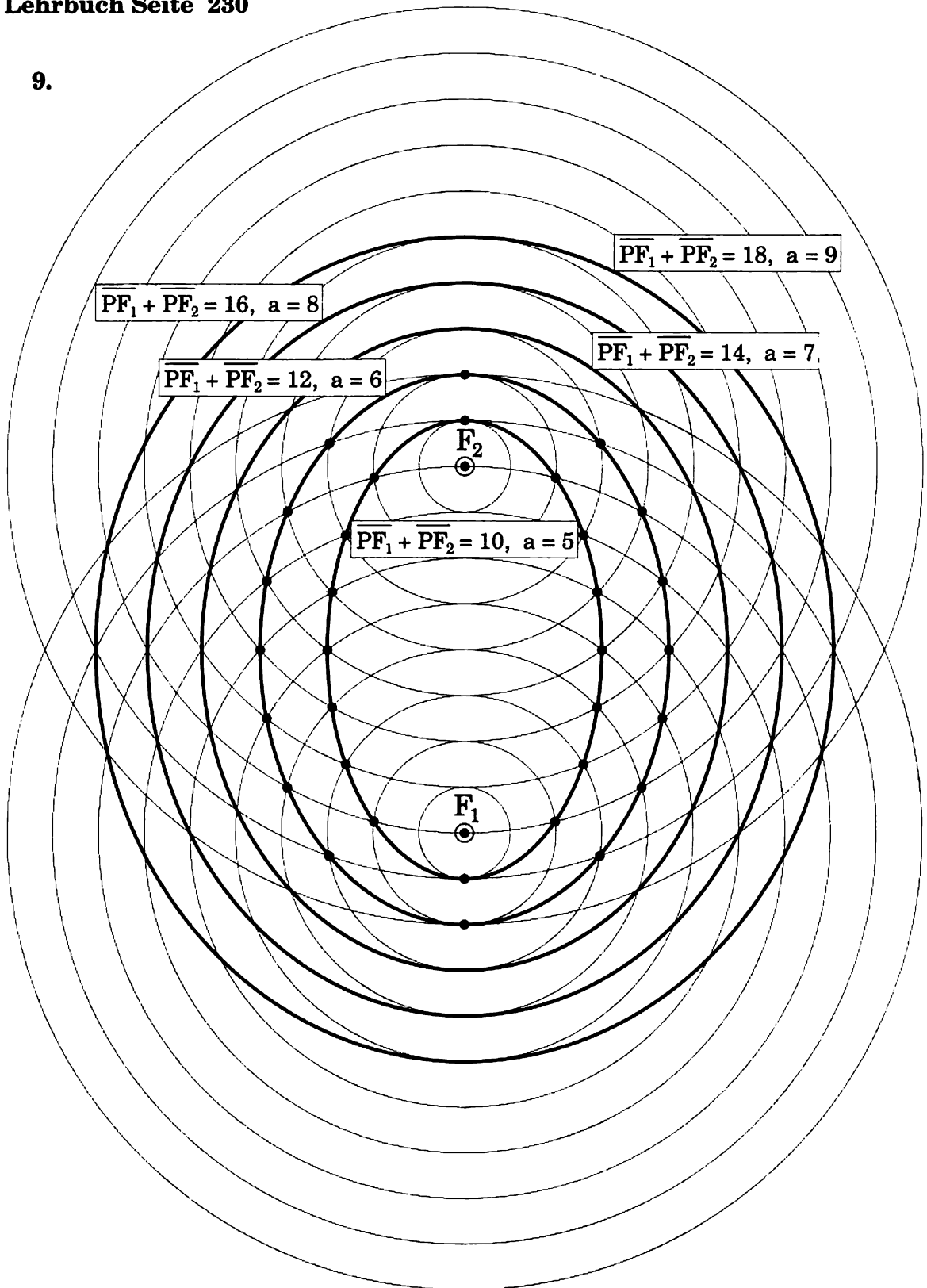
7. $a = 0,5(r_{\min} + r_{\max})$ arithmetisches Mittel
 $e = a - r_{\min} = 0,5r_{\max} + 0,5r_{\min} - r_{\min} = 0,5(r_{\max} - r_{\min})$
 $b^2 = a^2 - e^2 = 0,25(r_{\max}^2 + 2r_{\min}r_{\max} + r_{\min}^2 - r_{\max}^2 + 2r_{\min}r_{\max} - r_{\min}^2)$
 $b = \sqrt{r_{\max} \cdot r_{\min}}$ geometrisches Mittel

8. klar !

I.3. Die Brennpunkte der Ellipse

Lehrbuch Seite 230

9.



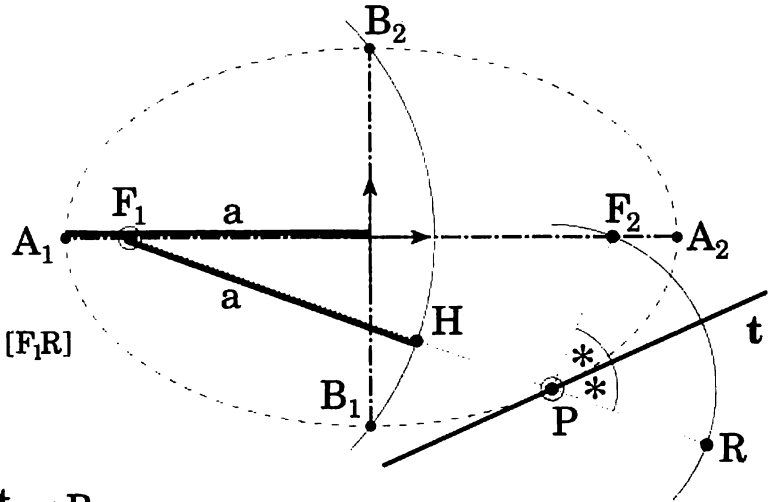
I.3. Die Brennpunkte der Ellipse

Lehrbuch Seite 230

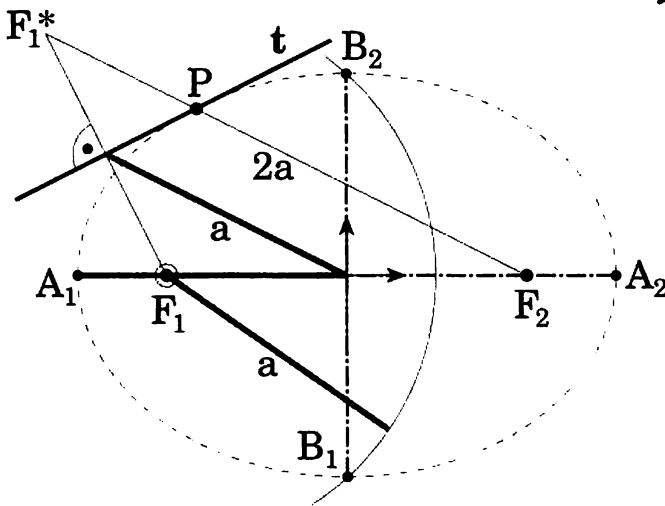
Ellipsentangenten

10.

$\overline{F_1R} = 2a$, H halbiert $[F_1R]$

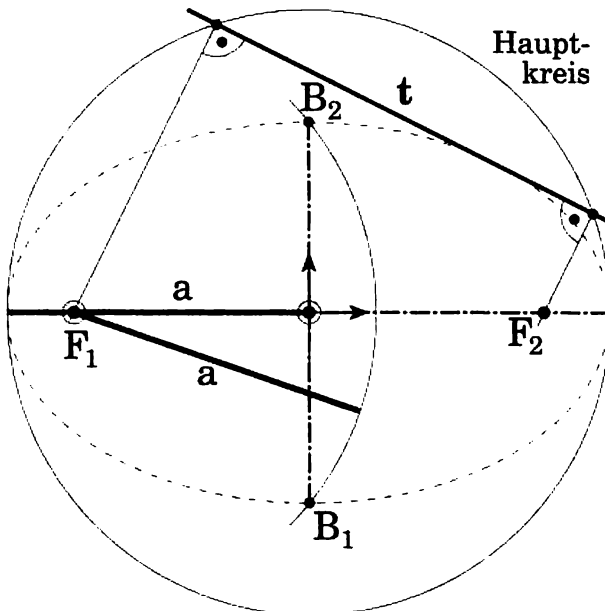


11.



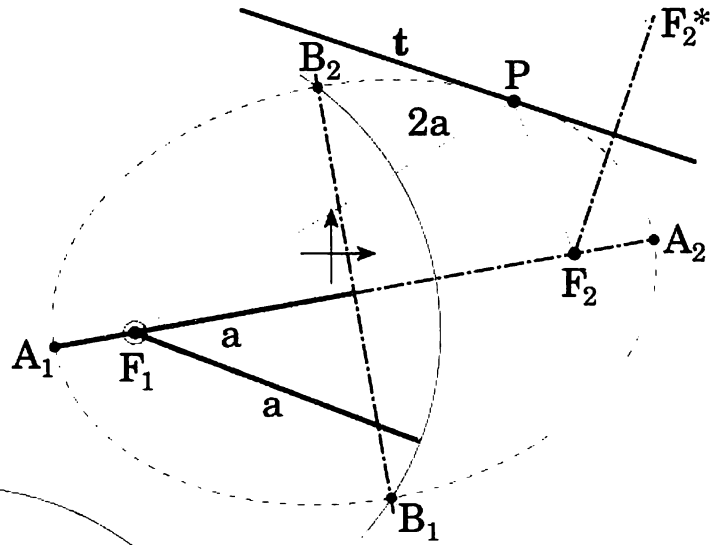
Lehrbuch Seite 231

12.

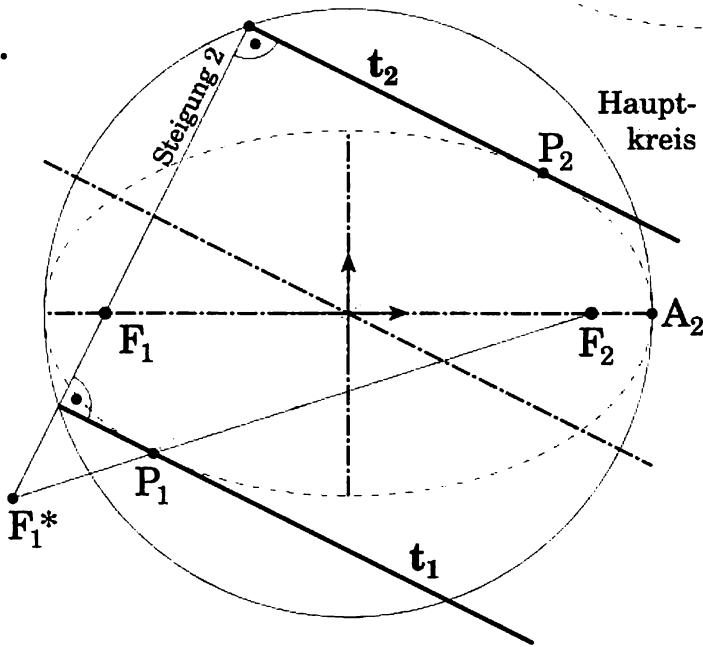


Ellipsentangenten

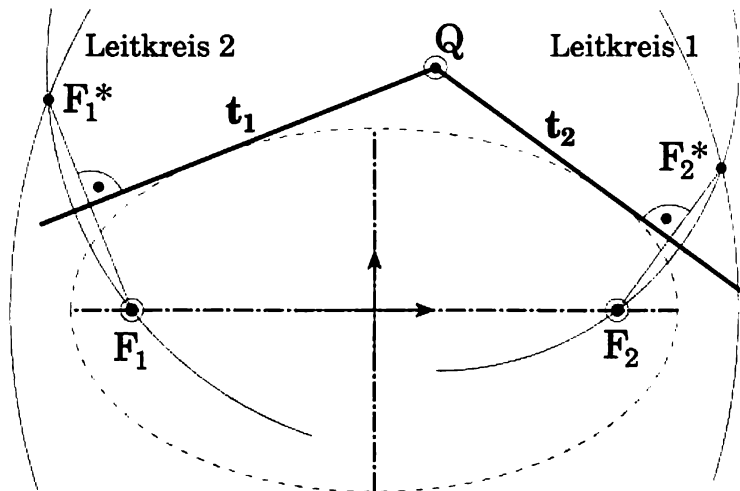
13.



14.



15.



I.3. Die Brennpunkte der Ellipse

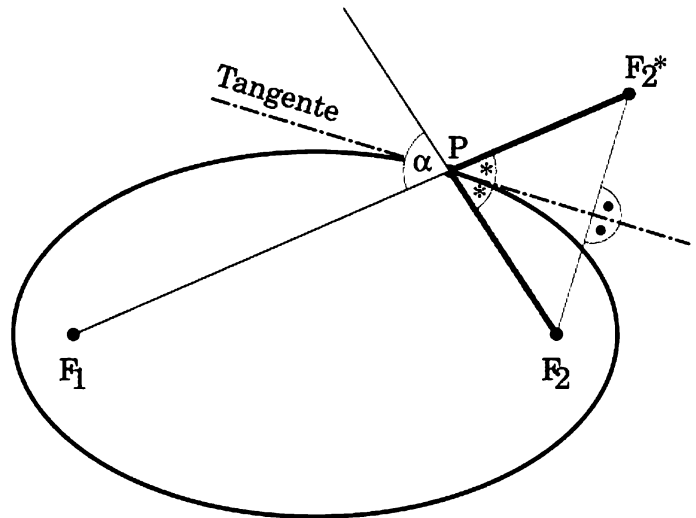
Lehrbuch Seite 231

Leitkreis und Hüllgeraden

•16. a) Beweis:

$$\overline{F_1 F_2^*} = \overline{F_1 P} + \overline{P F_2} = 2a$$

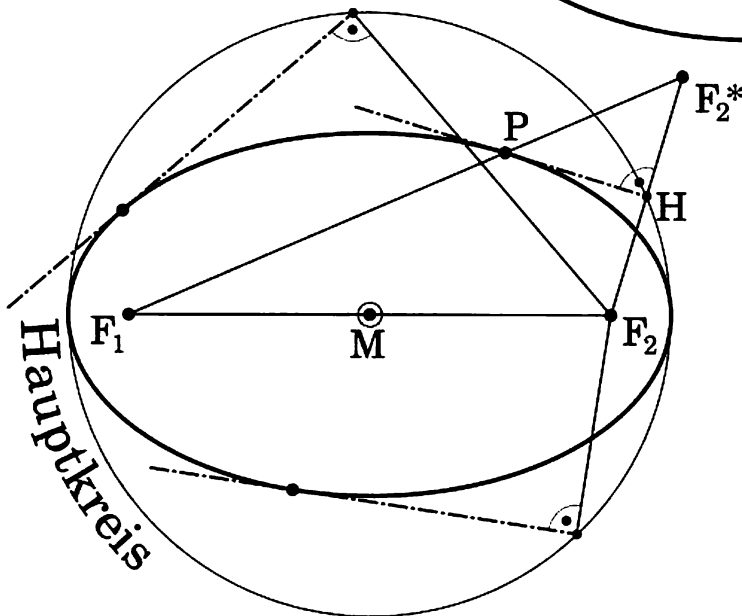
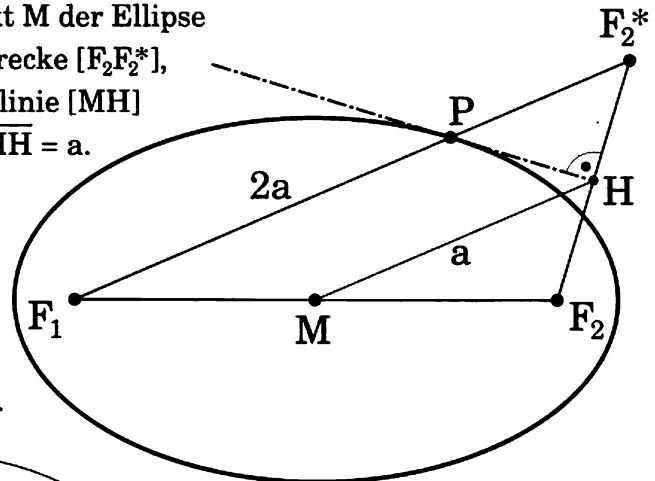
$$\boxed{\overline{F_1 F_2^*} = 2a}$$



b)

Verbindet man den Mittelpunkt M der Ellipse mit dem Mittelpunkt H der Strecke $[F_2 F_2^*]$, dann bekommt man die Mittellinie $[MH]$ im Dreieck $F_1 F_2 F_2^*$, das heißt $\overline{MH} = a$.

Wegen der Definition von F_2^* ist H aber auch Fußpunkt des Lots von F_2 auf die Ellipsentangente. Diese Fußpunkte liegen also auf dem Kreis um M mit Radius a .

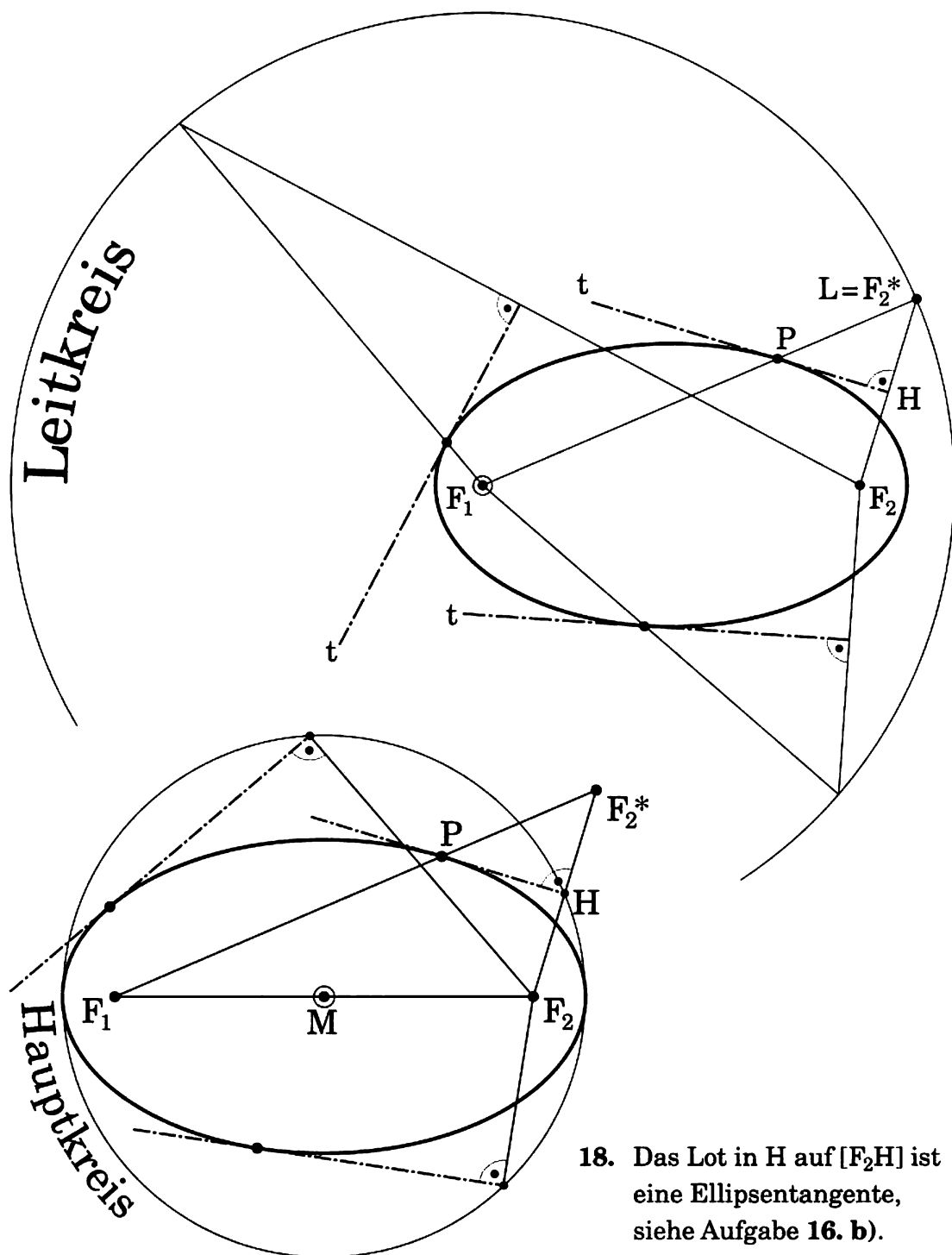


I.3. Die Brennpunkte der Ellipse

Lehrbuch Seite 232

Leitkreis und Hüllgeraden

17. Jeder Kreispunkt L ist Bild von F_2 bei Spiegelung an einer Tangente t .
Die Mittelsenkrechte von $[F_2L]$ ist die Tangente t , siehe Aufgabe 16. b).

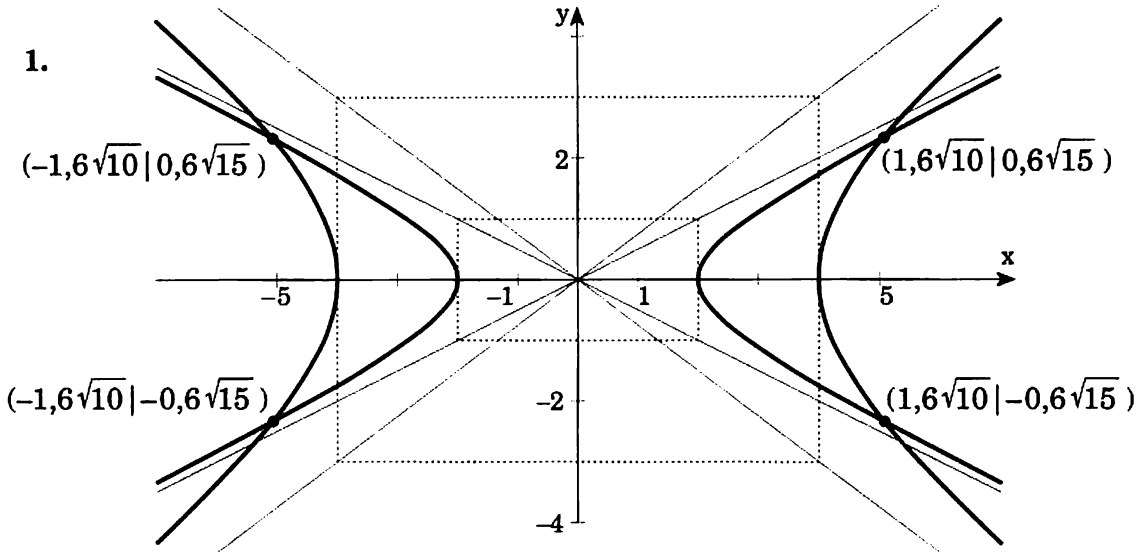


18. Das Lot in H auf $[F_2H]$ ist eine Ellipsentangente, siehe Aufgabe 16. b).

II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 243

1.



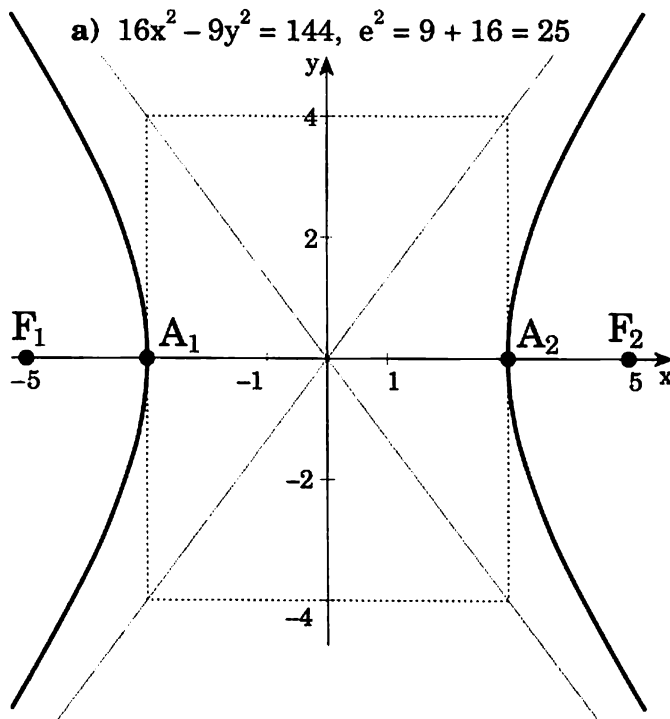
Hyperbel h_1 mit $a=1$, $b=2$: $x^2 - 4y^2 = 4$, $4y^2 = x^2 - 4$

Hyperbel h_2 mit $a=4$, $b=3$: $9x^2 - 4 \cdot 4y^2 = 144$ ergibt $9x^2 - 4x^2 + 16 = 144$

h_1 eingesetzt in h_2 ergibt $9x^2 - 4x^2 + 16 = 144$ $x^2 = 128/5$, $y^2 = 27/5$,
der Rest steht im Bild.

2. Hyperbelgleichung $16x^2 - 16y^2 = 16$

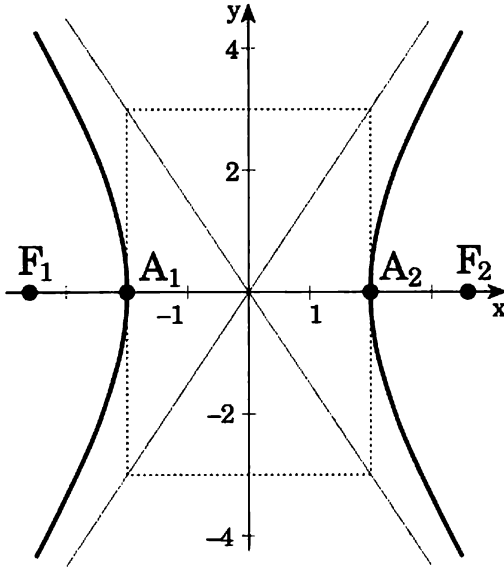
3.



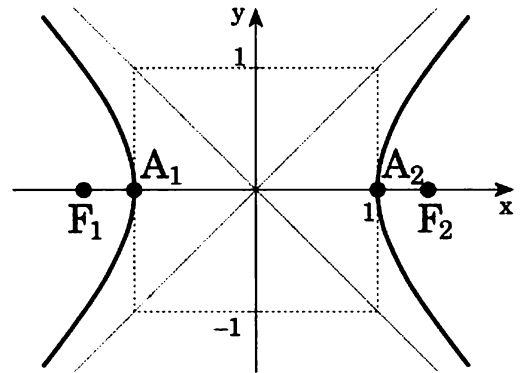
II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 243

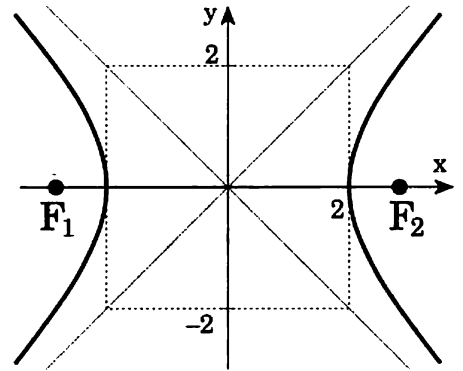
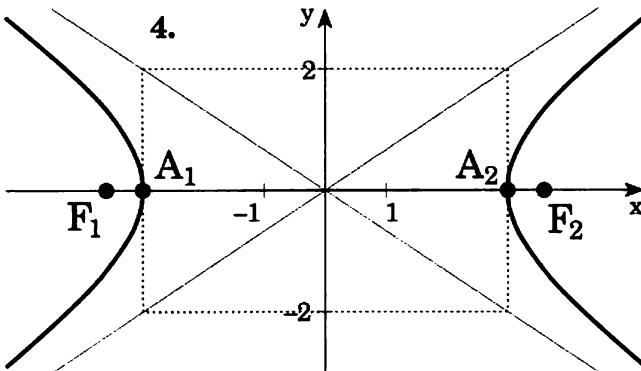
3. b) $b^2 = 13 - 4 = 9$, $9x^2 - 4y^2 = 36$



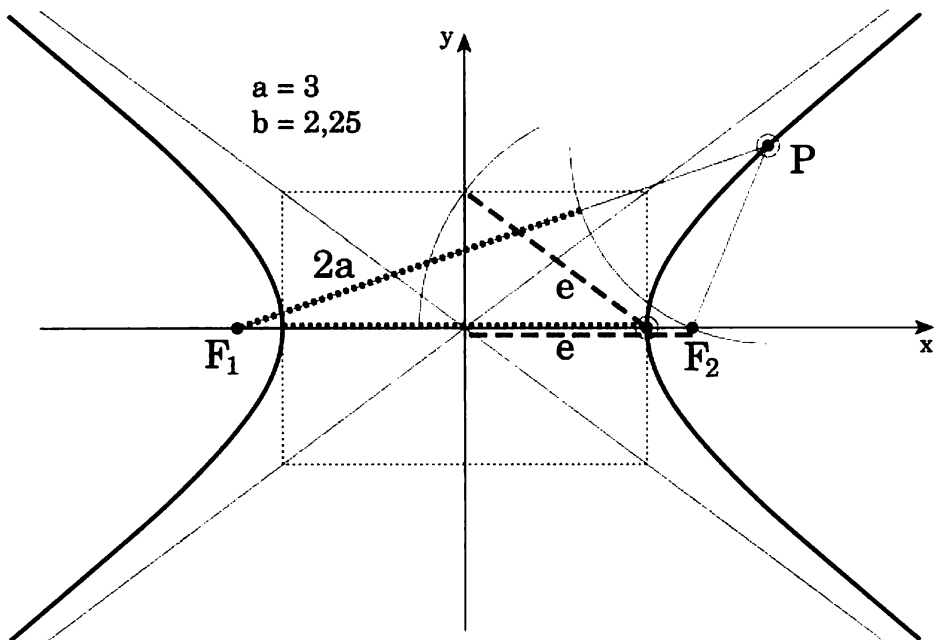
c) $a^2 = 2 - 1 = 1$, $x^2 - y^2 = 1$



5.
 $a = 2$, $e = 2\sqrt{2}$, $b^2 = 8 - 4 = 4$
 $\Rightarrow b = 2$ gleichseitige Hyperbel



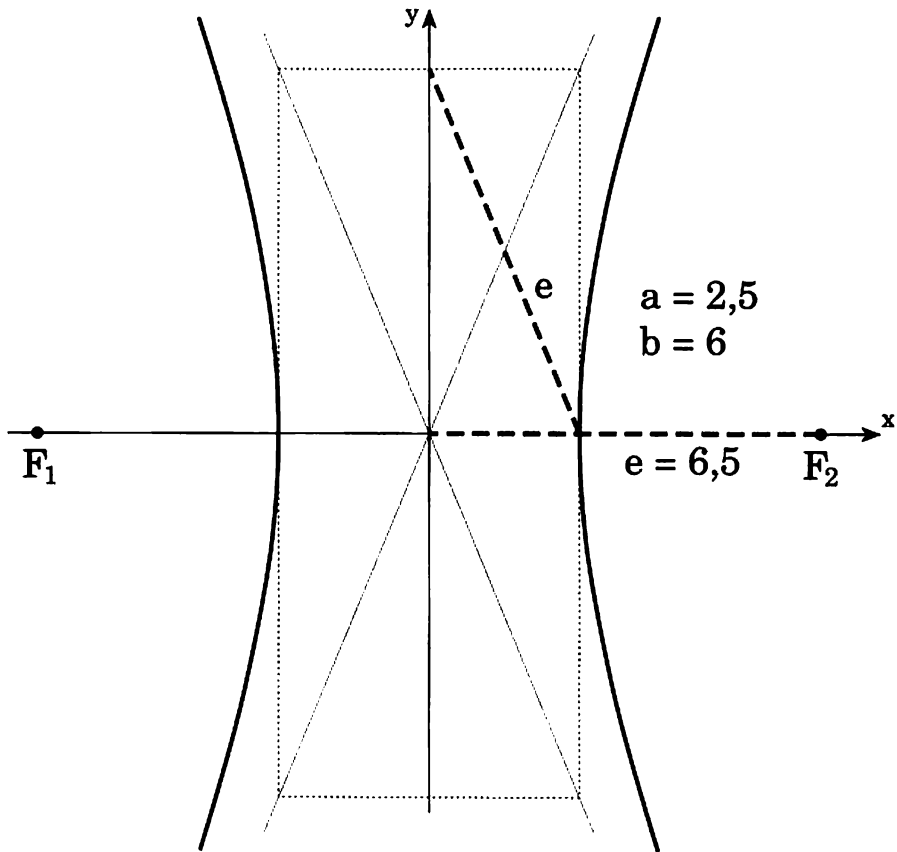
6.



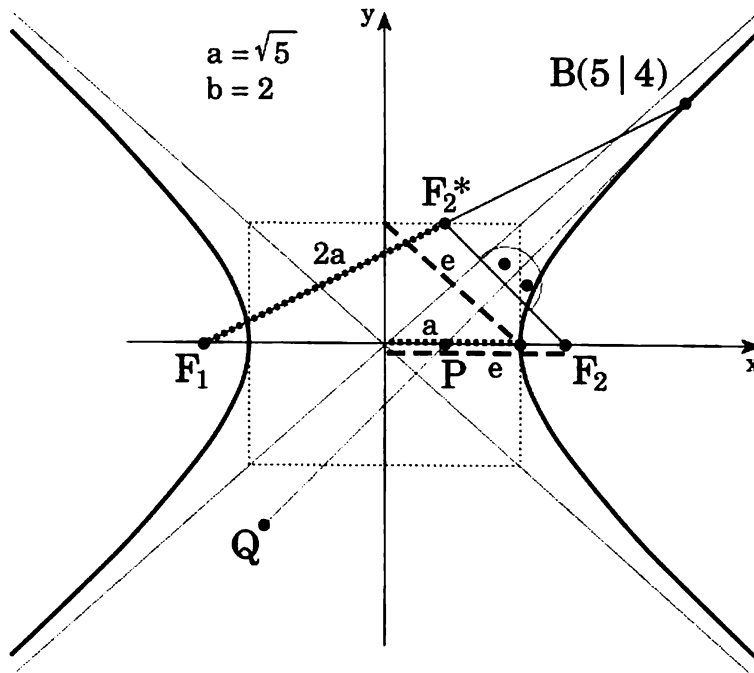
II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 244

7.



8.



II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 244

9.

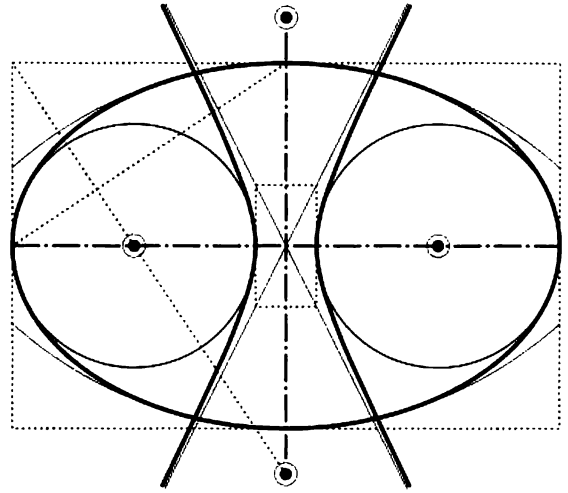
Ellipse $2a = 2 + 5 + 2 = 9$, $a = 4,5$

Hyperbel $2a = 5 - 2 - 2 = 1$, $a = 0,5$

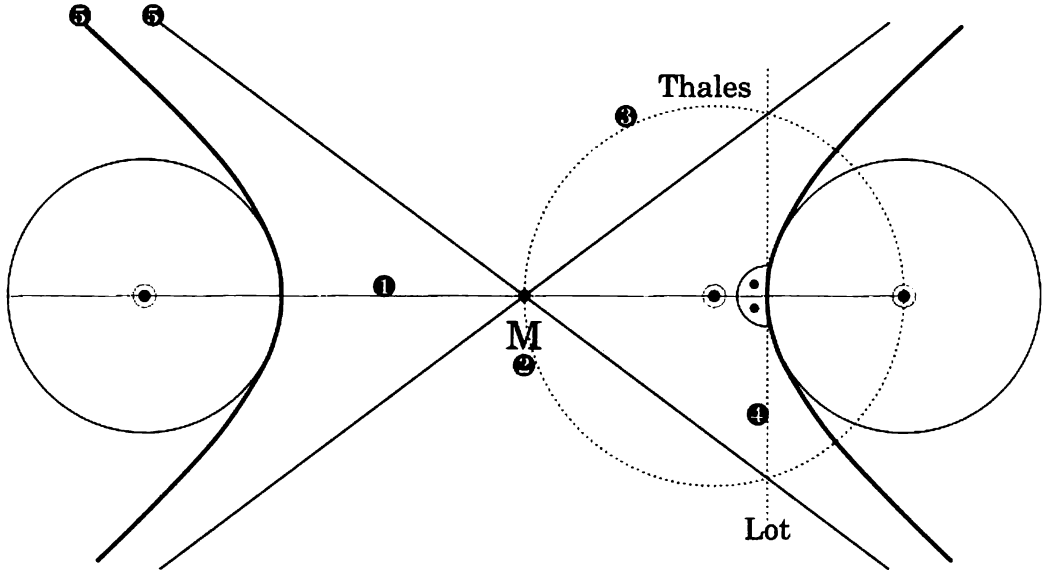
Ellipse, Hyperbel $r = b^2/a$, $b^2 = ra$

Ellipse $b^2 = 2 \cdot 4,5 = 9$, $b = 3$

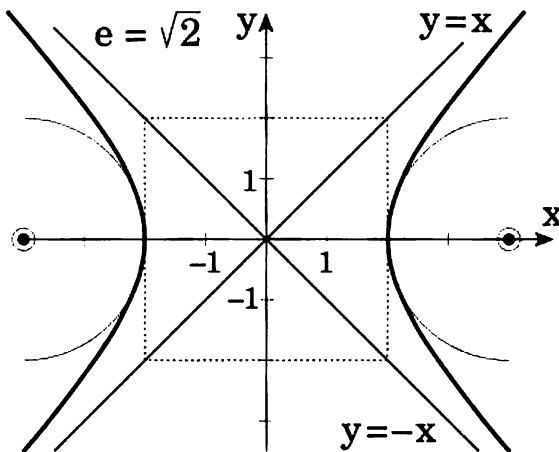
Hyperbel $b^2 = 2 \cdot 0,5 = 1$, $b = 1$



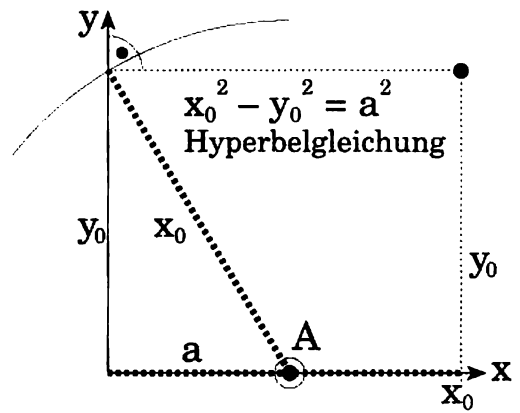
10.



11. a)



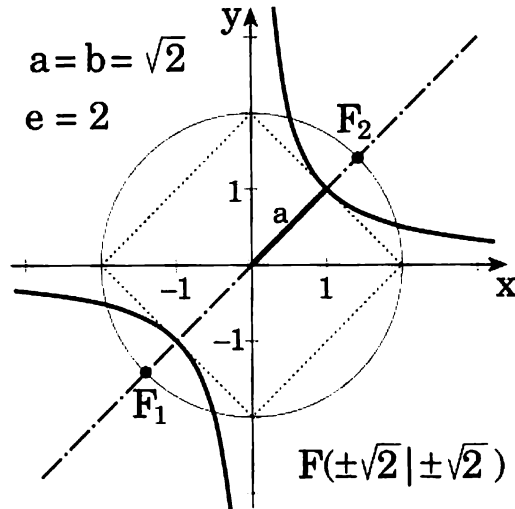
b)



II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 244

12.



13. Ellipse
Hyperbel

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{einsetzen} \quad x^2 = e^2 = a^2 \mp b^2$$

$$b^2(a^2 \mp b^2) \pm a^2y^2 = a^2b^2 \quad b^2a^2 \mp b^4 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\mp b^4 \pm a^2y^2 = 0 \quad \pm a^2y^2 = \pm b^4 \quad y^2 = b^4/a^2 \quad y = \pm b^2/a$$

14. a) Gerade $g: y^2 = 4(x-12)^2$ eingesetzt in $h: 4x^2 - 9 \cdot 4(x^2 - 24x + 144) = 256$
 $x^2 - 9x^2 + 9 \cdot 24x - 9 \cdot 144 = 256, \quad 8x^2 - 9 \cdot 24x + 9 \cdot 144 + 64 = 0$
 $x^2 - 27x + 170 = 0 \Rightarrow (x-10)(x-17) = 0 \Rightarrow x_A = 10, \quad x_B = 17$
eingesetzt in g ergibt $y_A = -4, \quad y_B = 10$; Schnittpunkte $A(10 | -4), B(17 | 10)$
- b) $a^2 = 4, \quad b^2 = 16/9$, Asymptoten-Gleichungen: $y = \pm 2x/3$
Asymptote $y = 2x/3$ schneidet Gerade $y = 2x - 24$ in $P(18 | 12)$
Asymptote $y = -2x/3$ schneidet Gerade $y = 2x - 24$ in $Q(9 | -6)$
- c) $M_{AB} = M_{PQ}(13,5 | 3)$, Folgerung:
A und B liegen symmetrisch zu $(13,5 | 3)$, ebenso P und Q,
also liegen auch die Strecken $[AP]$ und $[PQ]$ symmetrisch zu $(13,5 | 3)$
 $[AP]$ und $[PQ]$ sind also gleich lang.

II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 245

15. Allgemeine Rechnung

Gerade g: $y^2 = (mx + t)^2$ eingesetzt in die Hyperbel: $b^2x^2 - a^2(mx + t)^2 = a^2b^2$
ergibt $b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mxt - a^2t^2 = a^2b^2$ geschrieben als quadratische

Gleichung in x: $(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mt \cdot x - a^2(t^2 + b^2) = 0$

Diskriminante $D = 4a^4m^2t^2 + 4(b^2 - a^2m^2) \cdot a^2(t^2 + b^2) = 4a^2b^2(t^2 + b^2 - a^2m^2)$

g trifft die Hyperbel, falls $D \geq 0$,

in Punkten mit dem x-Wert $x = \frac{2a^2mt \pm \sqrt{D}}{2(b^2 - a^2m^2)}$

In der Mitte zwischen diesen Punkten

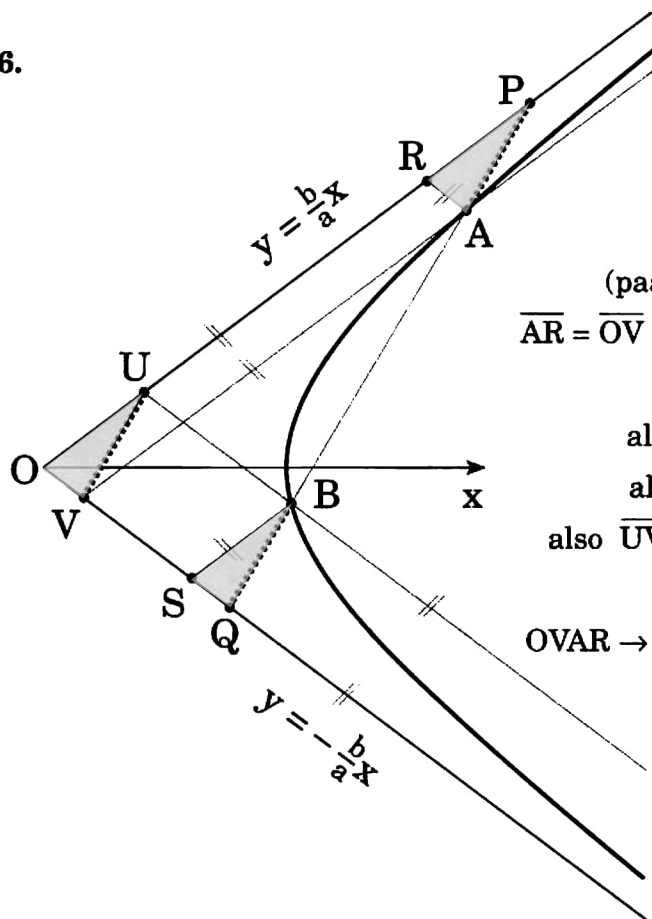
liegt der Punkt mit dem x-Wert $x_m = \frac{a^2mt}{b^2 - a^2m^2}$

Die Gerade $y = mx + t$ schneidet die Asymptote $y = bx/a$ bei $x_+ = \frac{at}{b - am}$

Die Gerade $y = mx + t$ schneidet die Asymptote $y = -bx/a$ bei $x_- = \frac{-at}{b + am}$

arithmetisches Mittel: $0,5(x_+ + x_-) = \frac{a^2mt}{b^2 - a^2m^2} = x_m$ q.e.d.

16.



$$\sphericalangle O = \sphericalangle R = \sphericalangle S$$

(paarweise parallele Schenkel)

$$\overline{AR} = \overline{OV} \text{ und } \overline{BS} = \overline{OU} \text{ (Parallelogramm)}$$

$$\sphericalangle P = \sphericalangle S$$

$$\text{also } \triangle RAP \cong \triangle SQB \text{ (WWS)}$$

$$\text{also } \triangle OVU \cong \triangle RAP \text{ (SWS)}$$

$$\text{also } \overline{UV} = \overline{PA} = \overline{BQ} \text{ und } UV \parallel PA \parallel BQ$$

Scherungen:

$$OVAR \rightarrow UVAP \rightarrow UVQP \rightarrow UOSB \text{ q.e.d.}$$

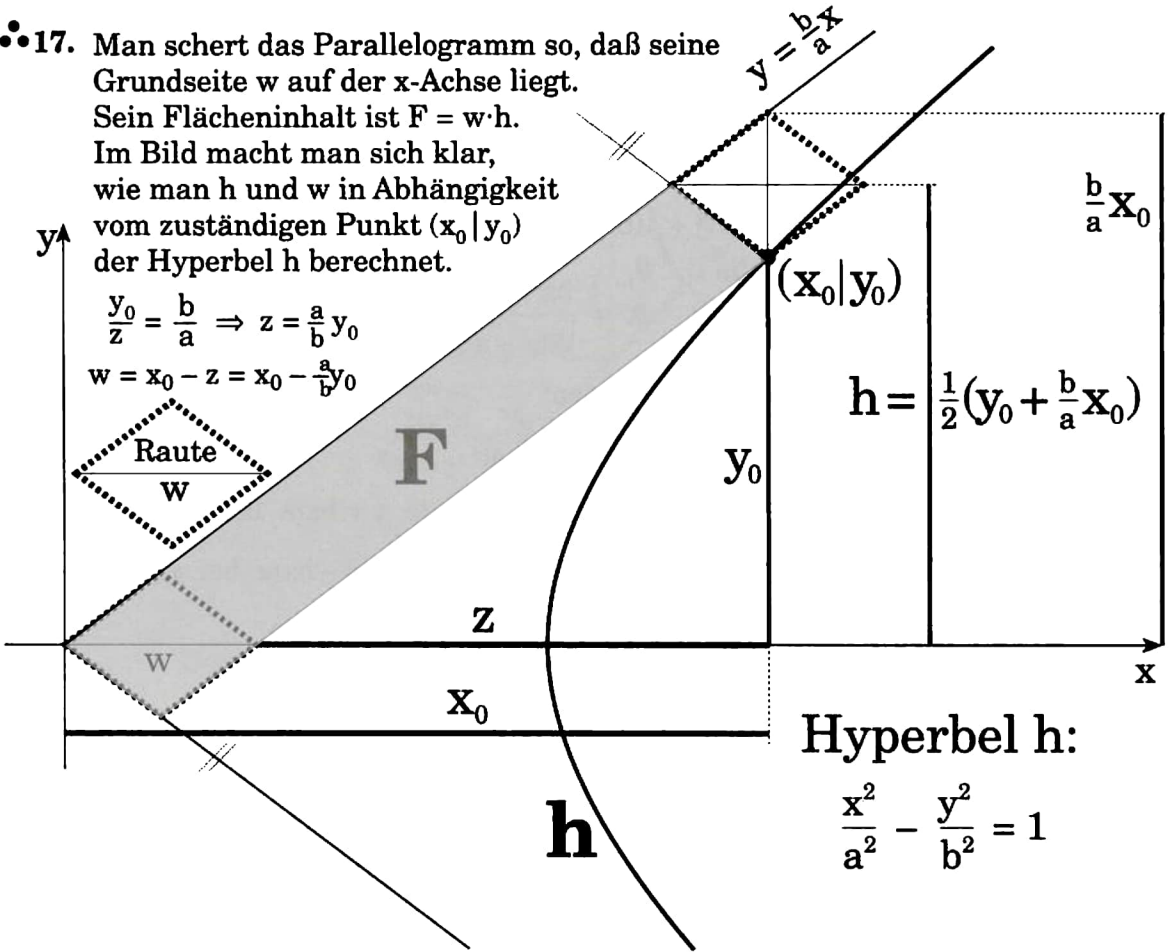
II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 245

- 17. Man schert das Parallelogramm so, daß seine Grundseite w auf der x -Achse liegt. Sein Flächeninhalt ist $F = w \cdot h$. Im Bild macht man sich klar, wie man h und w in Abhängigkeit vom zuständigen Punkt $(x_0 | y_0)$ der Hyperbel h berechnet.

$$\frac{y_0}{z} = \frac{b}{a} \Rightarrow z = \frac{a}{b} y_0$$

$$w = x_0 - z = x_0 - \frac{a}{b} y_0$$



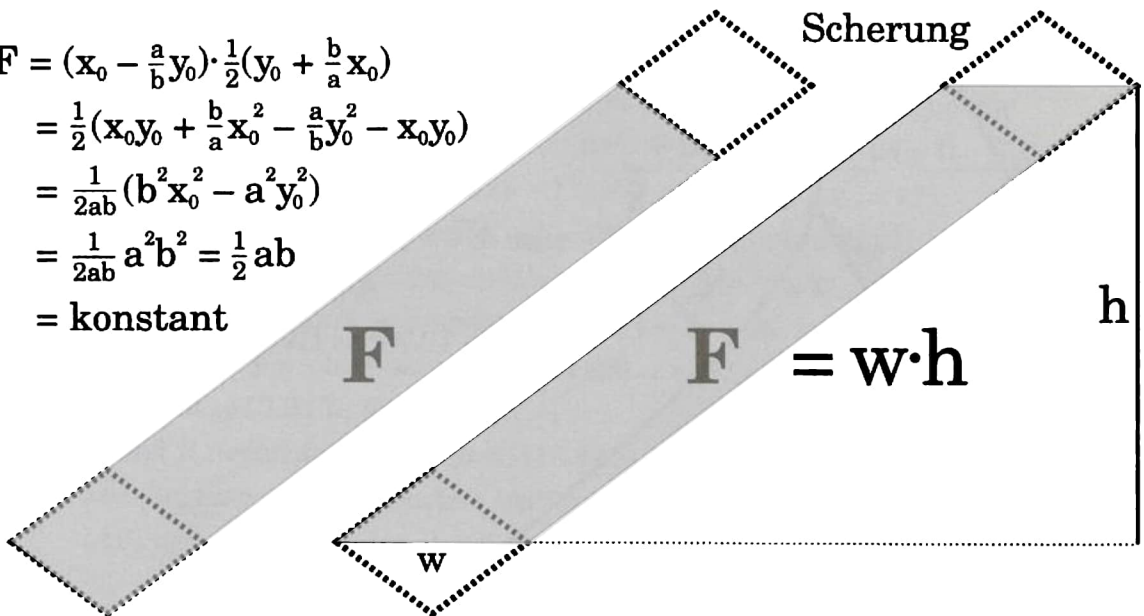
$$F = (x_0 - \frac{a}{b} y_0) \cdot \frac{1}{2} (y_0 + \frac{b}{a} x_0)$$

$$= \frac{1}{2} (x_0 y_0 + \frac{b}{a} x_0^2 - \frac{a}{b} y_0^2 - x_0 y_0)$$

$$= \frac{1}{2ab} (b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2)$$

$$= \frac{1}{2ab} a^2 b^2 = \frac{1}{2} ab$$

$$= \text{konstant}$$



II.2. Die Hyperbel

Lehrbuch Seite 246

••18. Umkehrung des 1. Flächensatzes

Als Schenkel nehmen wir die Geraden mit den Gleichungen $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Ist $A(x_0 | y_0)$ freie Ecke, dann gilt nach dem obigen Beweis für die

Parallelogramm-Fläche F $F = \frac{1}{2ab} (b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2)$

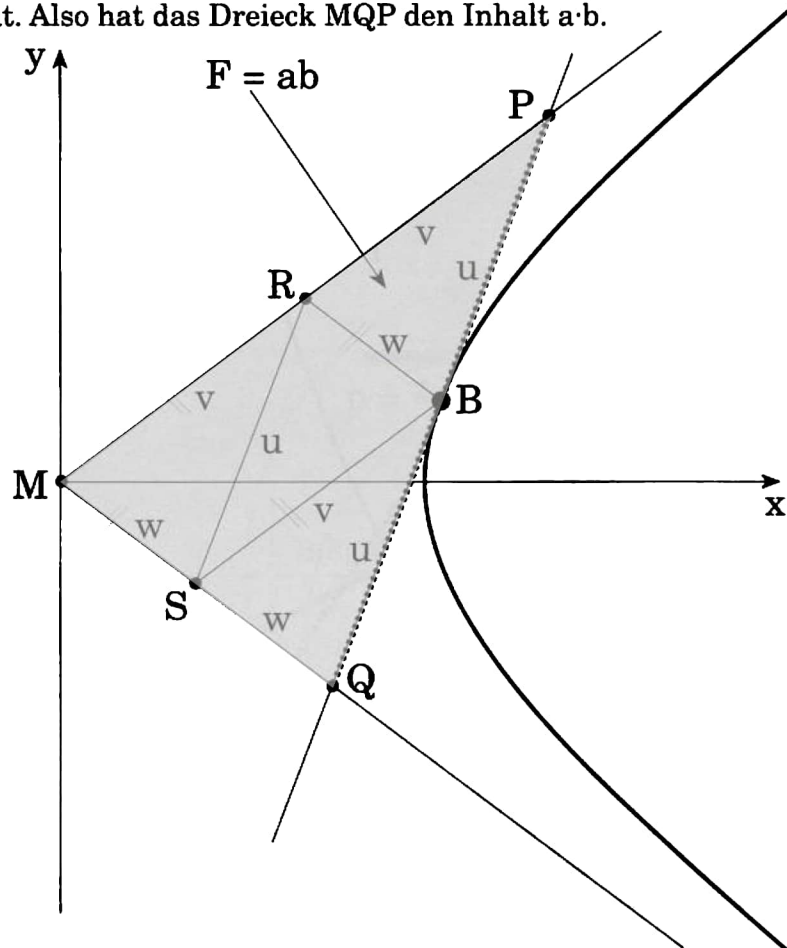
Ist F konstant, dann ist es auch $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2$, q.e.d.

19. Die Asymptoten sind hier die Koordinatenachsen, die Parallelogramme sind Rechtecke mit dem Flächeninhalt 1. Also liegen die freien Ecken auf einer Hyperbel.

••20. 2. Flächensatz

Beweis

Die Tangente ist ein Grenzfall der Sekante. Also halbiert (nach Aufgabe 15.) der Berührungspunkt B die Tangentenstrecke $[PQ]$ zwischen den Asymptoten. Die Parallele RB zur Asymptote MQ ist also Mittelparallele im Dreieck MQP , das heißt, R halbiert die Strecke $[MP]$. Ebenso halbiert S die Strecke $[MQ]$. Deshalb sind die Dreiecke SQB , MSR , SBR und RBP kongruent. Zwei von ihnen bilden das Parallelogramm $MSBR$, das nach dem 1. Flächensatz den Inhalt $\frac{1}{2}ab$ hat. Also hat das Dreieck MQP den Inhalt $a \cdot b$.



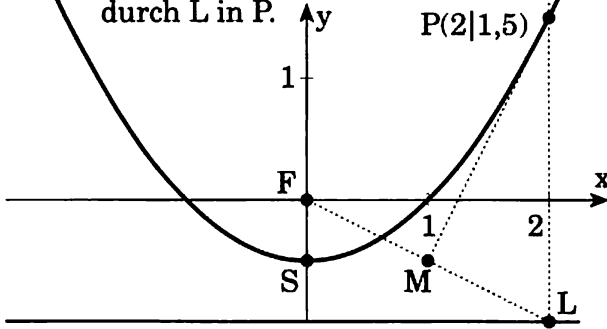
II.3. Die Parabel

Lehrbuch Seite 252

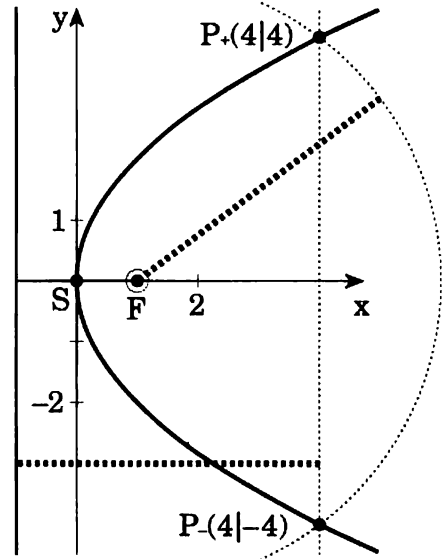
1.

a) $l: y = -1$ $F(0|0)$ $P(2|?)$

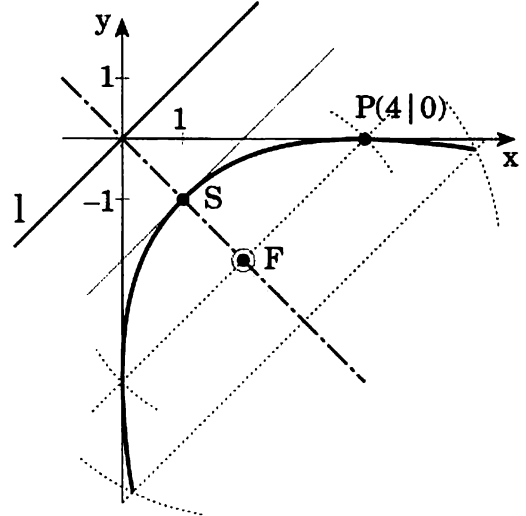
Die Mittelsenkrechte von $[FL]$ schneidet die Achsenparallele durch L in P .



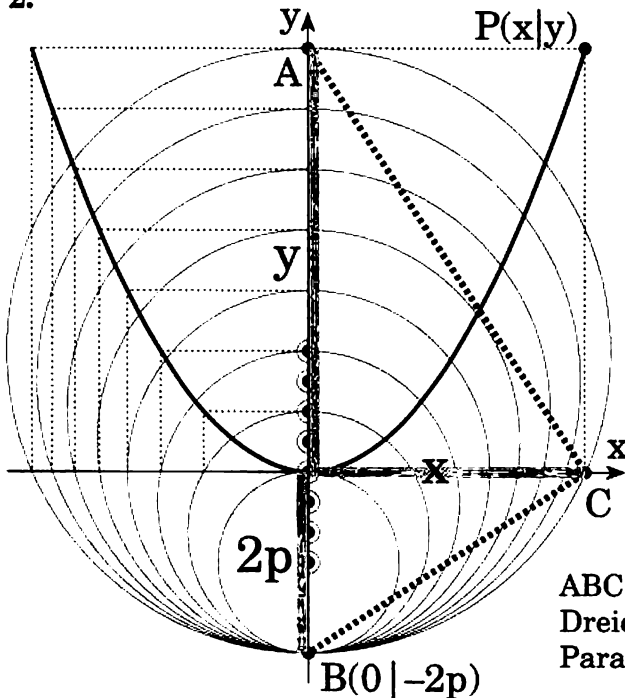
b) $l: x = -1$ $F(1|0)$ $P(4|?)$



c) $l: y = x$ $F(2|-2)$ $P(4|?)$



2.

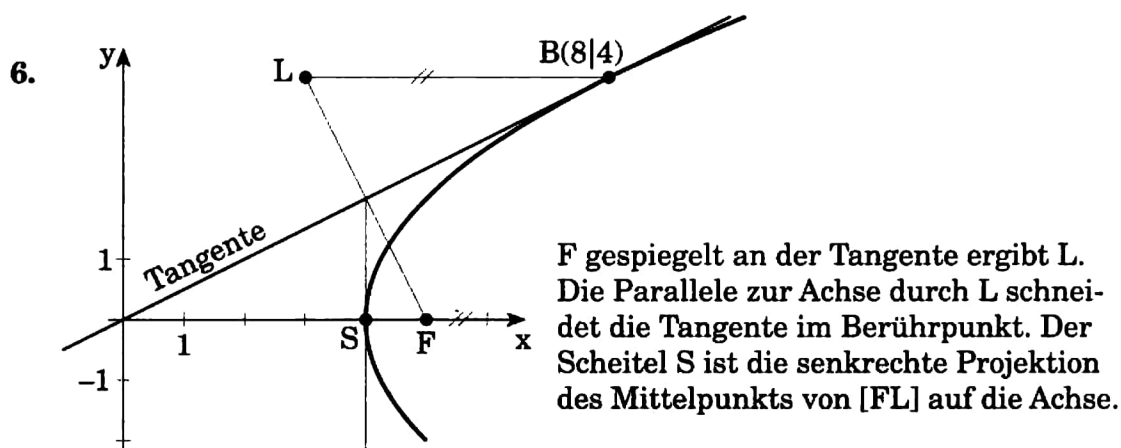
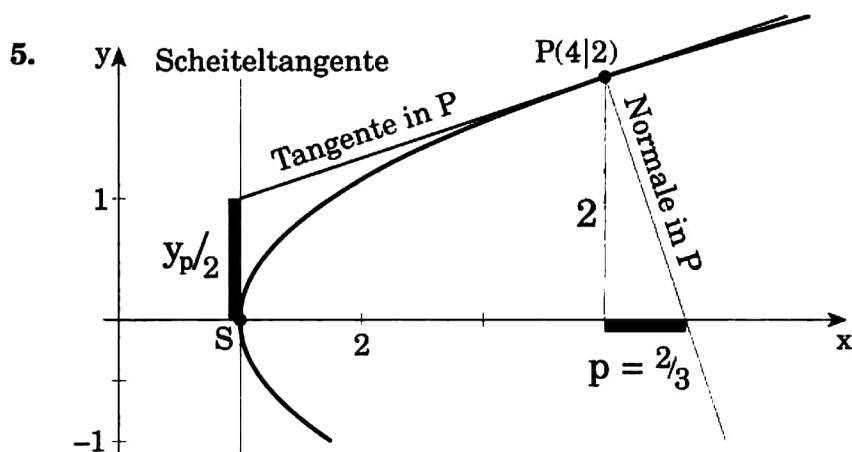
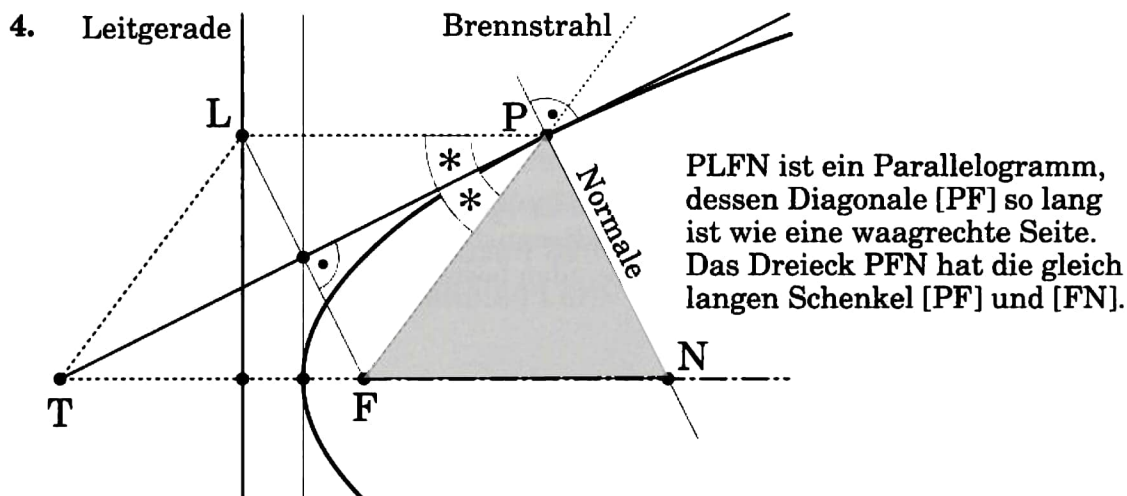


ABC ist ein bei C rechtwinkliges Dreieck. Der Höhensatz ist die Parabelgleichung: $x^2 = 2p \cdot y$

II.3. Die Parabel

Lehrbuch Seite 253

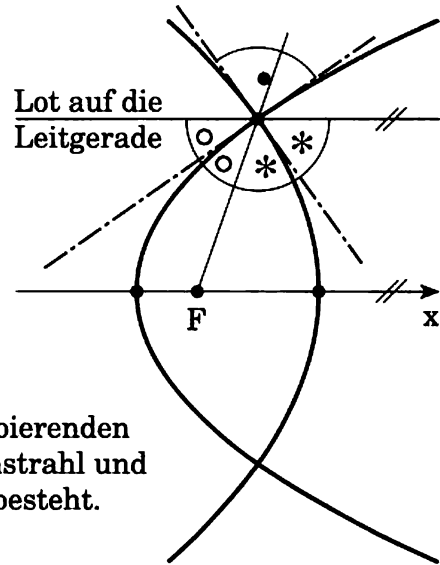
3. Parabel mit Scheitel im Ursprung, oben offen: $2p \cdot y = x^2$
 Die Sehnen-Endpunkte haben denselben y-Wert wie der Brennpunkt: $p/2$.
 Eingesetzt in die Parabelgleichung ergibt sich für den x-Wert des rechten Sehnenpunkts: p . Also ist die Sehnenlänge $2p$.



II.3. Die Parabel

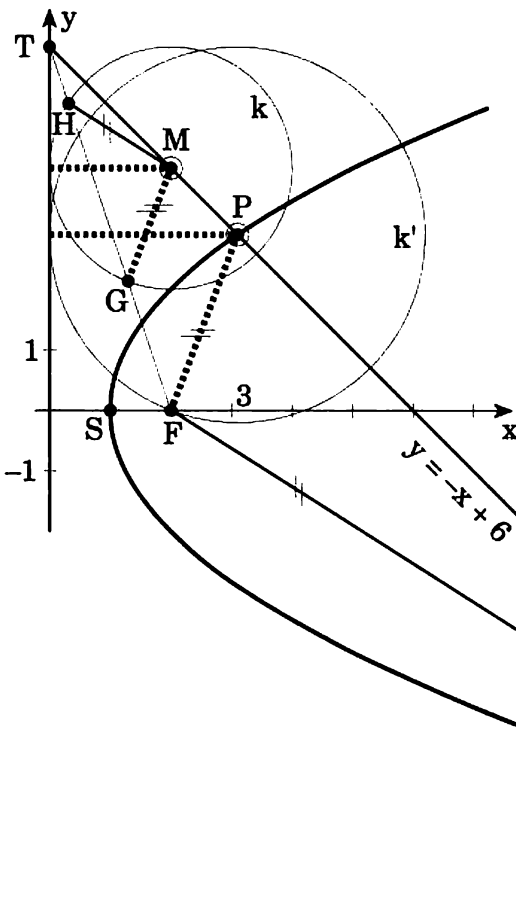
Lehrbuch Seite 253

7.



Die beiden Tangenten sind die Winkelhalbierenden der Geradenkreuzung, die aus dem Brennstrahl und dem Lot auf die (parallelen) Leitgeraden besteht.

8.



Man zeichnet einen Kreis k so um einen Punkt M der Gerade, daß er die Leitgerade berührt. Die Gerade durch F und $T(0 | 6)$ schneidet k in G und H .

Man streckt k am Zentrum T so, daß der gestreckte Punkt G auf F fällt. Der Mittelpunkt P des gestreckten Kreises k' ist der eine Parabelpunkt.

Der andere Parabelpunkt Q ist der Mittelpunkt des Kreises k'' , der sich bei Streckung von k an T ergibt für den Fall, daß H in F übergeht.

