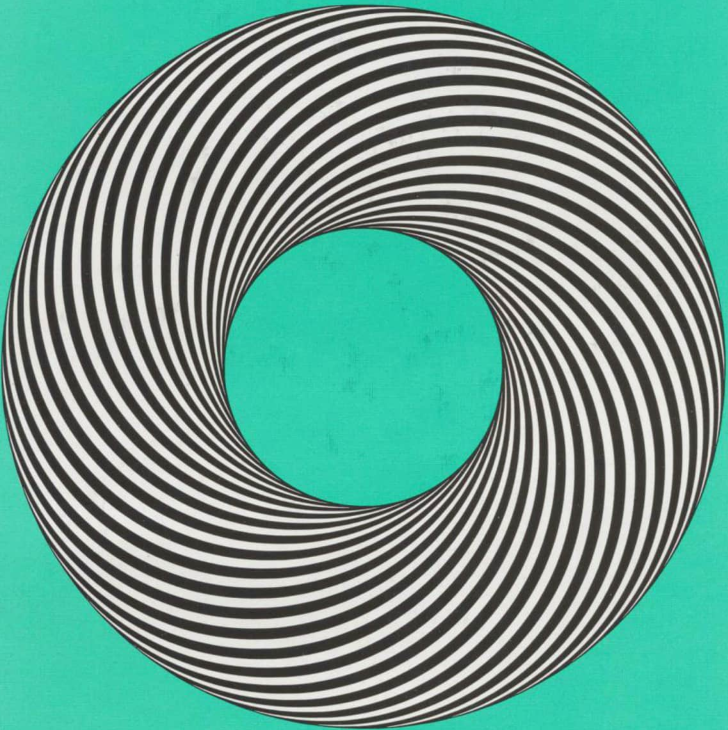
Barth · Krumbacher · Ossiander · Barth

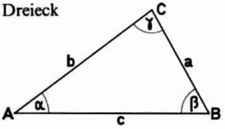
Anschauliche Geometrie 8

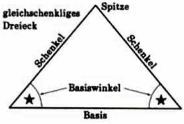


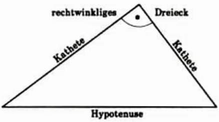
Oldenbourg

Dreieck

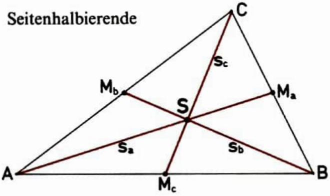
Dreieck



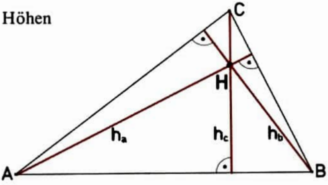




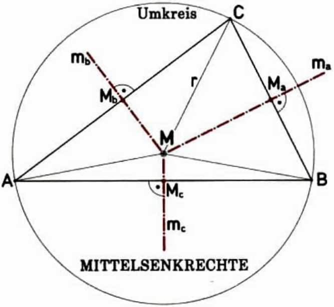
Seitenhalbierende



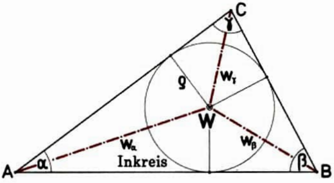
Höhen



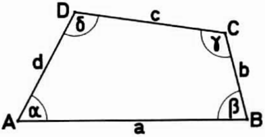
Mittelsenkrechte

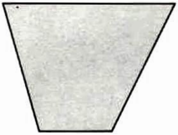


Winkelhalbierende

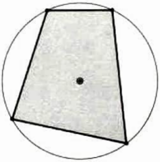


Viereck

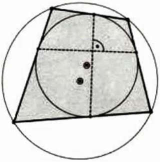




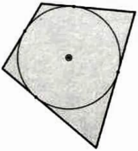
Trapez



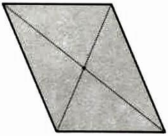
Sehnen-Viereck



Sehnen- Tangenten-
Viereck

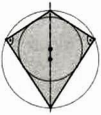


Tangenten-Viereck

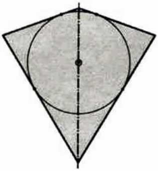


Parallelogramm

lotsymmetrisches Trapez

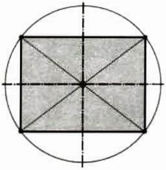


Sehnen-Drachen

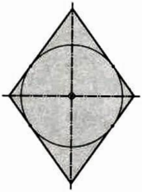


Drachen

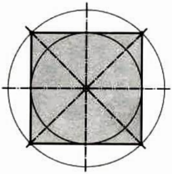
Tangenten-Trapez



Rechteck



Raute



Quadrat

Anschauliche Geometrie 8

Elisabeth Barth · Friedrich Barth
Gert Krumbacher · Konrad Ossiander

Oldenbourg

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

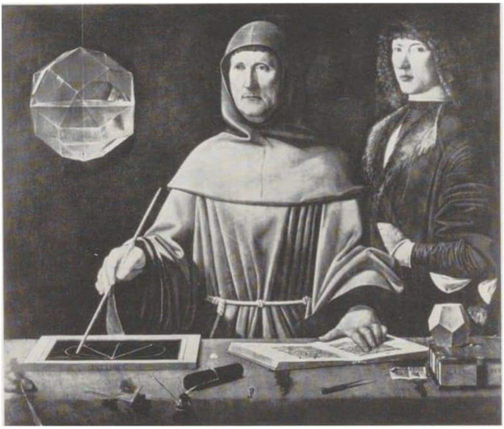
6. Auflage 2000 R
Druck 06 05 04 03 02
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Alle Drucke dieser Auflage sind untereinander unverändert und im Unterricht nebeneinander verwendbar.

Zeichnungen: Gert Krumbacher
Satz, Druck, Bindung: Offizin Andersen Nexö, Leipzig

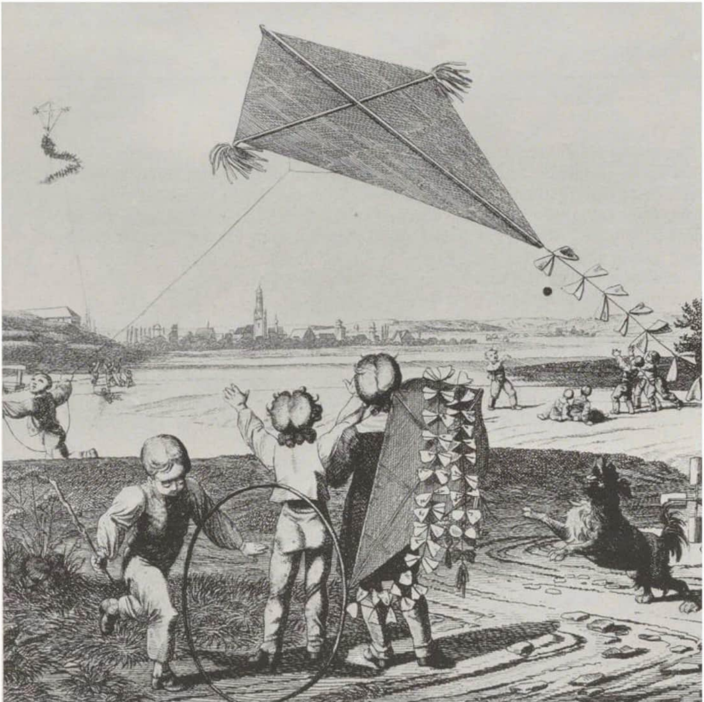
ISBN 3-486-**03266**-6

Inhalt



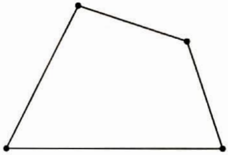
1. Kapitel

Vierecke

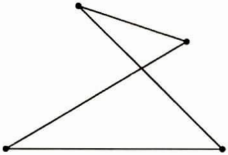


1.1 Bezeichnungen

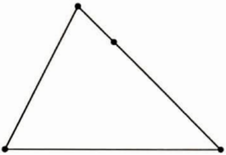
Ein geschlossener Streckenzug aus vier Strecken ohne Überschneidung heißt **Viereck.**



Viereck



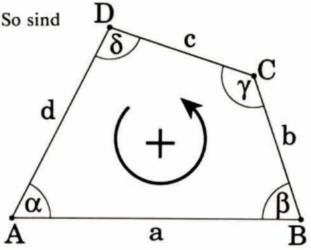
überschlagenes Viereck



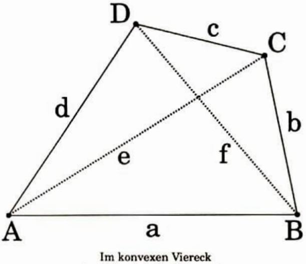
entartetes Viereck

Überschlagene und entartete Vierecke zählen wir nicht zu den Vierecken.
Die Ecken bezeichnet man mit großen lateinischen Buchstaben, ihre Reihenfolge liegt fest: Beim Durchlaufen liegt das Innere des Vierecks links (positiver Umlaufsinn). Wie beim Dreieck benennt man die Innenwinkel nach ihren Scheiteln, zum Beispiel α nach dem Scheitel A. Anders als beim Dreieck benennt man die Seiten nach der Ecke, die man gerade durchlaufen hat.
Gegenüberliegende Stücke heißen Gegenstücke. So sind

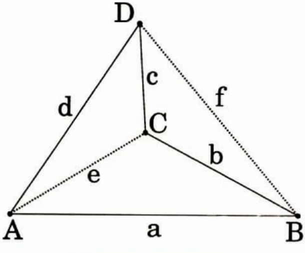
- A und C **Gegenecken**
- a und c **Gegenseiten**
- α und γ **Gegenwinkel**



Die Verbindungsstrecke zweier Gegenecken heißt **Diagonale.** Das Viereck ABCD hat die Diagonalen [AC] = e und [BD] = f.



Im konvexen Viereck schneiden sich die Diagonalen.

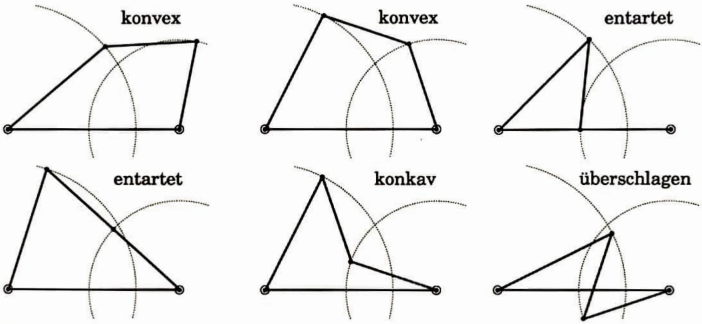


Im konkaven Viereck schneiden sich die Diagonalen nicht.

Weil sich jedes Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen lässt, ist die Summe der Innenwinkel gleich 360°: $\boxed{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$

Konstruktionen

Zur Konstruktion eines Dreiecks braucht man im Allgemeinen drei unabhängige Stücke. Vier Stücke reichen aber nicht für ein Viereck, wie man sich leicht an einem Gelenkviereck klar macht.

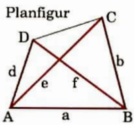


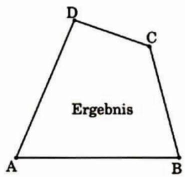
Für eine eindeutige Konstruktion sind im Allgemeinen mindestens fünf Stücke nötig. Aus dreien konstruiert man zuerst ein Teildreieck und hat damit schon ein Stück des zweiten Teildreiecks, für das man also nur noch zwei Stücke braucht.

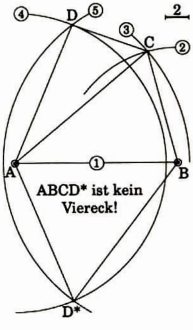
Beispiel

Gegeben: $a = 14$; $b = 10$; $d = 13$; $e = f = 15$

Lösungsidee: Aus a, b und e konstruiert man das Teildreieck ABC (SSS). ① ② ③
Punkt D liegt
1. auf dem Kreis um A mit Radius d, ④
2. auf dem Kreis um B mit Radius f. ⑤





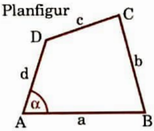


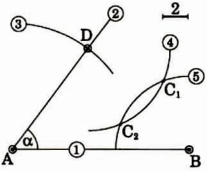
In diesem Beispiel ist es möglich, ein Viereck eindeutig aus fünf Stücken zu konstruieren. Das nächste Beispiel zeigt, dass aber fünf Stücke für eine eindeutige Konstruktion nicht immer ausreichen.

Beispiel

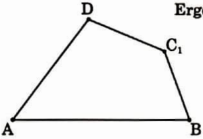
Gegeben: $a = 14$; $b = 5{,}8$; $c = 6{,}5$; $d = 10$; $\alpha = 53°$

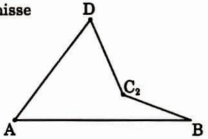
Lösungsidee: Aus a, d und α konstruiert man das Teildreieck ABD (SWS). ① ② ③
Punkt C liegt
1. auf dem Kreis um D mit Radius c, ④
2. auf dem Kreis um B mit Radius b. ⑤





Ergebnisse





Es gibt zwei nicht kongruente Ergebnisse ABC_1D und ABC_2D.

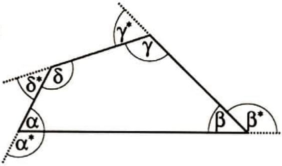
Aufgaben

1. Zeichne die Punkte L(0 | 0), E(6 | 0), I(1 | 4) und B(2 | 2).
   Welche der 6 Buchstaben-Anordnungen, die mit B beginnen, kennzeichnen ein Viereck mit dem richtigen Umlaufsinn?

2. Zeichne die Punkte P(0 | 0), A(2 | 5), R(2 | 2), I(7 | 0) und S(5 | 5).
   Wieviel nicht kongruente Vierecke lassen sich bilden, wenn man jeweils vier Punkte auswählt?
   Gib von jedem einen der vier möglichen Namen an.

3. Entscheide an einer Skizze, ob es Vierecke gibt mit den Eigenschaften:
   a) genau ein 90°-Winkel
   b) ein Winkel misst 270°
   c) drei 90°-Winkel
   d) genau drei 90°-Winkel
   e) genau drei gleich lange Seiten
   f) genau drei gleich große Winkel
   g) $\alpha = \beta = \gamma = 10°$
   h) zwei Seiten sind parallel und die andern beiden gleich lang
   i) zwei Paare paralleler Seiten, aber keine gleich langen Seiten
   j) zwei Paare gleich langer Seiten, aber keine parallelen Seiten
   k) eine Seite ist länger als die restlichen zusammen.

4. Außenwinkelsumme
Zeige: In einem konvexen Viereck gilt
für die Außenwinkel
$\alpha^* + \beta^* + \gamma^* + \delta^* = 360°$



5. Zeige: Die Summe e + f der Diagonalen eines Vierecks ist
•**a)** kleiner als der Umfang
b) größer als der halbe Umfang
c) größer als die Summe zweier Gegenseiten
(Tip: Dreieckungleichung)

6. Konstruiere ein Viereck ABCD mit
•**a)** a = 7; b = 6; c = 4; d = 8; $\gamma = 82°$
b) a = 7; b = 4; $\overline{BD} = 11$; $\alpha = 150°$; $\beta = 65°$
c) a = 8; b = 9; c = 2; $\beta = 75°$; $\gamma = 110°$
d) a = 7; b = 5; $\overline{AC} = 7$; $\overline{BD} = 10$; $\sphericalangle DCA = 35°$
e) a = 5; d = 7; $\sphericalangle ADB = 35°$; $\sphericalangle CDB = 15°$; $\sphericalangle CBD = 20°$

7. Konstruiere ein Viereck ABCD mit
$\overline{AB} = 5$; $\overline{AD} = 6$; $\overline{CD} = 2{,}5$; $\alpha = 45°$; $\gamma = 90°$.

8. Zeichne ein Viereck ABCD mit lauter verschieden langen Seiten. Konstruiere die vier Seitenmitten K, L, M und N und verbinde sie so, dass das *Mittenviereck* entsteht. Welche Besonderheiten hat es?

9. Zeichne das Viereck ABCD mit A(0,5 | 0,5), B(8 | 2), C(5 | 9,5) und D(2 | 8). Die Diagonalen e und f teilen es jeweils in zwei Dreiecke.
Konstruiere die Schwerpunkte: S_a im Dreieck BCD, S_b im Dreieck ACD, S_c im Dreieck ABD und S_d im Dreieck ABC.
Zeichne das Viereck $S_aS_bS_cS_d$ und den Schnittpunkt S seiner Diagonalen. Das Viereck $S_aS_bS_cS_d$ und sein Herkunftviereck ABCD fallen durch merkwürdige Beziehungen, ja sogar Gemeinsamkeiten auf. Schau genau hin (Gitterpunkte!) und beschreibe einige.
Übrigens: S ist der Flächenschwerpunkt des Vierecks ABCD.

•**10. Merkwürdiges im Viereck**
Zeichne das Viereck ABCD mit A(1 | 1), B(16 | 7), C(10 | 19) und D(1 | 7). Die Diagonalen e und f schneiden sich in E, sie teilen es in vier Dreiecke. Konstruiere die Schwerpunkte: T_a im Dreieck ABE, T_b im Dreieck BCE, T_c im Dreieck CDE und T_d im Dreieck DAE.
Zeichne das Viereck $T_aT_bT_cT_d$ und den Schnittpunkt T seiner Diagonalen. Konstruiere wie in der vorigen Aufgabe das Viereck $S_aS_bS_cS_d$ und den Schnittpunkt S seiner Diagonalen.
Vergleiche die Vierecke $T_aT_bT_cT_d$ und $S_aS_bS_cS_d$, die Punkte E, T und S und nenne einige Besonderheiten.

1.2 Punktsymmetrische Vierecke: Parallelogramme

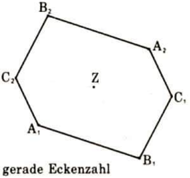
Unter den Vierecken spielen die symmetrischen eine herausragende Rolle. Zuerst betrachten wir solche mit einem Symmetriezentrum. Zur Erinnerung: In einer punktsymmetrischen Figur mit Zentrum Z gibt es zu jedem Punkt P einen Gegenpunkt P′ so, dass Z die Strecke [PP′] halbiert.

Als punktsymmetrische (konvexe) Vielecke kommen in Frage: Viereck, Sechseck, Achteck usw. Die Eckenzahl muss immer gerade sein, weil es zu jeder Ecke E_1 eine dazu punktsymmetrische Ecke E_2 geben muss (wobei $E_1 \neq E_2$). Das einfachste punktsymmetrische Vieleck konstruieren wir, indem wir zwei Punkte P und Q an einem Zentrum Z spiegeln. Die Eigenschaften dieses Vierecks PQ′P′Q ergeben sich aus denen der Punktsymmetrie:

- Z ist Mittelpunkt der beiden Diagonalen.
- Gegenüberliegende Winkel (Gegenwinkel) sind gleich groß.
- Gegenüberliegende Seiten (Gegenseiten) sind gleich lang und parallel.

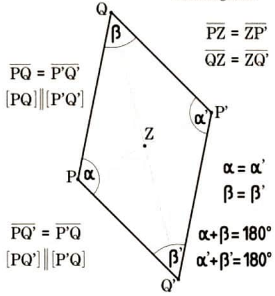
Die letzte Eigenschaft gibt der Figur den Namen:

punktsymmetrisches Vieleck



gerade Eckenzahl

Parallelogramm



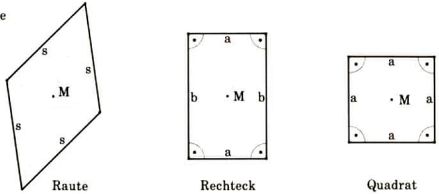
Definition:

> Ein Viereck, bei dem je zwei Gegenseiten parallel sind, heißt **Parallelogramm.**

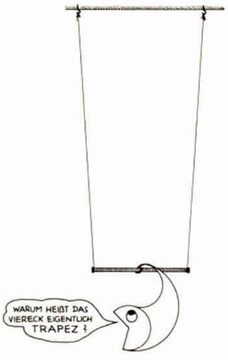
Aus der Parallelität der Gegenseiten folgt noch eine Eigenschaft (siehe E-Winkel!):
Im Parallelogramm ergeben zwei nebeneinander liegende Winkel zusammen 180°, sie sind also Supplementwinkel.

Sonderfälle: Parallelogramm mit gleich langen Seiten: **Raute (Rhombus)**
Parallelogramm mit gleich großen Winkeln: **Rechteck**
Parallelogramm mit gleich langen Seiten und gleich großen Winkeln: **Quadrat.**

besondere Parallelogramme



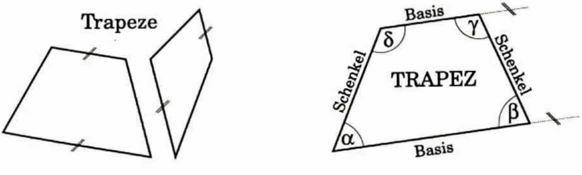
Raute Rechteck Quadrat



In der Mathematik muss man Definitionen sehr genau lesen. Lässt man zum Beispiel in der Parallelogramm-Definition das Wörtchen »je« weg, so beschreibt man eine etwas allgemeinere Art von Vierecken.

Definition

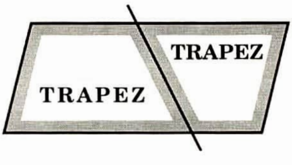
Ein Viereck, bei dem zwei Seiten parallel sind, heißt **Trapez.** Jede der Parallelseiten heißt **Basis** oder **Grundseite,** die andern beiden Seiten heißen **Schenkel.**



$$\alpha + \delta = 180° = \beta + \gamma$$

Selbstverständlich ist jedes Parallelogramm auch ein Trapez und ebenso sind die Sonderfälle Raute, Rechteck und Quadrat auch Trapeze.

Eine Gerade durch die Gegenseiten eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei Trapeze.

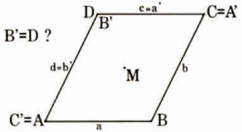


Trapeze füllen ein Parallelogramm

Wegen der Definition ist jedes punktsymmetrische Viereck ein Parallelogramm. Umgekehrt gilt der

Satz:
Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.

Begründung: Ist ABCD ein Parallelogramm, dann ist $a \parallel c$ und $d \parallel b$. M ist der Mittelpunkt von [AC]. Die Punktspiegelung an M bildet A in C und C in A ab. Das Bild von a ist c, und das Bild von b ist d, weil bei der Punktspiegelung Bildgerade und ihr Urbild parallel sind. B ist der Schnittpunkt von a und b, B wird also auf den Schnittpunkt von c und d abgebildet – das aber ist D; deshalb ist das Parallelogramm punktsymmetrisch.



Auch jede der anderen Eigenschaften kennzeichnet allein schon ein Parallelogramm:

1. Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen halbieren.

Begründung: Wenn sich die Diagonalen halbieren, dann ist das Viereck punktsymmetrisch, es ist also ein Parallelogramm. Ist umgekehrt das Viereck ein Parallelogramm, dann ist es punktsymmetrisch, also halbieren sich die Diagonalen.

2. Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei Gegenwinkel gleich groß sind.

Begründung: Sind die Gegenwinkel gleich groß, dann gilt:

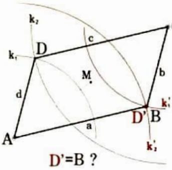
$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \gamma \\ \beta = \delta\end{array}\right\} \alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2(\alpha + \beta) = 360^\circ$$

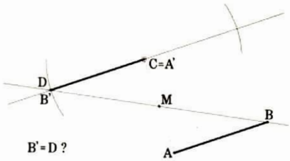
$$\text{also} \quad \alpha + \beta = 180^\circ$$

also sind b und d parallel (E-Winkel!). Entsprechend folgt $a \parallel c$, also ist das Viereck ein Parallelogramm. Ist umgekehrt das Viereck ein Parallelogramm, dann ist es punktsymmetrisch; deshalb sind je zwei Gegenwinkel gleich groß.

3. Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei Gegenseiten gleich lang sind.

Begründung: Ist $a = c$ und $b = d$, dann spiegeln wir an M, dem Mittelpunkt von [AC]. Der Kreis k_1 um A mit Radius d und der Kreis k_2 um C mit Radius c werden dabei abgebildet auf den Kreis $k_{1'}$ um C mit Radius b $(= d)$ und auf den Kreis $k_{2'}$ um A mit Radius a $(= c)$. Der Schnittpunkt B ist das Bild von D. Also ist ABCD ein punktsymmetrisches Viereck und damit ein Parallelogramm. Ist umgekehrt das Viereck ein Parallelogramm, dann ist es punktsymmetrisch; also sind je zwei Gegenseiten gleich lang.





4. Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn zwei Gegenseiten gleich lang und parallel sind.

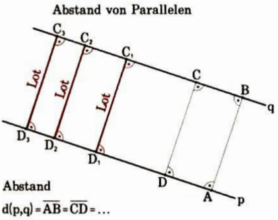
Begründung: Ist $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} = \overline{CD}$, so spiegle man [AB] am Mittelpunkt M von [AC]. Dann gilt:
$A' = C$, B' liegt 1. auf der Parallele zu AB durch C,
2. auf dem Kreis um C mit $r = \overline{AB}$.
Weil B' außerdem auf der Gerade MB liegt, ist $B' = D$, ist das Viereck ABCD punktsymmetrisch, ist also ein Parallelogramm. Ist umgekehrt ABCD ein Parallelogramm, so gilt wegen der Definition und des 3. Parallelogramm-Kriteriums, dass zwei Gegenseiten parallel und gleich lang sind.

Mit den Parallelogramm-Eigenschaften ist es uns möglich, den Abstand von Parallelen zu definieren. Zuerst aber beweisen wir den

Satz:

Alle Lotstrecken zwischen zwei parallelen Geraden sind gleich lang.

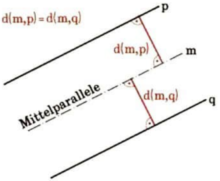
Begründung: Errichtet man in A ein Lot auf p, so trifft es die andere Parallele q im Punkt B auch unter 90° (E-Winkel!). Im Viereck ABCD sind deshalb je zwei Gegenwinkel gleich groß (= 90°), es ist also nach dem 2. Parallelogramm-Kriterium ein Parallelogramm (ja sogar ein Rechteck). Nach dem 3. Parallelogramm-Kriterium ist dann $\overline{AB} = \overline{CD}$. Diese Überlegung gilt für alle Lote.



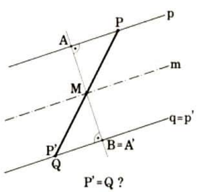
Definition:

Die Länge der Lotstrecke zwischen zwei Parallelen p und q heißt **Abstand** d (p, q) der Parallelen.

Die Lotstrecke ist eine besondere **Querstrecke.** Allgemein heißt jede Strecke Querstrecke, deren Endpunkte auf einem Parallelenpaar liegen.



M halbiert die Querstrecke [PQ]



Die Mittelparallele m zweier Parallelen p und q ist die Symmetrieachse von p und q. Sie hat deshalb von p und q denselben Abstand. Es gilt sogar der

Satz:

Jede Querstrecke wird von der Mittelparallele halbiert.

Begründung: PQ schneidet m in M. AB ist das Lot von p und q durch M, also ist $\overline{MB} = \overline{MA}$. Spiegelt man an M, so gilt: $A' = B$ und $p' = q$. P' liegt 1. auf PM und 2. auf p' $(= q)$, also ist $P' = Q$ und damit $\overline{PM} = \overline{QM}$.

Umgekehrt gilt: Die Parallele durch den Mittelpunkt einer Querstrecke ist die Mittelparallele m. Die Mittelparallele m geht nämlich auf alle Fälle durch den Mittelpunkt der Querstrecke. Weil durch einen Punkt aber nur eine Parallele zu einer Gerade gehen kann, muss sie gleich m sein.

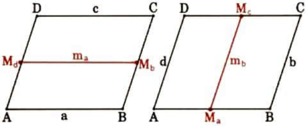
Wir wissen jetzt, dass jede Mittelparallele eines Parallelogramms zwei Gegenseiten halbiert. Umgekehrt gilt auch der

Satz:

Die Strecke, die die Mitten zweier Parallelogramm-Gegenseiten verbindet, ist parallel zu den anderen Gegenseiten und genauso lang.

Eine solche Verbindungsstrecke heißt Mittellinie des Parallelogramms.

Begründung: M_d ist Mitte von [AD] und M_b ist Mitte von [BC]. Die Mittelparallele m von AB und CD geht auch durch M_b und M_d, das heißt, M_bM_d ist die Mittelparallele m. Weil im Viereck ABM_bM_d je zwei Gegenseiten parallel sind, ist es ein Parallelogramm; also ist $\overline{M_bM_d} = \overline{AB}$.

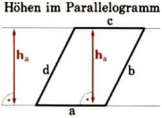


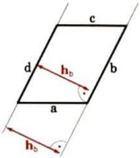
$m_a \parallel a \parallel c$ $\quad$ $m_b \parallel b \parallel d$

Mittellinien im Parallelogramm

$\overline{m_a} = \overline{a} = \overline{c}$ $\quad$ $\overline{m_b} = \overline{b} = \overline{d}$

Höhen im Parallelogramm



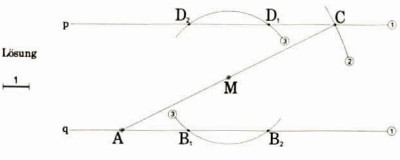


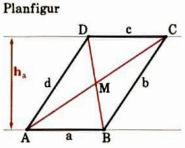
Nach der Definition des Parallelogramms liegen je zwei Gegenseiten auf Parallelen. Die Abstände dieser Parallelen heißen **Höhen des Parallelogramms.** Gewöhnlich sind diese beiden Abstände verschieden, deshalb hat ein Parallelogramm zwei Höhen.

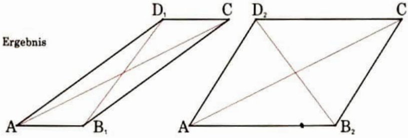
Wenn wir ein Parallelogramm konstruieren, dann nutzen wir seine Eigenschaften aus. Ein etwas schwierigeres Beispiel führen wir vor. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{AC} = 9$, $\overline{BD} = 5$ und $h_a = 4$.

Lösungsidee: Die Seiten a und c liegen auf Parallelen mit Abstand 4. Die Diagonalen [AC] und [BD] halbieren sich.

Lösung:
① Mit dem Geodreieck zeichnen wir zwei Parallelen p und q im Abstand 4.
② Auf q wählen wir den Punkt A. Der Kreis um A mit Radius $\overline{AC} = 9$ schneidet p in C.
③ Der Kreis um den Mittelpunkt M von [AC] mit Radius $\frac{1}{2}\overline{BD} = 2{,}5$ schneidet p in D_1 und D_2 und q in B_1 und B_2.

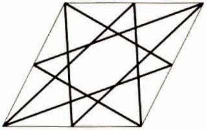


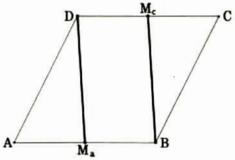




Ergebnis: Parallelogramm AB_1CD_1 und Parallelogramm AB_2CD_2.

Zum Schluss noch ein Begründungsaufgabe:
Geobold spielt mit Parallelogrammen. Er verallgemeinert die Seitenhalbierende des Dreiecks aufs Parallelogramm und hat jede Ecke mit den beiden gegenüberliegenden Seitenmitten verbunden; dabei ist ein schräger achtzackiger Stern entstanden. Dem Geobold fällt auf, dass es zu jeder Seitenhalbierenden eine parallele Seitenhalbierende gibt.

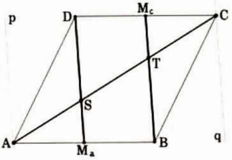




Begründung: $[M_cD]$ und $[M_aB]$ sind gleich lang und parallel. Nach dem 4. Parallelogramm-Kriterium ist M_aBM_cD ein Parallelogramm, seine Seiten $[M_aD]$ und $[M_cB]$ sind parallel.

Dann zeichnet Geobold noch die Diagonale [AC] ein. [AC] wird von den Seitenhalbierenden gedrittelt. Die drei Teile schauen gleich lang aus und so vermutet Geobold den

Satz:
Zwei parallele Seitenhalbierende eines Parallelogramms teilen eine Diagonale in drei gleich lange Strecken.

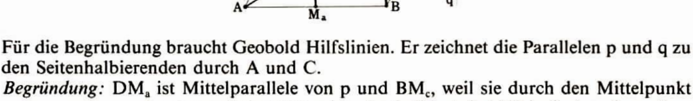


Für die Begründung braucht Geobold Hilfslinien. Er zeichnet die Parallelen p und q zu den Seitenhalbierenden durch A und C.

Begründung: DM_a ist Mittelparallele von p und BM_c, weil sie durch den Mittelpunkt M_a der Querstrecke [AB] geht; also halbiert sie [AT] in S. Aus demselben Grund halbiert BM_c die Strecke [SC] in T; also ist $\overline{AS} = \overline{ST}$ und $\overline{ST} = \overline{TC}$. Damit ist Geobolds Vermutung bewiesen: $\overline{AS} = \overline{ST} = \overline{TC}$.

Geobolds Heim ist ein Käfig aus 4 × 3 Quadraten. Die Mittelpunkte der Geobold-Kreisbögen sind bis aufs Auge Gitterpunkte. Gerät er jedoch nach einer Geometriestunde vor Freude außer Rand und Band, dann verformt er seinen Quadratkäfig: Er streckt oder staucht ihn zu einem Rechteckkäfig, kippt ihn nach links oder rechts, nach oben oder unten zu einem Parallelogramm-, ja sogar Rautenkäfig und verzerrt sich dabei selber zu einer Ovalbogen-Figur.

QUADRATE RAUTEN PARALLELOGRAMME RECHTECKE PARALLELOGRAMME



Aufgaben

1. Berechne alle Innenwinkel eines Parallelogramms, wenn bekannt ist:
   a) $\alpha = 75°$ **b)** α ist um 36° größer als β
   c) $\alpha = 90°$ **d)** α ist dreimal so groß wie β.

2. In welchem besonderen Parallelogramm
   a) ist ein Winkel ein rechter Winkel,
   b) sind zwei Nachbarwinkel gleich,
   c) sind zwei Gegenwinkel supplementär,
   d) sind drei Winkel gleich,
   e) sind zwei Nachbarseiten gleich lang,
   f) sind zwei Diagonalen gleich lang,
   g) sind zwei Diagonalen gleich lang und zueinander senkrecht?

3. Geobolds neuestes Parallelogramm-Kriterium:
   Wenn in einem Viereck zwei Seiten parallel und die beiden andern gleich lang sind, dann ist es ein Parallelogramm.
   Widerlege ihn mit einem Gegenbeispiel.

•4. Von einem Viereck ABCD mit den Diagonalen e = [AC] und f = [BD] ist jeweils bekannt:
   a) e = f **b)** $a \parallel c$ und a = c **c)** $\alpha = 90°$, $\gamma = 90°$ und b = d
   d) $\alpha = \gamma = 75°$, $\beta = 105°$
   e) die Ecken des Vierecks liegen auf einem Kreis
   f) die Ecken des Vierecks liegen auf einem Kreis, die Diagonalen laufen durch den Mittelpunkt dieses Kreises
   g) e zerlegt das Viereck in zwei gleichschenklige Dreiecke
   h) f zerlegt das Viereck in zwei gleichseitige Dreiecke.
   Welche Vierecke sind in jedem Fall Parallelogramme?

5. Zeichne das Dreieck ABC mit A(0 | 0), B(10,5 | 0) und C(3,5 | 7).
   Zeichne durch P(3 | 0) die Parallelen zu a und b; a wird in R und b in Q geschnitten.
   Vergleiche den Weg von A nach B über C mit dem Zickzack-Weg AQPRB.
   Was ändert sich, wenn P woanders auf [AB] liegt?

•6. Bei welchen Parallelogrammen sind
   a) die Diagonalen zugleich auch Winkelhalbierende,
   b) die beiden Höhen gleich lang,
   c) die Gegenwinkel supplementär,
   d) die Mittellinien gleich lang?

7. Das Parallelogramm ABCD und das Parallelogramm DCPQ (P nicht auf AB) haben eine gemeinsame Seite.
   Begründe: ABPQ ist ein Parallelogramm.

8. Die Ecken eines Parallelogramms liegen auf einem Kreis. Was für ein besonderes Parallelogramm ist das? Begründung!

9. Ein Trapez heißt **rechtwinklig,** wenn es mindestens einen rechten Winkel hat.
   a) Begründe: Jedes rechtwinklige Trapez hat mindestens zwei rechte Winkel.
   b) Welchen anderen Namen hat ein gleichschenklig rechtwinkliges Trapez noch?

10. Die Ecken C und D eines Trapezes liegen auf dem Thaleskreis über der Grundseite a.
Drücke den Schnittwinkel σ der Diagonalen mit α aus.

11. Zeichne ein Trapez, die vier Winkelhalbierenden und die Thaleskreise über den Schenkeln.
Begründe: Auf jedem Thaleskreis schneiden sich zwei Winkelhalbierende.

12. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD mit A(1 | 3,5), D(4,5 | 8) und M(4 | 4,5), dem Diagonalenschnittpunkt. Gib die Koordinaten von B und C an.

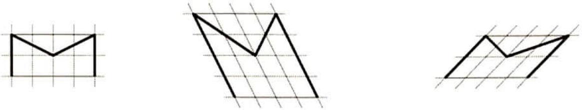
13. Zeichne die Geraden g und h mit $\sphericalangle(g, h) = 60°$.
Konstruiere alle Punkte, die von g und h den Abstand 2 haben.

14. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD, M ist der Schnittpunkt der Diagonalen e = [AC] und f = [BD].

a) $a = 6, b = 4, \alpha = 60°$
b) $c = 7, e = 9, \delta = 150°$
c) $a = 12, b = 5, e = 13$
d) $e = 6, f = 8, \sphericalangle BMC = 45°$
e) $e = 5, f = 9, b = 6$
f) $a = 7, b = 8, h_a = 5$
g) $h_a = 6, a = 8, \alpha = 135°$
h) $h_a = 6, b = 8, f = 7$
i) $h_a = 5, h_b = 7, \alpha = 60°$
j) $h_a = 4, h_b = 2, e = 6.$

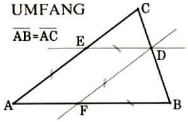
15. Schrägschrift

Übertrage die Buchstaben MATHEMATIK vom Quadratgitter in ein:
a) Rechteckgitter
b) Parallelogrammgitter nach links
c) Parallelogrammgitter nach rechts



16. Konstruiere das Trapez LAUB mit den Grundseiten [LA] und [UB] aus:
a) L(1 | 1). A(5 | 1). U(7 | 7). $\sphericalangle L = 75°$
b) L(7 | 2), A(7 | 7), $\sphericalangle L = 90°$, $\sphericalangle BAL = 30°$, $\overline{UB} = 6$

17. Zeichne in ein Parallelogramm ABCD mit $a = 7$, $b = 4{,}5$ und $\beta = 120°$ die Winkelhalbierenden ein.
Begründe: Die Winkelhalbierenden bilden ein Rechteck.

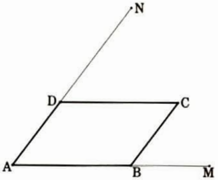


18. UMFANG
Begründe: Der Umfang des Vierecks AFDE ist so groß wie die Schenkellängen zusammen.

19. Zeichne das Parallelogramm ABCD und alle Seitenhalbierenden durch A und C.
Begründe: Die Seitenhalbierenden schneiden sich auf der Diagonale [BD].

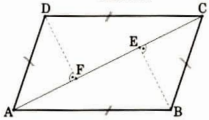
20. HUNDERTACHTZIG
Im Parallelogramm ABCD sind zwei Seiten so verlängert, dass $\overline{DN} = \overline{AB}$ und $\overline{BM} = \overline{AD}$ ist.
a) Was haben die Dreiecke DNC und BMC außer Punkt C noch alles gemeinsam?
b) Begründe: C liegt auf MN.

HUNDERTACHTZIG



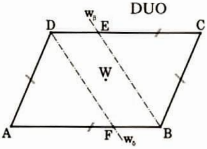
21. LOTTE
Begründe: **a)** $\overline{BE} = \overline{DF}$
b) Viereck BEDF ist ein Parallelogramm.

LOTTE



22. DUO
Begründe:
a) FBED ist ein Parallelogramm
b) der Mittelpunkt W von [EF] liegt auf AC
c) AFCE ist ein Parallelogramm.

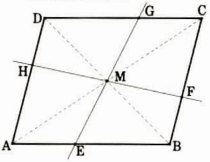
DUO



23. Zeichne ein Dreieck ABC und durch die Ecken die Parallelen zu den Gegenseiten.
Begründe: Der Umfang des Dreiecks, das die Parallelen bilden, ist doppelt so groß wie der Umfang des Dreiecks.

24. VERSCHNITT
Im Diagonalenschnittpunkt M des Parallelogramms schneiden sich zwei Geraden.
Begründe: EFGH ist ein Parallelogramm.

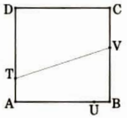
VERSCHNITT



25. Zeichne ein Parallelogramm ABCD, die Seitenmitten M_a und M_c und die vier Seitenhalbierenden durch jene Seitenmitten.
Begründe: Die Seitenhalbierenden schneiden sich auf der Mittellinie m_a.

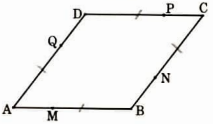
26. QUERSTRECKEN im Quadrat
a) Das Lot von U auf TV schneidet DC in U'.
Zeige: $\overline{UU'} = \overline{TV}$.
b) Zeichne die Punkte T, U, V und W. Konstruiere ein Quadrat ABCD, auf dessen Seiten oder ihren Verlängerungen die Punkte T, U, V und W liegen.

QUERSTRECKEN



27. GLEICHSCHRITT
a) Vergleiche die Winkel ∢AMQ und ∢CPN
b) Begründe: MNPQ ist ein Parallelogramm
c) Begründe: PM und QN schneiden sich im selben Punkt wie AC und BD.

GLEICHSCHRITT



$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$

28. $A(1|1)$, $B(9|9)$, $C(9|16)$ und $D(1|8)$ sind die Ecken eines Vierecks.

a) Beschreibe dem Viereck ein Rechteck ein, dessen Diagonalen die Länge 13 haben.

b) Beschreibe dem Viereck eine Raute ein, deren eine Diagonale die Länge 6 hat.

29. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(4{,}5|4{,}5)$, ferner $P(4|1)$ und $Q(3{,}5|2{,}5)$.

a) Fälle von P aus die Lote auf die Seiten, die Lotfußpunkte bilden das Dreieck $L_aL_bL_c$.
Spiegle P an den Seiten von $\triangle$ ABC, die Spiegelpunkte bilden das Dreieck $S_aS_bS_c$.
Vergleiche Winkel und Seitenlängen dieser beiden Dreiecke.

b) Spiegle Q an den Ecken des Dreiecks, die Spiegelpunkte bilden das Dreieck $S_AS_BS_C$.
Vergleiche Winkel und Seitenlängen dieses Dreiecks mit denen von ABC.

30. Zeichne ein Trapez ABCD und den Mittelpunkt M von [BC].

a) Spiegle ABCD an M. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

b) Begründe mit Hilfe der Figur von **a)**: $m = \frac{1}{2}(a + c)$.

31. Zeichne in ein Trapez ABCD mit den Grundseiten a und c die Mittellinie m ein. m zerlegt das Trapez in zwei Teiltrapeze. Drücke die Mittellinien dieser Trapeze durch a und c aus.

:32. Zeichne die Raute $A(0|0)$, $B(5|0)$, $C(8|4)$ und $D(?|?)$. Zeichne den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise durch A, B und W; W wandert auf der Strecke

a) [CD] **b)** [MC], M ist Mittelpunkt der Raute.

33. Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{BD} = a$. B an d gespiegelt ergibt B′.
Begründe:

a) B′ liegt auf CD **b)** D halbiert [B′C]

c) Was für ein Viereck ist ABDB′?

34. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 5 und einen Punkt A, der auf keiner der beiden Parallelen liegt. Konstruiere durch A eine Gerade, aus der das Parallelenpaar eine Querstrecke der Länge 7 ausschneidet.
Für welche Querstreckenlängen gibt es keine Lösung?

35. Zeichne ein Viereck ABCD, die Mitten seiner Seiten M_a, M_b, M_c und M_d sowie die Mitten seiner Diagonalen M auf [AC] und N auf [BD].
Begründe:

a) $M_aM_bM_cM_d$ ist ein Parallelogramm.

b) M_aNM_cM ist ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel sind zu b und d des Vierecks ABCD.

c) Was für ein Viereck muss ABCD sein, damit $M_aM_bM_cM_d$ ein Rechteck, eine Raute oder sogar ein Quadrat ist?
(Tip: Achte auf die Diagonalen!)

36. **a)** Konstruiere ein Dreieck, von dem die Seitenmitten bekannt sind.

b) Konstruiere ein Parallelogramm, von dem die Seitenmitten M_a, M_b und M_c bekannt sind.

c) Zeichne um M einen Halbkreis k und seinen Durchmesser. P und Q liegen auf dem Durchmesser gleich weit von M entfernt. Zwei Parallelen durch P und Q schneiden k in V und W. Wie groß sind die Winkel PVW und VWQ? Begründe deine Antwort.
(Tip: Ein Halbkreis ist ein halber Kreis!)

37. Beschreibe einem Kreis ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C ein.
Die Winkelhalbierenden w_α und w_β schneiden den Kreis in D und E und sich selber in W.

a) Begründe: EWDC ist ein Parallelogramm.

b) Drücke die Größe von $\sphericalangle$EDW mit α aus.

c) Was für ein Parallelogramm ist EWDC?

38. Zeichne in ein Dreieck ABC mit $\beta > \alpha$ die Winkelhalbierende w_γ ein. Die Senkrechte zu w_γ geht durch den Mittelpunkt M_c von c und schneidet CB in D und CA in E.

a) Begründe: $\overline{CE} = \overline{CD}$.

b) Die Parallele zu ED durch B schneidet AC in F.
Begründe: E halbiert [AF].

c) Begründe: $\overline{CD} = \frac{1}{2}(a + b)$, $\overline{AE} = \frac{1}{2}(b - a)$

d) Begründe: $\sphericalangle BM_cD = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

39. Trage auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus Strecken so ab, dass die Summe beider Streckenlängen gleich 8 ist. Die Strecken sind Seiten eines Parallelogramms.
Welche Ortslinie bilden die Parallelogrammecken, die dem Scheitel gegenüberliegen?

40. Zeichne einen Kreis um M(7 | 3) mit r = 2,5. Die Kreispunkte A(5 | 1,5) und
6
B(9 | 1,5) legen eine Sehne fest. 0 0 10 Punkt C wandert auf dem Kreis.
0

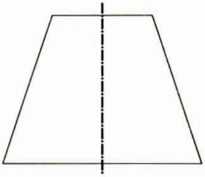
a) Bestimme den geometrischen Ort der vierten Ecke D des Parallelogramms ABCD.
(*Tip:* Zeichne für einige Punkte C die Parallelogrammseite [CD].)

b) Bestimme den geometrischen Ort des Mittelpunkts Z im Parallelogramm ABCD.
(*Tip:* $\sphericalangle$(AC, MZ) = ?)

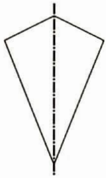
1.3 Achsensymmetrische Vierecke

Bei Vierecken mit einer Symmetrieachse gibt es zwei wesentlich verschiedene Typen:

Die Achse halbiert zwei Seiten.

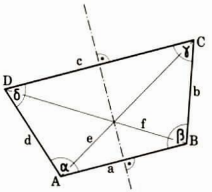


Die Achse geht durch zwei Ecken.



Beginnen wir mit dem Fall, wo die Achse keine Ecken enthält. Trifft sie die Seiten a und c, dann halbiert sie diese senkrecht. Weil sie gemeinsames Lot von a und c ist, müssen diese Seiten parallel sein, das heißt ABCD ist ein Trapez. Wegen der Achsensymmetrie sind die Schenkel b und d gleich lang.

gleichschenkliges Trapez

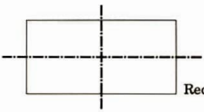


$$a \parallel c$$
$$b = d$$
$$e = f$$
$$\alpha = \beta\,,\ \gamma = \delta$$
$$\alpha + \delta = 180°,\ \beta + \gamma = 180°$$
$$\alpha + \gamma = 180°,\ \beta + \delta = 180°$$

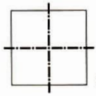
Definition

Ein achsensymmetrisches Trapez heißt auch **gleichschenkliges Trapez.**

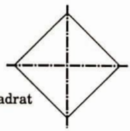
Wie beim gleichschenkligen Dreieck sind auch im gleichschenkligen Trapez die Basiswinkel (paarweise) gleich groß.



Rechteck



Quadrat



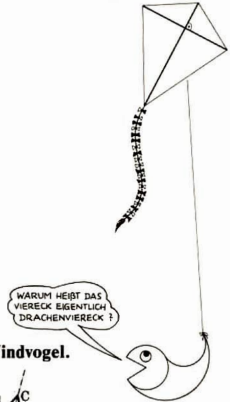
Quadrat

Ein Parallelogramm ist zwar ein Trapez mit gleich langen Schenkeln, aber im Allgemeinen kein gleichschenkliges Trapez, denn es hat keine Symmetrieachse.
Wenn die Symmetrieachse durch eine Ecke des Vierecks geht, dann muss auch die Gegenecke auf ihr liegen. Die beiden andern Ecken bilden ein symmetrisches Punktepaar.

Ein solches Viereck heißt Drachenviereck. Aus der Achsensymmetrie ergeben sich folgende Eigenschaften:

- zwei Paare gleich langer Seiten: d = a, b = c
- ein Paar gleich großer Gegenwinkel: $\beta = \delta$
- zueinander senkrechte Diagonalen: $e \perp f$
- eine Diagonale halbiert zwei Gegenwinkel, sie halbiert auch die andere Diagonale.

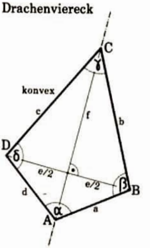
Von diesen Eigenschaften genügt schon die erste zur Definition des Drachenvierecks.



Definition

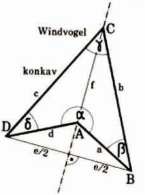
> Ein Viereck heißt **Drachenviereck,** wenn es eine Symmetrieachse durch zwei Gegenecken hat.

Drachenviereck

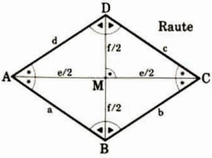


Ein konkaver Drachen heißt auch **Windvogel.**

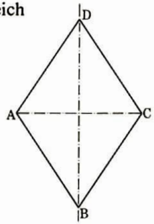
a = d, b = c
β = δ



Sonderfälle sind Drachenvierecke mit vier gleich langen Seiten: das Quadrat und die Raute.



a = b = c = d



Die wichtigsten Eigenschaften der Raute fassen wir in den »Raute-Kriterien« zusammen. Ein Kriterium ist ein kennzeichnendes Merkmal.

1. Raute-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn alle vier Seiten gleich lang sind.

Begründung: Wenn alle Seiten gleich lang sind, dann sind die Dreiecke ABC und CDA gleichschenklig. Die Mittelsenkrechte von [AC] ist Symmetrieachse der beiden Dreiecke, also auch Symmetrieachse des Vierecks. Das Viereck ist deshalb ein gleichseitiger Drachen, also eine Raute.

2. Raute-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn sich die Diagonalen senkrecht halbieren.

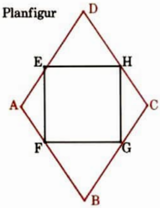
Begründung: Wenn sich die Diagonalen rechtwinklig halbieren, dann ist jede eine Symmetrieachse der andern. Also sind die vier Seiten gleich lang und das Viereck ist eine Raute. Weiß man andrerseits, dass ein Viereck eine Raute ist, dann kann man es auf zwei Arten als Drachen betrachten, also halbiert jede Diagonale die andere im rechten Winkel, das heißt, die Diagonalen halbieren sich senkrecht.

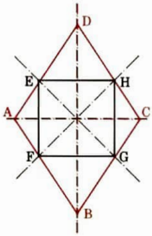
3. Raute-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann eine Raute, wenn jede Diagonale Winkelhalbierende ist.

Begründung: Wenn jede Diagonale Winkelhalbierende ist, dann ist das Viereck von jeder Seite aus gesehen ein Drachen – also sind alle Seiten gleich lang und das Viereck ist eine Raute. Weiß man andrerseits, dass ein Viereck eine Raute ist, dann kann man es auf zwei Arten als Drachen betrachten – also ist jede Diagonale Winkelhalbierende.

Zum Schluss noch zwei Beispiele: eine Konstruktions- und eine Begründungsaufgabe.

1. Gegeben ist eine Raute ABCD. Konstruiere ein Quadrat EFGH so, dass sein Ecken auf den Seiten der Raute liegen.



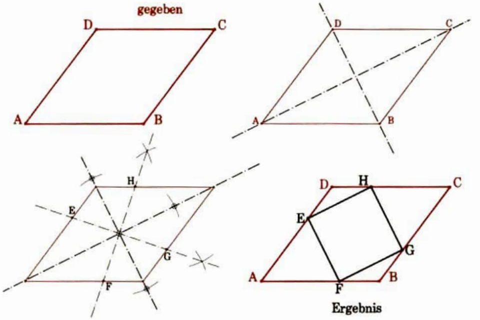


Lösungsidee: Wir nutzen die Achsensymmetrie von Raute und Quadrat aus und zeichnen in die Planfigur alle Symmetrieachsen ein. Zwei Achsen des Quadrats fallen mit denen der Raute zusammen, die beiden anderen halbieren die Winkel zwischen den gegebenen Achsen. Die Ecken des Quadrats liegen

1. auf den Seiten der Raute und
2. auf den Winkelhalbierenden der Rautenachsen.

Also finden wir eine Quadratecke da, wo sich eine solche Winkelhalbierende und eine Rautenseite schneiden.

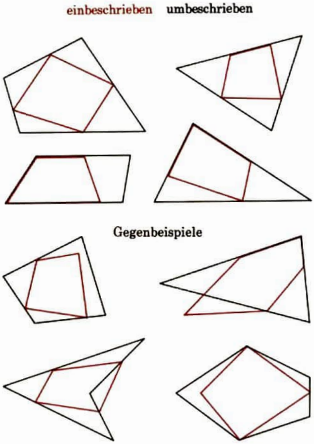
Konstruktion:



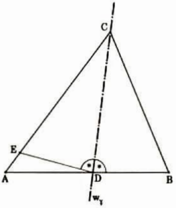
Die vier Bilder erklären schrittweise die Konstruktion. Man sagt: Das Quadrat EFGH ist der Raute ABCD einbeschrieben. Allgemein definieren wir:

Definition:

Ein Vieleck heißt einer konvexen Figur **einbeschrieben,** wenn jede Ecke des Vielecks auf der Figur liegt.
Die konvexe Figur heißt dann dem Vieleck **umbeschrieben.**



2. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit a < b. Die Winkelhalbierende w_γ schneidet c in D. E liegt so auf b, dass ∢EDC = ∢CDB ist.
Begründe: DBCE ist ein Drachen, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist.



Begründung: w_γ ist Symmetrieachse von CB und CE. Wegen der gleichen Winkel bei D ist sie auch Symmetrieachse von DB und DE. Also sind die Schnittpunkte B und E zueinander symmetrisch bezüglich w_γ. Weil C und D auf w_γ liegen, ist DBCE ein Drachen. Weil die Punkte D, B, C und E auf den Dreieckseiten liegen, ist der Drachen dem Dreieck einbeschrieben.

Aufgaben

1. Das Viereck WALD ist ein gleichschenkliges Trapez mit den Schenkeln [WA] und [LD].
Welche Beziehung besteht zwischen
a) $\overline{WA}$ und $\overline{LD}$ **b)** [AL] und [WD] **c)** ∢A und ∢L
d) ∢A und ∢W **e)** ∢A und ∢D **f)** $\overline{WL}$ und $\overline{AD}$?

2. Konstruiere das gleichschenklige Trapez BAUM mit den Schenkeln [AU] und [MB] aus:
a) A(6 | 1), U(7 | 4), Symmetrieachse durch (1 | 1) und (8 | 6) 9
b) B(6 | 1), U(5,5 | 6,5), Symmetrieachse durch (1 | 6) und (7 | 2) 0 0 9
c) A(5 | 0), B(1 | 1), M(0 | 5). 0

3. Das Viereck RITA ist ein Drachen mit der Achse AI. Welche Beziehung besteht zwischen
a) $\overline{AR}$ und $\overline{AT}$ **b)** $\overline{RI}$ und $\overline{TI}$ **c)** ∢R und ∢T
d) ∢RAI und ∢IAT **e)** [RT] und [AI]?

4. Welchen andern Namen hat ein Drachen, bei dem
a) zwei Seiten parallel sind
b) die Winkel, durch die die Achse geht, 90° sind?

5. Konstruiere den Drachen TINA mit der Achse IA aus:
a) I(1 | 1), N(5 | 3), A(5 | 5)
b I(1 | 8), A(8 | 1), ∢TAN = 60°, ∢NIT = 120°
c) T(2 | 8), N(6 | 4), ∢ANT = 30°, ∢ANI = 75°
(Achsenkreuz wie in 2.)

•**6.** Zeichne ein Viereck ELSA, das zwei Paare gleich langer Nachbarseiten hat und trotzdem kein Drachen ist.

•**7.** Geobold hat Sätze über Drachen ausgebrütet – welche sind falsch?
a) Die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.
b) Die Diagonalen halbieren sich.
c) Die Diagonalen halbieren die Winkel.
d) Die längere Diagonale liegt auf der Symmetrieachse.
e) Jede Diagonale teilt den Drachen in zwei gleichschenklige Dreiecke.
f) Im Drachen ist die Winkelsumme gleich 360°.
g) Im Drachen sind zwei Winkel gleich groß.
Zeichne für die falschen Sätze je ein Gegenbeispiel.
Für welche besonderen Drachen sind Geobolds Sätze richtig?

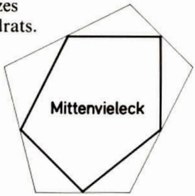
8. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez, dessen eine Diagonale Symmetrieachse ist. Was für ein besonderes Viereck entsteht?

9. **a)** LISA ist ein Drachen und ein Trapez. Zeichne LISA.
Was für ein besonderes Viereck ist LISA?
b) ERNA ist ein Drachen und ein gleichschenkliges Trapez.
Zeichne ERNA. Was für ein besonderes Viereck ist ERNA?

•**10.** GERT ist ein Trapez mit gleich langen Schenkeln, aber kein gleichschenkliges Trapez.
Zeichne GERT.

11. In einem gleichschenkligen Trapez bilden die vier Winkelhalbierenden ein Viereck.
Welche Eigenschaften hat das Viereck?

12. Unter dem **Mittenviereck** eines Vierecks versteht man jenes Viereck, dessen Ecken die Seitenmitten des ursprünglichen Vierecks sind.
Zeichne die Mittenvierecke:
a) eines Drachens **b)** eines gleichschenkligen Trapezes
c) einer Raute **d)** eines Rechtecks **e)** eines Quadrats.
Welche besonderen Mittenvierecke ergeben sich?



13. Konstruiere die Raute AUTO aus:
a) $\overline{AT} = 6$, $\overline{UO} = 8$ **b)** $\overline{AT} = 7{,}5$ $\sphericalangle A = 75°$
c) $\overline{AT} = 5{,}8$, $\overline{AU} = 3{,}4$.

•**14.** Zeichne das Dreieck ABC mit A(0|0), B(11|0) und C(4|7).
Konstruiere die Raute AUGE: U auf [AB], G auf [BC] und E auf [AC].
Die Raute AUGE ist dem Dreieck ABC so einbeschrieben, dass $\sphericalangle$ A gemeinsam ist.

15. Welche Besonderheiten hat eine Raute, bei der ein Winkel doppelt so groß ist wie ein anderer?

16. Zeichne das gleichschenklige Trapez RUDI mit:
a) $R(0|0)$, $U(15|0)$, $D(12|16)$ **b)** $R(0|0)$, $D(18|5)$, $I(4|5)$
c) $U(24|0)$, $D(18|6)$, $I(6|6)$
Fälle vom Schnittpunkt der Diagonalen aus die Lote auf alle vier Seiten bzw. deren Verlängerungen und verbinde die Lotfußpunkte. Welches besondere Viereck entsteht?
Wiederhole bei diesem Viereck das Verfahren. Was für ein Viereck entsteht jetzt?

:17. Zeichne das gleichschenklige Dreieck TIP mit der Spitze I.
Zeige: Für jeden Punkt B auf der Basis ist die Summe seiner Abstände von den Schenkeln dieselbe.
(Tip: Ergänze TIP zur Raute!)

18. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez ABCD und die Diagonalmitten M auf [AC], N auf [BD]. Fälle von C aus das Lot auf a, der Lotfußpunkt ist L. Begründe:
a) LBNM ist ein Parallelogramm
b) LNDM ist ein Parallelogramm **c)** LBDM ist ein Trapez.

19. Fälle vom Schnittpunkt der verlängerten Trapezschenkel das Lot auf die Grundseiten.
Welches Viereck bilden die Lotfußpunkte und die Schenkelmitten?

20. Zeichne ein Dreieck ABC mit $a \neq b$, die Seitenmitten M_a, M_b und M_c sowie den Höhenfußpunkt H_c auf c.
Begründe: Die Seitenmitten und der Höhenfußpunkt bilden ein gleichschenkliges Trapez.

21. Zeichne zu einer Gerade die Parallelen im Abstand 2, 5 und 7 auf derselben Seite der Gerade. Konstruiere eine Raute mit der Seitenlänge 6, deren Ecken auf den vier Parallelen liegen.

•22. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(8|0)$ und $C(12|7)$.
Die Winkelhalbierende w_α trifft [BC] in E. Das Lot von B auf w_α trifft [AC] in L.
Was für ein Viereck ist ABEL? Begründung!

•23. Verlängere im Dreieck ABC c über B und b über C hinaus.
Die beiden Geraden, die die Außenwinkel bei B und C halbieren, schneiden sich in D. Durch D geht eine Parallele zu a und schneidet die beiden Verlängerungen.
Wo entstehen dabei gleichschenklige Dreiecke?

•24. Zeichne einen konvexen Drachen und füge ihm einen konvexen Drachen so an, dass als Gesamtfigur ein Trapez entsteht.
Welchen Winkel bilden die aneinander stoßenden Diagonalen?

Zerlegungen in den nächsten vier Aufgaben

•25. Zerlege eine Raute in:
a) zwei Drachen, **b)** drei Drachen, **c)** vier konvexe Drachen,
d) vier Rauten, **e)** eine Raute und zwei Trapeze.

:26. Zerlege: **a)** einen konvexen Drachen in vier konvexe Drachen,
b) einen Windvogel in drei konvexe Drachen,
c) einen Windvogel in zwei Trapeze und einen Drachen.

:27. Zerlege ein gleichschenkliges Trapez:
a) In zwei gleichschenklige Trapeze,
b) in drei gleichschenklige Trapeze,
c) in eine Raute und ein gleichschenkliges Trapez (wann geht's nicht?),
d) in zwei konvexe Drachen und zwei gleichschenklige Trapeze,
e) in zwei Windvögel und zwei gleichschenklige Trapeze.

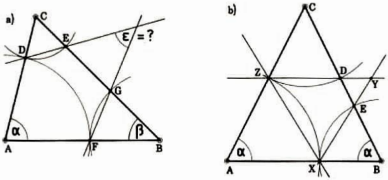
:28. Zerlege ein Dreieck:
a) in drei Drachen, **b)** in drei Trapeze,
c) in einen Drachen und zwei Trapeze.

29. Gegeben sind die Parallelen p und q.
a) U liegt auf p und V auf q. Konstruiere eine Raute mit den Ecken U und V, deren restliche Ecken auf p und q liegen.
b) U und V liegen zwischen p und q. Konstruiere eine Raute mit allen Ecken auf p und q, deren Diagonale durch U und V geht. Wann klappt's nicht?

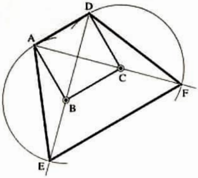
•30. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden u, v, Punkt A auf u und Punkt F zwischen u und v (zwischen A und F liegt keine Gerade).
Konstruiere ein Drachenviereck, von dem zwei Seiten auf u und v liegen, das die Ecke A hat und eine Seite durch F hat.

•31. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden f, g und ein Punkt P dazwischen.
Konstruiere: **a)** ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem zwei Seiten auf f und g liegen und eine dritte durch P geht.
b) einen Rhombus, bei dem zwei Seiten auf f und g liegen und eine dritte durch P geht.

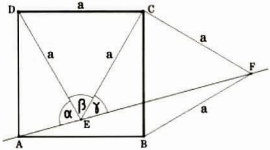
•32. **a)** Gegeben sind α und β. Wie groß ist ε?
b) Gegeben ist α. Was für ein Dreieck ist XYZ? (Siehe Aufgabenbild)



•33. Das Aufgabenbild zeigt, wie ein Trapez AEFD aus dem Quadrat ABCD entsteht.
Wie groß sind die Innenwinkel im Trapez?



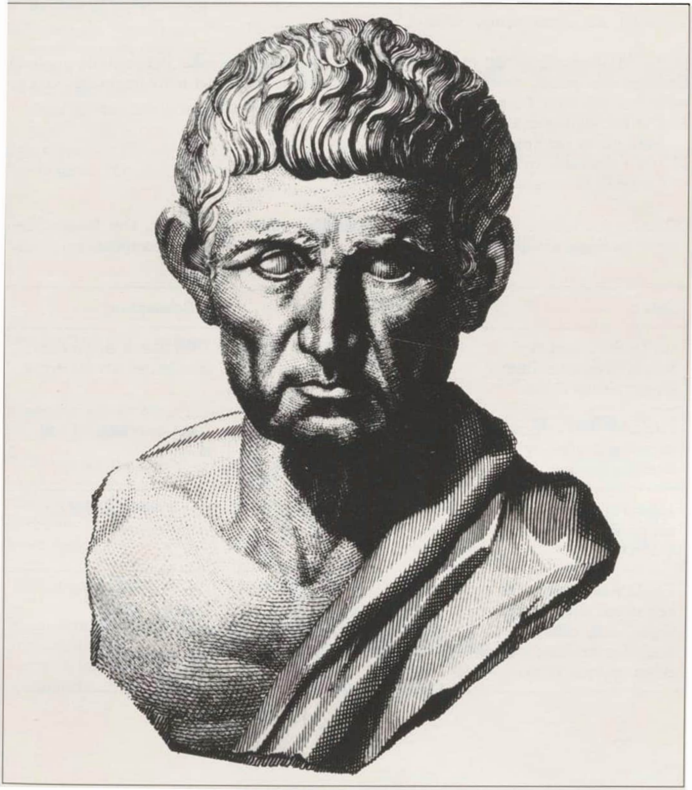
34. An einem Quadrat mit der Seitenlänge a hängen zwei gleichseitige Dreiecke mit den Seitenlängen a, siehe Aufgabenbild.
Zeige: Spitze E liegt auf der Gerade AF.
(Tip: Was muss für die Winkel α, β und γ gelten?)



35. Zeichne die Raute HUGO und einen beliebigen Punkt P in ihr. Fälle von P aus die Lote auf die vier Seiten bzw. ihre Verlängerungen.
Zeige: Die Längendifferenz zweier Lote auf zwei Nachbarseiten ist gleich dem Längenunterschied der Lote auf die beiden anderen Seiten.

2. Kapitel

Der mathematische Lehrsatz



2.1 Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes

Lehrsätze (kurz »Sätze«) kennen wir schon viele, zum Beispiel:
- Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte Seite.
- Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.
- Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.
- Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.

In der Mathematik gehört es zum guten Ton, dass man zu jeder Behauptung auch die Bedingungen nennt, unter denen sie gilt. Deshalb besteht jeder mathematische Satz gewöhnlich aus zwei Teilen:
1. Die Bedingungen, die man zu Grunde legt.
   Man nennt sie **Voraussetzung** des Satzes.
2. Die Folgerung, die man aus der Voraussetzung zieht.
   Sie heißt **Behauptung** des Satzes.

Oft erkennen wir Voraussetzung und Behauptung nicht auf Anhieb. Der Deutlichkeit halber zerlegen wir die vier Beispielsätze in Voraussetzung und Behauptung:

Satz	**Voraussetzung**	**Behauptung**
Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte.	Drei Strecken bilden die Seiten eines Dreiecks.	Zwei Seiten zusammen sind länger als die dritte.
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.	Dreiecke stimmen in allen Seiten überein.	Die Dreiecke sind kongruent.
Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.	Ein Viereck ist ein Parallelogramm.	Das Viereck ist punktsymmetrisch.
Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.	Die Ecken eines Dreiecks liegen so auf einem Kreis, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist.	Das Dreieck ist rechtwinklig.

Um Voraussetzung und Behauptung besser zu trennen formuliert man mathematische Sätze häufig in der **Wenn-Dann-Form.** Die Beispielsätze wirken dann zwar etwas schwerfällig, dafür sind sie aber auch klarer:

- **Wenn** drei Strecken die Seiten eines Dreiecks bilden,
  dann sind je zwei zusammen länger als die dritte.
- **Wenn** Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen,
  dann sind sie kongruent.
- **Wenn** ein Viereck ein Parallelogramm ist,
  dann ist es punktsymmetrisch.
- **Wenn** die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist,
  dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Schreiben wir für die Voraussetzung ein A und ein B für die Behauptung, dann lautet das Schema für einen mathematischen Satz:

$$\boxed{\textbf{Wenn A, dann B}}$$

Manchmal sagt man auch

$$\boxed{\textbf{Aus A folgt B}}$$

oder noch kürzer

$$\boxed{\textbf{A also B}}$$

und schreibt dafür symbolisch

$$\boxed{\mathbf{A \Rightarrow B}}$$

Auch im Alltag verwenden wir solche Sätze, allerdings sind Voraussetzung und Behauptung manchmal sehr versteckt.

Satz, wie wir ihn sagen	*Satz in der Wenn-Dann-Form*
Alle Menschen sind sterblich	Wenn du ein Mensch bist, dann bist du sterblich.
Eisen rostet.	Wenn ein Gegenstand aus Eisen ist, dann rostet er.
Bei Rot anhalten!	Wenn die Ampel auf Rot steht, dann musst du anhalten.
Weihnachtsgans nur auf Vorbestellung	Wenn man nicht vorbestellt, dann bekommt man keine Weihnachtsgans.
Vampire haben kein Spiegelbild.	Wenn ein Wesen ein Vampir ist, dann hat es kein Spiegelbild.

Jeder Satz, der eine Voraussetzung und eine Behauptung enthält, lässt sich auch anders ausdrücken: Man vertauscht Voraussetzung und Behauptung und verneint die beiden:

Voraussetzung		**Behauptung**
Du bist ein Mensch.	$\Rightarrow$	Du bist sterblich.

Verneinung

Du bist nicht sterblich.	$\Rightarrow$	Du bist kein Mensch.

in der Wenn-Dann-Fassung

Wenn du ein Mensch bist,	dann bist du sterblich.

Verneinung

Wenn du nicht sterblich bist,	dann bist du kein Mensch.

ein anderes Beispiel

Wenn ein Wesen ein Vampir ist,	dann hat es kein Spiegelbild.

Verneinung

Wenn ein Wesen ein Spiegelbild hat,	dann ist es kein Vampir.

Damit haben wir ein allgemeines Gesetz kennen gelernt. In Kurzform lautet es:

A also B		nicht B also nicht A
$\boxed{A \Rightarrow B}$	**ist gleichwertig mit**	$\boxed{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$
wenn A, dann B		wenn B nicht, dann A nicht

Mit $\overline{B}$ (sprich »B quer«) meint man die Verneinung der Aussage B. Der Satz $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ heißt **Kontraposition** des Satzes $A \Rightarrow B$. Dazu noch ein Beispiel:

Satz:

Wenn Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen,	dann sind sie kongruent.

Verneinung

Kontraposition:

Wenn Dreiecke nicht kongruent sind,	dann stimmen sie nicht in allen Seiten überein.

Haben Voraussetzung oder Behauptung mehrere Bestandteile, so ist die Kontraposition verzwickter, weil man beim Verneinen einer zusammengesetzten Aussage sehr aufpassen muss. Beispiel:

Satz
Wenn ich nicht gelernt habe und ausgefragt werde, dann bekomme ich eine schlechte Note.

Kontraposition
Wenn ich keine schlechte Note bekommen habe, dann habe ich gelernt oder bin nicht ausgefragt worden.

Um diese beiden Sätze in Kurzform zu schreiben brauchen wir zwei neue Symbole. Für »und« schreiben wir »$\wedge$«, für »oder« schreiben wir »$\vee$«. Das Ganze sieht dann so aus:

Satz:

$\boxed{\text{nicht gelernt}}$ und $\boxed{\text{ausgefragt}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{schlechte Note}}$

$$\mathbf{N} \wedge \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{S}$$

Kontraposition:

$\boxed{\text{keine schlechte Note}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{gelernt}}$ oder $\boxed{\text{nicht ausgefragt}}$

$$\overline{\mathbf{S}} \Rightarrow \overline{\mathbf{N}} \vee \overline{\mathbf{A}}$$

Aufgaben

1. Gib Voraussetzung, Behauptung und Wenn-Dann-Form der folgenden Sätze an:
   a) Jede Zahl mit der Quersumme 6 ist durch 3 teilbar.
   b) Im Parallelogramm sind zwei Winkel gleich groß.
   c) Ein Viereck mit drei rechten Winkeln ist ein Rechteck.
   d) Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

•2. Gib Voraussetzung, Behauptung und Wenn-Dann-Form der folgenden Sätze an:
   a) Bei Gefahr Notbremse ziehen.
   b) Vorsicht! Bissiger Hund.
   c) Kein Geist wirft einen Schatten.
   d) Kängurus brauchen keine Handtaschen.

3. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann hat es zwei gleich große Winkel.
   b) Wenn 2 die letzte Ziffer einer Zahl ist, dann ist es keine Quadratzahl.
   c) Wenn zwei Geraden ein gemeinsames Lot haben, dann sind sie parallel.
   d) Wenn eine Zahl genau zwei Teiler hat, dann ist sie eine Primzahl.

•4. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn die Sonne scheint, dann ist es hell.
   b) Wenn du nicht sorgfältig zeichnest, dann wird die Konstruktion ungenau.
   c) Wenn du mindestens 3 Richtige hast, dann gewinnst du im Lotto.
   d) Wenn du höchstens drei Fehler im Diktat hast, dann kriegst du mindestens eine 2.

:5. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Viereck vier gleich große Winkel und vier gleich lange Seiten hat, dann ist es ein Quadrat.
   b) Wenn eine Zahl durch 4 und durch 6 teilbar ist, dann ist sie durch 12 teilbar.

:6. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Parallelogramm einen Umkreis hat oder zwei gleich große benachbarte Winkel, dann ist es ein Rechteck.
   b) Wenn eine Zahl durch 111 oder 74 teilbar ist, dann ist sie durch 37 teilbar.

2.2 Wahre und falsche Sätze, Kehrsatz

Ein Satz kann wahr oder falsch sein. Beispiele:

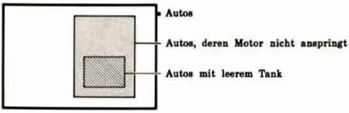
- Wenn der Tank leer ist, dann springt der Motor nicht an. (wahr)
- Jedes gleichseitige Dreieck hat mindestens zwei gleich große Winkel. (wahr)
- Wenn die Autobatterie leer ist, dann springt der Motor nicht an. (falsch)
- Ein Dreieck mit mindestens einem 60°-Winkel ist gleichschenklig. (falsch)

Um zu zeigen, dass ein Satz wahr ist, muss man ihn beweisen; um zu zeigen, dass ein Satz falsch ist, genügt es *ein* Gegenbeispiel zu finden. Ein Gegenbeispiel erfüllt die Voraussetzung, nicht aber die Behauptung. Gegenbeispiele für die beiden falschen Sätze sind:

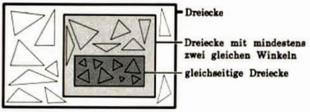
- ein Auto mit leerer Batterie, dessen Motor anspringt, wenn man das Auto anschiebt,
- ein Dreieck mit den Winkeln 60°, 30° und 90°.

Diese Sachverhalte kann man sich auch mit **Mengendiagrammen** klar machen.

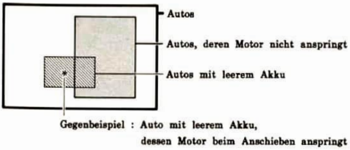
Wenn der Tank leer ist,
dann springt der Motor nicht an.



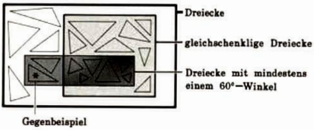
Jedes gleichseitige Dreieck hat
mindestens zwei gleich große Winkel.



Wenn der Akku leer ist,
dann springt der Motor nicht an.



Ein Dreieck mit mindestens
einem 60°-Winkel ist gleichschenklig.



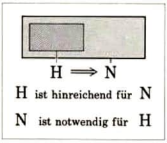
Kürzen wir die Aussagen genauso ab wie die Mengen, so gilt:

$A \Rightarrow B$ (wahr) ist gleichwertig mit $A \subset B$ (A ist Teilmenge von B).
Der Satz $B \Rightarrow A$ ist falsch, weil B keine Teilmenge von A ist. Alle Elemente (Autos, Dreiecke), die zu B, aber nicht zu A gehören, sind Gegenbeispiele.

Der Satz »Wenn einer Lungenentzündung hat, dann hat er Fieber« ist wahr. Bei einem wahren Satz $A \Rightarrow B$ nennen wir die Voraussetzung A eine **hinreichende Bedingung** für B. Lungenentzündung ist eine hinreichende Bedingung für Fieber. Es *reicht*, wenn man weiß, dass einer Lungenentzündung hat (also A gilt) um sicher zu sein, dass er auch Fieber hat (also auch B gilt).
Der Satz $A \Rightarrow B$ (wenn Lungenentzündung, dann Fieber) hat die Kontraposition $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (wenn kein Fieber, dann keine Lungenentzündung).

Also ist Fieber notwendig dafür, dass Lungenentzündung vorliegt, denn ohne Fieber keine Lungenentzündung (wie es die Kontraposition sagt). Fieber (B) ist eine **notwendige Bedingung** für Lungenentzündung (A). Allgemein sagt man:

B ist eine notwendige Bedingung für A,
wenn aus der Ungültigkeit von B (das ist $\overline{B}$) die Ungültigkeit von A ($\overline{A}$) folgt,
wenn also $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ wahr ist, was gleichwertig ist mit $A \Rightarrow B$.



Bei jedem wahren Satz steht also
eine hinreichende Bedingung vor dem ⇒
und eine notwendige Bedingung hinter dem ⇒.

Zur Verdeutlichung noch drei Beispiele:

Wenn jemand einen Regenbogen sieht, dann scheint hinter ihm die Sonne ($R \Rightarrow S$).
Der Regenbogen ist hinreichend für Sonnenschein.
Sonnenschein ist notwendig für einen Regenbogen.
Aber: Der Regenbogen ist nicht notwendig für Sonnenschein, denn die Sonne scheint ja auch dann, wenn kein Regenbogen da ist; Sonnenschein ist nicht hinreichend für den Regenbogen, denn wenn die Sonne scheint, dann ist nicht immer auch ein Regenbogen da.

Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar ($T_6 \Rightarrow T_2$).
Die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichend für die Teilbarkeit durch 2, die Teilbarkeit durch 2 ist notwendig für die Teilbarkeit durch 6.
Aber: Die Teilbarkeit durch 6 ist nicht notwendig für die Teilbarkeit durch 2 (Gegenbeispiel 10);
die Teilbarkeit durch 2 ist nicht hinreichend für die Teilbarkeit durch 6 (Gegenbeispiel 10).

Wenn ein Viereck eine Raute ist, dann hat es zwei Symmetrieachsen ($R \Rightarrow S$).
Die Rauteneigenschaft ist hinreichend für zwei Symmetrieachsen, aber nicht notwendig (Gegenbeispiel: Rechteck). Zwei Symmetrieachsen sind bei einem Viereck notwendig für die Rauteneigenschaft, aber nicht hinreichend (Gegenbeispiel: Rechteck).
Vertauscht man in einem Satz Voraussetzung und Behauptung, so ergibt sich der Kehrsatz, zum Beispiel:

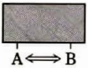
Satz	Wenn der Tank leer ist,	dann springt der Motor nicht an.	wahr
Kehrsatz	Wenn der Motor nicht anspringt,	dann ist der Tank leer.	falsch

Satz: $A \Rightarrow B$ **Kehrsatz:** $B \Rightarrow A$

Viele Wenn-Dann-Sätze haben falsche Kehrsätze, aber nicht alle, zum Beispiel der hier:

Satz	Wenn es Juni ist,	dann erreicht die Sonne in Rom den höchsten Stand.	wahr
Kehrsatz	Wenn die Sonne in Rom den höchsten Stand erreicht,	dann ist es Juni.	wahr

Sind beide, Satz und Kehrsatz, wahr, so sagt man:
A gilt **genau dann, wenn** B gilt.



$A \Longleftrightarrow B$

A ist hinreichend und notwendig für B

B ist notwendig und hinreichend für A

Auch dafür gibt es eine symbolische Kurzform:
Im Diagramm fallen die Mengen für A und B zusammen.

$A \Leftrightarrow B$

Beispiel: Ein Viereck ist genau dann ein Quadrat, wenn es vier Symmetrieachsen hat. Vier Symmetrieachsen sind bei einem Viereck hinreichend und notwendig für die Quadrateigenschaft.

Dieser Abschnitt hat angefangen mit »Ein Satz kann wahr oder falsch sein ...«. Was kann er denn sonst noch? Es gibt Sätze, von denen man (noch) nicht weiß, ob sie wahr oder falsch sind, zum Beispiel dieser:

Jede gerade Zahl größer als 2 ist als Summe zweier Primzahlen darstellbar.
(Beispiel: $18 = 7 + 11$)

Chr. GOLDBACH (1690 bis 1764) hat diesen Zusammenhang 1742 vermutet. Seitdem ist sein Satz weder bewiesen noch ein Gegenbeispiel gefunden worden.

Aufgaben

1. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie wahr oder falsch sind. Gib bei falschen Sätzen ein Gegenbeispiel an.
a) Alle Schüler sind fleißig.
b) Alle Vögel haben zwei Beine.
c) Wenn die Straße nass ist, dann hat es geregnet.
d) Bei Temperaturen unter 0 °C friert der Königsee zu.
e) Jede Langspielplatte hat 1 024 Rillen.

2. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie wahr oder falsch sind. Gib bei falschen Sätzen ein Gegenbeispiel an.
a) Wenn die Quersumme einer Zahl durch 7 teilbar ist, dann ist die Zahl durch 7 teilbar.
b) Wenn 2 die letzte Ziffer einer Zahl ist, dann ist es keine Quadratzahl.
c) Jedes Viereck mit drei rechten Winkeln ist ein Trapez.
d) Wenn $g \perp h$ und $h \perp k$, dann gilt: $g \perp k$.

•3. Zeichne zu den angegebenen Mengen die Mengendiagramme. Es gibt acht Wenn-Dann-Sätze der Form $A \Rightarrow B$, $\overline{A} \Rightarrow B$, $B \Rightarrow \overline{A}$ usw., also acht Mengendiagramme.
Entscheide bei jedem dieser Sätze, ob er wahr oder falsch ist, und gib gegebenenfalls ein Gegenbeispiel sowie seine Lage im Mengendiagramm an.
Warum genügt es eigentlich, wenn man vier dieser acht Sätze überprüft?
a) A = Menge der Primzahlen
B = Menge der Vielfachen von 6
b) A = Menge der Drachenvierecke
B = Menge der Parallelogramme
c) A = Menge der Rauten
B = Menge der Vierecke mit vier gleich langen Seiten
d) A = Menge der Parallelogramme
B = Menge der Rechtecke

• **4.** Entscheide, ob A eine hinreichende, eine notwendige, eine hinreichende und notwendige oder eine weder hinreichende noch notwendige Bedingung für B ist.

a) A := Das Viereck hat zwei parallele Seiten.
B := Das Viereck ist ein Parallelogramm.

b) A := Das Dreieck hat drei gleich lange Seiten.
B := Das Dreieck hat einen 60°-Winkel.

c) A := Das Dreieck hat einen 31°-Winkel.
B := Das Dreieck ist stumpfwinklig.

d) A := Die Raute hat einen 90°-Winkel.
B := Das Viereck ist ein Quadrat.

• **5.** Gib für B je eine notwendige, eine hinreichende und eine notwendige und hinreichende Bedingung an.

a) B := Das Viereck ist ein Quadrat.
b) B := Das Dreieck ist gleichschenklig.
c) B := Die Dreiecke ABC und DEF sind kongruent.
d) B := Die Zahl ist durch 12 teilbar.
e) B := Die Zahl ist nicht durch 6 teilbar.

6. Bilde von jedem Satz den Kehrsatz und entscheide bei beiden, ob sie wahr oder falsch sind. Gib gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

a) Jedes Viereck mit zwei Symmetrieachsen ist eine Raute.
b) Jede gerade Quadratzahl ist durch 4 teilbar.
c) Jedes Viereck mit zueinander senkrechten Diagonalen ist ein Rechteck.
d) Jedes Dreieck mit zwei 60°-Winkeln ist gleichseitig.
e) Wenn drei Punkte auf einem Kreis liegen, dann bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck.
f) Wenn zwei Dreiecke punktsymmetrisch liegen, dann sind sie kongruent.

• **7.** Bilde die Kontraposition und den Kehrsatz. Entscheide dann, ob der Satz wahr ist oder der Kehrsatz war ist oder beide wahr sind.

a) Wenn es blitzt, dann donnert's.
b) Wenn man in Urlaub geht, erholt man sich.
c) Wenn der Sturm übers Meer fegt, dann gehen die Wellen hoch.
d) Wenn man Glück hat, gewinnt man im Lotto.
e) Wenn man in den Spiegel schaut, sieht man vorn und hinten vertauscht.
f) Wenn einer eine Reise tut, so kann er was erzählen. (M. Claudius)
g) Wenn zwei sich streiten, freut sich der dritte.
h) Wenn es dem Esel zu wohl wird, geht er aufs Eis.
i) Wenn sie nicht gestorben sind, dann leben sie heute noch.
j)

•**8.** Bringe den Satz in die Wenn-Dann-Form, bilde die Kontraposition und den Kehrsatz.
Entscheide, ob der Satz wahr ist oder der Kehrsatz wahr ist oder beide wahr sind.

a) Wer dieses Kapitel studiert, schult sein logisches Denken.
b) Wer weniger als vier Fehler hat, bekommt Note eins.
c) Bei klarer Nacht sind die Sterne sichtbar.
d) Hunde, die bellen, beißen nicht.
e) Was sich liebt, das neckt sich.
f) Wo Licht ist, ist auch Schatten.
g) Ohne Fleiß kein Preis.

:**9.** Wir spielen mit vier Karten. Jede hat auf einer Seite einen Buchstaben und auf der andern eine natürliche Zahl. Die Karten liegen so vor uns:

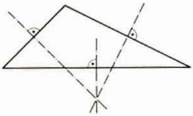
$\boxed{N}$ $\boxed{E}$ $\boxed{8}$ $\boxed{5}$

a) Geobold stellt einen Satz auf:
Wenn auf einer Kartenseite ein Vokal steht,
dann steht auf der Rückseite eine gerade Zahl.
Du sollst nun möglichst wenig Karten wenden, um zu entscheiden, ob der Satz wahr oder falsch ist.
Welche Karten musst du wenden?
b) Welche Karten muss man wenden, um den Kehrsatz von **a)** zu überprüfen?
c) Welchen Satz überprüfst du, wenn du die Karten $\boxed{E}$ und $\boxed{8}$ wendest?

:**10. a)** Eva: »Adam, wann besuchst du mich endlich?«
Adam: »Wenn ich zu dir radle, muss das Wetter schön sein.«
Nach einem prächtigen Tag:
Eva: »Adam, gestern war schönes Wetter, aber du bist nicht gekommen. Warum hältst du dein Versprechen nicht?«
Besteht Evas Vorwurf zu Recht?
b) Toni: »Bei Föhn habe ich immer scheußliches Kopfweh.«
Tino: »Aber heute ist doch kein Föhn! Warum klagst du?«
Welchen Fehler macht Tino?

2.3 Der Beweis eines mathematischen Satzes

Bei mathematischen Aussagen unterscheidet man zwei Sorten:
Die eine Sorte sind Existenz-Aussagen vom Typ »es gibt ...«, zum Beispiel:
Es gibt Dreiecke, bei denen sich die Mittelsenkrechten außerhalb des Dreiecks treffen. Solche Existenz-Aussagen beweist man, indem man *ein* Beispiel vorzeigt. In unserem Fall sehen wir das Beispiel im Bild, es ist der Beweis.



Die andere Sorte enthält die meisten mathematischen Sätze, es sind All-Aussagen vom Typ »für alle ... gilt ...« oder vom Typ »wenn ..., dann ...«, zum Beispiel:
Für alle Dreiecke gilt: Die Summe der Innenwinkel beträgt 180°. Weil es unendlich viele Dreiecke gibt, ist es unmöglich, diesen Satz zu beweisen, indem man auch noch so viele Dreiecke vorzeigt. Es könnte ja immer noch andere Dreiecke geben, deren Innenwinkel-Summe von 180° abweicht.

Die Mathematiker haben Methoden entwickelt, die einem die Richtigkeit von Sätzen des Es-Gibt-Typs und des Wenn-Dann-Typs klar machen. Eine solche Methode heißt **Beweis**. Es gibt vier wichtige Beweisarten:

- Beweis durch Nachrechnen
- Widerspruchsbeweis
- Symmetriebeweis
- Kongruenzbeweis

Bei jedem Beweis unterscheidet man drei Teile:
1. Genaue Formulierung aller **Voraussetzungen** (Vor.)
2. Genaue Formulierung der **Behauptung** (Beh.)
3. Begründung der Behauptung; man verwendet dabei die Voraussetzungen und schon bekannte Sätze und Definitionen. (Bew.)

Das Beweisschema sieht dann ungefähr so aus:

Vor.:	.....	(V1)
	.....	(V2)
	.....	(V3) usw.
Beh.:	.....	
Bew.:	.....	(V1, Satz, ...)
	.....	(Definition, V2, ...)
	.....	q.e.d.

Die Schlussformel q.e.d. ist die Abkürzung für den lateinischen Satz »quod erat demonstrandum«, sie heißt auf deutsch »was zu beweisen war«. Seit Euklid stellt man mit ihr erleichtert fest, dass man den Beweis geschafft hat.

Von jedem Beweistyp führen wir Beispiele vor.

Beweise durch Nachrechnen

Beispiel aus der Algebra

Satz:
Eine 3ziffrige Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

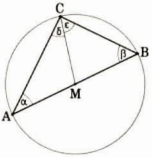
Vor.: a sei die Hundertziffer, b die Zehnerziffer und c die Einerziffer der Zahl
$100a + 10b + c$; (V1)
die Quersumme $(a + b + c)$ ist durch 9 teilbar (V2)
Beh.: $100a + 10b + c$ ist durch 9 teilbar.
Bew.: $100a + 10b + c = \underbrace{(a+b+c)}_{\substack{\text{durch 9}\\ \text{teilbar}\\ \text{(V2)}}} + \underbrace{99a+9b}_{\substack{\text{durch 9}\\ \text{teilbar}}}$ (V1)

also gilt: $100a + 10b + c$ ist durch 9 teilbar. q.e.d.

Beispiel aus der Geometrie

Satz:
Wenn die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, dann ist ihr Gegenwinkel gleich 90°.

Zuerst zeichnen wir eine Überlegungsfigur.



Vor.: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ (V)
Beh.: $\delta + \varepsilon = 90°$
Bew.: $\alpha = \delta$, denn $\triangle MCA$ ist gleichschenklig (V)
$\beta = \varepsilon$, denn $\triangle MBC$ ist gleichschenklig (V)
$\alpha + \beta + \varepsilon + \delta = 180°$ (Winkelsummensatz)
$(\delta + \varepsilon) + (\varepsilon + \delta) = 180°$
$\varepsilon + \delta = 90°$ w.z.b.w.

Der Widerspruchsbeweis

In der Umgangssprache begründet man seine Meinung oft mittels Kontraposition. Max hat in Geschichte eine 6 geschrieben und der Vater schimpft: »Du hast nichts gelernt! Wenn du nämlich gelernt hättest, dann hättest du keine 6 geschrieben.«
Setzen wir für »Max schreibt eine 6« kurz S und für »Max lernt« kurz L, dann begründet der Vater

seinen Satz $S \Rightarrow \overline{L}$

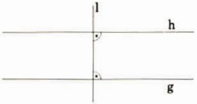
mit der Kontraposition $L \Rightarrow \overline{S}$, die er für richtig hält.
Dabei haben wir stillschweigend den Satz verwendet, dass die doppelte Verneinung eine Bejahung ist: $\overline{\overline{L}} = L$.
In der Mathematik nennt man dieses Verfahren Widerspruchsbeweis, sein Schema ist:

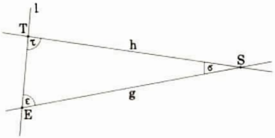
Zu beweisen ist die Behauptung	$A \Rightarrow B$
stattdessen beweist man die gleichwertige Kontraposition	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Zwei Beispiele aus der Geometrie:

Satz:
Wenn zwei Geraden einer Ebene ein gemeinsames Lot haben, dann sind sie parallel.

Kontraposition: Wenn sich zwei Geraden einer Ebene schneiden, dann haben sie kein gemeinsames Lot.





Vor.: $l \perp g$ und $l \perp h$ **(A)**
Beh.: $g \parallel h$ **(B)**
Bew.: *Annahme:* g und h schneiden sich in S **($\bar{\text{B}}$)**
also gilt: $\varepsilon + \tau + \sigma = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck EST)
$\varepsilon + \tau < 180°$ $(\sigma > 0°)$
Es ist also unmöglich, dass $\varepsilon = 90°$ und zugleich $\tau = 90°$ ist. **($\bar{\text{A}}$)**
Damit haben wir die Aussage $\bar{\text{A}}$ aus $\bar{\text{B}}$ gefolgert: $\bar{\text{B}} \Rightarrow \bar{\text{A}}$, was gleichwertig ist mit dem Satz $\text{A} \Rightarrow \text{B}$.

Satz:
In jedem Viereck ist mindestens ein Winkel größer oder gleich 90°.

Vor.: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Winkel eines Vierecks,
das heißt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ **(A)**
Beh.: Mindestens ein Winkel ist größer oder gleich 90°. **(B)**
Bew.: Annahme: Jeder Winkel ist kleiner als 90°, das heißt

$$\begin{array}{r} \alpha < 90° \\ \wedge\ \beta < 90° \\ \wedge\ \gamma < 90° \\ \wedge\ \delta < 90° \\ \hline \alpha + \beta + \gamma + \delta < 360° \end{array} \qquad (\bar{\text{B}})$$

Also ist die Winkelsumme nicht gleich 360° und damit können α, β, γ und δ nicht Winkel eines Vierecks sein. q.e.d.

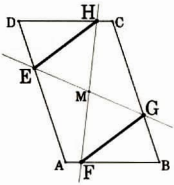
Der Symmetriebeweis

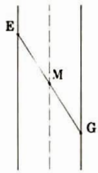
Entdeckt man in einer Figur ein Symmetriezentrum oder eine Symmetrieachse, so wird man beim Beweisen die Symmetrie-Eigenschaften ausnützen.

Beispiel zur Punktsymmetrie

Satz:
Zwei Geraden durch den Mittelpunkt eines Parallelogramms schneiden das Parallelogramm so in vier Punkten, dass je zwei gegenüberliegende Verbindungsstrecken gleich lang sind.

Überlegungsfigur





Vor.: ABCD ist ein Parallelogramm (V1)
M ist Diagonalenschnittpunkt (V2)
M liegt auf HF (V3)
M liegt auf EG (V4)

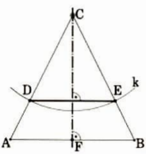
Beh.: $\overline{EH} = \overline{GF}$ und $\overline{EF} = \overline{GH}$

Bew.: M liegt auf der Mittelparallele von DC und AB (V1 und V2) [EG] ist Querstrecke von AD und BC durch M (V4)
und wird damit von M halbiert.
Entsprechend gilt: $\overline{HM} = \overline{MF}$.
Also liegen E und G bzw. H und F symmetrisch bezüglich M. Deshalb sind die Strecken [EH] und [GF] zueinander punktsymmetrisch und gleich lang.
Dasselbe gilt für [EF] und [GH].

Beispiel zur Achsensymmetrie

Satz:
Schneidet ein Kreis um die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks die Schenkel in zwei Punkten, dann ist ihre Verbindungsstrecke parallel zur Basis.

Überlegungsfigur



Vor.: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
$\overline{DC} = \overline{EC}$ (V2)

Beh.: $DE \parallel AB$

Bew.: CF ist Symmetrieachse des Dreiecks ABC und des Kreises k, folglich liegen die Schnittpunkte D und E symmetrisch zur Achse CF.
Weil die Verbindungslinie zueinander symmetrischer Punkte senkrecht auf der Achse steht, ist CF gemeinsames Lot von DE und AB.
Also sind DE und AB parallel.

Der Kongruenzbeweis

In vielen Aufgaben muss man zeigen, dass zwei Strecken gleich lang oder zwei Winkel gleich groß sind. Hier bewährt sich der Kongruenzbeweis. Man sucht sich zwei Dreiecke, die dem Augenschein nach kongruent sind und die fraglichen Stücke enthalten. Mit den Kongruenzsätzen begründet man die Kongruenz der Dreiecke und damit auch die Kongruenz der Strecken und Winkel. Als Werkzeug sind die Kongruenzsätze unerlässlich, wir wiederholen sie deshalb:

SSS: Wenn Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen, dann sind sie kongruent.
SWS: Wenn Dreiecke in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.
WSW: Wenn Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, dann sind sie kongruent.
SWW: Wenn Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden und dem nicht anliegenden Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.
SsW: Wenn Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

Schema für den Kongruenzbeweis

Überlegungsfigur zeichnen (eventuell mit Hilfslinien, wesentliche Stücke hervorheben)
Vor.: ..... (V1)
..... (V2) usw.
Beh.: ... = ...
Bew.: ... = ... (V1 ...)
... = ... (V1, V3 ...) usw.

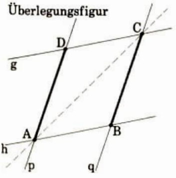
$\Rightarrow$ $\Delta \ldots \cong \Delta \ldots$ (Kongruenzsatz)
$\Rightarrow$ ... = ... q.e.d.

1. Beispiel

Satz:
Ein Parallelenpaar schneidet aus einem anderen Parallelenpaar gleich lange Strecken aus.

Überlegung: Zu zeigen ist $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Durch die Hilfslinie AC entstehen die Dreiecke ABC und CDA, sie sind anscheinend kongruent und haben die fraglichen Strecken als Seiten.

Überlegungsfigur



Vor.: $g \parallel h$ (V1)
$p \parallel q$ (V2)
Beh.: $\overline{AD} = \overline{BC}$
Bew.: $\overline{AC} = \overline{AC}$ (beiden Dreiecken gemeinsam)
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ (Z-Winkel, V1)
$\sphericalangle CAD = ACB$ (Z-Winkel, V2)

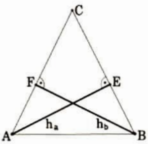
$\Rightarrow$ $\Delta AVC \cong \Delta CDA$ (WSW)
also $\overline{AD} = \overline{BC}$ q.e.d.

2. Beispiel

Satz:
In einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Höhen gleich lang.

Überlegung: Es können nur die Höhen h_a und h_b gemeint sein, weil h_c offenbar länger als h_a und h_b ist. Die Dreiecke AEC und BCF sind anscheinend kongruent und enthalten die beiden Höhen.

Überlegungsfigur



Vor.: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
$h_b \perp AC$ (V2)
$h_a \perp BC$ (V3)

Beh.: $h_a = h_b$

Bew.: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
$\sphericalangle ACE = \sphericalangle FCB = \gamma$
$\sphericalangle BFC = \sphericalangle CEA = 90°$ (V2, V3)

$\Rightarrow \Delta AEC \cong \sphericalangle BCF$ (SWW)
$\Rightarrow h_a = h_b$ w.z.b.w.

Man kann freilich auch andere Dreiecke für einen Beweis dieses Satzes wählen, zum Beispiel die Dreiecke ABF und ABE:

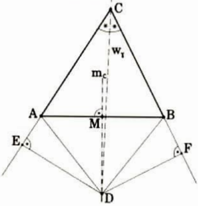
Vor.: wie oben
Beh.: wie oben
Bew.: $\overline{AB} = \overline{AB}$
$\sphericalangle BAF = \sphericalangle EBA$ (V1, Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
$\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB = 90°$ (V2, V3)

$\Rightarrow \Delta ABF \cong \Delta ABE$ (SWW)
$\Rightarrow h_a = h_b$ w.z.b.w.

Zum Abschluss wartet Geobold mit einer Sensation auf.
Er beweist den Satz:

Überlegung: M ist die Mitte von [AB], D ist der Schnittpunkt von w_γ und m_c. D ist von A und B gleich weit entfernt, weil die Dreiecke ADM und BMD kongruent sind (SWS), für Geobold ist das V4.

Überlegungsfigur



Vor.: D ist Schnittpunkt von w_γ und m_c (V1)
$DE \perp CA$ (V2)
$DF \perp CB$ (V3)
$\overline{DA} = \overline{DB}$ (V4)

Beh. 1: $\overline{CE} = \overline{CF}$

Bew. 1: $\overline{CD} = \overline{CD}$
$\sphericalangle ECD = \sphericalangle DCF$ (V1, w_γ)
$\sphericalangle DEC = \sphericalangle CFD = 90°$ (V2, V3)

$\Rightarrow \Delta EDC \cong \Delta DFC$ (SWW)
$\Rightarrow \overline{CE} = \overline{CF}$ q.e.d.

außerdem folgt: $\overline{DE} = \overline{DF}$, das ist V5 für

Beh. 2.: $\overline{AE} = \overline{BF}$

Bew. 2:	$\overline{DE} = \overline{DF}$	(V5)
	$\overline{DA} = \overline{DB}$	(V4)
	$\sphericalangle DEA = \sphericalangle BFD = 90°$	(V2, V3)
$\Rightarrow$	$\triangle AED \cong \triangle BDF$	(SsW)
$\Rightarrow$	$\overline{AE} = \overline{BF}$	q.e.d.

Nach Beweis 1 gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$, nach Beweis 2 gilt $\overline{AE} = \overline{BF}$, also ist $\overline{CE} - \overline{AE} = \overline{CF} - \overline{BF}$. Das bedeutet aber, wie ein Blick auf die Überlegungsfigur zeigt: $\overline{CA} = \overline{CB}$, das heißt, jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Geobolds »Beweis« beweist nur eines: Schlampig gezeichnete Überlegungsfiguren können zu Trugschlüssen führen. Zeichne eine genaue Überlegungsfigur und du wirst Geobold auf die Schliche kommen. Er hat nur einen Fehler gemacht – mit Absicht!

Aufgaben

Beweise durch Nachrechnen

1. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck. Die Winkelhalbierende W_α bildet mit der Seite a die Winkel ϱ und σ.
   Beweise: Der Größenunterschied von ϱ und σ ist gleich dem Größenunterschied von γ und β.

2. Die Ecken des Vierecks MOPS liegen so auf einem Kreis, dass [MO] Kreisdurchmesser ist.
   Beweise: Die Winkel PMS und POS sind gleich groß.

3. Die Ecken des Vierecks VIER liegen auf einem Kreis.
   Beweise: Je zwei gegenüberliegende Winkel ergeben zusammen 180°. (*Tip:* Verbinde alle Ecken mit dem Kreismittelpunkt.)

4. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$. H_c ist der Höhenfußpunkt auf c. Die Halbierende des Winkels H_cCB schneidet c in D.
   Beweise: Das Dreieck ADC ist gleichschenklig. (*Tip:* Winkel!)

5. Zeichne ein Quadrat ABCD. Verlängere [AB] über B hinaus bis E mit $\overline{AE} = 3\overline{AB}$. Verlängere [AD] über D hinaus bis F mit $\overline{AF} = 5\overline{AD}$.
   Beweise: Die Fläche des Dreiecks AEF ist 7,5mal so groß wie die Quadratfläche.

6. Im Dreieck ABC ist γ doppelt so groß wie β. Die Winkelhalbierende w_γ schneidet c in D.
   Beweise: Die Parallele zu a durch D halbiert den Winkel ADC.

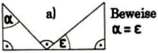
•7. Beweise: Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den beiden Endziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

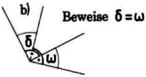
•8. Beweise: Die Differenz zweier aufeinander folgender Quadrate ist immer eine ungerade Zahl.

9. Beweise: Die Differenz zweier aufeinander folgender Kubikzahlen ist immer eine ungerade Zahl.

10. Beweise: Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer um 1 größer als ein Vielfaches von 8.

11. GLEICHEWINKEL





Beweise durch Widerspruch

12. Wenn ein Winkel im Dreieck 120° misst, dann ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

13. Wenn die drei Winkel eines Dreiecks verschieden groß sind, dann ist das Dreieck nicht gleichschenklig.

14. Wenn im Viereck ABCD $\alpha = 83°$ und $\beta = 96°$ ist, dann ist ABCD kein Parallelogramm.

•15. Wenn man ein Dreieck in zwei Teildreiecke zerlegt, dann sind nicht beide Teildreiecke spitzwinklig.

•16. Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade ist die kürzeste Verbindung von Punkt und Gerade.

•17. Ein Viereck mit verschieden langen Diagonalen ist kein Rechteck.

18. Ein Viereck mit mindestens drei verschieden großen Winkeln ist kein Parallelogramm.

19. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl 2, 3, 7 oder 8 ist, dann ist es keine Quadratzahl.

Beweise durch Symmetrie

20. Das Lot vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne halbiert diese.

21. Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn:
a) $h_a = w_\alpha$ **b)** $h_c = s_c$ **c)** $h_b = m_b$.

22. Die Winkelhalbierenden der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks treffen sich auf der Symmetrieachse.

23. Zeichne ein Dreieck ABC mit $b > c$. Verlängere [AB] über A hinaus um b bis D. w ist die Winkelhalbierende durch A im Dreieck DAC, sie schneidet BC in E.
Zeige: Das Dreieck DEC ist gleichschenklig.

24. Im Dreieck ABC liegt der Mittelpunkt von c auf w_γ.
Zeige: $w_\gamma = h_c$.

•**25.** Die Strecken [AB] und [CD] halbieren sich in M. Eine beliebige Gerade g durch M schneidet AD in X und BC in Y.
Beweise mit Hilfe der Punktsymmetrie:
Die Dreiecke MCY und MDX sind kongruent.

26. Zeichne ein Parallelogramm ABCD und fälle von A und C die Lote [AE] und [CF] auf BD.
Zeige: $\overline{ED} = \overline{FB}$.

Beweise durch Kongruenz

27. In einem gleichschenkligen Dreieck sind
a) zwei Seitenhalbierende gleich lang
b) zwei Winkelhalbierende gleich lang
c) die Lote von der Basismitte auf die Schenkel gleich lang.

28. Formuliere und beweise vom Satz in Aufgabe **27. c)** den Kehrsatz.

29. Verlängert man die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks beiderseits um gleich lange Strecken und verbindet man die Endpunkte mit der Spitze, so ergibt sich wieder ein gleichschenkliges Dreieck.

30. Verbindet man die Seitenmitten eines gleichschenkligen Dreiecks, so entsteht wieder ein gleichschenkliges Dreieck.

•**31.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. Verlängere beide Schenkel über die Basisecken A und B hinaus gleich weit. Die Endpunkte sind D und E.
Beweise: **a)** $\overline{AE} = \overline{BD}$
b) DEBA ist ein Trapez.

•**32.** Trägt man bei einem gleichseitigen Dreieck auf allen drei Seiten im selben Umlaufsinn von den Ecken aus eine gleich lange Strecke ab, so ergeben die Endpunkte der drei Strecken wieder ein gleichseitiges Dreieck.

33. Zeichnet man durch die Ecken eines Dreiecks die Parallelen zur Gegenseite, so entsteht ein neues Dreieck, das aus vier kongruenten Teildreiecken besteht.

34. Ein Dreieck ist gleichschenklig, falls
a) eine Winkelhalbierende zugleich auch Höhe ist
b) eine Höhe zugleich auch Seitenhalbierende ist.

35. Die Schenkel eines Winkels schneiden auf jedem Lot der Winkelhalbierenden eine Strecke aus, deren Mittelpunkt auf den Winkelhalbierenden liegt.

36. Jedes Lot der Halbierenden eines Winkels schneidet auf den Schenkeln gleich lange Strecken ab.

37. Die Lote von einem Punkt der Winkelhalbierenden auf die beiden Schenkel sind gleich lang.

38. Fälle von zwei Ecken eines Dreiecks die Lote auf die Seitenhalbierende, die durch die dritte Ecke geht. Zeige, dass die Lote gleich lang sind.

39. In einem gleichschenkligen Trapez ABCD schneiden sich die Diagonalen in E. Gib drei Paare kongruenter Dreiecke an und beweise jeweils die Kongruenz.

40. Zeichne einen Kreis k um M und einen Punkt A außerhalb von k. Der Thaleskreis über [MA] schneidet k in B und C.
Beweise: $\overline{AB} = \overline{AC}$.

•41. Zeichne ein Quadrat ABCD und trage von den Ecken aus auf seinen Seiten im selben Umlaufsinn Strecken gleicher Länge ab.
Beweise: Die vier so entstehenden Punkte bilden wieder ein Quadrat.

:42. In einem Quadrat ABCD liege P irgendwo auf [CD]. E sei der Endpunkt der Verlängerung von [CB] über B hinaus um $\overline{PD}$. W liege so auf [BC], dass AW den Winkel BAP halbiert.

a) Zeichne das Ganze für $\overline{AB} = 6$.
b) Zeige: $\sphericalangle PAE = 90°$
c) Zeige: $\overline{AE} = \overline{EW}$
d) Zeige: $\overline{AP} = \overline{PD} + \overline{BW}$.

:43. Zeichne ein Parallelogramm ABCD und durch A eine Gerade g, die das Parallelogramm nicht noch einmal schneidet. Fälle von B, C und D die Lote auf g.
Beweise: Das längste Lot ist so lang wie die beiden andern zusammen.

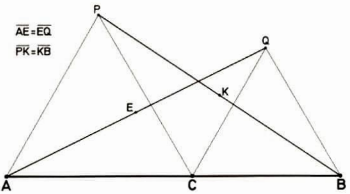
:44. Zeichne ein Dreieck ABC und errichte nach außen über den Seiten a und b die gleichseitigen Dreiecke BDC und ACE.
Beweise: **a)** $\overline{AD} = \overline{BE}$
b) $\sphericalangle(AD, BE) = 60°$.

⁝45. Zeichne ein Parallelogramm und errichte Quadrate über allen Seiten nach außen.
Beweise: Die Mittelpunkte der Quadrate bilden wieder ein Quadrat.

:46. Fälle in einem Dreieck ABC die Lote von B und C auf die Winkelhalbierende w_α, die Lotfußpunkte sind B′ und C′.
Beweise: B′ und C′ sind vom Mittelpunkt M der Seite [BC] gleich weit entfernt.
Das Lot von c durch C′ schneidet das Lot von b durch B′ in D.
Beweise: $\overline{DB'} = \overline{DC'}$.

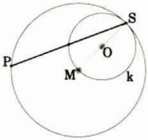
⁝47. DREIZACK
C liegt auf [AB]. ACP und CBQ sind gleichseitige Dreiecke.

a) Beweise: $\overline{AQ} = \overline{BP}$ (*Tip:* AP und BQ schneiden sich!)
b) Beweise: AP und BQ schneiden sich unter 60°.
c) Beweise: ECK ist ein gleichseitiges Dreieck.



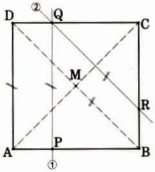
Beweise durch ... Nachdenken

48. SEHNENHALBIERUNG
Beweise: k halbiert die Sehne [PS].



:49. In einem Parallelogramm ABCD ist $\beta = 120°$, w_α geht durch den Mittelpunkt M_b der Seite b.
Beweise: **a)** a ist halb so lang wie b.
b) $\overline{AM_b}$ ist doppelt so groß wie der Abstand von B und Seite d.
c) [DB] ist eine Höhe des Parallelogramms.

50. WINKEL ABCD ist ein Quadrat. Beweise: $\sphericalangle PMR = 90°$.



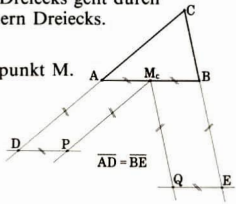
•51 Zeichne ein Trapez, in dem die kürzere Basis genauso lang ist wie die Schenkel zusammen.
Beweise: Es gibt zwei Winkelhalbierende, die sich auf der kleineren Basis schneiden.

•52. In jedem Trapez gibt es zwei Paare zueinander senkrechter Winkelhalbierenden.

53. Zeichne ein Trapez ABCD mit den Grundseiten a und c, in dem $\alpha = 90°$ und $d = a + c$ gilt. M ist der Mittelpunkt von b und der Punkt E liegt so auf der Seite d, dass $\overline{AE} = c$ ist.
Beweise: **a)** EM ⊥ BC **b)** $\overline{EM} = \overline{MC}$.

•54. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und die Winkelhalbierende von γ^* (Außenwinkel!). Das Dreieck A′B′C′ ist symmetrisch zu ABC bezüglich dieser Winkelhalbierenden.
Beweise: Die Höhe auf der Hypotenuse des einen Dreiecks geht durch den Mittelpunkt der Hypotenuse des andern Dreiecks.

•55. PARALLANG
Beweise: **a)** [DE und [PQ] haben denselben Mittelpunkt M.
b) MM_c halbiert den Winkel PM_cQ.



PARALLANG

•**56.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$.
Spiegle den Höhenfußpunkt H_c an a (Spiegelpunkt E) und an b (Spiegelpunkt D).
Beweise: **a)** Die Dreiecke AH_cD und H_cEC stimmen in den Winkeln überein.
b) D, E und H_c liegen auf einem Kreis. (Mittelpunkt? Radius?)

:57. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC, die Höhenfußpunkte H_a und H_b und den Mittelpunkt M_c.
Beweise: **a)** H_a, H_b und M_c bilden ein gleichschenkliges Dreieck.
b) $\sphericalangle H_aM_cH_b + 2\gamma = 180°$.

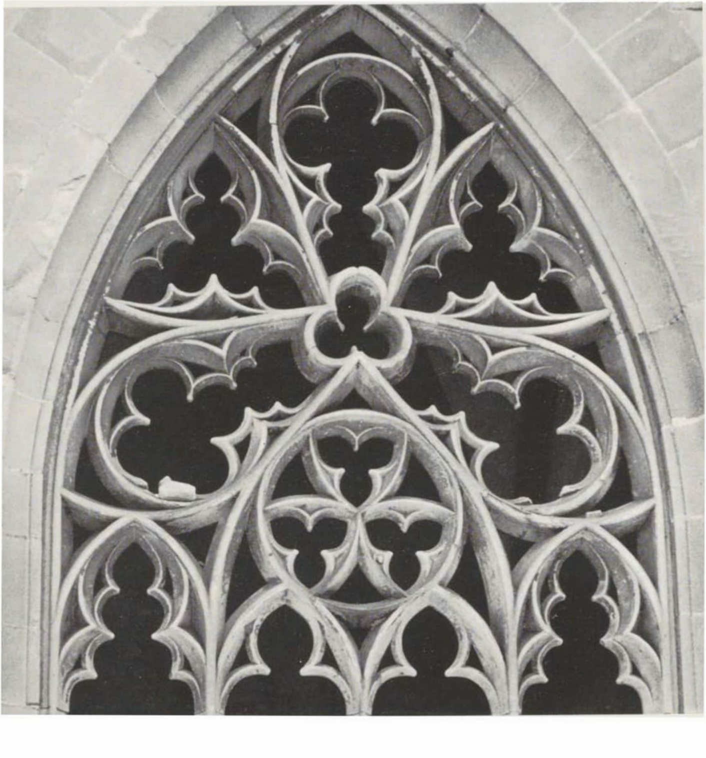
⋮58. Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt P im Innern des Dreiecks. Spiegle P an den Seitenmitten und verbinde die Spiegelpunkte so mit A, B und C, dass ein Sechseck entsteht.
Beweise: Das Sechseck ist punktsymmetrisch.

:59. Zeichne ein Rechteck ABCD und einen Punkt P im Innern. Spiegle P an den Seiten und verbinde die Spiegelbilder zu einem Viereck.
Beweise: A, B, C und D sind die Seitenmitten des Vierecks.

⋮60. Zeichne ein Dreieck ABC und Quadrate über den Seiten (nach außen): über [BC] das Quadrat BLOC und über [AC] das Quadrat ACHT.
Beweise: $OH \perp CM_c$ und $\overline{OH} = 2\overline{CM_c}$
Zeichne die Ecke U des Parallelogramms COUH.
Beweise: **a)** $CU \perp AB$
b) $AL \perp BU$ und $\overline{AL} = \overline{BU}$
c) $AU \perp BT$ und $\overline{AU} = \overline{BT}$.

3. Kapitel

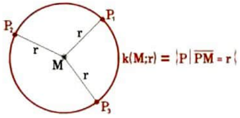
Kreise und Geraden



3.1 Der Kreis als geometrischer Ort

Ein Kreis ist definiert als Menge aller Punkte der Ebene, die von einem bestimmten Punkt M die feste Entfernung r haben. M ist der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises. Einen Kreis bezeichnet man kurz mit k (M; r).
Die Definition sagt zweierlei:

1. Jeder Punkt P der Ebene mit $\overline{PM} = r$ liegt auf dem Kreis k (M; r).
2. Jeder Punkt auf dem Kreis k (M; r) erfüllt die Bedingung $\overline{PM} = r$.



Beide Bedingungen ergeben zusammen in symbolischer Kurzform

$P \in k\,(M; r) \Leftrightarrow \overline{PM} = r.$

Der Kreis ist ein geometrischer Ort. Allgemein definiert man

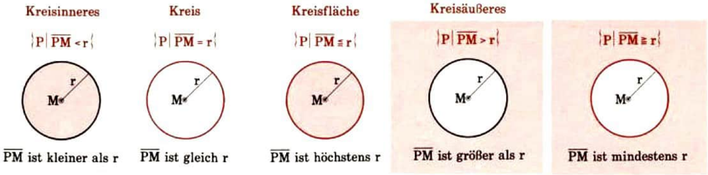
Definition

Die Menge aller Punkte, die eine Bedingung B erfüllen, heißt **geometrischer Ort** zur Bedingung B.

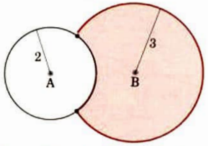
Diese Definition besagt:
Alle Punkte des geometrischen Orts erfüllen die Bedingung B, und umgekehrt:
Alle Punkte, die B erfüllen, gehören zum geometrischen Ort.
Ist der geometrische Ort eine Gerade oder ein Kreis, dann nennen wir ihn auch Ortslinie. Der Kreis k (M; r) ist also die Ortslinie zur Bedingung $\overline{PM} = r$. Ausführlicher: Der Kreis k um M mit dem Radius r ist die Ortslinie der Punkte P, die von M die Entfernung r haben. Symbolisch: $k\,(M; r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$.

Beachte: Der Kreis ist eine Linie (und nicht etwa eine Fläche)!
Die Kreisfläche ist der geometrische Ort der Punkte P, die von einem bestimmten Punkt M höchstens die Entfernung r haben, kurz: $\{P \mid \overline{PM} \leqq r\}$.

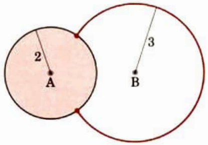
Mit den Wörtern »gleich, größer, mindestens und höchstens« lassen sich fünf kreisförmige geometrische Örter definieren, es sind die rot gezeichneten Figuren.



Kompliziertere Figuren können wir erzeugen, indem wir diese Bedingungen mit »und« oder mit »oder« oder mit beiden kombinieren, dazu zwei Beispiele:
Im Bild links sehen wir die Menge aller Punkte, die von A mehr als 2 und von B höchstens 3 entfernt sind.
Im Bild rechts sehen wir die Menge aller Punkte, die von A weniger als 2 oder von B genau 3 entfernt sind.



$\{P \mid \overline{PA} > 2 \wedge \overline{PB} \leq 3\} = \{P \mid \overline{PA} > 2\} \cap \{P \mid \overline{PB} \leq 3\}$

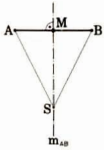


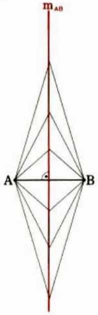
$\{P \mid \overline{PA} < 2 \vee \overline{PB} = 3\} = \{P \mid \overline{PA} < 2\} \cup \{P \mid \overline{PB} = 3\}$

Geraden als geometrische Örter haben wir schon kennen gelernt:

Der geometrische Ort aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte m_{AB}.

Ausführlicher formuliert heißt das:
1. Jeder Punkt auf m_{AB} ist von A und B gleich weit entfernt und umgekehrt:
2. Jeder Punkt, der von A und B gleich weit entfernt ist, liegt auf m_{AB}.





Beide Behauptungen beweisen wir.

1. Vor.: S liegt auf m_{AB}
Beh.: $\overline{SA} = \overline{SB}$
Bew.:

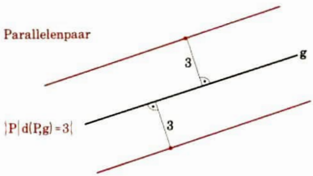
$$\begin{array}{lll} & \overline{MA} = \overline{MB} & (V) \\ & \overline{MS} = \overline{MS} & \\ & \sphericalangle BMS = \sphericalangle SMA = 90^\circ & (V) \\ \hline \Rightarrow & \triangle BSM \cong \triangle ASM & (SWS) \\ \Rightarrow & \overline{SA} = \overline{SB} & \text{q.e.d.} \end{array}$$

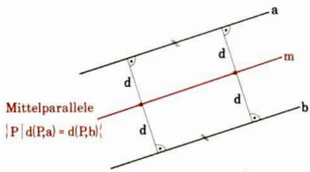
2. Vor.: $\overline{SA} = \overline{SB}$ (V)
Beh.: S liegt auf m_{AB}.
Bew.: Nach Voraussetzung ist Dreieck SAB gleichschenklig, S ist die Spitze. Deshalb liegt S auf der Symmetrieachse des Dreiecks SAB, das ist die Mittelsenkrechte m_{AB}. q.e.d.

Der geometrische Ort der Punkte, die von einer Gerade g den Abstand d haben, ist das Parallelenpaar im Abstand d von der Gerade g.

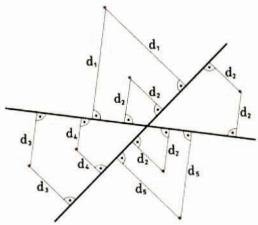
Die Geradenpunkte von g haben selber auch eine gemeinsame Eigenschaft: Ihre Abstände von den beiden Parallelen sind gleich groß.

Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei Parallelen denselben Abstand haben, ist die Mittelparallele m.



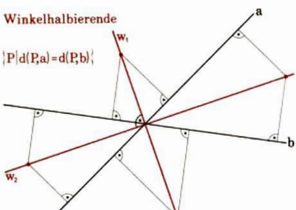


Wenn sich zwei Geraden a und b schneiden, wo liegen dann die Punkte, die von a und b denselben Abstand haben? Ein paar davon sehen wir im Bild.

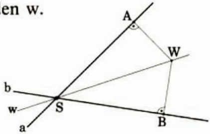


Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben, ist das Paar der Winkelhalbierenden.

Jeder dieser drei Sätze enthält zwei Behauptungen. Wir beweisen den letzten Satz.



1. Vor.: W liegt auf einer Winkelhalbierenden w.



Beh.: $\overline{WA} = \overline{WB}$

Bew.:

$$
\begin{array}{lll}
 & \overline{SW} = \overline{SW} & \\
 & \sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ & \\
 & \sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW & \text{(Vor.)} \\
\hline
\Rightarrow & \triangle ASW \cong \triangle BSW & \text{(SWW)} \\
\Rightarrow & \overline{WA} = \overline{WB} & \text{q.e.d.}
\end{array}
$$

2. Vor.: $\overline{WA} = \overline{WB}$

Beh.: $\sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW$

Bew.:

$$
\begin{array}{lll}
 & \overline{SW} = \overline{SW} & \\
 & \overline{WA} = \overline{WB} & \text{(Vor.)} \\
 & \sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ & \\
\hline
\Rightarrow & \triangle ASW \cong \triangle BSW & \text{(SsW)} \\
\Rightarrow & \sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW & \text{q.e.d.}
\end{array}
$$

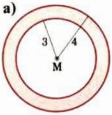
Aufgaben

1. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 und kennzeichne mit Farbe den geometrischen Ort der Punkte, die von jeder Ecke höchstens die Entfernung 5 haben.

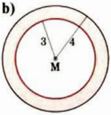
2. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 5 und kennzeichne mit Farbe den geometrischen Ort der Punkte, die von jeder Ecke mindestens die Entfernung 5 haben.

3. PLURAL
Beschreibe die rot gezeichneten Figuren als geometrische Örter in Worten und in Symbol-Schreibweise.

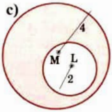
a)



b)



c)

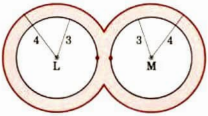


•4. Zeichne die Punkte A(0 | 0), B(1 | 0) und C(2 | 0). Kennzeichne mit Farbe alle Punkte, die von A mehr als 1,5 und von B höchstens 3 und von C mehr als 2,5 entfernt sind.
Beschreibe diese Punktmenge mit Symbolen.

5. Zeichne die Punkte A(0 | 0), B(3 | 0) und C(1,5 | 0).
Kennzeichne mit Farbe folgende Punktmengen:
a) $\{P \mid \overline{PB} < 1\} \cup [\{P \mid \overline{PA} < 2{,}5\} \cap \{P \mid \overline{PC} > 3\}]$
b) $[\{P \mid \overline{PB} < 1\} \cup \{P \mid \overline{PA} < 2{,}5\}] \cap \{P \mid \overline{PC} > 3\}$

6. Zeichne die Punkte A(0 | 0) und B(4,5 | 0). Kennzeichne mit Farbe alle Punkte, die von A mindestens 1,5 und höchstens 3 und von B mehr als 4 entfernt sind. Wie lautet die Symbol-Schreibweise für diese Punktmenge?

•7. SINGULAR
Beschreibe die rot gezeichnete Figur als geometrischen Ort in Worten und Symbolen.



8. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte von Kreisen mit Radius 4, die durch einen gegebenen Punkt A gehen? Zeichne einige dieser Kreise.

•9. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleich langen Sehnen in einem Kreis? (Genaue Beschreibung!)

10. Zeichne die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 4$.
a) Zeichne vier Kreise, die durch A und B laufen.
b) Zeichne einen Kreis mit Radius 2,5 durch A und B.
c) Wie groß ist der Radius des kleinsten Kreises durch A und B? Zeichne ihn.
d) Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise durch A und B?

11. Zeichne eine Strecke a mit der Länge 5.
Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Rechtecke mit der Seite a?

12. Zeichne einen Kreis mit Radius 3,5 und eine Sehne s. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller zu s parallelen Sehnen?

13. Zeichne die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 6$. Kennzeichne mit Farbe alle Punkte,
a) die näher bei A als bei B liegen
b) deren Entfernung von B höchstens so groß ist wie von A
c) Beschreibe jede dieser Mengen symbolisch.

14. Kennzeichne mit Farbe die Menge der Punkte, die näher bei B als bei A liegen, aber von C nicht weiter entfernt sind als von B.
a) A(−2 | 0), B(1 | 0), C(5 | 0) **b)** A(−1 | 1), B(2 | 1), C(3 | −1)

15. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P im Abstand 2.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von P die Entfernung 6 haben.

•16. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P im Abstand d.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von P die Entfernung 4 haben.
Für welche Werte von d gibt es keine, einen, zwei, drei oder vier solcher Punkte?

17. Zeichne zwei Geraden g und h, die sich schneiden.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von h den Abstand 4 haben.

•**18.** Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von g. Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 2 haben und von P und Q gleich weit entfernt sind. Bei welcher Lage von P und Q gibt es keine bzw. unendlich viele Lösungen?

:**19.** Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 5 und konstruiere alle Punkte, für die es mindestens einen Streckenpunkt gibt, der höchstens die Entfernung 2 hat.

:**20.** Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 6$, $b = 7$ und $c = 9$.
Konstruiere alle Punkte, die vom Dreieck mindestens die Entfernung 1,5 haben.

•**21.** Zeichne die drei Geraden g, h und i so, dass sie sich in drei Punkten 15
schneiden. 0 0 15
(Schnittpunkte: $(4|4)$, $(11|4)$, $(7|10)$). 0
Konstruiere alle Punkte, die von jeder Gerade mindestens den Abstand 1 haben.

22. Zeichne zwei Punkte A und B mit der Entfernung 5.
Bestimme den geometrischen Ort der Punkte C für den Fall, dass das Dreieck ABC die Höhe $h_c = 6$ hat.

23. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 2 und bestimme die Ortslinie der Mittelpunkte aller Querstrecken.

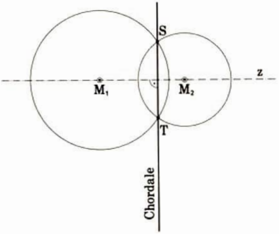
24. Bestimme die Ortslinie der Mittelpunkte von Parallelogrammen mit $\overline{AB} = 6$ und $h_a = 4$.

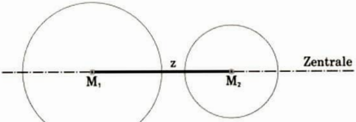
25. g und h schneiden sich in S. Wo liegen alle Punkte, die von g und h gleichen Abstand und von S die Entfernung 2 haben?

26. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 4 und eine dritte Gerade, die die Parallelen schneidet.
Konstruiere alle Punkte, die von den drei Geraden denselben Abstand haben.

3.2 Zwei Kreise

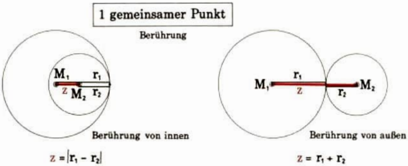
Die Lage zweier Kreise wird von der Entfernung z ihrer Mittelpunkte bestimmt, z heißt auch **Zentrale** der beiden Kreise, und je nach Bedarf meint man damit die Gerade M_1M_2, die Strecke $[M_1M_2]$ oder auch die Länge $\overline{M_1M_2}$. Die Zentrale ist Symmetrieachse der beiden Kreise. Schneiden sich die Kreise in zwei Punkten S und T, dann liegen diese Schnittpunkte symmetrisch bezüglich der Zentrale. Die Verbindungsgerade ST heißt **Chordale** der beiden Kreise. Chordale und Zentrale stehen aufeinander senkrecht (Achsensymmetrie!).





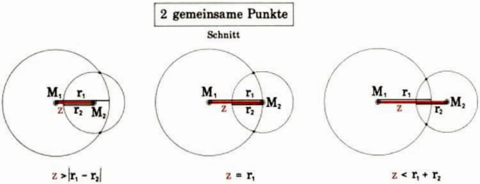
Zwei Kreise haben entweder keinen, einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der für uns wichtigste Fall ist der mit einem gemeinsamen Punkt. Wir sagen dann: Die Kreise **berühren** sich. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Berührung von außen und Berührung von innen.

$z = |r_1 - r_2|$ oder $z = r_1 + r_2$



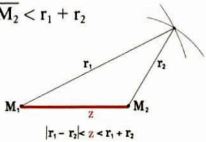
Verschieben wir den äußeren kleinen Kreis nach innen oder den inneren kleinen Kreis nach außen, dann gibt es jedesmal zwei Schnittpunkte. Hätten wir den kleinen Kreis jeweils in die Gegenrichtung verschoben, dann hätten sich die Kreise nicht mehr getroffen.

$|r_1 - r_2| < z < r_1 + r_2$

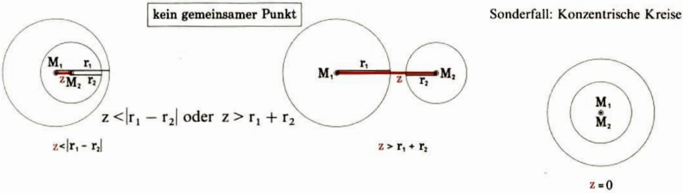


Die komplizierten algebraischen Beziehungen zwischen den Radien und der Zentrale entpuppen sich als Formen der Dreiecksungleichung. Wenn es zwei Schnittpunkte gibt, dann braucht man sich bloß die Dreiecksungleichung hinzuschreiben:

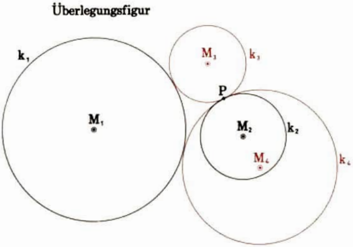
$|r_1 - r_2| < \overline{M_1M_2} < r_1 + r_2$



Keinen gemeinsamen Punkt gibt es, wenn mindestens eines der Ungleichungszeichen andersrum steht.

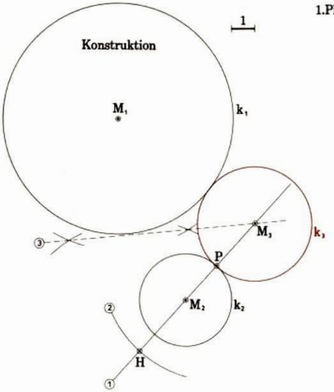


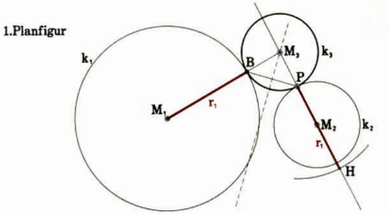
Zum Thema Kreisberührung gibt es viele Aufgaben. Eine führen wir vor:
Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 = 5$ und $r_2 = 2$ und $\overline{M_1M_2} = 8{,}4$ sowie ein Punkt P auf k_2.
Konstruiere einen Kreis, der k_2 im Punkt P und k_1 berührt.



Weil sich zwei Kreise von innen oder von außen berühren können, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden. Wie die Überlegungsfigur zeigt, gibt es in unserm Beispiel zwei Fälle, die Kreise k_3 und k_4. Wir nehmen uns die Fälle einzeln vor.

Zuerst suchen wir den Kreis k_3, der beide Kreise von außen berührt.
Lösungsidee: M_3 liegt auf alle Fälle auf der Halbgeraden $[M_2P$.

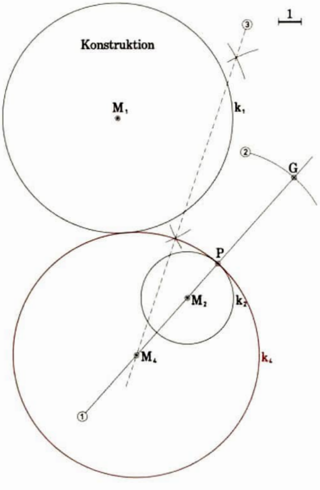


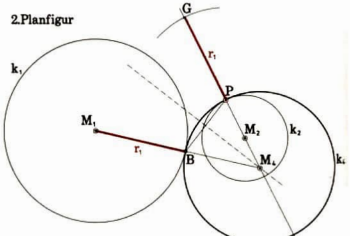


Das Dreieck PM_3B ist gleichschenklig, aber leider kennen wir M_3 und den Berührungspunkt B nicht. Verlängern wir beide Schenkel um r_1, dann bekommen wir das gleichschenklige Dreieck HM_3M_1. M_1 haben wir schon und H ergibt sich, wenn wir r_1 auf $[PM_2$ von P aus abtragen. M_3 liegt also auch auf der Mittelsenkrechte von $[HM_1]$.

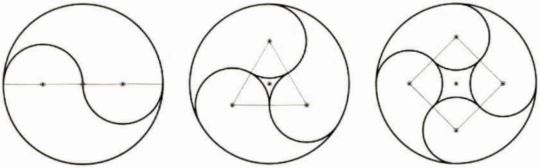
Jetzt suchen wir den Kreis k_4.

Lösungsidee: M_4 liegt auf der Halbgerade $[PM_2$ und auf der Mittelsenkrechte von $[GM_1]$. G ergibt sich, wenn wir r_1 von P aus auch wieder auf M_2P abtragen, jetzt aber in Gegenrichtung.





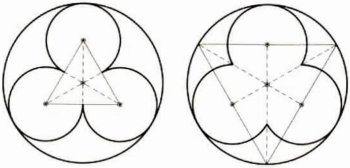
Vor allem im Maßwerk der gotischen (Kirchen-)Fenster gehören Kreise, die sich schneiden oder berühren, zu den unverkennbaren Stilelementen. Maßwerk ist eine Sammelbezeichnung für räumliche, steinerne, mit dem Zirkel »gemessene« Zierfüllungen zum Beispiel in den Fensterrosen sowie Rad- und Spitzbogenfenstern. Die Grundformen des Maßwerks sind Pässe und Fischblasen. Die folgenden Bilder zeigen einige einfache Beispiele.



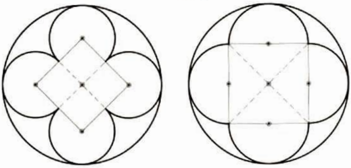
FISCHBLASEN

zweischweifig dreischweifig vierschweifig

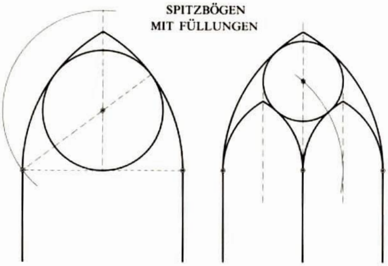
DREIPÄSSE



VIERPÄSSE



SPITZBÖGEN
MIT FÜLLUNGEN



Aufgaben

1. Der Kreis k_1 hat den Radius $r_1 = 24$, die Zentrale z hat die Länge 37.
Was weiß man vom Radius r_2 des Kreises k_2,
a) wenn k_2 den Kreis k_1 berührt,
b) wenn k_2 den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet,
c) wenn k_2 und k_1 keinen gemeinsamen Punkt haben?

•**2.** Von der Zentrale $z = \overline{M_1M_2}$ zweier Kreise mit den Radien r_1 und r_2 ist bekannt:
a) $z = 0$ **b)** $z < |r_1 - r_2|$ **c)** $z = |r_1 - r_2|$
d) $r_1 + r_2 > z > |r_1 - r_2|$ **e)** $z = r_1 + r_2$ **f)** $z > r_1 + r_2$.
Beschreibe die Lage der Kreise möglichst genau.

3. Zeichne den Kreis k um M(7|7) mit Radius 5. 14
a) Der Kreis k_1 um $M_1(13|11{,}5)$ berührt k. 0 0 16
Gib die möglichen Berührpunkte und Radien von k_1 an. 0
b) Der Kreis k_2 um $M_2(5|8{,}5)$ berührt k.
Gib die möglichen Berührpunkte und Radien von k_2 an.

4. Zeichne die Kreise k_1 um $M_1(5|5)$ mit $r_1 = 5$ und k_2 um $M_2(11|13)$ mit 16
$r_2 = 2{,}5$. 0 0 15
a) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 außen berührt. 0
b) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 einschließend berührt.
c) Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$, der k_1 und k_2 berührt.

5. Zeichne einen Kreis k um M(6|6) durch T(11|8,5). 12
Konstruiere die Kreise, die k in T berühren und durch 0 0 17
a) A(15|10,5) 0
b) B(13|9)
c) C(14|2,5)
d) D(5|2,5) gehen.

6. Zeichne die Kreise k_1 und k_2 um M(6|6) mit $r_1 = 2{,}5$ und $r_2 = 5$ sowie den Punkt P(7,5|10).
Konstruiere die Kreise durch P, die k_1 und k_2 berühren. Gib die Berührpunkte an.

7. a) Zeichne den Kreis k_1 um O durch A(1|5,5) und den Kreis k_2 um 12
P(10|7) durch B(11,5|4). Konstruiere den Kreis k, der k_1 und k_2 au- 2 0 14
ßen berührt und durch A geht. Wo berührt k den Kreis k_2? 0

b) Zeichne den Kreis k_1 um O durch A(5|2,5) und den Kreis k_2 um 9
P(11|3), der bei 9,5 die x-Achse schneidet. Konstruiere den Kreis k, 1 0 16
der durch A geht, k_1 außen und k_2 einschließend berührt. Wo berüh- 1
ren sich k und k_2?

8. Zeichne einen Kreis k mit Radius 3.
a) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit Radius 1, die k berühren.
b) P ist ein Punkt auf k. Konstruiere die Mittelpunkte der Kreise, die k in P berühren.

9. Zeichne die Strecke [AB] der Länge 5.
a) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit $r = 2$, die durch A laufen.
b) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit $r = 4$, die durch A und B laufen.

•10. Zeichne einen Kreis k um M mit Radius 4 und einen Punkt P auf k. Der Punkt A hat von P die Entfernung 3.

a) Konstruiere für $\overline{MA} = 6$ den Kreis, der k in P berührt und durch A läuft.
b) Wo liegt A, wenn Aufgabe **a)** keine Lösung hat?
c) Konstruiere die Punkte A, für die der gesuchte Kreis den kleinstmöglichen Radius hat.

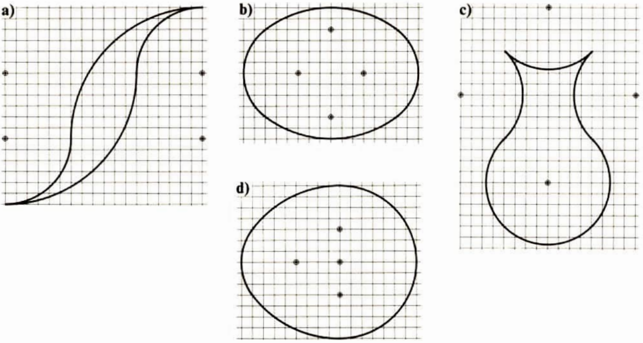
11. Zeichne die konzentrischen Kreise k_1 mit $r_1 = 3$ und k_2 mit $r_2 = 5$. Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise, die k_1 und k_2 berühren.

12. Zeichne den Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 4$ und einen Kreispunkt P.

a) Konstruiere die Punkte A und B so, dass das Dreieck APB gleichschenklig ist, die Basislänge $\overline{AB} = 12$ und die Symmetrieachse M_1P hat. M_1 liegt auf AB.
b) Konstruiere den Umkreis k_2 des Dreiecks APB.
c) Konstruiere die Kreise mit Radius 3, die k_2 in A berühren.

13. Zeichne einen Kreis k um M und einen Punkt P außerhalb von k. Der Thaleskreis über [MP] schneidet k in S und T.
Begründe: **a)** $\overline{SP} = \overline{PT}$
b) SP schneidet k in einem einzigen Punkt.

14. BOGENBILDER
Die Figuren **a)** bis **d)** sind aus Bögen sich berührender Kreise zusammengesetzt.
Zeichne die Figuren ins Heft und markiere die Punkte, in denen sich zwei Bögen treffen.



:15. Zeichne einen Kreis um M mit Radius 5 und einen Durchmesser [AB] sowie die Kreise mit den Durchmessern [AM] und [MB]. Konstruiere die beiden Kreise, die die drei gegebenen Kreise berühren.

16. Überlege dir die Konstruktionen in den Bildern zum Maßwerk auf Seite 65, beschreibe sie und konstruiere nach.

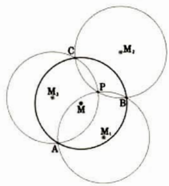
• **17.** Zeichne zwei gleich große Kreise so, dass einer durch den Mittelpunkt des andern geht.
Konstruiere in den Durchschnitt der Kreisflächen zwei gleich große Kreise, die sich und die gegebenen Kreise berühren.

• **18.** Zwei Kreise k_1 und k_2 berühren sich in B. Eine Gerade durch B schneidet die Kreise in S_1 und S_2.
Zeige: $M_1S_1 \parallel M_2S_2$.

19. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in P und Q, $[PK_1]$ und $[PK_2]$ sind Durchmesser.
Zeige: Q liegt auf $[K_1K_2]$.

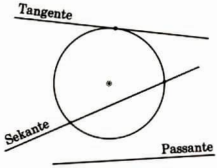
• **20.** SAUL ist ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt M.
Zeige: Die Umkreise der Dreiecke SAM und ULM berühren sich.

21. BIERDECKEL
Zeichne drei Kreise mit demselben Radius r, die sich in einem Punkt P schneiden. Dabei entstehen noch drei weitere Schnittpunkte A, B und C.
Zeige: Auch A, B und C liegen auf einem Kreis mit Radius r.



3.3 Tangenten und Tangentenviereck

Eine Gerade kann einen Kreis in zwei Punkten schneiden, sie heißt dann **Sekante;** sie kann aber auch den Kreis in nur einem Punkt treffen, sie heißt dann **Tangente.** Trifft sie den Kreis überhaupt nicht, dann nennt man sie **Passante.**

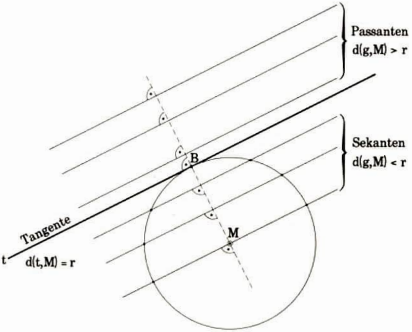


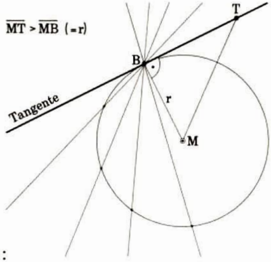
Der Abstand einer Gerade g vom Kreismittelpunkt M entscheidet, ob die Gerade Sekante, Tangente oder Passante ist. Von diesen Geraden ist die Tangente die Bedeutsamste. Weil sie vom Mittelpunkt M den Abstand r hat, steht sie im Berührpunkt B senkrecht auf dem Radius [BM]. Diese Eigenschaft verwenden wir zur

Definition

Eine Gerade, die in einem Kreispunkt B senkrecht auf dem Radius [BM] steht, heißt **Tangente.** B heißt **Berührpunkt.**
Man sagt auch: Die Tangente **berührt** den Kreis.

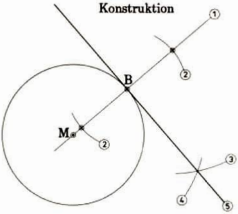
Jeder Punkt T der Tangente (außer B!) ist von M weiter entfernt als B, liegt also außerhalb des Kreises.

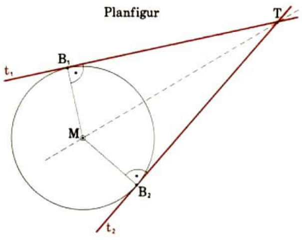


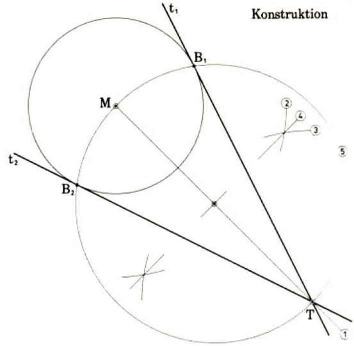


Für Tangenten gibt es zwei wichtige Konstruktionen:

1. Konstruiere die Tangente in einem gegebenen Berührpunkt B.
   Lösungsidee: Die gesuchte Tangente ist das Lot in B auf BM.
2. Konstruiere die Tangenten durch einen gegebenen Punkt T außerhalb des Kreises.

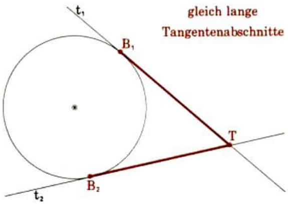


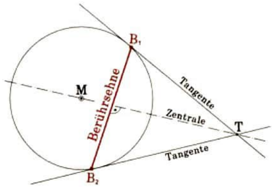




Lösungsidee: Das Dreieck MTB_1 hat bei B_1 einen rechten Winkel. Deshalb liegt B_1 auf dem Thaleskreis über [TM].

Weil das Viereck TB_1MB_2 symmetrisch ist bezüglich der Achse TM, sind die Strecken $[TB_1]$ und $[TB_2]$ gleich lang. Wir nennen sie **Tangentenabschnitte.** Die Sehne $[B_1B_2]$ heißt **Berührsehne,** sie wird von der Zentrale TM senkrecht halbiert.





Früher haben wir den Inkreis eines Dreiecks kennen gelernt. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden, für seinen Radius r gilt

$$r = d(W, a) = d(W, b) = (W, c).$$

Jetzt können wir auch sagen:

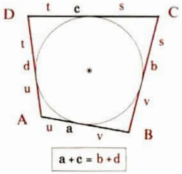
Der Inkreis ist derjenige Kreis, der alle Dreieckseiten von innen berührt.

Dementsprechend berühren die Ankreise jeweils eine Seite und zwei Verlängerungen.

Allgemein definiert man den Inkreis eines (konvexen) Vielecks als den Kreis, der alle Vieleckseiten von innen berührt. Im Gegensatz zum Dreieck hat nicht jedes Vieleck einen Inkreis, was wir schon bei Vierecken sehen. Vierecke, die einen Inkreis haben, heißen **Tangentenvierecke,** weil ihre Seiten Tangenten am Inkreis sind. Deshalb schneiden sich beim Tangentenviereck (und nur bei diesem) alle vier Winkelhalbierenden in genau einem Punkt, nämlich dem Inkreis-Mittelpunkt.

Mit den Tangentenabschnitten ist es uns möglich, ein Kriterium für Tangentenvierecke zu finden; es steckt in dem

Satz:
Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summen der Längen je zweier Gegenseiten gleich sind.



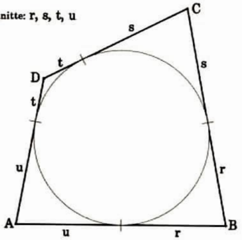
Wegen der Formulierung »genau dann« müssen wir zwei Behauptungen beweisen.

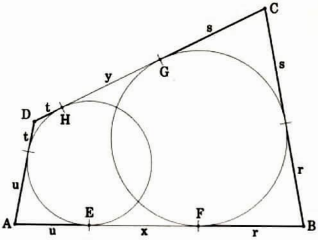
Vor.: ABCD ist ein Tangentenviereck.
Beh.: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Bew.: $\left.\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= u + v + s + t \\ \overline{BC} + \overline{AD} &= v + s + u + t \end{aligned}\right\}$ also $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

und jetzt die Gegenrichtung:

Tangentenabschnitte: r, s, t, u





Vor.: Im konvexen Viereck ABCD gilt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Beh.: ABCD hat einen Inkreis.

Bew.: Wenn es keinen Inkreis gäbe, dann existierten mindestens zwei Kreise, von denen jeder drei Viereckseiten (oder die Verlängerungen) berührte, aber die vierte nicht, wie zum Beispiel im Bild. Wegen der Voraussetzung gilt

$$\left.\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{CD} &= u + x + r + s + y + t\\ \overline{BC} + \overline{AD} &= r + s + u + t\end{aligned}\right\} \quad \text{also muss } x + y = 0 \text{ sein.}$$

Weil x und y Streckenlängen, also immer $\geqq 0$ sind, müssen sie einzeln gleich null sein: $x = 0$ und $y = 0$. Das heißt aber, E und F fallen zusammen, ebenso G und H. Folglich gibt es nur einen Kreis, der dann aber alle vier Seiten berührt. Das Viereck ist ein Tangentenviereck.

Aufgaben

1. Zeichne den Kreis um $M(4|2)$ durch $A(2|5)$. 6
Konstruiere die Tangenten in den Schnittpunkten von Kreis und x-Achse. 0 0 8 / 5
Gib die Koordinaten des Tangenten-Schnittpunkts an.

2. Der **Schnittwinkel von Kreis und Gerade** ist der Winkel, den die Gerade und die Tangente in einem Schnittpunkt bilden. Zeichne den Kreis k um $M(6|6)$ durch $A(8{,}5|11)$. 12 / 0 0 14 / 0

a) Konstruiere den Schnittwinkel von k und AB mit $B(1|6)$ und gib seine Größe auf 0,5° genau an.

b) Konstruiere die Sekanten durch den Kreispunkt $C(11|y_c)$ mit $y_c < 8{,}5$, die k unter 45° schneiden.

c) Welche Geraden durch den Kreispunkt $D(x_d|7)$ mit $x_d < 11$ schneiden k unter 90° bzw. 0°?

3. Zeichne die Gerade AB mit $A(7|2)$ und $B(5|8)$. 9

a) Konstruiere einen Kreis mit $r = 5$, der AB in A unter 55° schneidet. 0 0 12

b) Konstruiere einen Kreis durch A und B, der AB unter 45° schneidet. 0

4. Der **Schnittwinkel zweier Kreise** ist der Winkel, den die Tangenten in einem Schnittpunkt bilden.

a) Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(5|5)$ durch $A(8{,}5|3)$ und den Kreis k_2 14
um $M_2(13|9)$ durch A. Konstruiere den Schnittwinkel von k_1 und 0 0 14
k_2 und gib seine Größe auf 0,5° genau an. 0

b) Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(5|6)$ durch $A(9|9)$ und konstruiere 14
einen Kreis k_2 mit $r = 2{,}5$, der k_1 in A senkrecht schneidet. 0 0 13
0

•**c)** Löse Aufgabe **b)** für den Schnittwinkel 60°, Zahlenkreuz wie **b)**.

d) Zeichne den Kreis k_1 wie in Aufgabe **a)** und konstruiere einen Kreis k_2 um $M_2(10|9{,}5)$, der k_1 senkrecht schneidet, Zahlenkreuz wie in **a)**.

5. Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Kreise, deren Radien in einem Schnittpunkt den Winkel

a) 50° **b)** 130°
c) 90° **d)** 180° bilden?

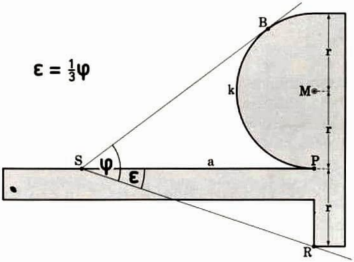
6. Der Kreis k um $M(5|2{,}5)$ geht durch den Ursprung. 15
Konstruiere die Tangenten durch $P(15|-5)$. Wie lang ist die Berührsehne? 1 0 17
6
Welchen Winkel bilden die Tangenten? Wie lang sind die Tangentenabschnitte?

7. Zeichne die Gerade AB mit $A(5|1)$ und $B(3|1{,}5)$. 9
Konstruiere den Kreis durch $P(10|5{,}5)$, der AB in B berührt. 0 0 11
1

•**8.** WINKELDRITTLER
Um 300 v. Chr. hat Archimedes ein Gerät zur Winkel-Dreiteilung erfunden. Will man die Winkel φ dritteln, dann legt man die Kante a durch den Scheitel S und verrutscht das Gerät so lange, bis der eine Schenkel des Winkels durch R geht und der andere den Halbkreis k berührt.

Begründe: $\varepsilon = \frac{1}{3}\varphi$. Warum ist das keine Konstruktion?

Stelle durch Konstruieren fest, welche spitzen Winkel sich nicht dritteln lassen, wenn $a = 4r$.



9. Zeichne einen Kreis um M(6|8) mit r = 5 und die Gerade PQ mit 14
P(9|2,5) und Q(17|8,5). 0 0 20
a) Konstruiere die Tangenten, die parallel zu PQ sind. 0
b) Konstruiere Tangenten, die mit PQ einen Winkel von 53° bilden.
•c) Konstruiere Punkte so auf PQ, dass die Tangentenabschnitte die Länge 5 haben.
•d) Y ist ein Punkt der y-Achse. Zwei Kreistangenten durch Y bestimmen eine Berührsehne der Länge 6. Konstruiere Y und die Berührsehne.

10. Gegeben ist ein Kreis k_1, auf ihm ein Punkt P und eine Passante g. Konstruiere einen Kreis k_2, der k_1 in P und außerdem g berührt.

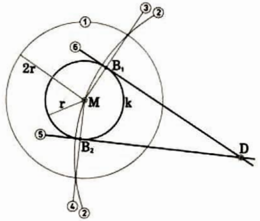
•11. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 8.
Konstruiere drei kongruente Kreise, die sich berühren und von denen jeder außerdem noch
a) zwei Dreieckseiten berührt
b) eine Dreieckseite in der Mitte berührt.

•12. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 8.
Konstruiere vier kongruente Kreise so, dass sich je drei Kreise berühren und jeder außerdem noch
a) zwei Quadratseiten berührt
b) eine Quadratseite in der Mitte berührt.

13. Zeichne einen Kreis k mit r = 2 und einen Punkt P, der vom Kreismittelpunkt die Entfernung 5 hat.
Konstruiere durch P die beiden Kreistangenten t_1 und t_2. Konstruiere die Kreise, die t_1, t_2 und k berühren.

••14. Zeichne einen Kreis k um M mit r = 5 und eine Gerade g, die von M den Abstand d = 0,5 hat.
a) Konstruiere die Kreise mit Radius 2, die g und k berühren. (Achtung!)
b) Bei welchen Abständen d ergeben sich 7, 6, 5 (!), 4, 2, 1, 0 Kreise mit Radius 2, die g und k berühren?

15. DEUTERATANG

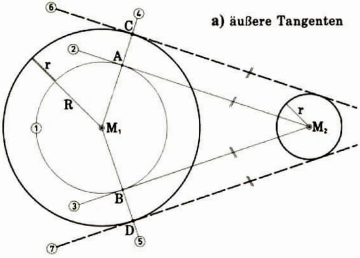


Deute die zweite Tangentenkonstruktion (Konstruktion durch D an den Kreis).

•16. GEMEINSAME TANGENTEN

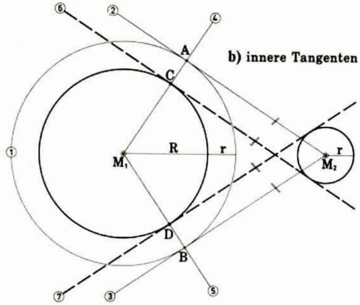
a) Das Bild zeigt die Konstruktion der **äußeren Tangenten.** Beschreibe sie und führe sie durch für k_1 um $M_1(3|0)$ durch $P_1(2{,}5|1{,}5)$ und k_2 um $M_2(8|5)$ durch $P_2(9{,}5|9{,}5)$.
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.

12
0 0 13
2



b) Das Bild zeigt die Konstruktion der **inneren Tangenten.** Beschreibe sie und führe sie durch für k_1 um $M_1(15|4)$ durch $P_1(16|1)$ und k_2 um $M_2(5|14)$ durch $P_2(2|5)$.
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.

18
0 0 18
0



c) Konstruiere die inneren Tangenten der Kreise von Aufgabe **a).**
Konstruiere die äußeren Tangenten der Kreise von Aufgabe **b).** Berührpunkte!

d) Wieviel Tangenten haben zwei Kreise mit $r = 3$ und $R = 5$ gemeinsam, wenn die Zentrale $[M_1M_2]$ die Länge 11 oder 8 oder 4 oder 2 oder 1 hat?

e) Zwei Räder mit den Durchmessern 1 m und 0,6 m sind mit einem Treibriemen verbunden. Die Radachsen haben einen Abstand von 1,4 m. Zeichne die Anordnung im Maßstab 1:20 für »offenen Trieb« (gleichlaufende Räder) und »gekreuzten Trieb« (gegenlaufende Räder).

17. Zwei gerade Bahnlinien mit einem Richtungsunterschied von 160° sollen durch einen Kreisbogen von 1 200 m Radius so verbunden werden, dass die Bahnlinien Tangenten am Kreisbogen sind.
Konstruiere einen Lageplan im Maßstab 1:10 000.

18. Zeichne einen Kreis k um M mit $r = 5$.
a) Wo liegen die Mittelpunkte der Sehnen mit Länge 6?
b) P hat von M die Entfernung 8.
Konstruiere eine Sekante durch P, aus der k eine Sehne der Länge 6 ausschneidet.

•19. Zeichne einen Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 2$ und einen Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = 4$ so, dass $\overline{M_1M_2} = 9$ ist.
Konstruiere jene Tangenten an k_1, aus denen k_2 Sehnen der Länge 5,5 ausschneidet.

20. Konstruiere ein Dreieck ABC mit Inkreisradius $\varrho = 2$, von dem bekannt ist
a) $\alpha = 67°$, $c = 8$ **b)** $\beta = 45°$, $\gamma = 58°$ **c)** $\gamma = 60°$, $h_a = 5{,}5$.

21. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD, das einen Inkreis mit Radius $\varrho = 1{,}5$ und
a) $\alpha = 45°$ **b)** $\overline{AC} = 6$ hat.

22. Konstruiere ein Trapez ABCD mit Inkreis, bei dem die Basis $a = 7$, $\alpha = 60°$ und $h = 5$ ist.

23. Konstruiere ein Tangentenviereck ABCD mit Inkreisradius $\varrho = 2$ sowie
a) $\beta = 75°$, $a = 5$ und $b = 4{,}5$ **b)** $d = 6$, $\alpha = 105°$, $\beta = 135°$.

24. Konstruiere ein Tangentenviereck ABCD mit
a) $a = 5$, $b = 6$, $\alpha = 95°$, $\beta = 100°$ **b)** $a = 3$, $\alpha = 108°$, $\beta = 98°$, $\gamma = 100°$
c) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$, $\overline{AC} = 8$ **d)** $a = 7$, $b = 6$, $c = 4$, $\beta = 75°$.

25. Konstruiere einen Kreis durch zwei gegebene Punkte A und B, der eine vorgegebene Parallele zu AB berührt.

26. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruiere einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt auf c so, dass a und b Tangenten sind.

•27. Gegeben sind ein Kreis k und zwei Punkte P und Q außerhalb von k.
Konstruiere jene Tangenten, die von P und Q gleichen Abstand haben. (4 Lösungen!)

28. Zeichne zwei Parallelen p und q im Abstand 6.
a) k_1 ist ein Kreis mit Radius 4, dessen Mittelpunkt auf p liegt. Konstruiere die Kreise, die p und q berühren und deren Mittelpunkte auf k_1 liegen.
b) A liegt zwischen p und q im Abstand 2 von p.
Konstruiere die Kreise durch A, die p und q berühren.
c) Die Gerade a schneidet p unter 60°.
Konstruiere Kreise mit den Tangenten a, p und q.
d) p und q sind Tangenten am Kreis k_2.
Konstruiere Kreise, die k_2, p und q berühren.
e) Der Mittelpunkt des Kreises k_3 liegt nicht auf der Mittelparallele von p und q.
Konstruiere die Kreise, die k_3, p und q berühren.

•29. Zeichne eine Gerade g und konstruiere einen Kreis mit Radius 2, der g berührt und

a) von einem gegebenen Punkt P den Abstand 3 hat
(der Abstand Punkt–Kreis ist die kürzeste Entfernung eines Kreispunkts von dem Punkt)

b) dessen Mittelpunkt von einer gegebenen Gerade h den Abstand 3 hat.

30. Zeichne zwei sich schneidende Geraden g und h und markiere einen Punkt G auf g. Konstruiere einen Kreis durch G mit Mittelpunkt auf g und der Tangente h.

•31. Zeichne einen Kreis um M mit $r = 2$ und die Tangenten t_1 und t_2, die sich in T unter 50° schneiden.
Eine weitere Tangente t schneidet die Tangentenabschnitte von t_1 und t_2 in A und B. Zeige:

a) Der Umfang des Dreiecks ABT ist immer gleich, egal, wie t liegt.

b) Der Winkel AMB hängt nicht von der Lage von t ab.

•32. Zeichne einen Kreis mit Radius 2.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, von denen aus die Tangentenabschnitte die Länge 3 haben.

b) Zeichne außerdem die Passante p und konstruiere einen Punkt X auf p, von dem aus die Tangentenabschnitte die Länge 3 haben.

••33. Zeichne die Punkte P und Q mit der Entfernung 7. Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$ so, dass die Tangentenabschnitte von P aus die Länge 3 und von Q aus die Länge 4 haben

34. Zeichne einen Kreis k mit $r = 2$ und eine Passante p.

a) Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$, der p und k berührt.

••b) Markiere auf p einen Punkt A und konstruiere einen Kreis, der p in A und k berührt.

35. Zeige:

a) Jeder konvexe Drachen hat einen Inkreis.

b) Jeder Windvogel hat einen Ankreis, das heißt einen Kreis, der alle vier Seiten (oder die Verlängerungen) berührt.

36. Zeichne das Viereck ABCD mit A(0|6), B(14|6), C(11,5|12) und D(4,5|12).

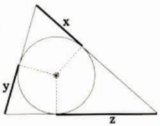
12
0 0 14
0

a) Konstruiere 4 »Inkreise«, von denen jeder drei Viereckseiten (oder die Verlängerungen) berührt.
(Die Mittelpunkte sollen nicht außerhalb des Vierecks liegen).

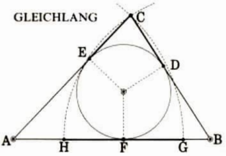
b) Zeige: Fallen zwei solcher »Inkreise« zusammen, dann ist ABCD ein Tangentenviereck.

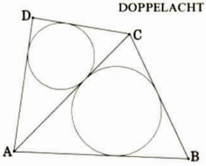
•37. Zeichne ein Parallelogramm, das sich in zwei Tangenten-Trapeze zerlegen lässt.

38. UMFANG
Gegeben ist ein Dreieck mit seinem Inkreis.
Der Umfang des Dreiecks sei u.
Zeige: $u = 2(x + y + z)$.



39. GLEICHLANG
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit seinem Inkreis.
Der Kreis um A mit Radius b schneidet c in G, der Kreis um B mit Radius a schneidet c in H.
Zeige: $\overline{HF} = \overline{EC} = \overline{FG} = \overline{CD}$.





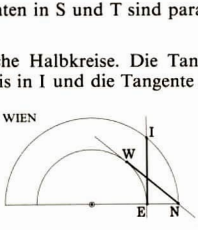
40. DOPPELACHT
Zeichne zwei Kreise, die sich außen berühren, und eine Strecke [AC], die auf der Tangente durch den Berührpunkt liegt. [AC] ist gemeinsame Seite der Dreiecke ACD und ABC.
Die beiden Kreise sind die Inkreise dieser Dreiecke.
Zeige: **a)** ABCD ist ein Tangentenviereck.
b) Auch die Inkreise der Dreiecke ABD und BCD berühren sich.

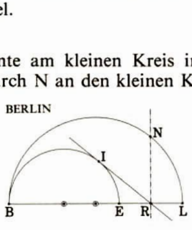
41. Zeichne einen Kreis um M und um ihn herum ein Tangententrapez.
Zeige: Von M aus sieht man die Schenkel unter dem gleichen Winkel. Wie groß ist er?

42. Zeichne die Kreise k_1 um M_1 und k_2 um M_2, die sich außen in B berühren, und ihre gemeinsame Tangente t. Eine äußere gemeinsame Tangente w berührt k_1 in P und k_2 in Q.
Zeige: **a)** Der Schnittpunkt A von t und w ist die Mitte von [PQ].
b) $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle M_1AM_2 = 90°$.

•**43.** Zwei Kreise berühren sich in B. Eine Sekante durch B schneidet die Kreise in S und T. Zeige: Die Tangenten in S und T sind parallel.

•**44.** WIEN
Zeichne zwei konzentrische Halbkreise. Die Tangente am kleinen Kreis in E schneidet den großen Kreis in I und die Tangente durch N an den kleinen Kreis berührt in W.
Zeige: $\overline{EI} = \overline{WN}$.

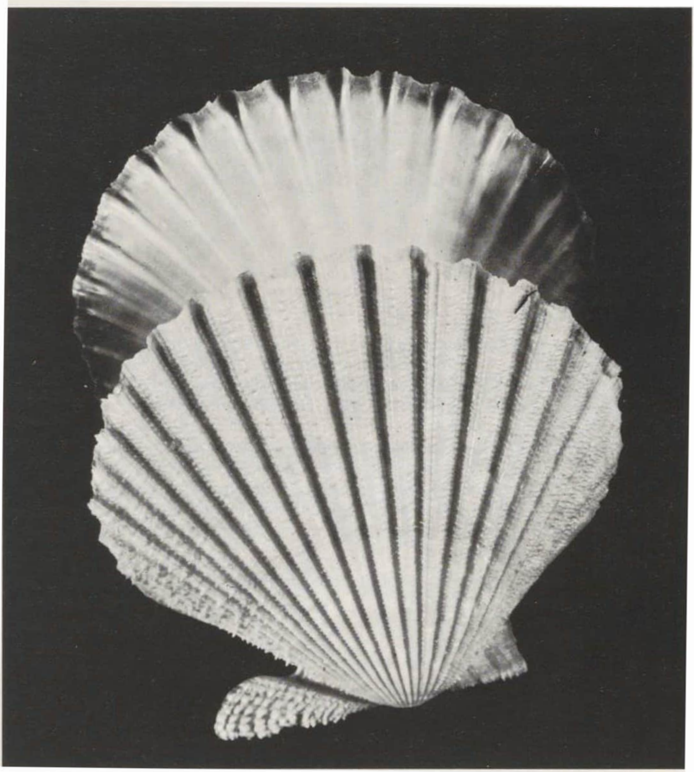




⁝**45.** BERLIN
Zwei Halbkreise berühren sich von innen in B. Der Kreispunkt N liegt auf der Mittelsenkrechte von [EL]. Durch die Mitte R von [EL] geht eine Gerade, die den kleinen Halbkreis in I berührt.
Zeige: **a)** $\overline{NR} = \overline{RI}$ **b)** B, I und N liegen auf einer Gerade.
(*Tip:* erst nach Wien, dann Halbkreis schieben bis Berührung!)

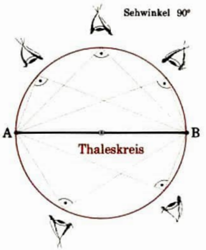
4. Kapitel

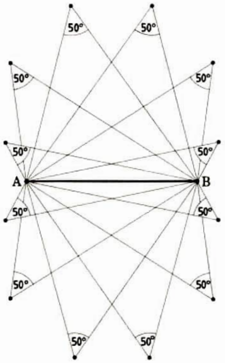
Fasskreisbogen und Sehnenviereck



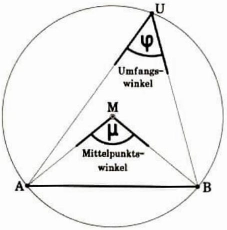
4.1 Fasskreisbogen

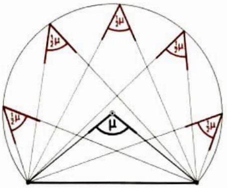
Alle Punkte, von denen aus man eine Strecke [AB] unter einem 90°-Winkel sieht, liegen auf dem Thaleskreis über [AB].





Wo aber liegen alle Punkte, von denen aus man die Strecke [AB] zum Beispiel unter einem 50°-Winkel sieht? Wir konstruieren uns einige Punkte; wir achten darauf, dass $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° - 50° = 130°$ ist. Die Punkte liegen dem Augenschein nach auf zwei Kreisbögen mit der gemeinsamen Sehne [AB]. Die Vermutung stimmt, aber um sie zu beweisen, müssen wir einen kleinen Umweg machen. Für den Beweis brauchen wir noch zwei neue Begriffe. Im Bild sehen wir einen Kreis mit dem Mittelpunkt M, einen Punkt U auf dem Umfang des Kreises und eine Sehne [AB].





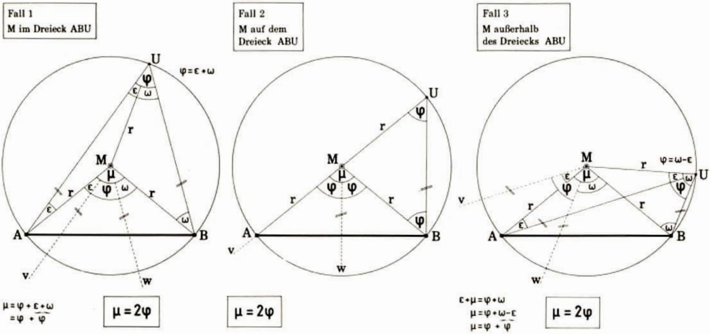
Der Winkel $\mu = \sphericalangle AMB$ heißt **Mittelpunktswinkel** über der Sehne [AB], der Winkel $\varphi = \sphericalangle AUB$ heißt **Umfangswinkel** über der Sehne [AB]. Zwischen μ und φ besteht ein einfacher Zusammenhang:

Mittelpunktswinkel-Satz:
Liegen Umfangs- und Mittelpunktswinkel auf derselben Seite einer Sehne [AB], so ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der Umfangswinkel.

Für den Beweis müssen wir drei Fälle unterscheiden (Bilder!).
In allen drei Fällen erleichtern drei Hilfslinien den Beweis:

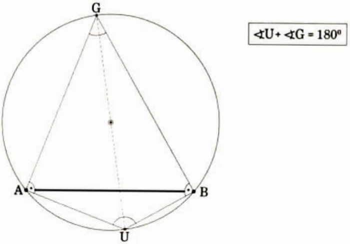
Die erste Hilfslinie verbindet M und U. Dabei entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke AMU und BMU mit den Basiswinkeln ε und ω.
Die beiden andern Hilfslinien sind v und w, sie gehen durch M, sind parallel zu den Schenkeln des Umfangswinkels φ und bilden selber wieder den Winkel φ. Bei M entstehen außerdem als Z-Winkel nochmals die Winkel ε und ω.

In allen drei Fällen ergibt sich $\mu = 2\varphi$.



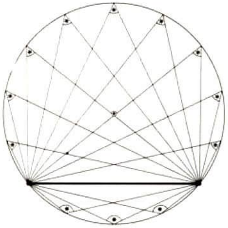
Wandert U auf dem Kreisbogen von A nach B, dann ändert sich der Mittelpunktswinkel μ nicht, also auch nicht der Umfangswinkel φ.
Was ist los, wenn U auf dem kleineren Kreisbogen liegt?
UM schneidet den Kreis in G. Die Winkel bei A und B sind beide gleich 90° (Thales).
Wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt deshalb der

Satz:
Die Umfangswinkel auf verschiedenen Seiten einer Sehne ergänzen sich zu 180°.



Und als Zusammenfassung formulieren wir den

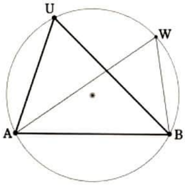
Umfangswinkel-Satz:
Alle Umfangswinkel auf derselben Seite einer Sehne sind gleich groß.

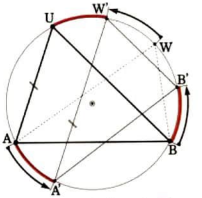


Den Kreisbogen, auf dem die Scheitel gleich großer Umfangswinkel liegen, nennen wir **Fasskreisbogen** über der Sehne zum Winkel φ. (Er fasst nämlich alle Scheitel der Umfangswinkel zusammen.) Die Bogen-Endpunkte zählen wir nicht zum Fasskreisbogen.

Den Umfangswinkel-Satz kann man sich auch direkt klar machen:
In einem Kreis sind zwei Dreiecke mit gemeinsamer Seite [AB] so gezeichnet, dass U und W auf demselben Bogen liegen. Zu zeigen ist: $\sphericalangle U = \sphericalangle W$.

$\sphericalangle U \overset{?}{=} \sphericalangle W$





gleich große Bögen

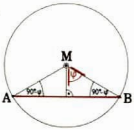
Man dreht das Dreieck ABW um den Kreismittelpunkt, bis $A'W' \parallel AU$ ist. Wegen der Drehung sind die Bögen $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{BB'}$ und $\overset{\frown}{WW'}$ gleich lang. Auch der Bogen $\overset{\frown}{UW'}$ hat diese Länge, weil er zum Bogen $\overset{\frown}{AA'}$ symmetrisch liegt bezüglich der Mittelsenkrechte von [AU]. Also liegen auch B' und W' symmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechte von [BU], das heißt $B'W' \parallel BU$. $\sphericalangle U$ und $\sphericalangle W'$ haben parallele Schenkel, sind also gleich groß.

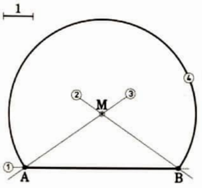
Grundkonstruktion: Fasskreisbogen

Gegeben ist die Strecke [AB] der Länge 5 und $\varphi = 55°$.
Gesucht ist ein Fasskreisbogen über [AB].

Lösungsidee: Man konstruiert das gleichschenklige Dreieck ABM aus $\overline{AB} = 5$ und $\sphericalangle M = 2\varphi = 110°$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck sind die Basiswinkel $90° - \varphi = 35°$.

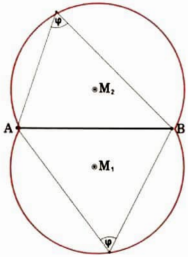
Planfigur





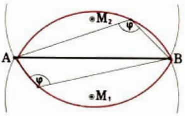
Fasskreisbogen-Paar über [AB]

zum Winkel φ (spitz)

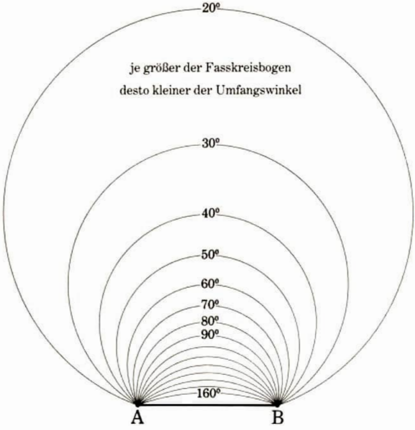


Fasskreisbogen-Paar über [AB]

zum Winkel φ (stumpf)

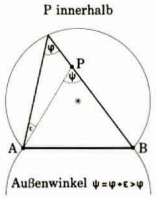


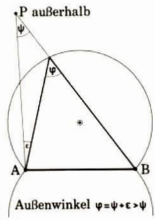
Es gibt noch einen zweiten Fasskreisbogen, von dessen Punkt aus die Strecke [AB] unter gleichem Winkel erscheint. Er liegt symmetrisch zum konstruierten Bogen bezüglich AB.



Ist φ stumpf, dann konstruiert man das Fasskreisbogen-Paar zum jetzt spitzen Supplementwinkel $180° - \varphi$, nimmt aber die kürzeren Bögen. Nach dem Umfangswinkel-Satz sieht man von jedem Punkt des Fasskreisbogen-Paars die Strecke [AB] unter demselben Winkel φ. Liegen umgekehrt alle Punkte, von denen aus [AB] unter dem Winkel φ erscheint, auch auf diesem Fasskreisbogen-Paar? Sie tun's tatsächlich, es gilt nämlich die Umkehrung des Umfangswinkel-Satzes:

Satz:
Wenn man die Strecke [AB] von einem Punkt P aus unter dem Winkel φ sieht, dann liegt P auf dem Fasskreisbogen-Paar über [AB] zum Winkel φ.





Beweis durch Widerspruch:
Wir beweisen die Kontraposition des Satzes, sie lautet:

Wenn P nicht auf dem Fasskreisbogen-Paar über [AB] zum Winkel φ liegt, dann sieht man von P aus die Strecke [AB] nicht unter dem Winkel φ.
Der Beweis der Kontraposition für den Fall, dass PB den Kreisbogen schneidet, steht im Bild.

Der Umfangswinkel-Satz und seine Umkehrung liefern einen neuen geometrischen Ort:

Der geometrische Ort der Punkte, von denen aus eine Strecke unter dem Winkel φ erscheint, ist das Fasskreisbogen-Paar über der Strecke zum Winkel φ.

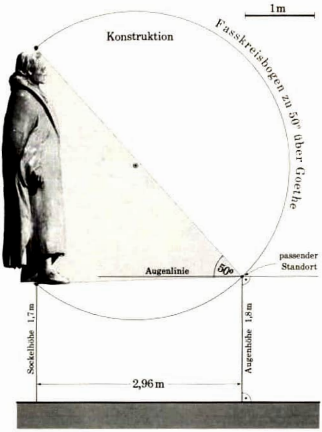
Wie finden Betrachter von Denkmälern den richtigen Standort? Mit dem Umfangswinkel-Satz ist die Antwort schnell gefunden. Herr Knipsall zum Beispiel ist gerade dabei das Goethe-Denkmal (von Elmar Dietz) in München zu fotografieren. Der Münchner Goethe steht auf einem etwa 1,70 m hohen Sockel und ist ungefähr 3,40 m groß. Knipsall hält seine Kamera in 1,80 m Augenhöhe. Der Öffnungswinkel des Objektivs ist 50°. Wo muss sich Knipsall hinstellen um Goethen (ohne Sockel) genau aufs Bild zu bringen?

Lösungsidee: Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt der Parallele zum Boden im Abstand 1,80 m und des Fasskreisbogens zum Winkel 50° über Goethe.

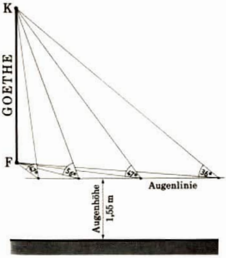
nicht so

sondern so!

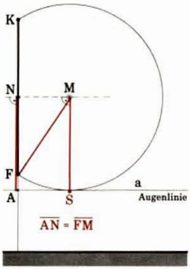
Wo ist der Sehwinkel am größten ?



Knipsalls Frau aber möchte Goethen unter möglichst großem Winkel sehen. Ihre Augenhöhe ist 1,55 m. Wo muss sie sich hinstellen?



Planfigur

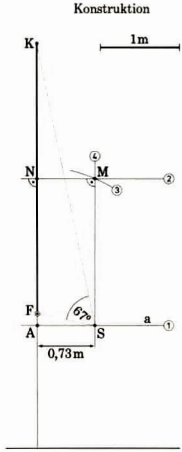


Lösungsidee: Weil zum größeren Winkel der kleinere Fasskreisbogen gehört, sucht Frau Knipsall den kleinsten Fasskreisbogen über Goethe, der ihre Augenlinie gerade noch trifft. In der Planfigur erkennt sie, dass der Mittelpunkt M des Fasskreisbogens

1. auf der Parallele durch N (Goethes Mittelpunkt) zur Augenlinie a,

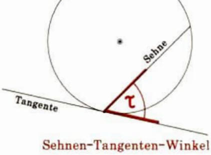
2. auf dem Kreis um F mit Radius $\overline{AN}$ liegt.

Ihrer maßstabsgetreuen Konstruktion entnimmt Frau Knipsall, dass sie 73 cm vom Denkmal weggehen muss und Goethen dann unter einem Winkel von 67° sieht.

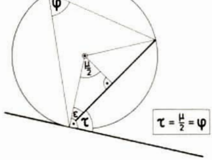


Sehnen-Tangenten-Winkel

Der Winkel τ zwischen einer Sehne und der Tangente in einem Sehnen-Endpunkt heißt **Sehnen-Tangenten-Winkel.** Er ist halb so groß wie der zur Sehne gehörige Mittelpunktswinkel μ. Sowohl τ als auch $\frac{\mu}{2}$ ergänzen ε zu 90°, also sind sie gleich groß: $\tau = \frac{\mu}{2}$. Auch der Umfangswinkel φ ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel, also ist $\tau = \varphi$.

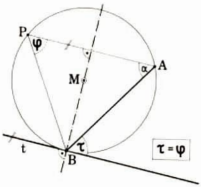


Sehnen-Tangenten-Winkel



Zu diesem Schluss gelangt man direkt mit folgender Überlegung:
Weil alle Umfangswinkel auf derselben Seite einer Sehne gleich groß sind (siehe voriges Kapitel), können wir den Scheitel P des Umfangswinkels speziell so wählen, dass BM

Symmetrieachse von A und P ist. Wegen ihres gemeinsamen Lots sind PA und t parallel. φ und α sind gleich groß (Achsensymmetrie!), ebenso α und τ (Z-Winkel!), also gilt: $\tau = \varphi$.

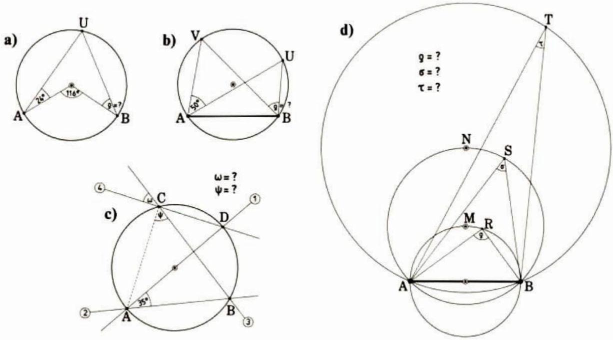


Aufgaben

1. Zeichne als Überlegungsfigur einen Kreis (Mittelpunkt M) mit Radius 4 und einer Sehne [AB]. U und V sind Punkte auf dem Kreis; U und M liegen auf derselben Seite der Sehne, V liegt auf der anderen Seite. Bezeichne die Winkel
   $\sphericalangle AMB = \mu$, $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVB = \psi$,
   $\sphericalangle BAM = \alpha$, $\sphericalangle MAU = \varepsilon$, $\sphericalangle MBU = \eta$.
   Berechne jeweils die restlichen Winkel, falls gilt:
   a) $\mu = 120°$, $\varepsilon = 15°$ **b)** $\varphi = 40°$, $\eta = 5°$
   c) $\alpha = 20°$, $\eta = 20°$ •**d)** $\psi = 170°$, $\eta = 15°$
   ••**e)** $\varepsilon = 12°$, $\eta = 3°$ •**f)** $\varepsilon = 0°$, $\eta = 30°$.

2. Zeichne auf einen Kreis mit Radius 4 die Punkte A, V, B und U so, dass gilt (Bezeichnungen wie oben):
   a) $\mu = 150°$, $\varepsilon = 15°$ **b)** $\varphi = 45°$, $\eta = 22{,}5°$
   c) $\overline{AB} = 6$, $\eta = 30°$ **d)** $\overline{AB} = 6$, $\eta = 0°$.

3. WINKELGRADE?



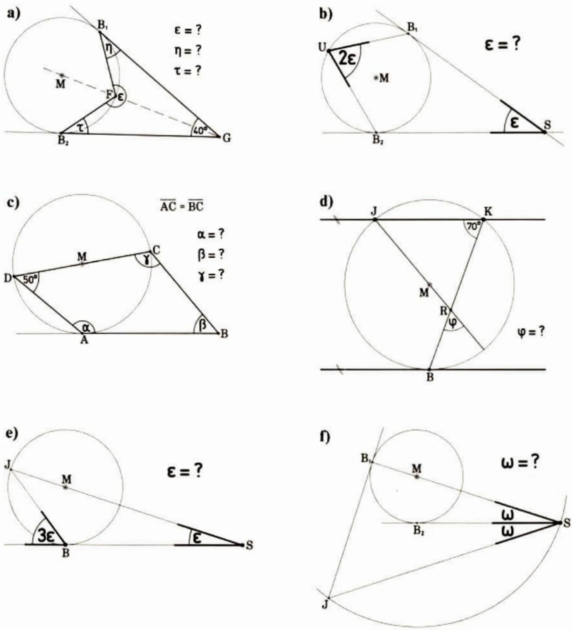
•4. Verbinde auf dem Zifferblatt einer Uhr die Punkte A(11) und B(3) sowie C(1) und D(8).
Berechne den Schnittwinkel der Verbindungsgeraden. Zeichnung!

:5. Andere Beweise des Umfangswinkel-Satzes
Zeichne die Überlegungsfigur wie in Aufgabe **1.**

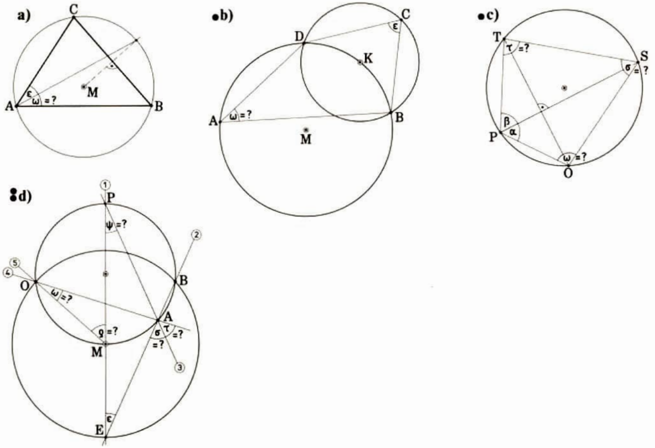
a) Drücke die Winkel AMU und BMU mit ε und η aus. Berechne damit μ.
Wieso ist das der Beweis? (Fallunterscheidung!)

b) Die Gerade UM teilt μ in μ_1 und μ_2. Berechne diese Teilwinkel mit Hilfe des Außenwinkel-Satzes für die Dreiecke AMU und BMU.
Wieso ist das der Beweis? (Fallunterscheidung!)

6. WINKELMUT



⁚7. ZUSAMMENHANG?



8. Konstruiere über der Strecke [AB] der Länge 5 das Fasskreisbogen-Paar zum Umfangswinkel:
a) 60° **b)** 90° **c)** 75° **d)** 100°.

9. Für welchen Umfangswinkel liegen die Mittelpunkte des Fasskreisbogen-Paars auf dem Fasskreisbogen-Paar? Zeichnung!

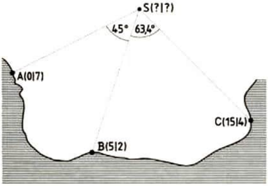
•10. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $c = 6$ und $a = 5$. Verwandle dieses Dreieck unter Beibehaltung der Basis in ein anderes Dreieck, bei dem der Winkel an der Spitze
a) halb so groß **b)** doppelt so groß
ist wie der ursprüngliche Winkel an der Spitze.

11. Konstruiere ein Dreieck ABC mit
a) $c = 5$, $h_c = 6$, $\gamma = 30°$ **b)** $a = 6$, $b = 8$, $\beta = 40°$
c) $b = 6$, $\beta = 50°$, $s_b = 5$ **d)** $a = 6$, $h_c = 5$, $\alpha = 45°$
•e) $s_c = 4$, $\beta = 50°$, $\gamma = 100°$.

12. A, B und C liegen so auf einer Gerade, dass $\overline{AB} = 5$ und $\overline{BC} = 4$ ist (B zwischen A und C).
Konstruiere alle Punkte, von denen aus man [AB] unter 60° und [BC] unter 30° sieht.

•13. Ein Haus mit rechteckigem Grundriss ist 20 m lang und 15 m breit. Es soll so fotografiert werden, dass zwei Seiten unter demselben Sehwinkel 30° aufs Bild kommen.
Konstruiere den Standort des Fotografen. Wie weit ist er von der Ecke entfernt?

14. RÜCKWÄRTSEINSCHNEIDEN
Um den Standort S seines Schiffs auf der Karte festzulegen, misst der Kapitän die Winkel, unter denen er die Leuchttürme A, B und C sieht.
Mach's wie der Kapitän: Konstruiere S und gibt die Koordinaten an.



•**15.** Zeichne ein Dreieck, in dem jeder Innenwinkel kleiner als 120° ist. Konstruiere den Punkt P, von dem aus jede Seite unter gleichem Winkel erscheint.
Was ist los, wenn ein Innenwinkel gleich 120° oder größer ist?

16. Was kann man über die Winkel eines Dreiecks sagen, bei dem eine Seite genauso lang ist wie der Radius des Umkreises?

17. Konstruiere ein Viereck ABCD mit
a) $a = 6$, $d = 4$, $\overline{BD} = 5$, $c = 6$, $\gamma = 40°$ **b)** $a = 7$, $b = 6$, $\overline{BD} = 7$, $\beta = 80°$, $\delta = 110°$
c) $a = 6$, $b = 5$, $\beta = 80°$, $\delta = 90°$, $\sphericalangle ADB = 50°$.

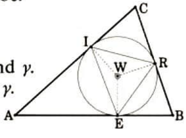
18. **a)** Im Innern eines Vierecks ABCD gebe es einen Punkt P, von dem aus alle vier Seiten unter gleichem Winkel erscheinen. Wie groß ist dieser Winkel, welcher besondere Punkt ist das?
:**b)** Gibt es auch Vierecke, bei denen von einem Punkt P außerhalb des Vierecks alle Seiten unter 90° erscheinen? Welche besonderen Eigenschaften müssen diese Vierecke haben?

19. Konstruiere eine Raute ABCD mit $a = 5$ und $\alpha = 100°$.
a) Konstruiere alle Punkte, von denen aus man alle Rautenseiten unter 20° sieht.
:**b)** Kann man alle Rautenseiten von einem beliebigen Punkt aus unter 50° sehen?

20. Zeichne zwei gleich große Kreise, die sich in P und Q schneiden. Eine Gerade durch Q schneidet die Kreise in A und B.
Zeige: APB ist ein gleichschenkliges Dreieck.

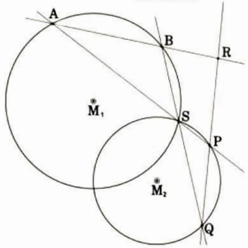
•**21.** Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und D.
Eine Gerade durch D schneidet k_1 außerdem in W und k_2 in U.
Zeige: Der Winkel WAU ist für jede solche Gerade derselbe.

22. VERWINKELT
Gegeben sind ein Dreieck ABC und sein Inkreis um W.
a) Berechne die Winkel EWR, RWI und EWI aus α, β und γ.
b) Berechne die Winkel IRE, REI und EIR aus α, β und γ.
c) Kann das Dreieck ERI rechtwinklig sein?

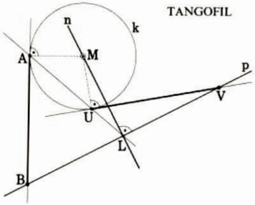


:23. SEKTANG
Zeichne die Figur und beweise: Der Schnittwinkel der Sekanten AB und PQ ist so groß wie der Schnittwinkel der beiden Kreise.

SEKTANG



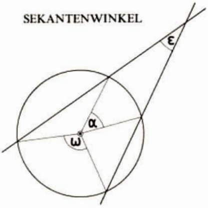
TANGOFIL



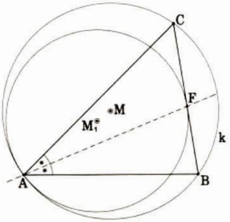
24. TANGOFIL
Zeichne einen Kreis k um M und eine Passante p. Das Lot n von p durch M schneidet p in L.
Eine Sekante durch L schneidet k in A und U. Die Tangente in A schneidet p in B und die Tangente in U schneidet p in V.
Beweise: $\overline{AB} = \overline{UV}$.

25. SEKANTENWINKEL
Beweise: Die halbe Differenz von ω und α ist gleich ε. – Gilt das auch, wenn eine Gerade in eine Tangente übergeht, bzw. wenn beide Geraden Tangenten sind?

SEKANTENWINKEL



SEHTANG



26. SEHTANG
Zeichne ein Dreieck ABC und seinen Umkreis k. Ein weiterer Kreis k_1 berührt k in A und die Dreieckseite a in F.
Zeige: $AF = w_\alpha$.

Geometrische Örter

•27. Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 5.
Bestimme den geometrischen Ort der Punkte P, sodass die Dreiecke ABP spitzwinklig sind.

•**28.** Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 10. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte P, sodass im Dreieck ABP kein Winkel größer als 80° ist.

•**29.** Zeichne einen Kreis (Mittelpunkt M) mit Radius 3,5 und eine Sehne [AB] der Länge 6.
W wandert auf dem längeren Bogen. P liegt so auf AW, dass $\overline{WB} = \overline{WP}$ und P außerhalb des Kreises liegt. Auf welcher Linie wandert P, wenn W zwischen A und P liegt?

•**30.** Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und die Sehne [AB] der Länge 6. W wandert auf dem größeren Bogen.
Auf welcher Linie bewegt sich der Schnittpunkt P der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABW?

•**31.** Zeichne einen Kreis mit Radius 4 und eine Sehne [AB] zum Mittelpunktswinkel 90°. [DC] ist ein Durchmesser, der AB nicht schneidet. T ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Viereck ABCD, S ist der Schnittpunkt der Geraden AD und BC.
Auf welcher Linie laufen S und T, wenn sich der Durchmesser [DC] dreht?

:**32.** Zeichne einen Kreis mit Radius 4 und den Durchmesser [AB]. C wandert auf einem der beiden Halbkreise.

a) Zeige: Die Winkelhalbierenden w_γ und w_{γ^*} schneiden den Kreis in zwei festen Punkten.

b) Was ist der geometrische Ort der Mitten M_b von [AC]?

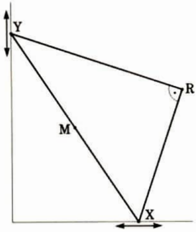
c) w_β und w_{α^*} schneiden sich in P. Auf welcher Linie läuft P?
(*Tipp:* $\sphericalangle$ APB = ?)

:**33.** Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit a = b und seinen Umkreis.
Ein Wanderpunkt W bestimmt mit C die Sehne s = [WC].
F ist Fußpunkt des Lots von A auf s. AF und BW schneiden sich in T.

a) Zeige: $\sphericalangle$FWT = $\sphericalangle$FWA.

b) Auf welcher Linie läuft T?

•**34.** RUTSCH



Ein rechtwinkliges Dreieck rutscht im KOSY.

a) Auf welcher Linie bewegt sich der Mittelpunkt H der Hypotenuse?

b) Auf welcher Linie bewegt sich die Ecke R?

Für Denksportler

35. Zeichne einen Kreis k (Radius 4) mit einem einbeschriebenen gleichschenkligen Dreieck ABC ($a = b$). w_α schneidet k in U, w_β schneidet k in K. R ist der Inkreismittelpunkt im Dreieck ABC.
Zeige: RUCK ist eine Raute.

36. Zeichne einen Kreis k (Radius 4) mit einem einbeschriebenen gleichschenkligen Dreieck ABC ($a = b$). D liegt so auf k, dass [CD] die Strecke [AB] schneidet. E ist Fußpunkt des Lots von A auf DC. AE schneidet BD in F.
a) Auf welcher Linie wandert E, wenn D auf seinem Bogen läuft?
b) Beweise: CD ist Symmetrieachse von A und F.
c) Auf welcher Linie wandert F?

37. Zeichne um M einen Kreis k mit Radius 4. I ist ein beliebiger Punkt auf einer Sehne [AU]. Die Sehne [BC] liegt auf der Mittelsenkrechte m von [AI] und hat den Mittelpunkt Z.
[UU'] ist ein Durchmesser. Zeige:
a) I ist Höhenschnittpunkt im Dreieck CUB.
b) CIBU' ist ein Parallelogramm.
c) $\overline{UI} = 2 \cdot \overline{MZ}$.

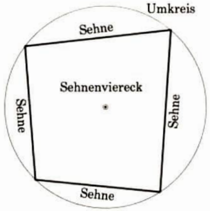
38. Zeichne ein Dreieck ABC und seinen Umkreis k. w_α, w_β und w_γ schneiden k in U, V und W.
Zeige: Die Winkelhalbierenden von $\triangle ABC$ sind Höhen von $\triangle UVW$.

39. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC und seinen Umkreis k. D liegt so auf k, dass BD die Seite [AC] schneidet. E liegt so auf [BD], dass $\overline{DE} = \overline{DC}$. Zeige:
a) Das Dreieck DEC ist gleichseitig.
b) $\overline{EB} = \overline{DA}$.
c) $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{DB}$.

40. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und seinen Umkreis k mit Mittelpunkt M.
H ist Höhenschnittpunkt, M_c ist Mitte von [AB], [CF] ist Durchmesser.
CH schneidet AB in H_c und k in K. $[MM_C$ schneidet k in E. Zeige:
a) $\sphericalangle ABK = \sphericalangle BAF = \sphericalangle ABH$
b) $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ECK$
c) $\overline{FK} = 2 \cdot \overline{M_cH_c}$
d) M_c halbiert [FH].
e) $\overline{CH} = 2 \cdot \overline{MM_c}$
f) w_γ halbiert auch $\sphericalangle MCH$.

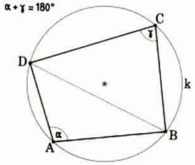
4.2 Sehnenviereck

Im Gegensatz zum Dreieck hat nicht jedes Viereck einen Umkreis. Vierecke, die einen Umkreis haben, heißen **Sehnenvierecke,** weil ihre Seiten Sehnen im Umkreis sind. Deshalb schneiden sich beim Sehnenviereck (und nur bei diesem) alle vier Mittelsenkrechten in genau einem Punkt, nämlich dem Umkreis-Mittelpunkt.



Der Umfangswinkel-Satz gibt uns die Möglichkeit, ein Kriterium (Erkennungsmerkmal) für Sehnenvierecke zu finden; es steckt in dem

Satz:
Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn zwei Gegenwinkel supplementär sind.

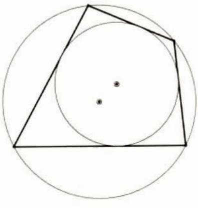


Wegen der Formulierung »genau dann« müssen wir zwei Behauptungen beweisen.

Vor.: ABCD ist ein Sehnenviereck.
Beh.: $\alpha + \gamma = 180°$
Bew.: α und γ sind Umfangswinkel auf verschiedenen Seiten über derselben Sehne [DB], also sind α und γ supplementär.

Und jetzt die Gegenrichtung:
Vor.: $\alpha + \gamma = 180°$
Beh.: ABCD ist ein Sehnenviereck.
Bew.: k ist der Umkreis des Dreiecks ABD. Deutet man [DB] als Sehne und α als Umfangswinkel, dann muss C wegen $\gamma = 180° - \alpha$ auf der anderen Seite von [DB] auf k liegen. (Fasskreisbogen!)

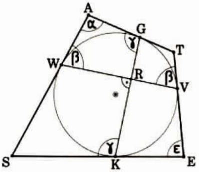
Sehnen-Tangenten-Viereck



Tangentenvierecke haben also einen Inkreis, Sehnenvierecke einen Umkreis. Gibt's auch Vierecke mit In- und Umkreis? Solche Vierecke heißen **Sehnen-Tangenten-Vierecke.** Das einfachste Exemplar ist ein Quadrat.
An einem Beispiel zeigen wir eine Eigenschaft des Sehnen-Tangenten-Vierecks, die es uns erlaubt, auch unregelmäßige Sehnen-Tangenten-Vierecke zu konstruieren:

Die Kreistangenten in den Endpunkten zweier senkrechter Sehnen bilden ein Sehnen-Tangenten-Viereck.

In einen Kreis zeichnen wir die senkrechten Sehnen [GK] und [VW]. Die Tangenten in den Endpunkten ergeben das Tangentenviereck SETA. Wir müssen nun zeigen, dass SETA auch ein Sehnenviereck ist. SETA ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn zwei Gegenwinkel supplementär sind, wenn also zum Beispiel $\alpha + \varepsilon = 180°$ ist.



$\sphericalangle AWV = \sphericalangle TVW = \beta$ und $\sphericalangle AGK = \sphericalangle SKG = \gamma$, weil die Sehnen-Tangenten-Winkel an den Enden einer Sehne achsensymmetrisch sind.
Im Viereck AWRG gilt:

$$a + \beta + \gamma + 90° = 360°, \quad \text{also} \quad \alpha = 270° - \beta - \gamma.$$

Im Viereck EVRK gilt:

$$\varepsilon + (180° - \beta) + (180° - \gamma) + 90° = 360°,$$
$$\text{also} \quad \varepsilon = \beta + \gamma - 90°.$$

Es ergibt sich

$$\alpha + \varepsilon = (270° - \beta - \gamma) + (\beta + \gamma - 90°) = 180°.$$

Umgekehrt lässt sich auch zeigen, dass in jedem Sehnen-Tangenten-Viereck die Inkreis-Sehnen, die gegenüberliegende Berührpunkte verbinden, aufeinander senkrecht stehen.

Aufgaben

1. Konstruiere ein Sehnenviereck mit
   a) $b = 7, \alpha = 90°, \beta = 80°, r = 5$
   b) $b = 3, c = 4, \underline{d = 2}, \gamma = 60°$
   c) $a = 8, b = c, \overline{AC} = 10, \beta = 80°$.

2. ABCD ist ein Sehnenviereck mit 9
   a) $A(1|2), B(8|1), C(8|9), \sphericalangle ADM = 45°$; 0 0 9
   konstruiere D. 0
   b) $A(1|1), B(8{,}5|5{,}5), C(5|9), \sphericalangle BAD = 70°$; 9
   konstruiere D. 0 0 9
   0
   c) $A(1|4{,}5), D(4{,}5|13), \sphericalangle BDA = 45°; \overline{AC} = 12, r = 6{,}5$; konstruiere B 14
   und C. 0 0 14
   0

3. Zeige: Ein Viereck ABCD ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn gilt: $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$

4. Zeige: Ein Sehnenviereck wird von seinen Diagonalen so in vier Teildreiecke zerlegt, dass je zwei in den Winkeln übereinstimmen.

5. Zeige: Jedes gleichschenklige Trapez ist ein Sehnenviereck.

6. **a)** Welche Parallelogramme sind Sehnenvierecke?
   b) Welche Rauten sind Sehnenvierecke?
   c) Welche Trapeze sind Sehnenvierecke?

7. Beweise: Ein Drachen mit zwei rechten Winkeln ist ein Sehnendrachen.

•8. Beweise: Wenn in einem Sehnenviereck zwei Gegenseiten gleich lang sind, dann ist es ein gleichschenkliges Trapez.

9. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $a = b$.
   Beweise: Das Viereck CH_bHH_a ist ein Sehnenviereck.

•10. Zeichne ein beliebiges Viereck ABCD und seine vier Winkelhalbierenden.
   Beweise: Die vier Winkelhalbierenden schließen ein Sehnenviereck ein.
   Bei welchen besonderen Vierecken schrumpft dieses Sehnenviereck auf einen Punkt zusammen?

11. Zeichne ein Sehnenviereck AUDE, sodass die Seite [EA] ein Durchmesser seines Umkreises ist. ED und AU schneiden sich in N, die Diagonalen in R.
   Zeige: Das Viereck RUND ist ein Sehnenviereck.

12. Zeichne ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC. Um seinen Höhenfußpunkt H_c dreht sich ein rechter Winkel, dessen Schenkel die Katheten in E und I schneiden.
   a) Zeige: Der Mittelpunkt M der Strecke [EI] ist von C und H_c gleich weit entfernt.
   b) Auf welcher Linie wandert M?

•13. Zeichne ein Sehnenviereck MIAU. MI und UA schneiden sich in L, MU und IA in T. Zeige: Die Halbierenden von $\sphericalangle UTA$ und $\sphericalangle ALI$ sind zueinander senkrecht.

14. Zeichne ein Dreieck ABC und den Umkreis k. h_b schneidet k in U.
   Zeige: b halbiert $\sphericalangle UCH$. (Vergleiche $\sphericalangle ACH$, $\sphericalangle ABU$, $\sphericalangle UCA$.)

:15. **a)** Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und konstruiere ein einbeschriebenes Quadrat (Seite a),
   ein einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck (Seite b) und
   ein einbeschriebenes gleichseitiges Sechseck (Seite d).
   b) Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und ein Sehnenviereck ABCD mit den Seiten a, b und d von Aufgabe **a)**.
   Zeige: 1. ABCD ist ein gleichschenkliges Trapez mit rechtwinkligen Diagonalen.
   2. Die Seitenmitten von ABCD bilden ein Quadrat.

•16. Zeichne ein Sehnenviereck ABCD und seinen Umkreis (Mittelpunkt M). Die Diagonalen schneiden sich in P.
   Zeige: $\sphericalangle AMB + \sphericalangle DMC = \sphericalangle APB + \sphericalangle DPC$.

•17. Zeichne einen Kreis k und eine Sehne [AB]. Die Mittelsenkrechte von [AB] schneidet den kleineren Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in T.
   U und V sind beliebige Punkte auf dem größeren Bogen $\overset{\frown}{AB}$.
   Die Sehne [AB] schneidet TU in C und TV in D.
   Zeige: UVDC ist ein Sehnenviereck.
   (*Tip:* Vergleiche $\sphericalangle BVD$ und $\sphericalangle CUA$ sowie $\sphericalangle UAB$ und $\sphericalangle UVB$.)

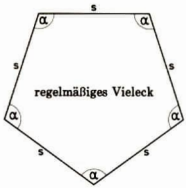
•18. Zeichne ein Dreieck ABC und seinen Umkreis k.
U ist ein beliebiger Punkt auf k; U und B liegen auf verschiedenen Seiten von [AC].
Z ist der Fußpunkt des Lots von U auf AB,
G ist der Fußpunkt des Lots von U auf BC und
F ist der Fußpunkt des Lots von U auf CA.
Wenn du ordentlich gezeichnet hast, dann liegen Z, G und F auf einer Gerade, sie heißt »Simson'sche Gerade«, nach Robert Simson (1687–1768 englischer Mathematiker).
Beweise: **1.** FUAZ, FUGC und ZUGB sind Sehnenvierecke.
2. $\sphericalangle AUC = \sphericalangle ZUG = 180° - \beta$
3. $\sphericalangle GUC = \sphericalangle ZUA = \sphericalangle AFZ = \sphericalangle GFC$
4. F liegt auf GZ.

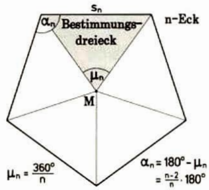
•19. Beweise oder widerlege folgende Sätze:
a) Wenn ein Trapez einen Inkreis hat, dann hat es auch einen Umkreis.
b) Wenn ein Trapez einen Umkreis hat, dann hat es auch einen Inkreis.
c) Wenn ein Viereck ein Drachen ist, dann hat es einen Inkreis.
d) Wenn ein Drachen einen Umkreis hat, dann ist er ein Tangentenviereck.
e) Wenn ein Parallelogramm einen Inkreis hat, dann ist es eine Raute.
f) Wenn eine Raute einen Umkreis hat, dann ist sie ein Quadrat.
g) Wenn ein Tangentenviereck achsensymmetrisch ist, dann ist es ein Drachen.

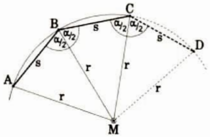
⁝20. Zeichne in einem beliebigen Dreieck ABC den Punkt A_1 auf a, B_1 auf b und C_1 auf c.
Zeichne die Umkreise der Dreiecke AB_1C_1, BC_1A_1 und CA_1B_1.
a) Beweise den Satz von A. Miquel (um 1840):
Die Kreise gehen alle durch einen Punkt P (Miquel'scher Punkt zu A_1, B_1 und C_1).
(Die Sehnenvierecke AC_1PB_1, BA_1PC_1 und CB_1PA_1 helfen.)
b) Zeige: $\sphericalangle PB_1A = \sphericalangle PC_1B = \sphericalangle PA_1C$.

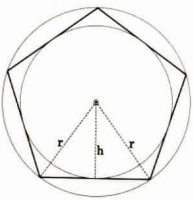
4.3 Regelmäßige Vielecke

Wegen ihres ästhetischen Reizes haben die einfach konstruierbaren regelmäßigen Vielecke schon immer als Zierfiguren in Ornamenten gedient. Die ältesten Darstellungen verwendeten vor allem Quadrate, Achtecke, Sechzehnecke usw. Dann tauchten das Sechseck und seine Abkömmlinge wie Zwölfeck und 24-Eck usw. auf, bis es schließlich den Pythagoräern gelang, das regelmäßige Fünfeck, Zehneck usw. zu konstruieren.









Mathematisch beschreiben wir ein regelmäßiges n-Eck mit der

Definition

> Ein n-Eck heißt **regelmäßig,**
> wenn alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.

Ab n = 4 genügt eine Bedingung allein nicht: Eine Raute muss nicht lauter gleich große Winkel haben und ein Rechteck muss nicht lauter gleich lange Seiten haben.

Jedes regelmäßige n-Eck besteht aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck nennen wir **Bestimmungsdreieck.**

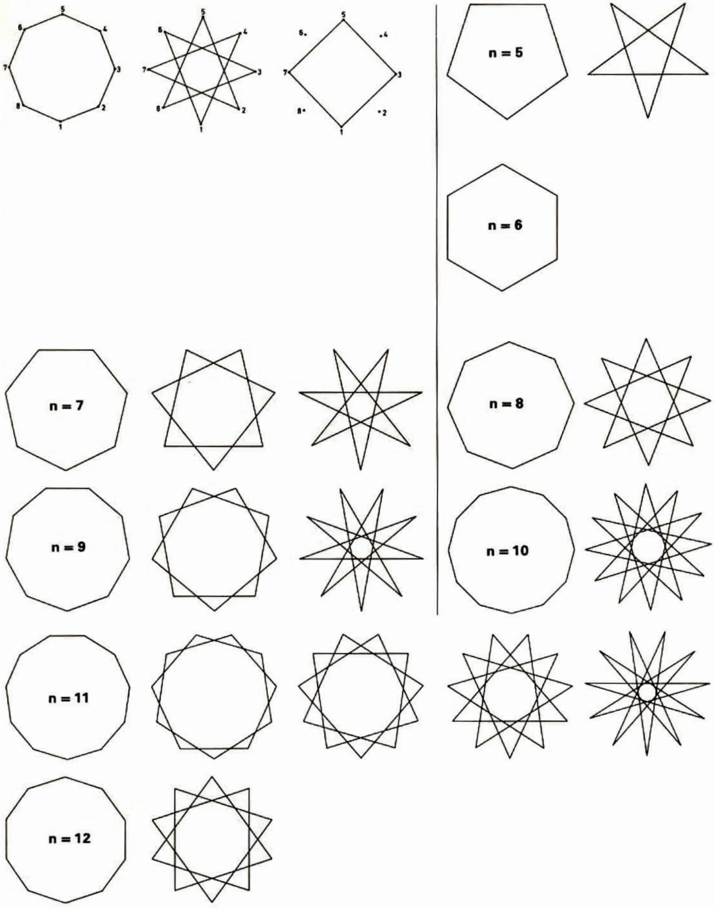
Begründung: Je drei benachbarte Ecken haben einen Umkreis (Mittelpunkt M), also gilt
$\triangle AMB \cong \triangle BMC$ (SSS)
Verbindet man M mit der nächsten Ecke (D), so entsteht das Dreieck CMD, es ist wegen SWS kongruent zu den andern beiden Dreiecken. Diese Überlegung lässt sich auf die andern Ecken fortsetzen.

Damit ist auch gezeigt, dass jedes regelmäßige Vieleck einen Umkreis und einen Inkreis hat (Inkreisradius = Höhe auf der Basis des Bestimmungsdreiecks). Wegen der kongruenten Bestimmungsdreiecke gilt

$$\mu_n = \frac{360°}{n}, \quad \alpha_n = 180° - \mu_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$

Lässt man auch überschlagene n-Ecke zu, dann entstehen regelmäßige **Sternvielecke.** Sie sind schon von Thomas Bradwardine (1290 bis 1349), dem späteren Erzbischof von Canterbury, untersucht worden.

Es gibt zum Beispiel zwei verschiedene regelmäßige Achtecke. Beim üblichen Achteck verbindet man jede Ecke mit der nächsten, beim Sternachteck mit der überübernächsten Ecke. Verbindet man dagegen jede Ecke mit der übernächsten Ecke, so ergibt sich ein Quadrat.
Allgemein gilt: Ein n-Eck ergibt sich genau dann, wenn man jede Ecke mit der k-ten darauf folgenden Ecke verbindet und n und k teilerfremd sind. Die Verbindungen der Ecken n und k liefert dasselbe n-Eck wie die Verbindung der Ecken n und n − k.

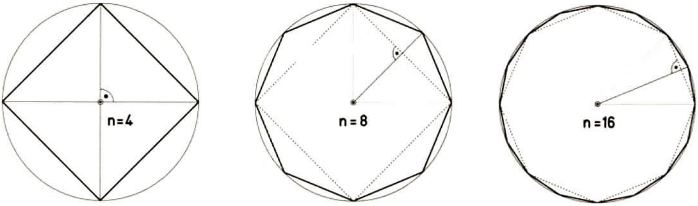

1 2 3 4 5 6 7 8
n = 5
n = 6
n = 7
n = 8
n = 9
n = 10
n = 11
n = 12

Konstruktionen

Ein regelmäßiges Vieleck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn der Mittelpunktswinkel μ_n konstruierbar ist. Kann man ein n-Eck konstruieren, dann klappt es auch bei einem mit der doppelten Eckenzahl (Winkel lassen sich ja verdoppeln und halbieren). Am besten fängt man mit dem Umkreis an.

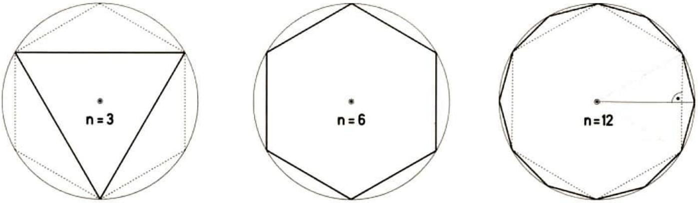
Quadrat (4er Serie): Man zeichnet zwei zueinander senkrechte Durchmesser ein. Die Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseiten fällt, schneiden den Kreis in den Ecken des Achtecks.

4er-Serie



Sechseck (3er Serie): Die Konstruktion ist noch einfacher. Eine Seite ist so lang wie der Radius, weil das Bestimmungsdreieck gleichseitig ist. Das Sechseck ist die Ausgangsfigur fürs Dreieck (übernächste Ecken verbinden) und fürs Zwölfeck (Lote fällen).

3er-Serie

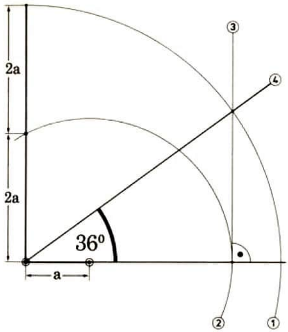


Zehneck (5er Serie):

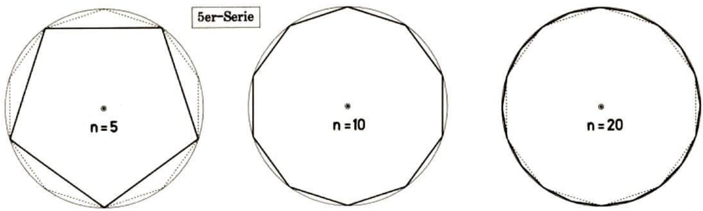
Beim Zehneck hat das Bestimmungsdreieck den Mittelpunktswinkel $\mu = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Ein 36°-Winkel lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Begründung für die Konstruktion folgt im nächsten Jahr.

Konstruktion eines 36° -Winkels



Das Zehneck ist die Ausgangsfigur fürs 5- und 20-Eck.



Lange Zeit hat man geglaubt, dass nur Vieleckserien mit $n = 4 \cdot 2^k$, $n = 3 \cdot 2^k$ und $n = 5 \cdot 2^k$ konstruierbar seien, bis schließlich der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss (Braunschweig 30.4.1777 bis 23.2.1855 Göttingen) im Jahr 1801 in seinen »Disquisitiones arithmeticae« bewies, dass auch noch andere regelmäßige n-Ecke konstruierbar sind. Für die Eckenzahl n muss gelten

$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_m$, wobei m und k natürlich Zahlen einschließlich 0 sind

p_1, p_2, ... sind lauter verschiedene sogenannte Fermat'sche Primzahlen (nach Pierre de Fermat 1601–1665) der Bauart $2^{2^i} + 1$ mit $i \in \mathbb{N}_0$

i	$2^{2^i} + 1$	
0	3	Fermat'sche Primzahl
1	5	Fermat'sche Primzahl
2	17	Fermat'sche Primzahl
3	257	Fermat'sche Primzahl
4	65537	Fermat'sche Primzahl
5	$4294967297 = 641 \cdot 6700417$	keine Primzahl

Konstruierbar sind demnach die n-Ecke mit $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \ldots$
Nicht konstruierbar sind die n-Ecke mit $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, \ldots$

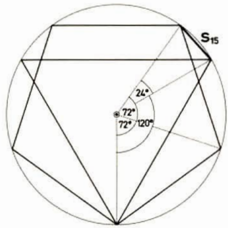
1825 konstruierten Pauker und Erdinger das 17-Eck.
1832 konstruierte Richelot das 257-Eck, und
Ende des letzten Jahrhunderts wagte sich Prof. Hermes an die Konstruktion des 65 537-Ecks. Er brauchte 10 Jahre und beschrieb 250 Riesenseiten, diese schlummern heute in einer Kiste im Mathematischen Institut der Universität Göttingen.
Bis heute (1989) kennt man keine weiteren Fermat'schen Primzahlen.

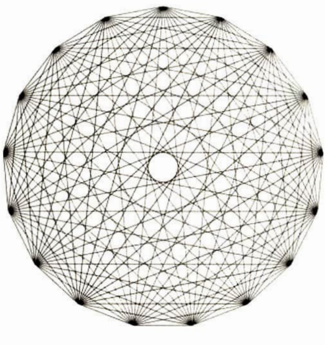
Enthält n mehr als eine Fermat'sche Primzahl, dann kombiniert man die Mittelpunktswinkel geeignet, zum Beispiel $n = 15$

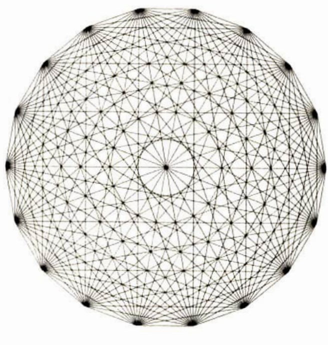
$$\frac{1}{15} = \frac{a}{5} + \frac{b}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{15} = \frac{3a + 5b}{15} \Leftrightarrow 1 = 3a + 5b$$

wir wählen $a = 2$ und $b = -1$

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{3} \,\| \cdot 360°, \quad \text{also} \quad 24° = 2 \cdot 72° - 120°$$







Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.

1. Welche Vielecke haben keine parallelen Seiten?

2. Bei welchen Vielecken schneiden sich Diagonalen im Mittelpunkt des Vielecks? Wie viele Diagonalen schneiden sich dann?

3. a) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Zwölfeck?
b) Welches n-Eck hat die Winkelsumme 17 640°? Wie groß ist ein Innenwinkel?

4. Wie groß ist jeweils ein Innenwinkel im n-Eck?
a) $n = 3$ **b)** $n = 4$ **c)** $n = 5$ **d)** $n = 15$ **e)** $n = 17$
f) $n = 51$ **g)** $n = 85$ **h)** $n = 255$ **i)** $n = 257$

5. Zeichne ein Fünfeck, das nicht regelmäßig ist:
a) mit lauter gleich langen Seiten
b) mit lauter gleich großen Winkeln.

6. Wie groß ist im n-Eck
a) ein Innenwinkel **b)** die Innenwinkelsumme
c) die Außenwinkelsumme **d)** ein Basiswinkel im Bestimmungsdreieck
e) der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks (Zentriwinkel)?

7. a) Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck?
b) In wie viele Dreiecke wird ein n-Eck durch die Diagonalen von einer Ecke aus zerlegt?

8. a) Wie viele Symmetrieachsen hat ein n-Eck? Beschreibe die Lage der Achsen.
b) Welche n-Ecke sind punktsymmetrisch?

9. Welche Sätze sind falsch? (Gegenbeispiel!)
a) Für einen Innenwinkel α im Vieleck gilt: $60° \leq \alpha \leq 120°$.
b) Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
c) Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Inkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
d) Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich große Winkel hat.
e) Ein n-Eck und ein k-Eck sind genau dann ähnlich, wenn $n = k$ ist.
f) Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie denselben Umkreis haben.

•10. Wie viele Sternvielecke gibt es mit
a) 15 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 100 Ecken?

⁘11. Zeige: Ist p eine Primzahl, gibt es in einem Kreis $(p-1)/2$ regelmäßige p-Ecke.

12. a) In welchem n-Eck gibt es 1 175 Diagonalen?
b) In welchem n-Eck ist ein Innenwinkel $\alpha_n = 178{,}2°$?

13. Konstruiere in einen Kreis mit $r = 8$ ein
a) Dreieck und Zwölfeck **b)** Achteck
c) Zehneck und Fünfeck **d)** Fünfzehneck.

•14. Begründe, warum das n-Eck konstruierbar ist:

a) $n = 192$ **b)** $n = 512$ **e)** $n = 8\,589\,934\,594$
c) $n = 1\,920$ **d)** $n = 17\,408$

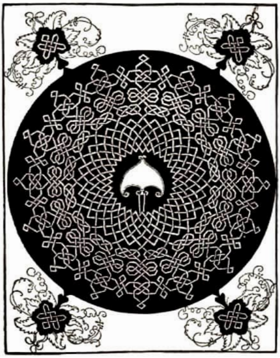
15. Das 51-Eck lässt sich über das 17-Eck und das gleichseitige Dreieck konstruieren, das 85-Eck über das 17-Eck und Fünfeck. Gib jeweils die Gleichung für die Konstruktion des Mittelpunktswinkels an. (Keine Konstruktion!)

16. a) Konstruiere ein Achteck mit $s = 5$.
b) Konstruiere ein Zwölfeck mit $s = 3$.

•17. »Konstruktion« des Siebenecks mit dem Einschiebelineal (nach Breidenbach)
Ein Einschiebelineal ist ein Lineal, auf dem man zwei Punkte markiert. Man legt das Lineal so durch einen gegebenen Punkt, dass die beiden markierten Punkte auf gegebenen Linien liegen (einschieben).
Das Siebeneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne $H(-4|6)$ und OH.
- Markiere auf einem Lineal R und S so, dass $\overline{RS} = 6$ ist.
  Einschiebung: Lege das Lineal so durch $L(-4|2)$, dass R auf HO und S auf der positiven x-Achse zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Siebenecks.

Konstruiere nach diesem Verfahren ein Siebeneck.

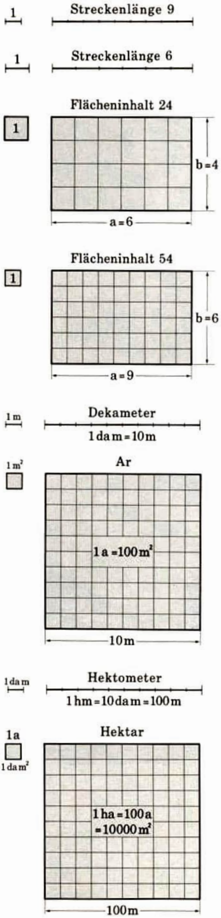
•18. »Konstruktion« des Neunecks mit dem Einschiebelineal (nach Breidenbach)
Das Neuneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne den Kreispunkt $H(2|y > 0)$.
- Einschiebung: Passe die Strecke [RS] der Länge 8 so ein, dass R auf der y-Achse, S auf der x-Achse und H auf RS zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Neunecks.
  Konstruiere nach diesem Verfahren ein Neuneck.



5. Kapitel

Flächeninhalt

5.1 Grundlagen



Will man die Länge einer Strecke messen, so muss man feststellen, wie oft eine vorgegebene Einheitsstrecke als Längeneinheit in der Strecke enthalten ist. Passt die Einheitsstrecke zum Beispiel genau neunmal in die Strecke, dann sagt man: Die Strecke hat die Länge 9. 9 ist die Maßzahl bezüglich der gewählten Längeneinheit. Nimmt man eine längere Einheitsstrecke, dann hat dieselbe Strecke eine kleinere Maßzahl.

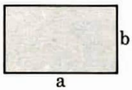
Im Alltag haben bestimmte Einheitsstrecken Namen, diese Namen dienen als Benennung bei der Längenangabe. Früher war der Mensch auch im wörtlichen Sinn das Maß aller Dinge, die alten Längeneinheiten wie Fuß, Elle, Zoll, Spanne und Yard waren vom menschlichen Körper abgeleitet. Die heute verwendeten Maßeinheiten stammen aus der Erdmessung. Am 7. April 1795 hat die französische Nationalversammlung beschlossen, dass der 40millionste Teil des Erdumfangs als neue Einheit der Längenmessung verwendet werden solle. Diese Einheit nannte man 1 Meter und leitete davon die kleineren Einheiten 1 dm, 1 cm, 1 mm und die größere Einheit 1 km ab.

In der Geometrie geben wir Längeneinheiten als Strecken an. Weil wir keine Benennungen verwenden, haben sie die Länge 1. Bei der Flächenmessung macht man's genauso. Als Flächeneinheit dient ein Quadrat mit der Seitenlänge 1: das Einheitsquadrat. Will man den Inhalt einer Fläche messen, dann muss man feststellen, wie oft das Einheitsquadrat in ihr enthalten ist. Passt es zum Beispiel genau 24mal in ein Rechteck, dann sagt man: Das Rechteck hat den Flächeninhalt 24. 24 ist die Maßzahl bezüglich der gewählten Flächeneinheit. Wenn man ein kleineres Einheitsquadrat nimmt, dann erhält dieselbe Fläche eine größere Maßzahl.

Meistens bezeichnet man den Flächeninhalt mit A. Für ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b gilt – wie wir schon wissen:

Flächeninhalt des Rechtecks

$$A = ab$$



In der Geometrie sind auch die Flächeninhalte reine Zahlen. In der Wirklichkeit leitet man die Namen der Flächeninhalte von den Längeneinheiten ab. 1 m² ist zum Beispiel der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge 1. Entsprechend sind in Gebrauch 1 dm², 1 cm², 1 m² und 1 km².

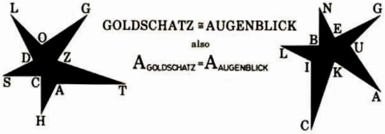
Achte auf die unterschiedlichen Umrechnungszahlen bei Längen- und Flächeneinheiten:

1 km = 10 hm	$1\ \text{km}^2 = 100\ \text{hm}^2 = 100\ \text{ha}$
1 hm = 10 dam	$1\ \text{ha} = 100\ \text{dam}^2 = 100\ \text{a}$
1 dam = 10 m	$1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$
1 m = 10 dm	$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2$
1 dm = 10 cm	$1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2$
1 cm = 10 mm	$1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$

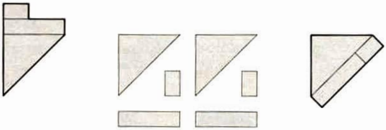
Beispiel: 1 km = 1 000 m, aber $1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$.

Bei komplizierteren Figuren macht es mehr Mühe, den Flächeninhalt zu bestimmen. Einige nahe liegende Eigenschaften des Flächeninhalts helfen uns dann weiter. Unmittelbar leuchtet ein:

Kongruente Figuren haben den gleichen Flächeninhalt, kurz: sind flächengleich.



Umgekehrt stimmt's meistens nicht:
Setzt man nämlich Figuren aus paarweise kongruenten Teilen zusammen, so entstehen flächengleiche Figuren, die im Allgemeinen nicht kongruent sind.

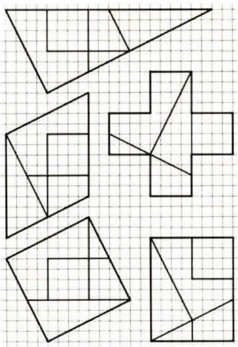


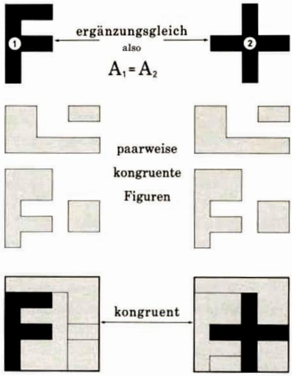
paarweise kongruente Figuren

Gelingt es andrerseits, zwei Figuren in paarweise kongruente Teile zu zerlegen, so sind sie flächengleich. Solche Figuren heißen **zerlegungsgleich.** Das Bild zeigt fünf einfache zerlegungsgleiche Figuren.

Statt Figuren zu zerschneiden, kann man sie auch geschickt ergänzen. Es gilt nämlich: Zwei Figuren haben denselben Flächeninhalt, wenn sie sich beim Ergänzen mit paarweise kongruenten Stücken in kongruente Figuren verwandeln lassen. Die Ausgangsfiguren nennt man dann **ergänzungsgleich.** In der Ebene sind zerlegungsgleiche Figuren immer auch ergänzungsgleich und umgekehrt.

zerlegungsgleiche Figuren





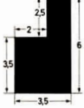
Braucht man den Flächeninhalt komplizierterer Figuren, so zerlegt man diese in Teilfiguren, deren Flächeninhalt man berechnen kann, und verwendet die unmittelbar einleuchtende Eigenschaft des Flächeninhalts:

Zerlegt man eine Figur in Teilfiguren, so ist der Inhalt der Figur gleich der Summe der Inhalte der Teilfiguren.

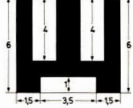
Aufgaben

1. MASSVOLL
   Berechne den Inhalt der schwarzen Flächenstücke.

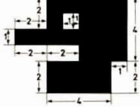
a)



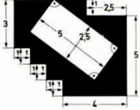
b)



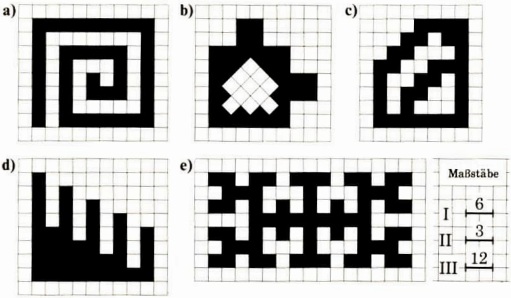
c)



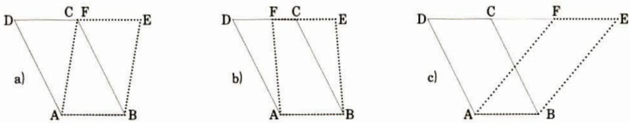
d)



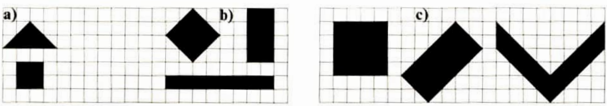
2. MASSLOS
Berechne den Inhalt der schwarzen Flächenstücke, benutze den Maßstab I.
Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn du die Maßstäbe II beziehungsweise III verwendest?



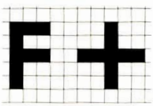
3. SCHEREREI
Die Parallelogramme ABCD und ABEF sind flächengleich.
Beweise dies!



4. FLÄCHENGLEICH
Begründe: Die Figuren in **a)** sind flächengleich, die Figuren in **b)** sind flächengleich und die Figuren in **c)** sind flächengleich.

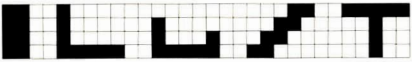


5. QUADRATVOLLMACHT
Ergänze **F** und + mit drei paarweise kongruenten Stücken zu einem möglichst kleinen Quadrat.



6. VIERDAZU

Ergänze jede Figur mit jedesmal denselben vier Figuren zu einem möglichst kleinen Quadrat.

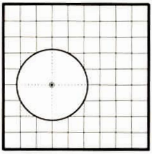


7. HALBSCHWER

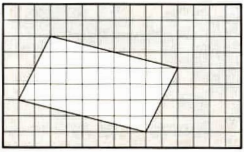
a) Jemand will mit einem geraden Zaun sowohl seinen quadratischen Garten als auch den kreisförmigen Teich darin halbieren. Hilf ihm!

b) Halbiere die graue Fläche mit einem geraden Schnitt.

a)

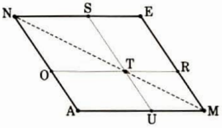


b)



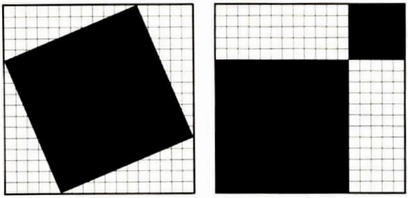
8. ERGÄNZUNGS-PARALLELOGRAMME

Beweise: Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms die Parallelen zu den Seiten, so sind die Parallelogramme, durch die die Diagonale nicht geht – das sind die ERGÄNZUNGS-PARALLELOGRAMME – flächengleich.



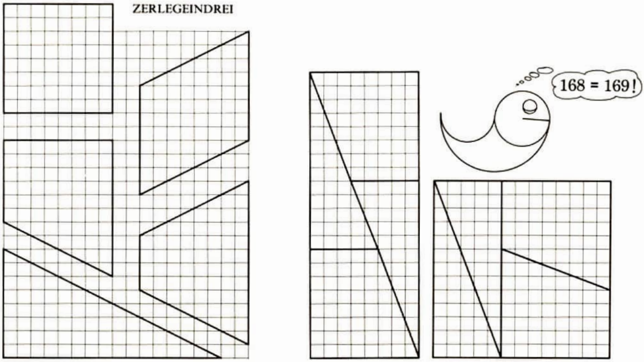
9. QUADRATSUMMENQUADRAT

Zeige: Der Flächeninhalt des großen Quadrats ist gleich der Summe der Flächeninhalte der kleinen Quadrate.



10. ZERLEGEINDREI

Zeige: Die fünf Figuren sind flächengleich, weil sie sich jeweils in dieselben drei Teilflächen zerlegen lassen.

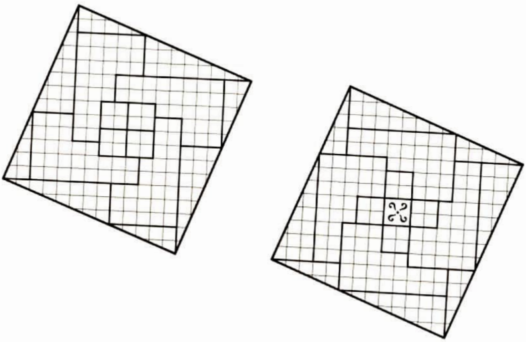


11. $168 \stackrel{?}{=} 169$

Geobold hat zwei zerlegungsgleiche Rechtecke gefunden, mit denen er beweist, dass $8 \cdot 21 = 13 \cdot 13$ ist.

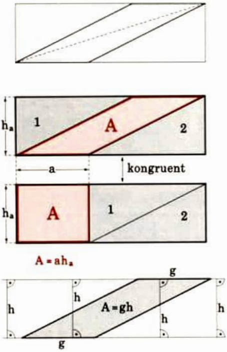
12. FUTSCH?

16 Puzzle-Steine füllen – je nach Anordnung – ein und denselben quadratischen Rahmen oder auch nicht.



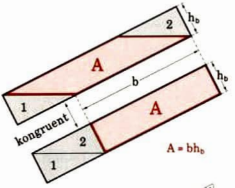
Erst mit einer genauen Zeichnung (gut gespitzte Mine) wirst du den Schwindel in den letzten beiden Aufgaben aufdecken.

5.2 Flächeninhalt einfacher Figuren



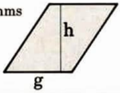
Parallelogramm

Zur Bestimmung des Flächeninhalts zeichnen wir ein umbeschriebenes Rechteck, von dem eine Diagonale mit der längeren Diagonale des Parallelogramms übereinstimmt. Damit ist das Parallelogramm durch zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zu einem Rechteck ergänzt. Dieses Rechteck ergibt sich auch, wenn wir ein kleineres Rechteck (rot) mit den beiden rechtwinkligen Dreiecken ergänzen. Folglich sind die beiden roten Figuren, Parallelogramm und Rechteck, flächengleich (Prinzip: Ergänzungsgleichheit).
In den Bildern sehen wir: $A = ah_a = bh_b$.
Es ist egal, mit welcher Parallelogrammseite man rechnet, man muss bloß die zugehörige Höhe als zweiten Faktor nehmen. Allgemein gilt für ein Parallelogramm mit einer Seite g und der zugehörigen Höhe h:

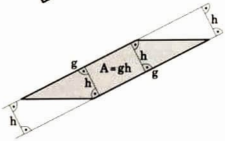


Flächeninhalt des Parallelogramms

$$A = gh$$



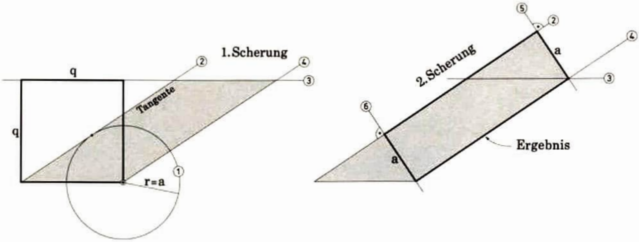
Demnach ändert sich der Flächeninhalt eines Parallelogramms nicht, wenn man eine Seite festhält und die Gegenseite so verschiebt, dass die Höhe gleich bleibt. Dieser Vorgang heißt **Scherung** des Parallelogramms. Mit der Scherung ist es möglich, ein Parallelogramm in ein flächengleiches Parallelogramm mit gewünschten Eigenschaften umzuformen.



gescherte Parallelogramme sind flächengleich

Als Anwendung verwandeln wir ein Quadrat mit der Seitenlänge q in ein flächengleiches Rechteck, in dem eine Seite die vorgegebene Länge a hat.

Lösungsidee: Mit einer ersten Scherung führen wir das Quadrat über in ein Parallelogramm mit der Höhe $h = a$. Mit einer zweiten Scherung verwandeln wir das Parallelogramm in ein Rechteck, ohne dass sich dabei die Höhe ändert.

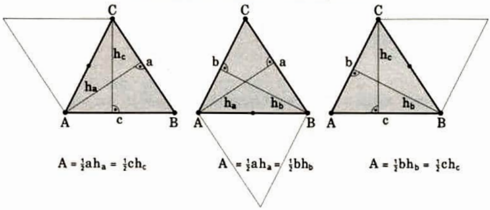


Dreieck

Spiegelt man ein Dreieck am Mittelpunkt einer Seite, so bildet die Gesamtfigur ein Parallelogramm. Die Fläche des Dreiecks ist halb so groß wie die des Parallelogramms. In den Bildern sehen wir:

$$A = \frac{1}{2}\,ah_a = \frac{1}{2}\,bh_b = \frac{1}{2}\,ch_c.$$

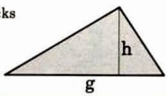
das Dreieck als halbes Parallelogramm



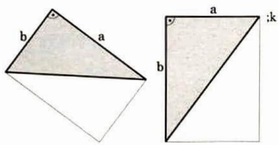
Es ist egal, mit welcher Dreieckseite man rechnet, man muss bloß die zugehörige Höhe als Faktor nehmen. Allgemein gilt für ein Dreieck mit einer Seite g und der zugehörigen Höhe h

Flächeninhalt des Dreiecks

$$A = \tfrac{1}{2}gh$$



das rechtwinklige Dreieck als halbes Rechteck

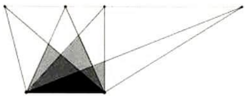


$A = \frac{1}{2}ab$

Weil ein rechtwinkliges Dreieck immer auch ein halbes Rechteck ist, hat es den Flächeninhalt $A = \dfrac{1}{2}\,ab$, das ist das halbe Produkt der Katheten.

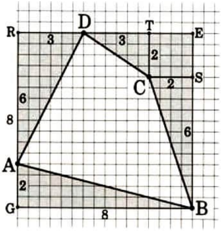
Der Flächeninhalt eines Dreiecks ändert sich nicht, wenn man eine Seite festhält und die Gegenecke auf einer Parallele im Abstand h verschiebt. Dieser Vorgang heißt **Scherung** des Dreiecks.

gescherte Dreiecke sind flächengleich



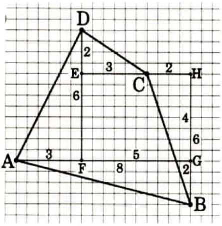
Flächenberechnung

In einem Beispiel berechnen wir den Flächeninhalt eines Vierecks, dessen Ecken auf Gitterpunkten liegen: A(1 | 3), B(9 | 1), C(7 | 7), D(4 | 9).



1. Möglichkeit: Mit Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecken **ergänzt** man das Viereck zu einem Rechteck.

$$A_{ABCD} = A_{BERG} - A_{ABG} - A_{BSC} - A_{CSET} - A_{CTD} - A_{ADR}$$
$$= 8 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 34.$$

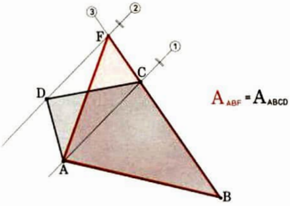


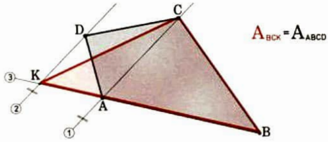
2. Möglichkeit: Man **zerlegt** das (passend ergänzte) Viereck in Rechtecke und rechtwinklige Dreiecke.

$$A_{ABCD} = A_{AFD} + A_{ABG} + A_{FGHE} + A_{ECD} - A_{BHC}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 34.$$

Flächenverwandlung

Im nächsten Beispiel verwandeln wir ein Viereck in ein flächengleiches Dreieck, indem wir eine Ecke durch Scherung beseitigen.



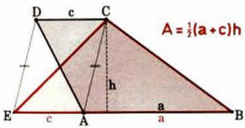


Lösungsidee und Lösung: Man schert das Dreieck ACD so zum Dreieck ACF, dass F auf BC liegt. Das Dreieck ABF und das Viereck ABCD haben denselben Flächeninhalt.
Schert man die Ecke D auf AB, dann ergibt sich ein anderes Dreieck KBC.

Mit diesem Verfahren lässt sich jedes Vieleck in ein flächengleiches Vieleck mit weniger Ecken verwandeln.

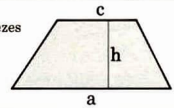
Trapez

Schert man eine der beiden oberen Trapezecken parallel zu einer Diagonale auf die andere Grundseite, so ergibt sich ein flächengleiches Dreieck mit gleicher Höhe, siehe Bild. Weil EACD ein Parallelogramm ist, gilt $\overline{EB} = a + c$.



Flächeninhalt des Trapezes

$$A = \tfrac{1}{2}(a+c)h$$



Aufgaben

Parallelogramm

1. Berechne den Flächeninhalt eines Parallelogramms, von dem bekannt ist:

   a) $a = 3,\ h_a = 4{,}4$ **b)** $b = 2\frac{1}{4},\ h_b = 1\frac{7}{9}$

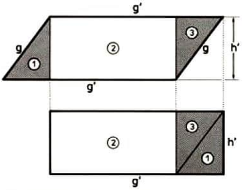
   c) $c = 3{,}875,\ h_a = 2\frac{18}{31}$

2. Ein Parallelogramm hat den Flächeninhalt 144.
a) Berechne a, wenn $h_a = 16$. **b)** Berechne h_b, wenn $b = 7{,}2$.

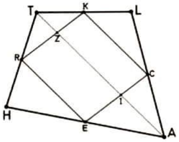
3. In einem Parallelogramm ist: $a = 4{,}83$, $h_a = 2{,}4$, $b = 3{,}6$.
Berechne h_b.

4. Eine Raute mit der Seitenlänge 8 hat den Flächeninhalt 56. Wie lang ist die Höhe?

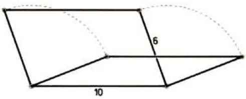
5. BEWEIS?
Zeige: Das Parallelogramm und das Rechteck sind zerlegungsgleich. Begründe damit die Formel $A = gh$. Zeichne dann ein Parallelogramm, bei dem der Beweis nicht klappt.



6. MITTENVIERECK
a) Begründe: Das Parallelogramm ZICK ist halb so groß wie das Dreieck ALT.
b) Begründe: Das Parallelogramm REIZ ist halb so groß wie das Dreieck HAT.
c) Begründe: Das Mittenviereck RECK ist halb so groß wie das Viereck HALT.



7. GELENKPARALLELOGRAMM
Über der Seite $a = 10$ lassen sich beliebig viele Parallelogramme mit $b = 6$ zeichnen.
Zwischen welchen Grenzen liegen die Flächeninhalte? Zeichne das größte Parallelogramm.



8. Zeichne das Parallelogramm ABCD mit A(4|1), B(11|1) und D(8|7) und konstruiere ein flächengleiches Parallelogramm ABC'D' mit 8
0 0 19
a) $\sphericalangle BAD' = 90°$ **b)** $\sphericalangle BAD' = 120°$ 0
c) $\overline{BD'} = 10$ **d)** $\overline{BC'} = 10$

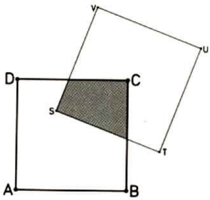
9. Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $a = 10$, $b = 8$ und $\overline{BD} = 6$.
Konstruiere ein flächengleiches Parallelogramm ABC′D′ (Mittelpunkt M), bei dem

a) $\sphericalangle D'BC' = 30°$ **b)** $\sphericalangle AMB = 90°$ **c)** $\sphericalangle AMB = 75°$ ist.

10. QUADRADRE
ABCD und STUV sind kongruente Quadrate. C ist Mittelpunkt von STUV, STUV dreht sich um C.

a) Begründe: Im Innern von ABCD liegt höchstens eine Ecke von STUV.

b) Begründe: Die Schnittfläche beider Quadrate hat immer denselben Inhalt, unabhängig von der Lage von STUV; vergleiche ihn mit dem der Quadrate.



Dreieck

11. Begründe die Dreiecks-Flächen-Formel, indem du den Inhalt eines **a)** spitzwinkligen, **b)** stumpfwinkligen Dreiecks als Summe (bzw. Differenz) rechtwinkliger Dreiecke darstellt.

12. Berechne die fehlenden Stücke

	a	b	h_a	h_b	A
a)	10		7	3,5	
b)	16	24		18	
c)	9	12			36
d)			12	15	96

13. Zeige: In jedem Dreieck gilt $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$.

14. Im Dreieck ABC liegt Punkt Q auf c so, dass [AQ] dreimal so lang ist wie [QB].

a) Wie vielmal so groß ist der Inhalt von Dreieck AQC wie der Inhalt von Dreieck QBC?

b) Berechne den Inhalt von Dreieck AQC, wenn man außerdem weiß, dass $c = 16$ und $h_c = 8$ ist.

•15. a) Beweise: Ist s der halbe Dreiecksumfang und ϱ der Inkreisradius, dann gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \varrho s$.

b) Beweise: Ist u der Umfang eines Tangentenvielecks und ϱ der Inkreisradius, dann gilt für den Flächeninhalt A des Tagentenvielecks $A = \frac{1}{2}\varrho u$.

16. E ist ein beliebiger Punkt auf der Diagonale [BD] eines Parallelogramms ABCD.
Zeige: $A_{AED} = A_{ECD}$.

•17. I ist ein beliebiger Punkt im Innern eines Parallelogramms ABCD.

Zeige: $A_{ABI} + A_{CDI} = A_{BCI} + A_{DAI} = \frac{1}{2} A_{ABCD}$.

18. Zeichne ein Dreieck ABC und alle Seitenhalbierenden, die sich in S schneiden.

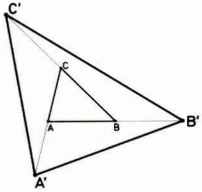
a) Zeige: Jede Seitenhalbierende zerlegt das Dreieck in zwei gleich große Teildreiecke.

b) Es entstehen sechs Dreiecke mit gemeinsamer Ecke S, die das Dreieck ABC ausfüllen, ohne sich zu überlappen.
Zeige: Alle sechs Dreiecke sind flächengleich.

19. Konstruiere ins Innere von Dreieck ABC mit A(1 | 4), B(10 | 1) und C(10 | 13) den Punkt P so, dass [PA], [PB] und [PC] das Dreieck in flächengleiche Teildreiecke zerlegen.
14
0 0 11
0

20. Zeichne ein Quadrat ABCD mit a = 2 und verlängere die Seiten aufs Doppelte, sodass wieder ein Quadrat entsteht. (Warum ausgerechnet wieder ein Quadrat?) Wie vielmal so groß ist das neue Quadrat verglichen mit dem alten?

•21. SIEBEN
$\overline{A'A} = \overline{AC}$, $\overline{B'B} = \overline{BA}$, $\overline{C'C} = \overline{CB}$. Zeige: $A_{A'B'C'} = 7\,A_{ABC}$.



•22. Zeichne Quadrate, deren Ecken auf Gitterpunkten liegen, mit den Flächeninhalten 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 und 13.

:23. In einem Rechteck mit den Seiten a und b bilden die Winkelhalbierenden ein Quadrat.

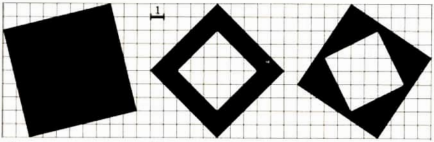
Zeige: Das Quadrat hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}(a - b)^2$.

24. Zeichne ein Dreieck ABC mit a = 7, b = 8 und c = 10.
Konstruiere ein flächengleiches Dreieck ABC' mit

a) $\measuredangle C'AB = 60°$ **b)** $\overline{BC'} = 9$ **c)** $h_{AC'} = 4$ **d)** $s_{BC'} = 5$ **e)** $a' = b'$

•**25.** Verwandle das Dreieck ABC mit $a = 4$, $b = 5$ und $c = 6$ in ein flächengleiches Dreieck mit demselben Winkel α und der neuen Seite $c' = 7$.

26. QUADRATE
Zeichne und berechne den Inhalt der schwarzen Flächenstücke.

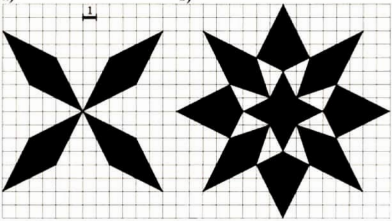


a) **b)** **c)**

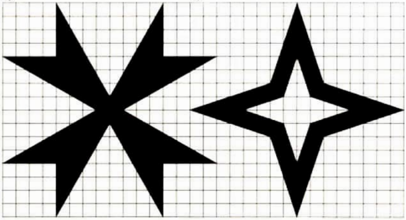
•**27.** Verwandle das Dreieck ABC mit $a = 6$, $b = 8$ und $c = 7$ in ein flächengleiches Dreieck mit $a' = 10$ und $c' = 5$.

28. STEANDAL
Zeichne und berechne den Inhalt der schwarzen Flächenstücke.

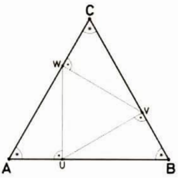
a) **b)**



c) **d)**



EINBESCHRIEBEN



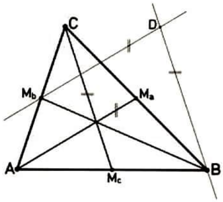
:29. EINBESCHRIEBEN
a) Konstruiere die Figur.
b) Wie oft hat das Dreieck UVW flächenmäßig im Dreieck ABC Platz?

:30. DREIVIERTELTAKT

Im Dreieck ABC sind die Seitenhalbierenden gezeichnet. Durch die Endpunkte B, M_b einer Seitenhalbierenden gehen die Geraden, die parallel sind zu den beiden anderen Seitenhalbierenden; sie schneiden sich in D.

a) Zeige: Die Seiten im Dreieck BDM_b sind so lang wie die Seitenhalbierenden im Dreieck ABC.

b) Zeige: Der Flächeninhalt von Dreieck BDM_b ist gleich 75 % des Flächeninhalts von Dreieck ABC.



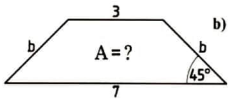
Trapez

31. Berechne vom Trapez (a ∥ c) die fehlenden Stücke

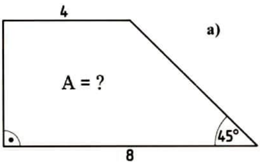
	a	c	h	A
a)	10	7		157,5
b)	3,2c	6	$5\frac{1}{3}c$	
c)		5a	6	90
d)	7c		c	100

32. Im Trapez (a ∥ c) ist: a = 22, c = 16, d = 12 und $\delta = 90°$.
Berechne den Flächeninhalt.

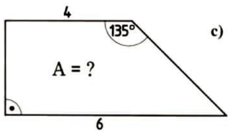
33. Trapezflächen
Berechne die Flächeninhalte.



b)



a)



c)

34. Beweise: Trapeze mit gleicher Mittellinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

35. Zeichne ein Trapez und spiegle es am Mittelpunkt eines Schenkels. Bestätige die Trapezflächenformel durch Betrachtung der Gesamtfigur.

36. **a)** Konstruiere ein Tangententrapez ABCD mit $A(1 \mid 1)$, $B(11{,}5 \mid 1)$, $b = 7{,}5$, $d = 6{,}5$ und $h = 6$.
b) Konstruiere den Inkreis (Koordinaten des Mittelpunkts?) und gib den Radius r sowie die Länge von c ohne Messung an.
c) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes auf zweierlei Arten.

•**37.** In einem Tangententrapez ($a \parallel c$) ist $b + d = 16$ und 2,5 der Inkreisradius. Berechne den Flächeninhalt.

•**38.** Verwandle ein Trapez in ein flächengleiches gleichschenkliges Trapez mit derselben Grundseite und Höhe.

•**39.** Zeichne ein Trapez ABCD und konstruiere ein Parallelogramm mit demselben Flächeninhalt, demselben Winkel α und derselben Grundseite.

40. Zeichne irgendein Trapez ABCD mit $a = 10$.
a) Verwandle das Trapez in ein flächengleiches Rechteck.
••**b)** Verwandle das Trapez in ein flächengleiches Rechteck mit einer Seitenlänge 7.

Halbierungen

41. Zeichne das Viereck VIER mit $V(1 \mid 1)$, $I(11{,}5 \mid 1)$, $E(8 \mid 8)$ und $R(3{,}5 \mid 5)$, 9
die Diagonale [IR] und ihren Mittelpunkt M. 0 0 12
0
a) Begründe $A_{VIM} + A_{EMI} = \frac{1}{2} A_{VIER}$.
b) Zeichne durch M die Parallele p zur Diagonale [EV]. p schneidet [IV] in S und [EI] in T.
Begründe: Die Geraden ES und VT halbieren die Vierecksfläche (»von einer Ecke aus«).
c) Zeichne das Viereck VIER noch mal und halbiere jetzt die Fläche von R aus. Welchen Flächeninhalt hat es?

42. Zeichne das Viereck BREI mit $B(7{,}5 \mid 1)$, $R(12 \mid 1)$, $E(1 \mid 5)$ und $I(1 \mid 9)$. 10
Konstruiere die Gerade h durch den Mittelpunkt M_e von [EI], die die 0 0 16
Fläche halbiert. 0
(*Tipp:* Verwandle BREI in ein flächengleiches Viereck mit M_e als Ecke und scher dich um R.)

43. Zeichne das Parallelogramm ABCD mit $A(1 \mid 3)$, $B(9 \mid 1)$, $C(14 \mid 6)$ und 8
$D(6 \mid 8)$. 0 0 15
a) Konstruiere die Gerade g, die ABCD von D aus halbiert. 0
b) Konstruiere die Gerade h, die ABCD von $P(11 \mid 3)$ aus halbiert.
c) Konstruiere die Gerade u, die ABCD vom Ursprung aus halbiert.

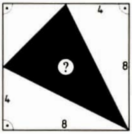
44. Zeichne das Dreieck ABC mit $A(4 \mid 1)$, $B(12 \mid 1)$ und $C(6 \mid 7)$. 7
a) Konstruiere die Gerade g, die ABC von B aus halbiert. 0 0 13
•**b)** Konstruiere die Gerade h, die ABC von $P(8 \mid 5)$ aus halbiert. 0

45. Zeichne das Trapez TRAP mit T(1 | 4), R(7 | 4), A(10 | 10) und P(7 | 10). 11
a) Konstruiere die Gerade p, die TRAP von P aus halbiert. 0 0 11
b) Konstruiere die Gerade q, die TRAP von Q(3,5 | 4) aus halbiert. 0
:c) Konstruiere die Gerade s, die TRAP von S(4 | 7) aus halbiert.

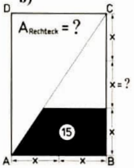
Berechnungen

:46. FLÄCHENFLACHSEN
Berechne die gesuchten Stücke.

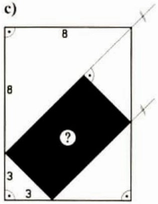
a)



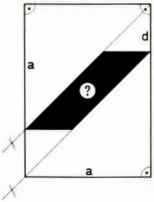
b)



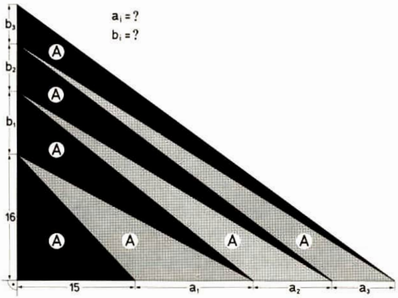
c)



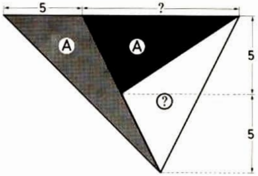
d)



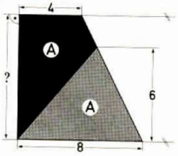
e)

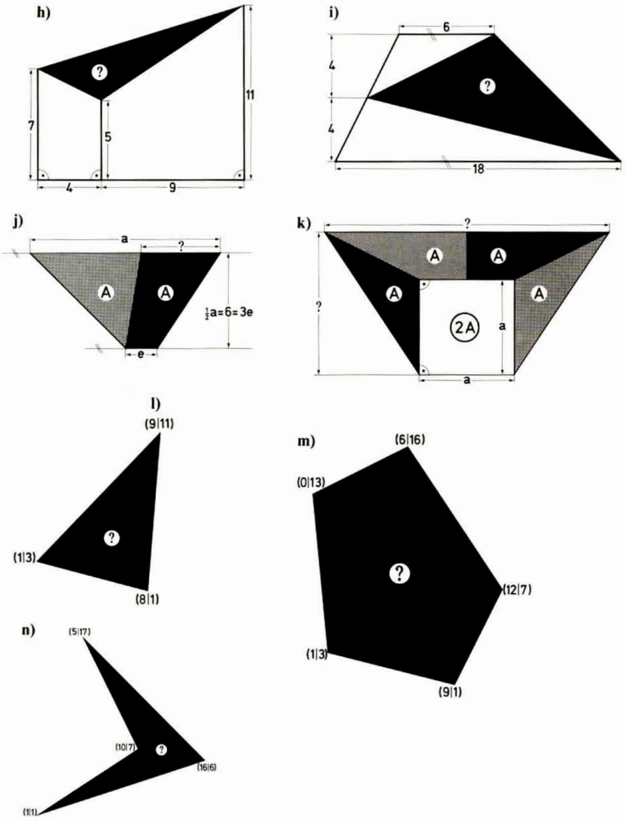


f)



g)





47. In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete dreimal so lang wie die andere. Verdoppelt man die kürzere und nimmt man den dritten Teil der längeren Kathete, so verkleinert sich der Flächeninhalt um 18.
Berechne die Längen der Katheten.

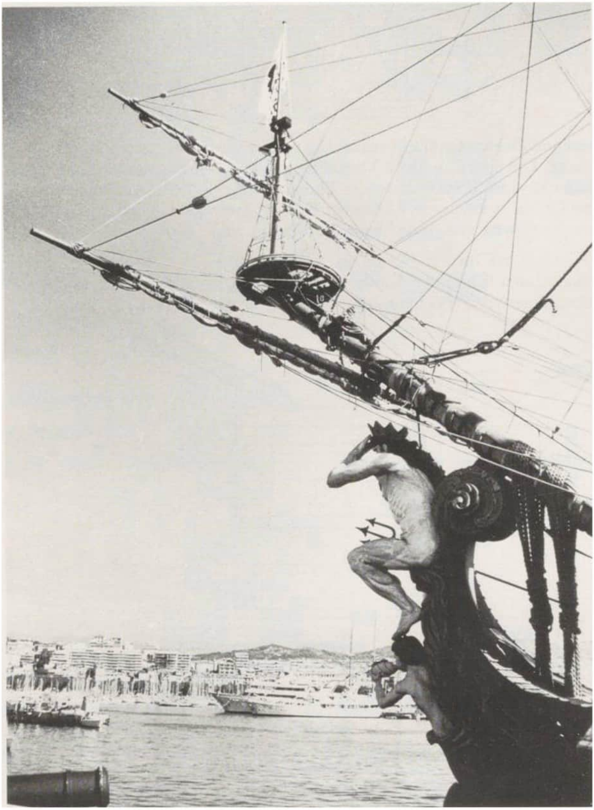
48. Die Diagonale e einer Raute ist um 5 kürzer als die andere Diagonale f. Vergrößert man e um 12 und verkleinert man f um 8, so ändert sich der Flächeninhalt nicht.
Berechne e, f und den Flächeninhalt A.

49. In einem Trapez mit den Grundseiten a und c ist a dreimal so lang wie c. Die Höhe h ist halb so lang wie c. Außerdem ist das Trapez flächengleich einem Rechteck mit den Seitenlängen 4,5 und 72.
Berechne a, c und h.

50. In einem Trapez ist eine Grundseite 3,5mal, die andere 2,5mal so lang wie die Höhe. Verkürzt man beide Grundseiten um 2 und verlängert man die Höhe um 2, so nimmt der Flächeninhalt um 18 zu.
Berechne die Längen von Grundseiten und Höhe.

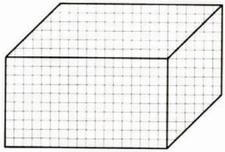
6. Kapitel

Geraden und Ebenen im Raum



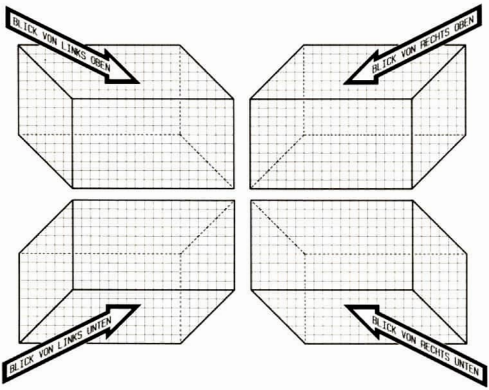
Bisher haben wir Planimetrie getrieben, das heißt, wir haben uns mit Figuren in der Ebene beschäftigt. Jetzt gehen wir hinaus in den Raum und untersuchen dort Figuren und Körper, das heißt, wir treiben **Raumgeometrie** (Stereometrie).

QUADER IM SCHRÄGBILD



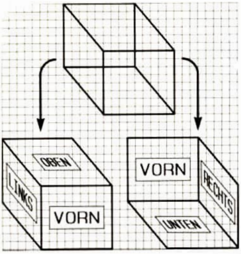
Grundlegende Zusammenhänge entdecken wir schon an einem so einfachen Körper wie dem Quader. Um eine räumliche Vorstellung zu bekommen, veranschaulichen wir auch den Quader in einer Planfigur. In der Ebene (Tafel, Heft) ist es zwar möglich, Figuren in wahrer Größe zu zeichnen, nicht aber Körper. Deswegen behelfen wir uns mit einem einfachen Verfahren, das brauchbare Planfiguren von Quadern liefert:

Wir zeichnen die vordere Fläche als Rechteck und
die nach hinten führenden Kanten parallel und gleich lang.
Zweckmäßigerweise legt man alle Ecken auf Gitterpunkte.



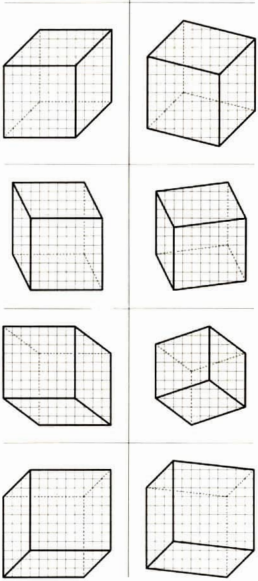
Eine solche Planfigur heißt **Schrägbild** des Quaders. Sie wirkt noch räumlicher, wenn man die unsichtbaren (verdeckten) Kanten strichelt oder dünner zeichnet.
Zeichnet man alle zwölf Kanten gleich dick und als durchgehende Linien, dann lässt das Bild zwei räumliche Deutungen zu.
Beim Schrägbild eines Würfels ist die Vorderfläche ein Quadrat. Zu lange nach hinten führende Kanten geben ein schiefes Bild vom Würfel. In Wirklichkeit sieht man Quader und Würfel nicht so wie im Schrägbild. Im **Normalbild** dagegen wirken Körper viel

natürlicher. Normalbilder sind aber etwas schwieriger zu zeichnen als Schrägbilder – wie man sie zeichnet, erfahren wir später.

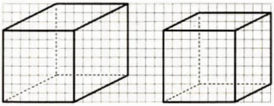


VERSCHIEDENE WÜRFEL

IM SCHRÄGBILD | IM NORMALBILD

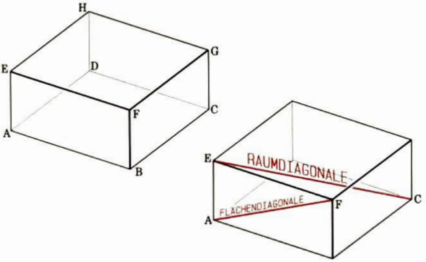


WÜRFEL IM SCHRÄGBILD



NICHT SO SONDERN SO !

übliche Bezeichnungen beim Quader

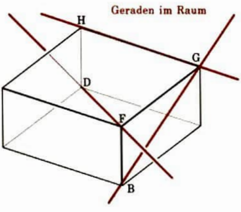


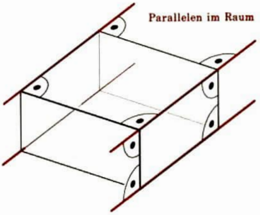
Die einfachsten Punktemengen im Raum sind Geraden und Ebenen. Ihre grundlegenden Eigenschaften überlegen wir uns am Quader.

Übliche Bezeichnungen: Die Seiten der Quaderflächen heißen **Kanten,** zum Beispiel [AB], [HD], ...
Die Diagonalen der Quaderflächen heißen **Flächendiagonalen,** zum Beispiel [AF], [ED], ...
Die Verbindungsstrecken zweier Ecken, die durchs Innere des Quaders gehen, heißen **Raumdiagonalen,** zum Beispiel [EC], [DF], ...

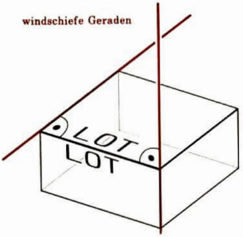
Gerade–Gerade

Auch im Raum ist eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt. So ist zum Beispiel GH die Verlängerung einer Kante, BG die Verlängerung einer Flächendiagonale und DF die Verlängerung einer Raumdiagonale.
Wie in der Ebene können sich auch im Raum zwei Geraden schneiden: GH und BG schneiden sich in G.





Die Parallelität im Raum ist komplizierter als in der Ebene. In der Ebene sind zwei Geraden schon parallel, wenn sie **ein** gemeinsames Lot haben. Zwei Geraden im Raum nennen wir parallel, wenn sie mindestens **zwei** gemeinsame Lote haben.



Im Gegensatz zur Ebene gibt es im Raum auch noch Geraden, die sich weder schneiden noch parallel sind. Solche Geraden heißen **windschief.** Das Bild zeigt zwei windschiefe Geraden und ihr gemeinsames Lot. Am Bild wird uns auch klar, warum wir im Raum mindestens zwei gemeinsame Lote brauchen, um zwei Geraden als Parallelen festzulegen.

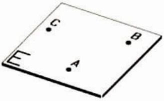
Wenn man eine Glasscheibe in drei Punkten unterstützt, dann wackelt sie nicht, sondern liegt fest auf. Fassen wir eine Glasscheibe als Ebene auf, so erkennen wir:

Eine Ebene im Raum ist durch drei Punkte festgelegt, die nicht auf einer Gerade liegen.

Wenn aber die drei Punkte auf einer Gerade liegen, dann kann sich die Ebene um diese Gerade drehen – genauso wie eine Tür, die an drei Nägeln hängt. Eine solche Ebene liegt nicht eindeutig fest.

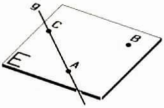
Statt durch drei Punkte kann man eine Ebene auch anders festlegen:
- durch eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt,
- durch zwei Geraden, die sich schneiden,
- durch zwei Parallelen.

BESTIMMUNGSSTÜCKE EINER EBENE



3 PUNKTE

E(A,B,C)



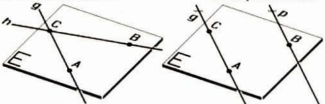
PUNKT UND GERADE

E(B,AC) = E(B,g)

2 GERADEN

a) die sich schneiden

b) die parallel sind



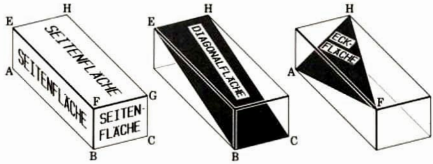
E(AC, BC) = E(g,h)

E(AC,p) = E(g,p)

In jedem dieser drei Fälle erkennen wir wieder drei Punkte, die die Ebene bestimmen.

Die Bestimmungsstücke einer Ebene finden sich auch in der symbolischen Schreibweise, zum Beispiel E(A, B, C) oder E(B, g) oder E(g, h). Wenn klar ist, welche Ebene gemeint ist, dann genügt ein lateinischer Großbuchstabe, zum Beispiel Ebene E oder Ebene F oder ... Wir zeigen das an einigen besonderen Flächen.

FLÄCHEN BEIM QUADER



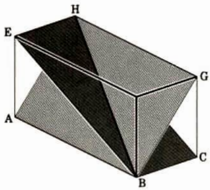
Der Quader hat:

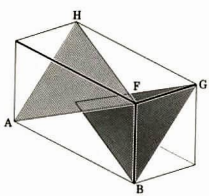
- 6 Seitenflächen (jede enthält 4 Kanten) zum Beispiel
  E(B, C, F) = E(B, C, G) = E(BC, G) = E(BC, CG) = E(BC, GF)
- 6 Diagonalflächen (jede enthält 2 Raumdiagonalen) zum Beispiel
  E(B, C, H) = E(BC, EH) = E(BE, CH) = E(BH, CE)
- 8 Eckflächen (jede enthält 3 Flächendiagonalen)
  zum Beispiel E(B, G, E)

Alle Seitenflächen bilden zusammen die Oberfläche des Quaders. Die Seitenfläche, auf der der Quader steht, heißt auch Grundfläche – ihr gegenüber liegt die Deckfläche.

Ebene–Ebene

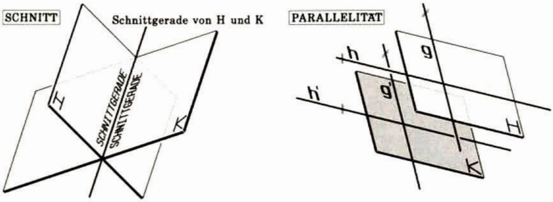
Zwei Ebenen schneiden sich entweder in einer Gerade, oder sie sind parallel. So schneiden sich beim Quader die Diagonalflächen E(A, B, G) und E(E, B, C) in der Raumdiagonale HB, symbolisch: E(A, B, G) $\cap$ E(E, B, G) = HB.





Die Parallelität zweier Ebenen H und K erkennt man zum Beispiel daran, dass es zu einer Geradenkreuzung (g, h) in H eine Geradenkreuzung (g′, h′) in K gibt, sodass g′ parallel zu g und h′ parallel zu h ist. Die Eckflächen E(A, F, H) und E(B, G, D) sind parallel, weil BG parallel AH und BD parallel FH ist.

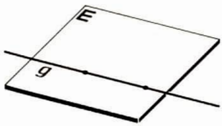
LAGE VON EBENEN



Gerade–Ebene

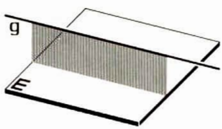
Zwischen Gerade und Ebene gibt es drei Lagebeziehungen:

- Die Gerade liegt in der Ebene ($g \subset E$).
  Eine Gerade liegt schon dann ganz in einer Ebene, wenn sie wenigstens zwei Punkte mit ihr gemeinsam hat.
- Die Gerade ist parallel zur Ebene ($g \parallel E$).
  Eine Gerade g heißt parallel zu einer Ebene E, wenn es in E eine Gerade f gibt, die parallel ist zu g. Eine Gerade, die in einer Ebene liegt, ist damit auch parallel zu dieser Ebene.
- Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt ($g \cap E = \{S\}$).



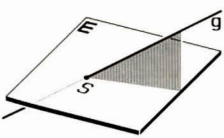
MEHR ALS EIN GEMEINSAMER PUNKT

Drinliegen: $g \subset E$ und Parallelität: $g \parallel E$



KEIN GEMEINSAMER PUNKT

Parallelität: $g \parallel E$



GENAU EIN GEMEINSAMER PUNKT

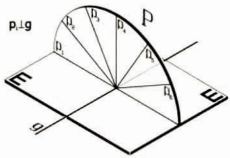
Schnitt: $g \cap E = \{S\}$

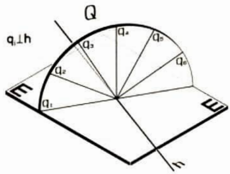
LAGE VON GERADE UND EBENE

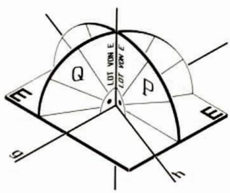
Beim Schnitt von Gerade und Ebene gibt es einen wichtigen Sonderfall:
Die Gerade steht senkrecht auf der Ebene, das heißt, sie ist ein Lot der Ebene.
Wann ist eine Gerade Lot einer Ebene?

Definition

> Eine Gerade l, die die Ebene E in einem Punkt schneidet, heißt **Lot** der Ebene, wenn es in E zwei verschiedene Geraden g und h gibt, die l senkrecht schneidet.
> Der Schnittpunkt heißt **Lotfußpunkt.**





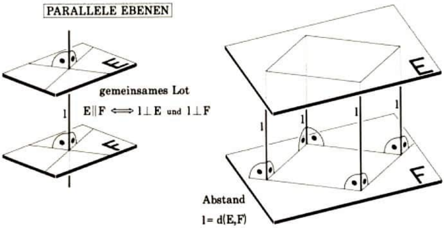


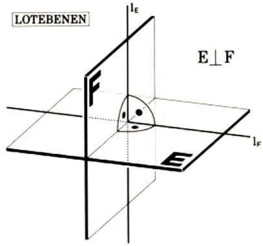
Ist l ein Lot der Ebene E, dann schreiben wir: $l \perp E$.

Die Gerade g allein reicht zur Definition des Lots noch nicht, wie wir im Bild sehen. Denn zur Gerade g gibt es unendlich viele Lote p_i, die selber wieder eine Ebene P bilden. Die Lote q_i der zweiten Gerade h bilden auch wieder eine Ebene Q. Die Schnittgerade der beiden Ebenen P und Q ist Lot l der Ebene E.

Man kann zeigen: Ein solches Lot steht sogar auf allen Geraden senkrecht, die in der Ebene liegen und durch den Lotfußpunkt gehen.
Jede Parallele zu einem Lot ist auch wieder ein Lot.

Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn sie ein gemeinsames Lot haben. Die Lotstrecken sind alle gleich lang, ihre Länge heißt **Abstand** der beiden Ebenen.
Enthält eine Ebene F ein Lot l_E einer anderen Ebene E, dann heißt F **Lotebene** von E. E ist dann auch Lotebene von F, weil sie das Lot l_F enthält.

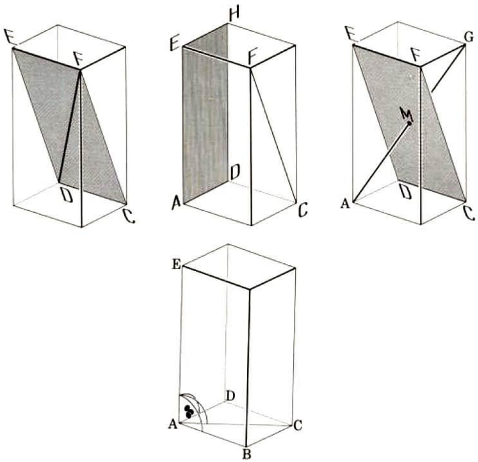




Beispiele für die möglichen Lagen von Gerade und Ebene finden wir wieder am Quader:

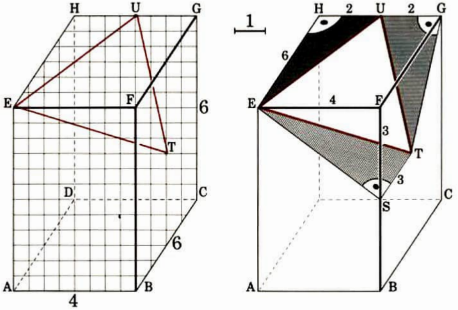
- die Raumdiagonale [DF] liegt in der Diagonalfläche E(F, E, D),
- die Flächendiagonale [CF] ist parallel zur Seitenfläche E(A, D, H),
- die Raumdiagonale [AG] schneidet die Diagonalfläche E(F, E, D) im Mittelpunkt M des Quaders.

Die Kante [AE] ist ein Lot der Seitenfläche E(A, B, C), weil sie auf AB und AD senkrecht steht. Sie steht deshalb auch senkrecht auf der Flächendiagonale [AC].

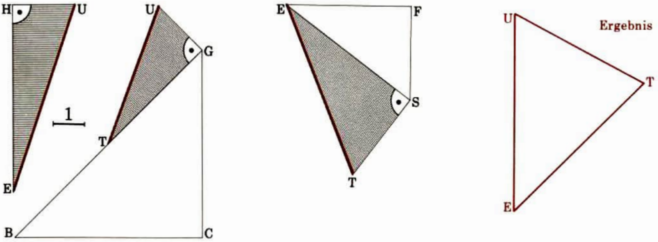


Wir verwenden diese Lagebeziehungen, um Strecken oder Winkel in einem Körper in wahrer Größe zu konstruieren – dazu jetzt ein Beispiel:
Im Quader ABCDEFGH ist $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$ und $\overline{CG} = 6$.
T ist Mittelpunkt der Seitenfläche BCGF und U ist der Mittelpunkt der Kante [HG]. Konstruiere das Dreieck TUE in wahrer Größe.

PLANFIGUREN

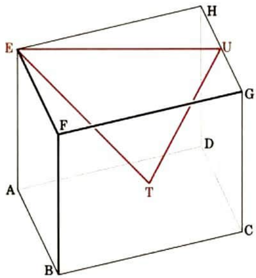


Zur Konstruktion eines Dreiecks braucht man drei Bestimmungsstücke. Wir beschaffen sie uns durch Überlegen oder durch Hilfskonstruktionen.
In einer Planfigur tragen wir die gegebenen Punkte und Längen ein.



Lösungsidee: [EU] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck HEU.
[UT] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck GUT, in dem die Kathete [GT] die halbe Diagonale des Rechtecks BCFG ist.
[ET] beschaffen wir uns übers rechtwinklige Dreieck EST.
(ST ist parallel zum Lot FG der Ebene E(A, B, E)!)
Die Kathete [ES] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck FES.
Mit diesen drei Seiten konstruiert man das Dreieck TUE.

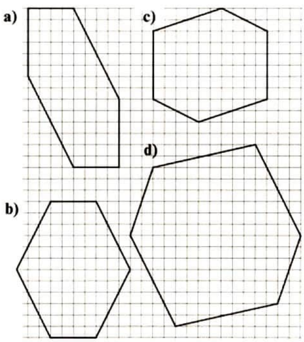
Ergebnis in wahrer Größe mit Umgebung



Auch im Quader sehen wir das Dreieck TUE in wahrer Größe, wenn wir den Quader so drehen, dass unser Blick senkrecht aufs Dreieck TUE fällt, das heißt, dass der Sehstrahl ein Lot der Ebene ist, in der das Dreieck TUE liegt.

Aufgaben

1. UMRISSE
   Der Umriss eines Quaders ist im Allgemeinen ein Sechseck.
   Ergänze die Umrisse mit sichtbaren (durchgezogenen) und unsichtbaren (gestrichelten) Linien zu einem Quaderbild.
   Zeichne für jeden Umriss die beiden möglichen Ansichten.



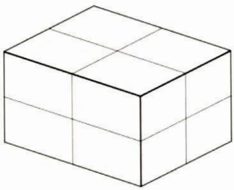
2. Der Umriss eines Quaders ist im Allgemeinen ein Sechseck.
a) Welche Besonderheit(en) hat das Umriss-Sechseck eines Quaders?
b) Welchen besonderen Umriss hat ein Würfel, wenn sich beim Betrachten zwei Gegenecken decken?
c) Welche geometrischen Figuren können Umrisse von Quadern sein?

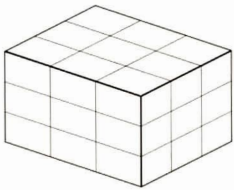
3. Wie viele Seitenflächen eines undurchsichtigen Quaders kann man je nach Blickrichtung sehen?

4. Wie viele Kanten eines undurchsichtigen Quaders kann man je nach Blickrichtung sehen?

5. Wie viele Ecken eines undurchsichtigen Quaders kann man je nach Blickrichtung sehen?

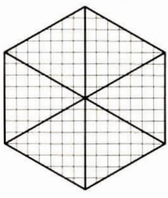
•6. QUADERSCHNITTE
Das Bild zeigt zerschnittene Quader.
a) Wie viel Schnitte sind es jeweils?
b) Wie viel kongruente Teilquader entstehen?



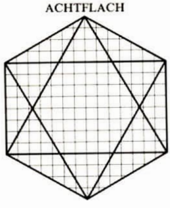


• 7. ANSICHTSACHE(N)
Zeichne eine Figur ab (dünner Strich!). Hebe dann die sichtbaren Kanten hervor (dicker Strich, Farbe!), sodass eine Ansicht des Körpers entsteht. Es gibt jeweils zwei Ansichten, je nachdem wie man die Figur räumlich deutet.
Anleitung: Fang an mit dem Umriss, denn der ist immer sichtbar. Geh von einer Umrissecke auf einer Kante nach innen: Die Kante ist sichtbar und ebenso alle weiteren Kanten, die von einer sichtbaren Ecke ausgehen.
Schneiden sich zwei sichtbare Kanten konkaver Körper (nur in der Zeichenebene!), dann verdeckt bei dieser Schnittstelle eine Kante die andere, eine Kante wird dort also unsichtbar.

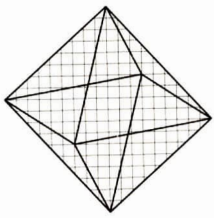
SECHSFLACH



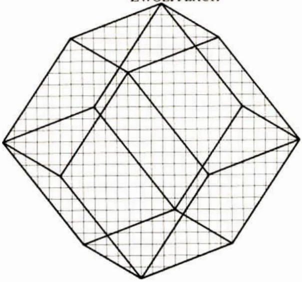
ACHTFLACH



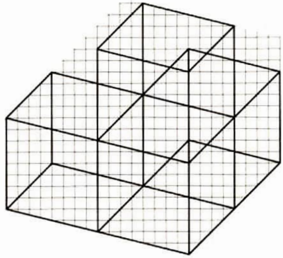
OKTAEDER



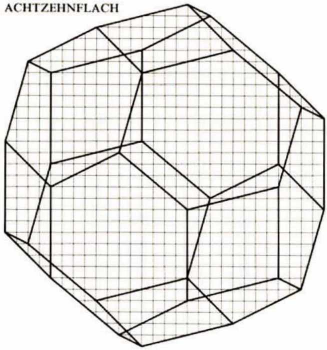
ZWÖLFFLACH



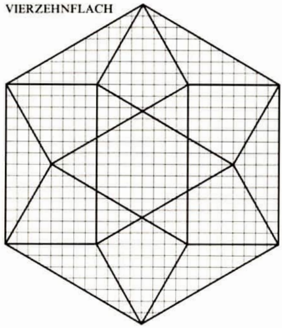
a) DREIBEIN



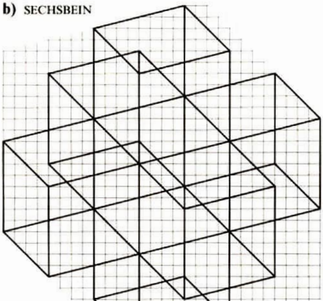
ACHTZEHNFLACH



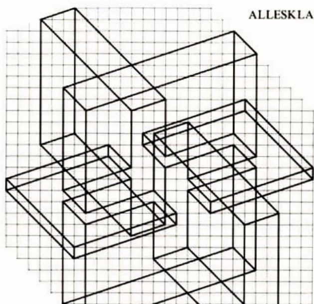
VIERZEHNFLACH



b) SECHSBEIN

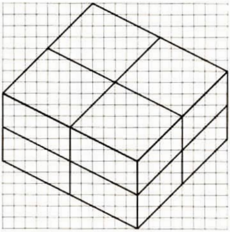


ALLESKLAR



8. UMBAU

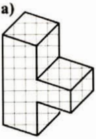
Lege einen der vier oberen Quader so auf einen andern, dass Kante auf Kante liegt, und zeichne das Bild nur mit sichtbaren Kanten.



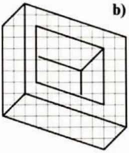
9. EULER

Zeichne ab und die verdeckten Kanten ein.
Jeder Körper hat F Flächen, K Kanten und E Ecken.
Berechne für jeden Körper E + F − K und staune!

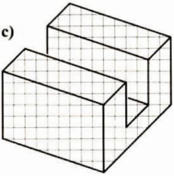
a)



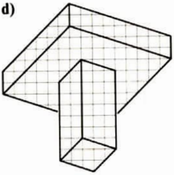
b)



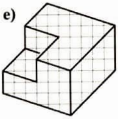
c)



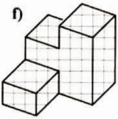
d)



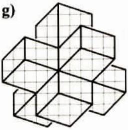
e)



f)



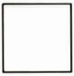
g)



:10. WÜRFELANSICHTEN

Beschreibe, wie du das Drahtmodell eines Würfels anschauen musst, um es zu sehen wie im Bild links.
Zeichne die Figuren ab und strichle die Kanten, die bei einem Holzwürfel verdeckt wären.

a)



b)

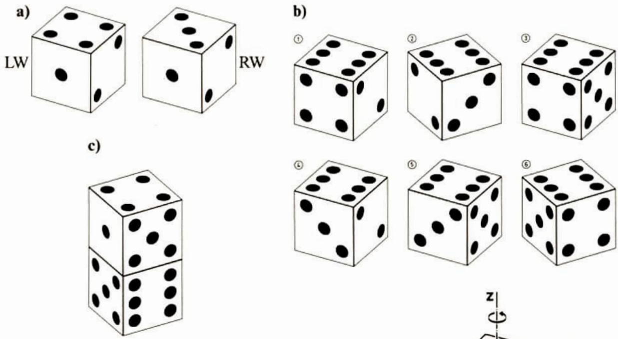
•c)

d)

11. LINKS-RECHTS-WÜRFEL

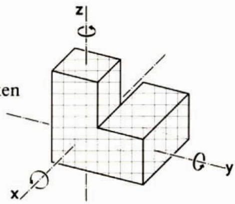
Die üblichen Würfel sind nach der Siebener-Regel beschriftet: Die Summe der Augen auf gegenüberliegenden Seiten ist 7.
Von diesen Würfeln gibt es zwei Sorten:
den Rechts-Würfel (RW) und den Links-Würfel (LW).

a) Welche Augenzahlen haben die beiden Würfel unten, links hinten und rechts hinten?
b) Welche Würfel sind Rechts-Würfel?
c) Ein Würfel steht auf einem andern.
Wie groß ist die Summe der Augen in den aufeinander liegenden Flächen,
(1) wenn es zwei Rechts-Würfel sind?
(2) wenn der untere ein Links-Würfel ist?



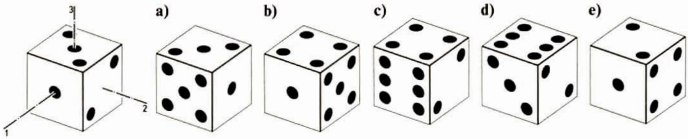
12. DREHAXN

Zeichne den Körper ab und drehe ihn in Gedanken
a) um die x-Achse **b)** um die y-Achse
c) um die z-Achse
mit den Winkeln 90°, −90° und 180°.
Zeichne die Bilder des gedrehten Körpers.



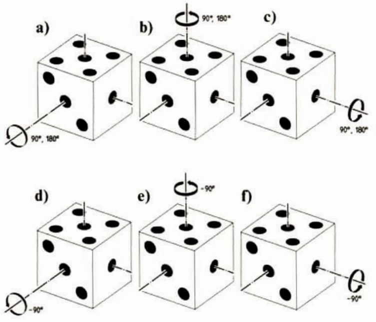
13. ACHSE?

Bei einer Vierteldrehung (90°) oder Halbdrehung (180°) geht ein Würfel in sich über, wenn die Drehachse durch die Mitten von Gegenflächen geht. Wir bezeichnen die Drehachse mit der Augenzahl einer durchstoßenen Fläche.

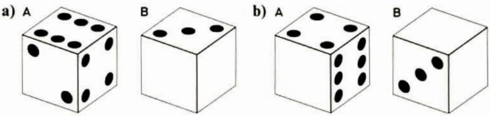


Um welche Achse muss man den Würfel drehen, damit sich die Stellungen **a), b)** und **c)** ergeben?

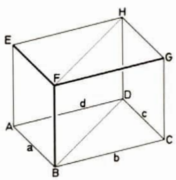
14. AUGEN?
Zeichne den Würfel, nachdem er sich gedreht hat.



15. AUGEN-ACHSEN-WINKEL?
Nach einer Drehung sieht der Rechtswürfel A so aus wie B.
Bestimme die fehlende Augenzahl und gib Drehachse und Drehwinkel an.



16. LAGEN
a) Welche der eingezeichneten Geraden sind parallel zu BC bzw. windschief zu BC?
b) Welche der eingezeichneten Geraden sind parallel zu BD bzw. windschief zu BD?



17. Verwende die Bezeichnungen der Aufgabe LAGEN.
a) Bezeichne die Ebene, die durch A, B und C geht, auf 10 verschiedene Arten.
b) Wie viele Verbindungsgeraden gibt es zwischen C, F, E und B?
c) Wie viel verschiedene Ebenen gibt es, die jeweils drei der Punkte A, B, C und H enthalten?
d) Welche Ebenen sind senkrecht zur Grundfläche, welche dazu parallel?

18. Zeichne ins Schrägbild eines Quaders ABCDEFGH die Mittelpunkte L und M von Grund- und Deckfläche sowie den Mittelpunkt N von [HG] ein.

a) Begründe: BD ∥ MF, AE ∥ ML, BC ∥ MN.

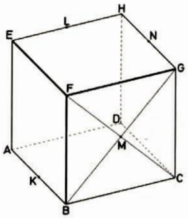
b) Gib drei Punkte an, die keine Ebene festlegen. (Mehrere Möglichkeiten!)

c) Begründe: E(A, B, F) ∥ E(H, D, C), E(M, L, N) ∥ E(B, C, F).

d) Entscheide, ob die Ebenen parallel sind, oder gib die Schnittgerade an: E(A, C, G) und E(D, H, F), E(A, M, N) und E(E, H, D), E(F, L, H) und E(N, G, C), E(G, F, L) und E(A, M, D).

19. MITTELPUNKTE

Gegeben ist der Würfel ABCDEFGH. K, L und N sind Kanten-Mittelpunkte, M ist Mittelpunkt des Vierecks BCGF.



a) Begründe: GC ist Lot von E(L, N, F).

b) Begründe: Alle Raumdiagonalen schneiden sich in einem Punkt: der Würfelmitte I.

c) Gib zwei Lote der Ebene E(B, F, D) an.

d) Entscheide, ob die Gerade parallel zur Ebene ist, oder gib den Schnittpunkt an:
E(A, B, H) und GC, E(D, C, F) und BG, E(A, B, F) und LM, E(A, B, M) und DH, E(B, F, N) und KD, E(B, C, M) und FG, E(A, B, G) und FD, E(D, C, F) und KN.

e) Begründe: GM liegt in E(B, C, F).

f) In welcher Gerade schneiden sich E(A, B, G) und E(A, D, H), E(B, C, H) und E(A, F, G)?

20. Skizziere drei verschiedene Ebenen, die keine, eine, zwei oder drei Schnittgeraden haben.

21. Je drei Eckpunkte eines Quaders ABCDEFGH legen eine Ebene fest.
Wie viel (verschiedene) Ebenen gibt es?

22. **a)** Die Geraden g und h sind windschief, l ist ihr gemeinsames Lot und L der Mittelpunkt der Lotstrecke. Für die Ebene E gilt: $L \in E$ und $l \perp E$.
Wie liegen g und h zur Ebene?

b) Die Geraden AB und CD sind parallel, der Punkt G liegt nicht in E(A, B, D).
Bestimme die Schnittmenge von E(A, B, D) und E(D, C, G).

c) Die Geraden g, h und k schneiden sich in S, liegen aber nicht in einer Ebene. A ist ein von S verschiedener Punkt auf h.
Bestimme die Schnittmenge von E(g, A) und E(h, k).

23. Der Würfel ABCDEFGH hat die Kantenlänge a = 6. K und L sind Kanten-Mittelpunkte, M ist Mittelpunkt des Vierecks BCGF, siehe Aufgabe Mittelpunkte.
Konstruiere in wahrer Größe:

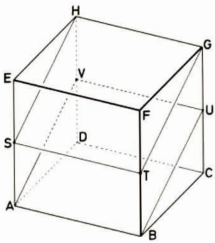
a) Viereck BFGH **b)** Dreieck EFC **c)** Dreieck ACM
d) Dreieck KLM **e)** Winkel BMD **f)** Viereck ACNL.

24. Im Quader ABCDEFGH ist $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 4$ und $\overline{BF} = 8$. L liegt so auf [AD], dass $\overline{AL} = 1$, und K liegt so auf [CG], dass $\overline{CK} = 6$. M ist Mittelpunkt der Deckfläche EFGH, P ist Mittelpunkt von [AE], Q ist Mittelpunkt von [CG].
Konstruiere in wahrer Größe:

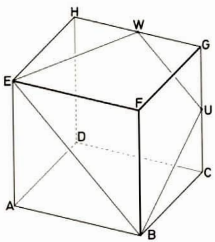
a) Dreieck BCG **b)** Dreieck BFD **c)** Dreieck FKM
d) Dreieck LKM **e)** Dreieck DKM **f)** Dreieck HLK
g) Viereck ECKM **h)** Viereck DBFM **i)** Viereck PCQE.

:25. WAHRE GRÖSSE im Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 6.

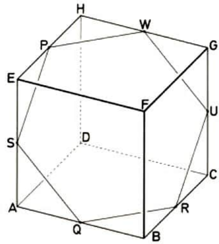
a) S, T, U und V sind Kantenmitten.
Zeige: E(A, B, U) ∥ E(G, H, S).
Konstruiere den Abstand von E(A, B, U) und E(G, H, S) und das Viereck ABUV in wahrer Größe.



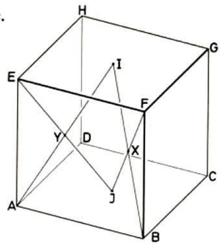
b) U und W sind Kantenmitten. Zeige: BUWE ist ein Trapez.
Konstruiere BUWE in wahrer Größe.



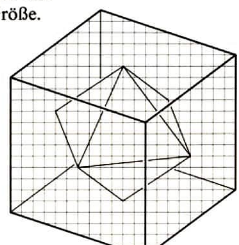
c) P, Q, R, S, U und W sind Kantenmitten.
Zeige: PSQRUW ist ein regelmäßiges Sechseck.
Konstruiere PSQRUW in wahrer Größe.
Wie viel solcher regelmäßigen Sechsecke gibt's im Würfel?



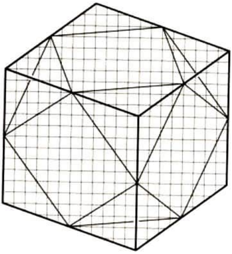
d) I und J sind die Mitten von Deck- und Grundfläche.
Zeige: Es schneiden sich AI und EJ sowie BI und FJ (Schnittpunkte Y und X).
Konstruiere das Viereck ABXY in wahrer Größe.

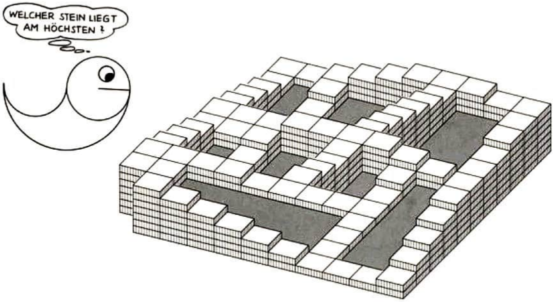


e) Verbindet man die Mitten angrenzender Quadrate, so ergibt sich ein regelmäßiges Achtflach.
Zeichne die Figur ab und die verdeckten Kanten ein.
Konstruiere eine der acht Flächen in wahrer Größe.



f) Verbindet man die Mitten angrenzender Kanten, so ergibt sich ein regelmäßiger Würfelstumpf.
Zeichne die Figur ab und die verdeckten Kanten ein.
Von welcher Art sind die Vielecke, die seine Oberfläche ausmachen?
Konstruiere den Abstand gegenüberliegender Dreiecke (vom Stumpf) in wahrer Größe.





7. Kapitel

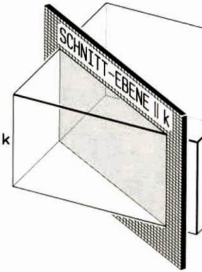
Das gerade Prisma

7.1 Definition und Eigenschaften

Schneidet man von einem Quader ein Stück so ab, dass die Schnittebene parallel ist zu einer Kante k, so entstehen zwei neue Körper, sie heißen **gerade Prismen.** Sie haben folgende Eigenschaften:

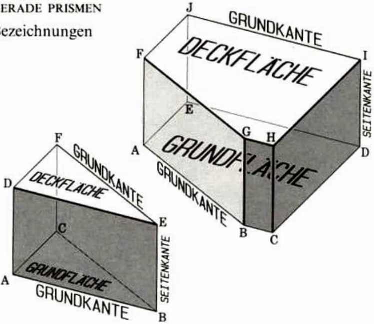
ERZEUGUNG VON PRISMEN

Am Quader



GERADE PRISMEN

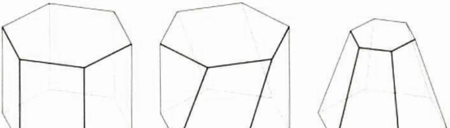
Bezeichnungen



- Grund- und Deckfläche sind kongruente Vielecke in parallelen Ebenen. Entsprechende Kanten sind parallel. Solche Vielecke nennt man auch **parallel-kongruent.**
- Die Seitenkanten stehen senkrecht auf Grund- und Deckfläche, sie sind deshalb parallel und gleich lang.
- Die Seitenflächen sind Rechtecke.

GRUND- UND DECKFLÄCHE

sind	parallel-kongruent	nur kongruent	nur parallel



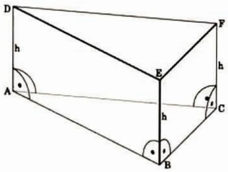
PRISMA! | kein Prisma! | kein Prisma!

Definition

Ein **gerades n-seitiges Prisma** ist ein Körper, der begrenzt ist von n Rechtecken (Seitenflächen) und von zwei parallel-kongruenten n-Ecken (Grund- und Deckfläche) in verschiedenen Ebenen.

Alle Seitenflächen bilden zusammen den **Mantel M** des Prismas.
Mantel, Grund- und Deckfläche bilden zusammen die **Oberfläche S** des Prismas.
Der Abstand von Grund- und Deckfläche heißt **Höhe h** des Prismas; h ist auch die Länge einer Seitenkante.

EIGENSCHAFTEN DES GERADEN PRISMAS

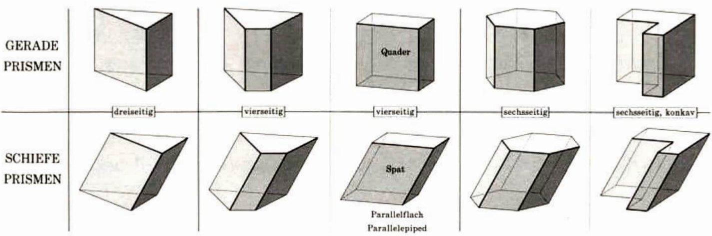


entsprechende Kanten sind parallel und gleich lang:
$[AB] \parallel [DE]$ und $\overline{AB} = \overline{DE}$
$[BC] \parallel [EF]$ und $\overline{BC} = \overline{EF}$
$[AC] \parallel [DF]$ und $\overline{AC} = \overline{DF}$

Seitenkanten sind parallel und gleich lang:
$[AD] \parallel [BE] \parallel [CF]$ und $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = h$

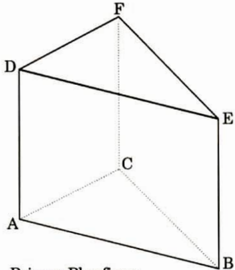
Ein Quader ist demnach ein vierseitiges gerades Prisma. In unserm Beispiel haben wir ihn in ein dreiseitiges und ein fünfseitiges gerades Prisma zerschnitten. 45 vierseitige Prismen (aber keine Quader!) in einer wenig üblichen Anordnung sehen wir auf dem zweiten Umschlagbild dieses Buchs.
Von einem allgemeinen Prisma verlangt man nur, dass Grund- und Deckfläche parallelkongruent sind. Die Seitenkanten müssen nicht senkrecht auf Grund- und Deckfläche stehen, wohl aber immer noch parallel und gleich lang sein. Die Seitenflächen sind dann meistens Parallelogramme und keine Rechtecke mehr. Jedes nicht gerade Prisma heißt **schiefes** Prisma. Ein schiefes vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche nennt man **Spat** (Das) oder **Parallelflach** (das) oder **Parallelepiped** (das).

Es gibt konvexe und konkave Vielecke – auch als Grundflächen in Prismen. Dementsprechend unterscheiden wir zwischen konvexen und konkaven Prismen.
Im Folgenden behandeln wir noch gerade konvexe Prismen; der Kürze halber nennen wir sie einfach Prismen.



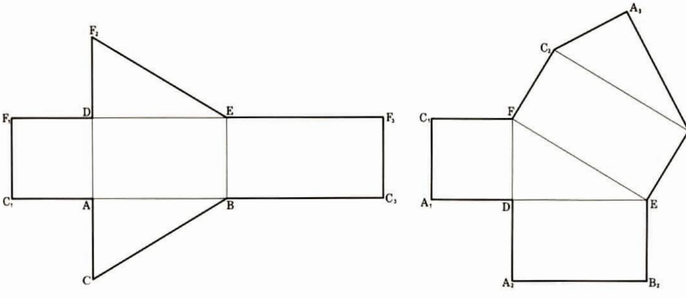
Eine Planfigur eines n-seitigen Prismas fertigt man so an:

- Zeichne ein n-Eck als Deckfläche.
- Zeichne von jedem Eckpunkt aus parallel gleich lange Strecken nach unten.
- Verbinde die unteren Strecken-Endpunkte so, dass die Grundfläche entsteht. (Auf Sichtbarkeit achten: verdeckte Kanten stricheln!)



Prisma-Planfigur

Schneidet man ein Prisma längs geeigneter Kanten so auf, dass sich die Oberfläche in der Ebene ausbreiten lässt, so entsteht ein **Netz** des Prismas. Das Bild zeigt zwei mögliche Netze des Prismas, das wir am Anfang von einem Quader abgeschnitten haben. Die Deckfläche ist deshalb ein bei D rechtwinkliges Dreieck.



Aufgaben

In den Aufgaben sind alle Prismen gerade und konvex.

1. Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat
a) ein dreiseitiges Prisma
b) ein fünfseitiges Prisma
c) ein n-seitiges Prisma?
Überprüfe die Beziehung, die Euler gefunden hat:
$e + f = k + 2$,
e ist die Anzahl der Ecken, f die der Flächen und k die Anzahl der Kanten.

2. Geobold behauptet, er habe ein Prisma mit
a) 53 Kanten
b) 53 Ecken
c) 53 Flächen gesehen.
In welchen Fällen hat er geschwindelt? Begründung!

3. Was für ein Prisma hat
a) 10 Flächen **b)** 6 rechteckige Flächen
c) 24 Ecken **d)** 24 Kanten?

4. Im dreiseitigen Prisma ABCDEF ist gegeben: $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 5$, $BE = 4$, $\sphericalangle ACB = 120°$, Q liegt so auf [FC], dass $\overline{CQ} = 0{,}75 \cdot \overline{CF}$.
Konstruiere $\sphericalangle DQB$ und gib seine Größe auf Grad genau an.

5. Im dreiseitigen Prisma ABCDEF ist $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 5$, $CA = 8$ und $AD = 7$. Q ist die Mitte von [AD].
Bestimme durch Konstruktion die Größe der Winkel $\sphericalangle BDC$, $\sphericalangle BQC$ und $\sphericalangle BAC$.

6. Zeige: Für den Inhalt S der Oberfläche eines geraden Prismas gilt $S = 2G + uh$. G ist der Inhalt der Grundfläche, u ist der Umfang der Grundfläche und h ist die Höhe des Prismas.

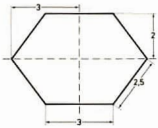
7. Ein sechskantiger Bleistift ist 16 cm lang, die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks ist 4 mm. Wie groß ist die Mantelfläche?

8. Ein Stück Käse hat die Form eines Prismas. Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 3 cm und 4 cm, die Hypotenuse ist 5 cm lang.
Wie viel cm^2 Einwickelpapier braucht man mindestens für den Käse, wenn er 2,5 cm hoch ist?

9. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 4$ und $\overline{AC} = 3$.
a) Konstruiere das Netz des Prismas, wenn die Höhe $h = 7$ ist.
b) Berechne die Seitenlänge $\overline{BC}$ aus dem Oberflächeninhalt $S = 96$ des Prismas.

10. Die Grundfläche eines geraden Prismas mit $S = 72$ ist die Raute ABCD mit $\overline{AB} = 2{,}5$ und $\overline{AC} = 4$.
a) Berechne die Höhe h des Prismas, wenn $\overline{BD} = 3$ ist.
b) Konstruiere das Netz des Prismas.

11. SÄULE
Der Querschnitt der Säule ist symmetrisch.
a) Zeichne das Netz, wenn die Säule die Höhe 10 hat.
b) Berechne den Inhalt S der Oberfläche.

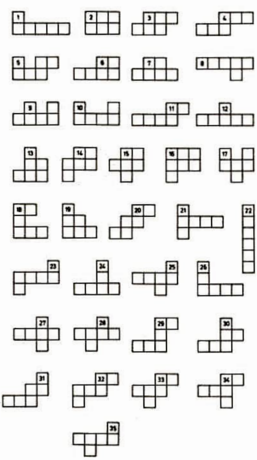


⁝12. Im Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 8 sind U, V, W und X der Reihe nach die Mitten von [AD], [BC], [FG] und [EH].
Zeichne ein Schrägbild des Spats ABVUXWGH.
Konstruiere sein Netz und berechne den Inhalt seiner Oberfläche S. (Verwende näherungsweise: $\overline{AX} = 8{,}9$).

⁝13. Im Spat von Aufgabe **12.** sind P, Q, R und S der Reihe nach die Mitten von [WX], [HG], [UV] und [AB].
Zeichne ein Schrägbild des Spats ASRUPWGQ und sein Netz.

Netze für Fortgeschrittene

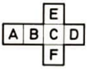
•14. REKLAMATIONEN
Geobold verkauft Würfelnetze. Bei welchen bekommt er Reklamationen?



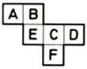
15. Zeichne alle nicht kongruenten Würfelnetze.

16. Auf die Quadrate eines Würfelnetzes sind Buchstaben gedruckt. Falte in Gedanken das Netz so zum Würfel, dass die Buchstaben sichtbar bleiben, und lege den Würfel so hin, dass B oben und C links liegt.
Welcher Buchstabe ist dann rechts, welcher ist vorn?
Zeichne den Buchstaben der Vorderseite so, wie man ihn sieht.

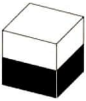
a)



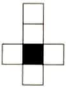
b)



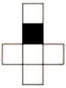
17. TAUCHWÜRFEL
Ein Würfel war zur Hälfte in Tusche eingetaucht. In den Netzen siehst du jeweils ein schwarzes Quadrat, es war ganz eingetaucht.
Zeichne die Netze ab und die restlichen gefärbten Flächenteile ein.



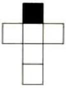
a)



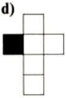
b)



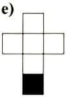
c)



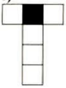
d)



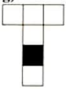
e)



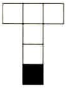
f)



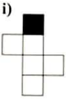
g)



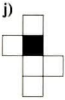
h)



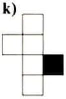
i)



j)

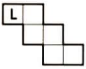


k)

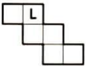


18. Wir bezeichnen die sechs Seitenflächen eines Würfels nach ihrer Lage:
O(ben), U(nten), R(echts), L(inks), V(orn) und H(inten).
Ergänze die Beschriftung. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils?

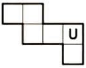
a)



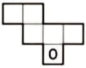
b)

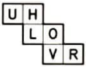


c)



d)





19. UMLAUF

Zeichne die gestrichelte Linie in ein Würfelnetz.
(Bezeichnungen wie in Aufgabe **18.**)

a)

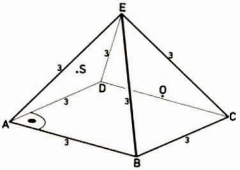
b)

20. In einer quaderförmigen Schachtel ABCDEFGH mit $\overline{AB} = \overline{AE} = 2$ und $\overline{BC} = 4$ sitzt eine Spinne in S und ihr Opfer in O.
Auf welchem Weg muss sich die Spinne anschleichen, um ihr Opfer zu erreichen?
Zeichne verschiedene Netze und suche den kürzesten Weg.
Wie lang ist er (auf Zehntel gerundet)?

a) S ist die Mitte von [AB], O ist die Mitte von [GH].
b) S ist die Mitte von [AB], O = H.
c) S liegt im Viereck ABFE 0,5 von [AB] und 1 von [AE] entfernt, O ist die Mitte im Viereck EFGH.

21. TURMSPITZE

Im pyramidenförmigen Dach eines Kirchturms sitzt eine Spinne in der Mitte S des Dreiecks ADE und ihr Opfer in der Mitte O des Dreiecks BCE.
Wie lang ist der kürzeste Weg von S zu O?
Zeichne verschiedene Netze und suche darin den kürzesten Weg.

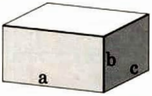


7.2 Volumen

Bei der Raummessung macht man's wie bei der Flächenmessung. Als Raumeinheit dient ein Würfel mit der Seitenlänge 1: der Einheitswürfel. Will man den Rauminhalt (das Volumen) eines Körpers messen, so muss man feststellen, wie oft der Einheitswürfel im Körper enthalten ist. Passt er zum Beispiel genau $3 \cdot 4 \cdot 6$mal in einen Quader, dann sagt man: Der Quader hat das Volumen 72 ($= 3 \cdot 4 \cdot 6$). 72 ist die Maßzahl bezüglich der gewählten Raumeinheit. Gewöhnlich bezeichnet man das Volumen mit V. Für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c gilt – wie wir schon wissen

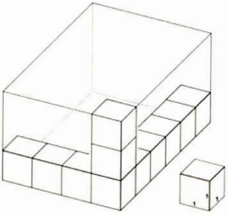
Volumen des Quaders

$V = abc$



Quadervolumen:

$4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$



Einheitswürfel

In der Geometrie sind Volumina reine Zahlen. In der Wirklichkeit gibt man den Raumeinheiten Namen, die man von den Längeneinheiten ableitet: Zum Beispiel ist 1 Kubikmeter $= 1\,m^3$ das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 1 m. Entsprechend sind in Gebrauch $1\,dm^3$, $1\,cm^3$ und $1\,mm^3$.

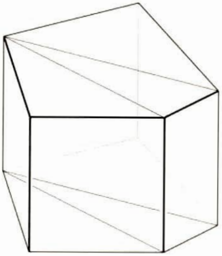
Achte auf die Umrechnungszahl 1 000:

$$1\,m^3 = 1\,000\,dm^3 \;(= 1\,000\,l)$$
$$1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3$$
$$1\,cm^3 = 1\,000\,mm^3$$

Bei komplizierteren Körpern ist es schwieriger, das Volumen zu berechnen. Eine naheliegende Eigenschaft des Rauminhalts hilft uns dann weiter:

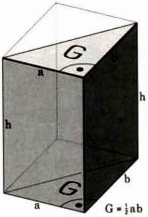
Zerlegt man einen Körper in Teilkörper, so ist sein Volumen gleich der Summe der Volumina der Teilkörper.

Zerlegung in dreiseitige Prismen



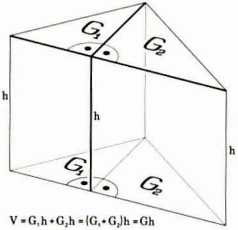
Volumen des geraden Prismas

Jedes Prisma lässt sich in dreiseitige Prismen zerlegen. Deshalb suchen wir eine Formel fürs Volumen dreiseitiger Prismen. Sie ist recht einfach, wenn die Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist. Ein solches Prisma kann als halber Quader aufgefasst werden, sein Volumen ist $V = \frac{1}{2}$ abh. Kürzt man mit G den Inhalt $\frac{1}{2}$ ab der Prismengrundfläche ab, so ist $V = Gh$.



Quadervolumen: abh

Prismavolumen: ½ abh = Gh



$V = G_1h + G_2h = (G_1 + G_2)h = Gh$

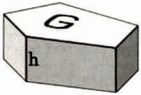
Jedes dreiseitige Prisma lässt sich in zwei dreiseitige Prismen zerlegen, die rechtwinklige Dreiecke als Grundflächen haben, siehe Bild.
Ist ein gerades Prisma in n dreiseitige Prismen zerlegt, so gilt:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \ldots + V_n \\ &= G_1h + G_2h + \ldots + G_nh \\ &= (G_1 + G_2 + \ldots + G_n)h = Gh. \end{aligned}$$

Wir merken uns

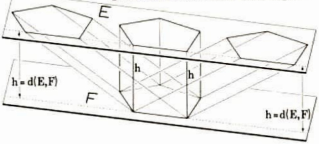
Volumen des Prismas

$V = Gh$



Diese Formel gilt auch fürs schiefe Prisma. Dabei ist h der Abstand der Ebenen, in denen Grund- und Deckfläche liegen.

gescherte Prismen sind volumengleich



Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Stücke eines geraden Prismas

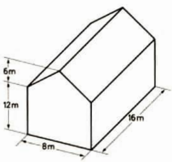
	Inhalt G der Grundfläche	Umfang u der Grundfläche	Höhe h	Volumen V	Inhalt S der Oberfläche
a)	2,5	12,5	8		
b)	18	36		90	
c)	0,24	2,4			6
d)			0,7	0,077	1,27
e)	0,3		0,7		6,27

2. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathetenlänge 4. Die Höhe des Prismas ist 6. Berechne das Volumen.

3. Bei der Herstellung einer Steinsäule wird von der zunächst quadratischen Querschnittsfläche (Seitenlänge a = 20 cm) an jeder Ecke ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck (Kathetenlänge b = 4 cm) weggeschliffen.
Berechne das Volumen der entstehenden achtkantigen Säule mit der Höhe h = 80 cm.

4. Das Profil eines 50 km langen Kanals ist ein gleichschenkliges Trapez, die Grundseiten sind 6 m und 8 m lang, die Höhe ist 2 m.
   a) Wie viel Kubikmeter Wasser enthält der volle Kanal?
   b) Wie viel Wasser fließt in einer Minute an einem Fischer vorbei, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 0,5 m/s beträgt?

5. HAUS



Berechne das Dachvolumen und das Volumen des gesamten umbauten Raums.

6. Ein dreiseitiges Glasprisma hat als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Die Höhe und die Katheten sind 8 cm lang. Die Dichte von Glas ist 2,21 g/cm³.
Berechne die Masse.

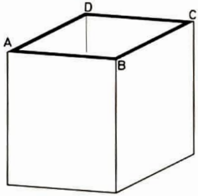
•7. VASE

Eine Tonvase hat als Grundfläche eine Raute, die Diagonalen haben die Längen $\overline{AC} = 20$ cm und $\overline{BD} = 10$ cm. Die Diagonalen der inneren Rauten sind 17 cm und 8 cm lang.

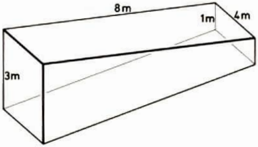
Der Boden ist 2 cm dick und die Vase ist 15 cm hoch.

a) Wie viel cm^3 Wasser sind in der Vase, wenn sie bis 2 cm unter den Rand gefüllt ist?

b) Wie viel cm^3 Ton waren zur Herstellung nötig?



8. SCHWIMMBECKEN



Ein Schwimmbecken hat die Gestalt eines vierseitigen Prismas. Wie viel Kubikmeter fasst es, wenn es randvoll ist?

9. Der Quader ABCDEFGH hat die Kantenlänge $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$ und $\overline{AE} = 7$.

Der Punkt K liegt so auf [BF], dass $\overline{BK} = 4$ ist. Eine Ebene durch EK, die senkrecht auf dem Rechteck ABFE steht, zerlegt den Quader in zwei Körper.

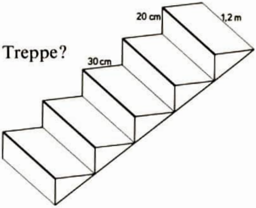
a) Fertige eine Skizze an.

b) Berechne die Volumina der beiden entstehenden Prismen.

c) Berechne die Inhalte der Oberflächen von Quader und Prismen (verwende näherungsweise $\overline{EK} = 5,8$).

10. TREPPE

Wie viel m^3 Beton braucht man zum Gießen der Treppe?



11. Im Quader von Aufgabe **9.** liegt L so auf [AE], dass $\overline{LE} = 2{,}5$ ist. M ist der Mittelpunkt von [BF]. Eine Ebene durch LM, die senkrecht auf dem Rechteck ABFE steht, zerlegt den Quader in zwei Körper.

a) Fertige eine Skizze an.

b) Berechne die Inhalte der beiden Prismenoberflächen (verwende näherungsweise $\overline{LM} = 5{,}1$).

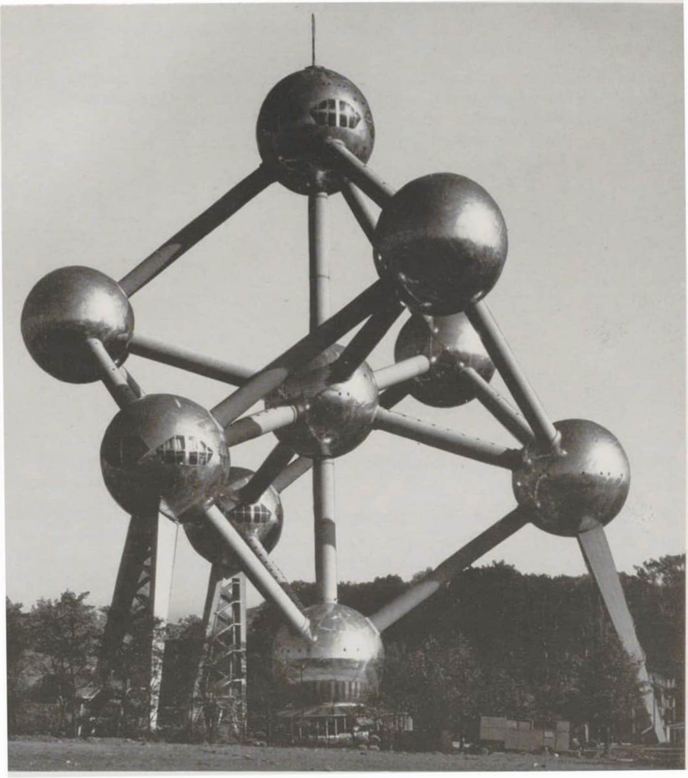
c) Berechne das Verhältnis der Volumina der beiden Prismen.

d) Wohin müsste der Punkt M auf [BF] verlegt werden, damit beide Prismen denselben Rauminhalt haben?

• 12. Ein dreiseitiges Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. Es soll durch drei geradlinige Schnitte in sechs volumengleiche dreiseitige Prismen zerlegt werden, jeder Schnitt geht durch eine Ecke.
Wie muss man schneiden? Begründung!

8. Kapitel

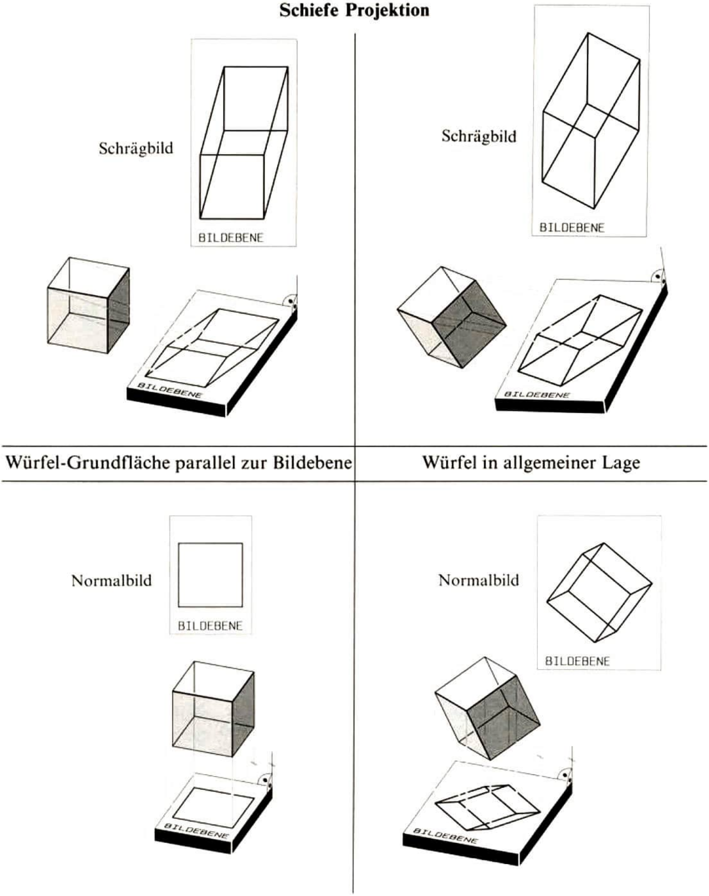
Schrägbild



8.1 Parallelprojektion

Parallelprojektion eines Würfels in eine waagrechte Ebene

Schiefe Projektion



Senkrechte Projektion

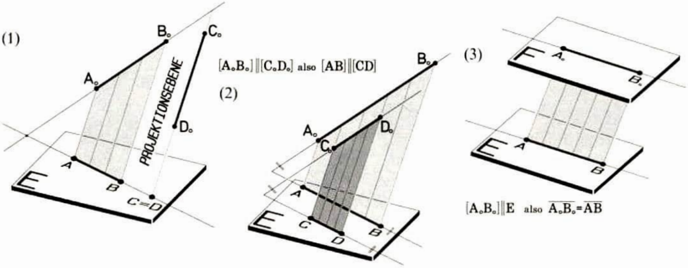
Beleuchtet man einen Körper mit parallelem Licht (zum Beispiel mit Sonnenlicht), so heißt der Schatten, der auf eine ebene Fläche (Bildebene) fällt, Parallelprojektion des Körpers. Dabei wird jeder Punkt des Körpers auf einen Schattenpunkt in der Ebene abgebildet. Mit Parallelprojektion bezeichnet man sowohl die Abbildung als auch das entstehende Schattenbild.

Definition:

> Eine Abbildung eines Körpers in eine Ebene heißt **Parallelprojektion,** wenn die Geraden, die Urbild- und Bildpunkt verbinden, parallel sind. Diese Verbindungsgeraden heißen **Projektionsgeraden.**

Stehen die Projektionsgeraden senkrecht auf der Bildebene, so nennen wir die Abbildung **Normalprojektion** oder **senkrechte Parallelprojektion** oder **orthogonale Parallelprojektion,** das Bild heißt dann **Normalbild.** Andernfalls nennen wir die Abbildung **schiefe Parallelprojektion,** das Bild heißt dann **Schrägbild.**

Aus der Definition der Parallelprojektion lassen sich einige wichtige Zusammenhänge ableiten. Sie helfen uns beim Zeichnen von Schräg- und Normalbildern.

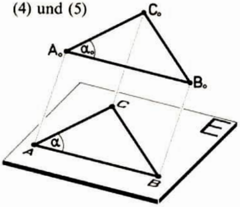


(1) **Strecken werden im Allgemeinen auf Strecken abgebildet. Liegt die Strecke in der Projektionsrichtung, dann wird sie zu einem Punkt.**
Begründung: Die Projektionsgeraden durch A_0B_0 bilden eine Ebene (Projektionsebene), die die Bildebene in der Geraden AB schneidet.

(2) **Sind zwei Strecken parallel, dann sind auch ihre Bilder parallel.**
Begründung: Die Projektionsebenen durch A_0B_0 beziehungsweise durch C_0D_0 sind parallel. Sie schneiden deshalb aus der Bildebene parallele Geraden aus.

(3) **Aus jeder Strecke, die zur Bildebene parallel ist, wird eine gleich lange Bildstrecke.**
Begründung: Man legt durch A_0B_0 eine Ebene F parallel zur Bildebene E. Die Projektionsebene durch A_0B_0 schneidet die parallelen Ebenen E und F in den Parallelen A_0B_0 und AB. Weil auch B_0B und A_0A parallele Projektionsgeraden sind, ist A_0ABB_0 ein Parallelogramm und daher $\overline{AB} = \overline{A_0B_0}$.

(4) und (5)

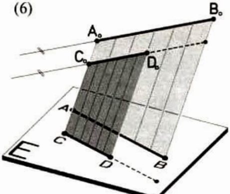


Ebene$(A_0B_0C_0) \parallel E$ also $\Delta A_0B_0C_0 \cong \Delta ABC$

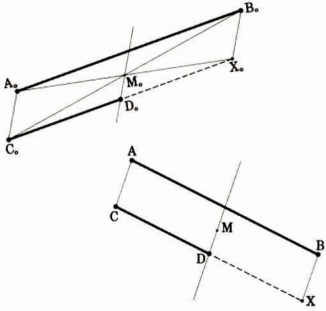
(4) **Jeder Winkel, der zur Bildebene parallel ist, wird auf einen gleich großen Winkel abgebildet.**
Begründung: Der Winkel $B_0A_0C_0$ ist so groß wie der Winkel BAC, weil die Dreiecke $A_0B_0C_0$ und ABC kongruent sind (SSS).

(5) **Jede Figur, die zur Bildebene parallel ist, wird auf eine kongruente Figur abgebildet.**
Begründung: Weil alle Streckenlängen und Winkelgrößen unverändert bleiben, sind Figur und parallele Bildfigur kongruent.

(6)



$[A_0B_0] \parallel [C_0D_0]$, $\overline{A_0B_0} = 2 \cdot \overline{C_0D_0}$ also $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$

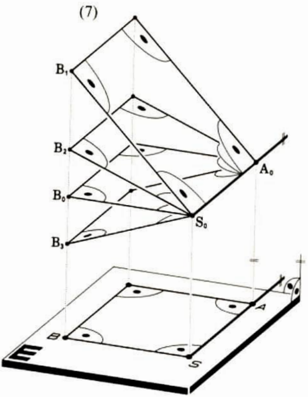


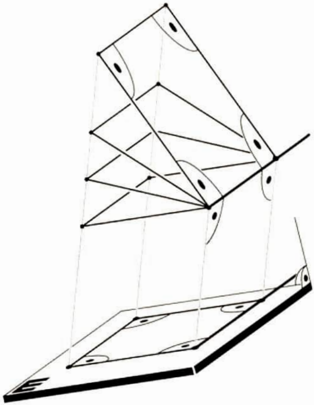
(6) **Ist eine Strecke $[A_0B_0]$ n-mal so lang wie eine dazu parallele Strecke $[C_0D_0]$, so ist auch die Bildstrecke [AB] n-mal so lang wie die (dazu parallele) Bildstrecke [CD].**
Begründung: für n = 2: Wir ergänzen $C_0D_0B_0A_0$ mit dem Punkt X_0 zu einem Parallelogramm. Darin ist M_0 der Diagonalen-Schnittpunkt und D_0M_0 die Mittelparallele. Das Bild des Parallelogramms ist wegen (2) das Parallelogramm CXBA. Das Bild von D_0M_0 läuft durch M parallel zu BX, ist also Mittelparallele in CXBA. Deshalb ist $\overline{AB} = 2\overline{CD}$.
Den Fall $n \neq 2$ kann man auf den Sonderfall n = 2 zurückführen. Der Beweis ist aber ziemlich langwierig.

Sind die Strecken nicht parallel, dann gilt (6) nicht.

(1) bis (6) sind die Eigenschaften jeder Projektion. Speziell für die senkrechte Projektion gilt:

(7) **Jeder rechte Winkel, von dem ein Schenkel (oder beide) parallel zur Bildebene ist, wird auf einen rechten Winkel abgebildet (außer der andere Schenkel liegt in Projektionsrichtung).**



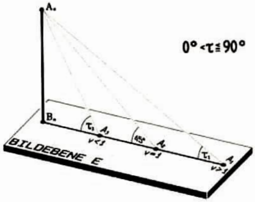


Begründung: Liegt der rechte Winkel $A_0S_0B_0$ schon parallel zur Bildebene E, dann wird er wegen (4) auf den rechten Winkel ASB abgebildet. Dreht man den Winkel um den zu E parallelen Schenkel $[S_0A_0$, so bleibt er ein rechter und sein Bild ändert sich nicht, weil der andere Schenkel $[S_0B_0$ in der Projektionsebene S_0SB liegt.
Dreht man den Winkel schließlich so weit, bis der zweite Schenkel in Projektionsrichtung liegt, so wird aus diesem Schenkel ein Punkt und das Bild des rechten Winkels verkümmert zur Halbgerade [SA].

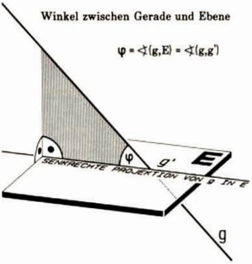
Aus (7) folgt sofort, dass das Bild eines Rechtecks, von dem eine Seite parallel ist zur Bildebene, wieder ein Rechteck (oder eine Strecke) ist.
Damit ein Rechteck mit einer zur Bildebene parallelen Seite als Rechteck abgebildet wird, muss die Projektionsrichtung nicht einmal senkrecht zur Bildebene sein, es genügt sogar, dass sie senkrecht zu dieser Seite ist.

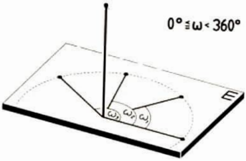
8.2 Konstruktion von Schrägbildern

Ein Schrägbild ist das Bild eines Körpers bei schiefer Parallelprojektion. Seine Gestalt hängt nur von der Projektionsrichtung ab. Diese Richtung lässt sich zum Beispiel mit zwei Winkeln festlegen. Welche Rolle sie spielen, erkennt man am besten, wenn man eine Strecke abbildet, die senkrecht auf der Bildebene steht.
Als **Auftreffwinkel** $\boldsymbol{\tau}$ ($\tau \neq 90°$) bezeichnen wir den Winkel zwischen einer Projektionsgerade und dem Bild dieser senkrechten Strecke.



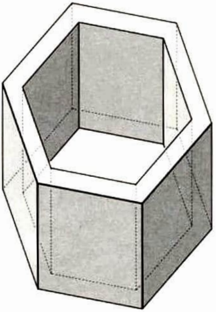
τ heißt auch Winkel zwischen Projektionsgerade und Bildebene. Allgemein versteht man unter dem Winkel φ zwischen einer Gerade g und einer Ebene E den Winkel zwischen der Gerade g und ihrer senkrechten Projektion g′ in dieser Ebene. Je nach Größe des Auftreffwinkels ist die Bildstrecke länger, kürzer oder genauso lang wie das Original. Der Quotient Bildstreckenlänge/Originallänge heißt Verzerrung v. Für $\tau = 45°$ ist $v = 1$, für $\tau < 45°$ ist $v > 1$, das heißt, das Bild ist länger als das Original und für $\tau > 45°$ ist $v < 1$, das heißt, das Bild ist kürzer als das Original.





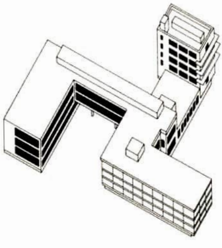
Als **Frontwinkel** ω bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Bild und einer beliebig festgelegten Richtung in der Bildebene. Der Frontwinkel hat keinen Einfluss auf die Verzerrung v.
Die Wahl von v und ω ist beliebig. Sind v und ω (mit zugehöriger Bezugsrichtung) bekannt, so liegt das Schrägbild fest.

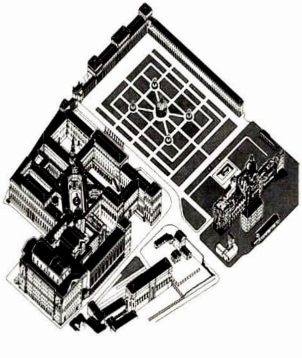
Gewöhnlich projiziert man in eine waagrechte oder lotrechte Ebene. In der Bildserie rechts sehen wir einen Würfel und sein Schrägbild (Schatten) in einer waagrechten Ebene. Schau die Bilder genau an und mach dir die Wirkung von ω und τ aufs Schrägbild klar.



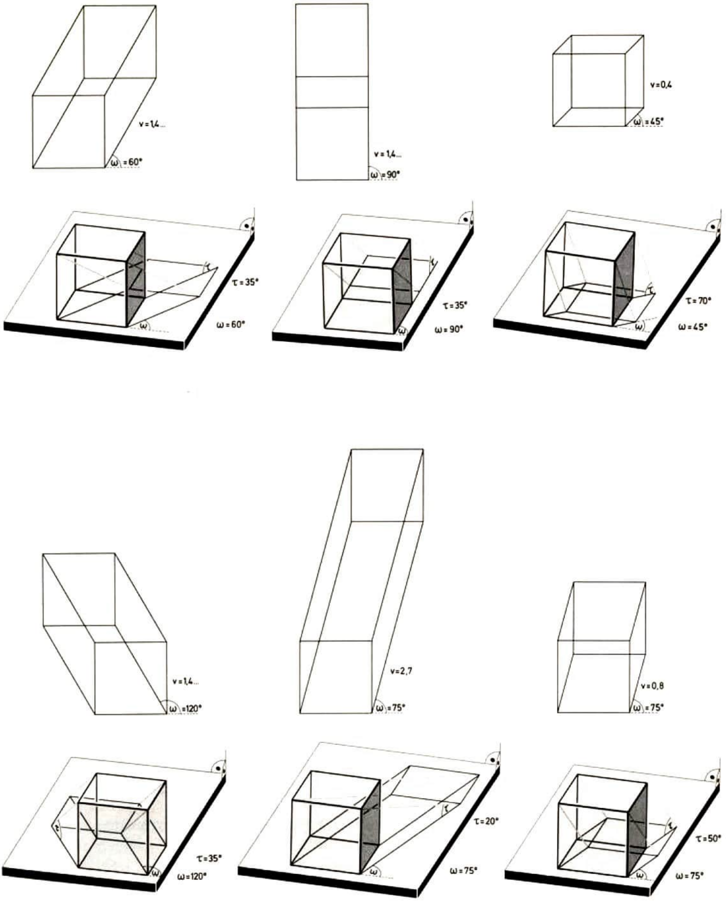
Sechskantrohr in Militärprojektion
(v = 1)

Eine von vielen möglichen Projektionen in eine waagrechte Ebene ist die **Militärprojektion:** Der Grundriss erscheint in wahrer Größe, der Frontwinkel ω ist 90°. Die Verzerrung v ist an sich beliebig wählbar, doch nimmt man oft den Wert 1 (also $\tau = 45°$), denn dann sieht man auch die Höhen in wahrer Größe. Im Schrägbild sehen wir ein Sechskantrohr, dessen äußere Seitenflächen Quadrate sind. Die Militärprojektion findet man in Architekturzeichnungen und in manchen Stadtplänen.

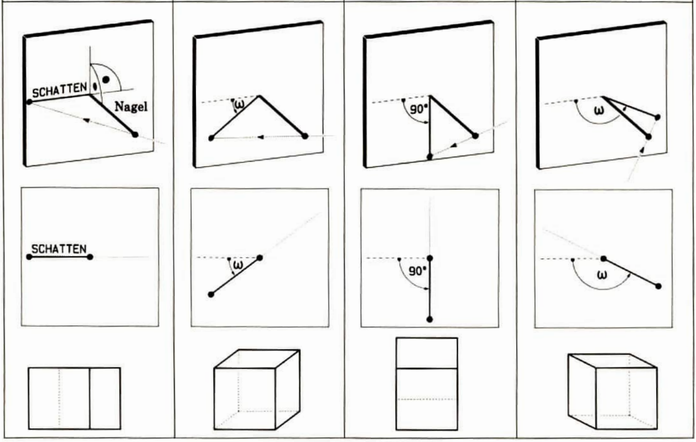




Münchner Residenz mit Hofgarten

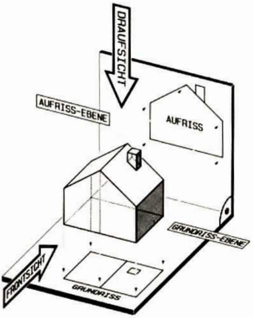

v = 1,4...
ω = 60°
v = 1,4...
ω = 90°
v = 0,4
ω = 45°
τ = 35°
ω = 60°
τ = 35°
ω = 90°
τ = 70°
ω = 45°
v = 1,4...
ω = 120°
v = 2,7
ω = 75°
v = 0,8
ω = 75°
τ = 35°
ω = 120°
τ = 20°
ω = 75°
τ = 50°
ω = 75°

$\omega = 0°$	$0° < \omega < 90°$	$\omega = 90°$	$90° < \omega < 180°$



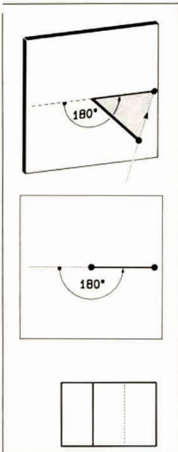
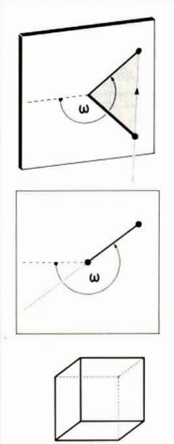
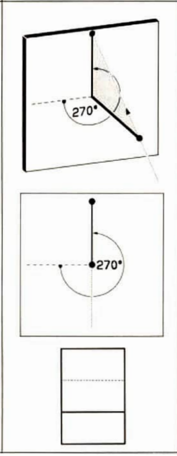
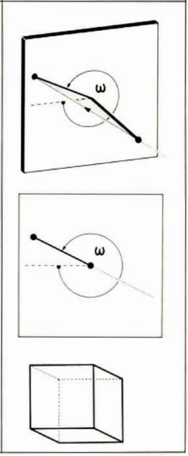
überall ist $v = 0{,}5$

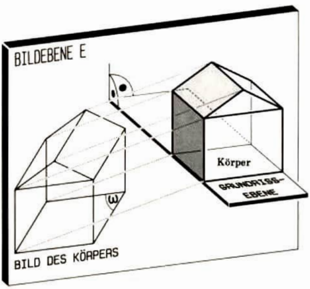
Die schräge Projektion in eine senkrechte Ebene heißt **Kavalierprojektion:** In wahrer Größe erscheint alles, was parallel ist zur (senkrechten) Bildebene – dafür ist der Grundriss verzerrt. Wir vereinbaren: Der Frontwinkel ω hat den Wert 0, wenn das Licht genau von rechts einfällt, der Schatten also waagrecht nach links fällt. Andere Projektionen sehen wir in der Tabelle. Die Schrägbilder, die wir in der Schule zeichnen, beruhen meistens auf dieser Kavalierprojektion.

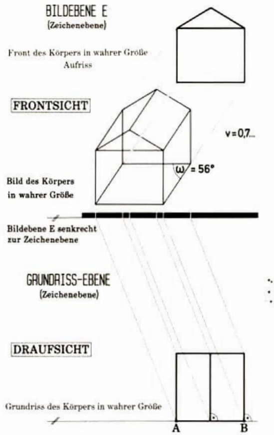


Schrägbild-Zeichnung

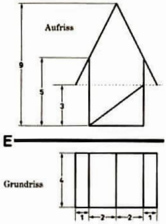
Wir stellen uns vor, dass der Körper auf einer waagrechten Unterlage steht und in eine lotrechte Bildebene E projiziert wird. Im Beispiel sehen wir ein Haus und seinen Schatten auf einer senkrechten Wand. Betrachten wir diese Anordnung genau von vorn (Frontsicht), dann sehen wir den Schatten und die Hausfront, also Höhe und Breite des Hauses, in wahrer Größe; dieses Bild heißt **Aufriss**.
Betrachten wir die Anordnung genau von oben (Draufsicht), dann sehen wir die Bildebene E als Gerade, den Hausschatten als Strecke darin und den Grundriss des Hauses in wahrer Größe.

$\omega = 180°$	$180° < \omega < 270°$	$\omega = 270°$	$270° < \omega < 360°$
			



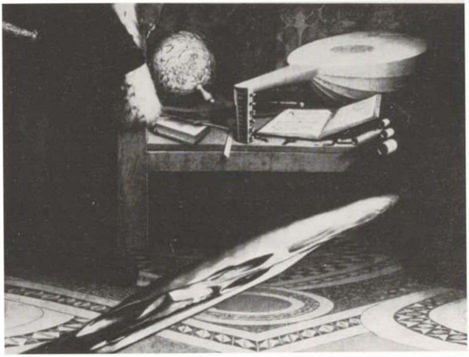


GEGEBEN



GESUCHT Schrägbilder für $v = 0{,}5$ und $\omega_1 = 45°$, $\omega_2 = 225°$

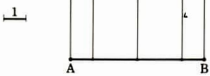
Im nächsten Beispiel haben wir einem Haus noch einen schiefen Balken verpasst; er soll uns als optische Stütze helfen, leichter zwischen Vorder- und Hinterseite zu unterscheiden. Jede Strecke, die parallel ist zur Bildebene, erscheint in der Bildebene als gleich lange Strecke. Deshalb suchen wir uns im Grundriss eine solche Strecke, zum Beispiel [AB], und zeichnen sie dort, wo genug Platz ist fürs Schrägbild, am besten genau unterm Grundriss. Wir nennen sie **Bezugstrecke**, weil wir auf ihr das Schrägbild aufbauen und weil sie einen Schenkel des Frontwinkels ω festlegt.
Zuerst zeichnen wir das Schrägbild des Grundrisses. Die Bilder aller Strecken, die senkrecht zur Bildebene liegen – der Grundriss zeigt sie in wahrer Größe –, bilden mit der Bezugstrecke [AB] den Winkel ω. Außerdem sind sie aufs v-fache verkürzt. Auf den schrägen Grundriss setzen wir jetzt das (gerade) Haus. Von jedem Punkt, der nicht in der Grundrissebene liegt, müssen wir wissen, wie hoch er über ihr liegt. Seine Höhe entnehmen wir dem Aufriss; wir tragen sie in wahrer Größe senkrecht zur Bezugstrecke am zugehörigen Grundrisspunkt an, weil sie ja parallel zur Bildebene E ist.

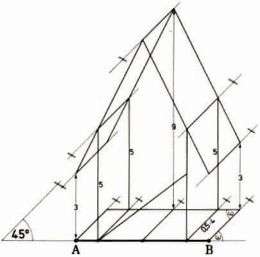


Hans Holbein der Jüngere:
Die Gesandten (1533), Ausschnitt. Die untere Bildmitte zeigt ein ungewöhnliches Schrägbild. Schaut man von einer bestimmten Stelle, so entzerrt es sich zu einem Totenkopf. Was der Totenkopf ausdrücken soll, ist unbekannt. Ist er ein Hinweis aufs Jenseits?

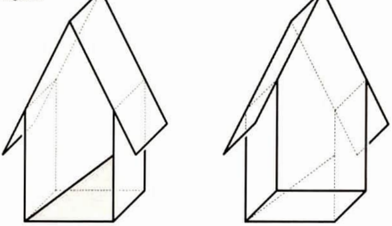
Nachdem man das Schrägbild mit sehr dünnen Linien gezeichnet hat, hebt man die sichtbaren Kanten deutlich hervor, um dem Schattenbild eine räumliche Wirkung zu geben. Der Umriss ist immer sichtbar, ihn zeichnen wir zuerst als dicke Linie. Dann überlegen wir, welche Kanten sichtbar sind und zeichnen sie dick. Obacht: Jedes Schrägbild erlaubt zwei räumliche Deutungen. Je nachdem, welcher Grundrisspunkt dem Auge am nächsten ist, gilt die eine oder andere Deutung. (Übrigens: Nicht alle Strecken im Schrägbild-Grundriss sind auch Kanten der Grundfläche im fertigen Haus!)

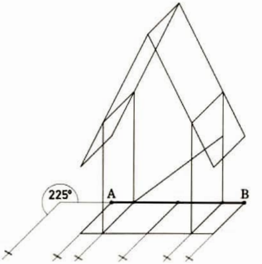
Grundriss



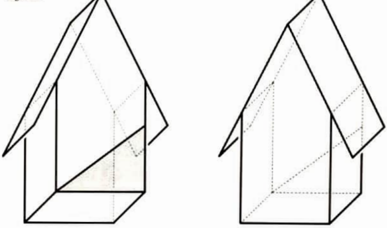


Ergebnis

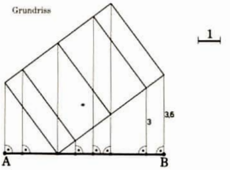




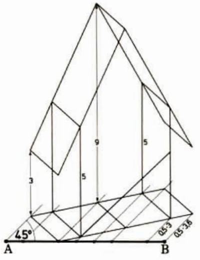
Ergebnis

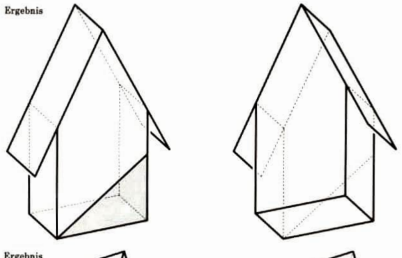


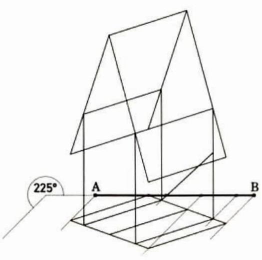
Im zweiten Beispiel haben wir dasselbe Haus auf der Grundrissebene um 37° gedreht. Der Grundriss zeigt diesen Drehwinkel in wahrer Größe. Weil sich dabei an den Höhen nichts ändert, brauchen wir keinen neuen Aufriss. Wir konstruieren das Schrägbild des gedrehten Hauses mit den Werten für v und ω von vorhin.
Zuerst legen wir im Grundriss die Bezugstrecke [AB] fest: Sie ist wieder parallel zur Bildebene E, geht durch den untersten Grundrisspunkt und ist so lang, wie das Haus vor der Bildebene breit erscheint (Abstand der äußeren Lote). Auf [AB] loten wir die Grundrisspunkte.
Dann zeichnen wir [AB] samt Lotfußpunkten so weit unter den Grundriss, dass das Haus noch Platz hat, also nicht mit dem Giebel in den Grundriss rutscht. Wir verkürzen die Lote im Grundriss aufs v-fache und tragen sie in Richtung ω am zugehörigen Lotfußpunkt der Bezugstrecke [AB] an. So entsteht der Grundriss im Schrägbild. Der Rest ist wie gehabt.

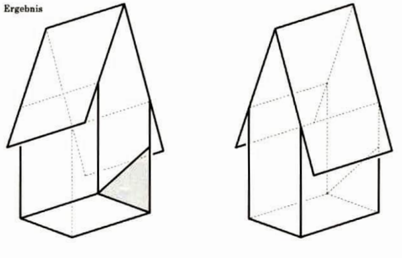


Für die ω-Werte 45° und 225° entstehen jetzt zwei grundverschiedene Schrägbilder. Das liegt daran, dass wir das Haus gedreht haben. Auch hier gibt es zwei räumliche Deutungen. Der Umriss ist immer sichtbar. Die restlichen Kanten, die man im einen Fall sieht, sind im andern verdeckt und umgekehrt.



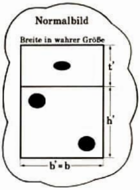


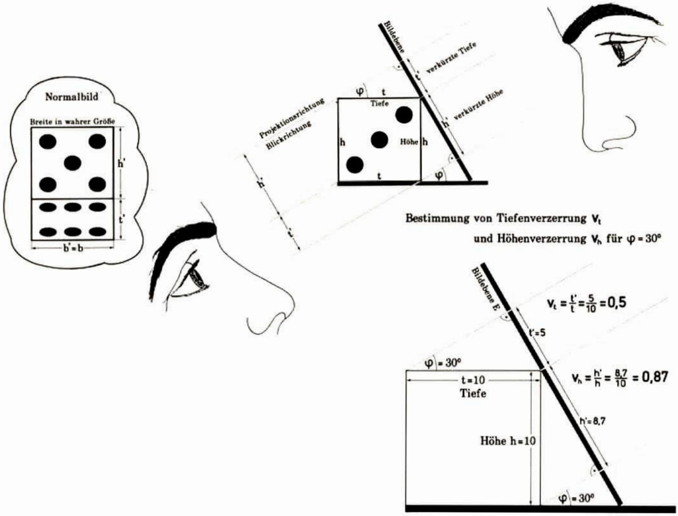




8.3 Normalbild

Ein Normalbild entsteht bei senkrechter Projektion in die Bildebene. Dabei ist $v = 0$, also $\tau = 90°$, ω ist nicht sinnvoll definierbar. Wegen $v = 0$ schrumpft jede Kante, die senkrecht zur Bildebene ist, auf einen Punkt. Deshalb drehen wir den Körper so, dass möglichst wenige Kanten senkrecht zur Bildebene sind.





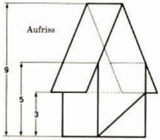
Normalbild-Zeichnung

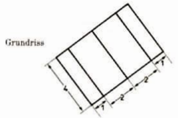
Wir stellen uns vor, dass der Körper auf einer waagrechten Unterlage steht. ω ist der Winkel zwischen einer Projektionsgerade und der waagrechten Unterlage. Die Bildebene steht senkrecht auf der vorgegebenen Blickrichtung (= Projektionsrichtung). Die Breiten sind parallel zur Bildebene und erscheinen deshalb darin in wahrer Größe: $b' = b$. Die Höhen und Tiefen verkürzen sich: $h' = h \cdot v_h$, $t' = t \cdot v_t$. v_h und v_t hängen vom Winkel φ ab, siehe Bild.
In der Tabelle sind einige Werte für φ, v_t und v_h zusammengestellt.

φ	0°	30°	≈ 37°	45	≈ 53°	60°	90°
v_t	0	0,5	0,6	≈ 0,7	0,8	≈ 0,87	1
v_h	1	≈ 0,87	0,8	≈ 0,7	0,6	0,5	0

Zuerst legt man die Bezugstrecke [AB] im Grundriss fest. Von [AB] aus trägt man die mit v_t verkürzten Tiefen senkrecht nach oben (oder bei Bedarf nach unten) ab. Auf die Grundrisspunkte stellt man die mit v_h verkürzten zugehörigen Höhen. Auch fürs Normalbild gibt es zwei räumliche Deutungen, siehe Bild.

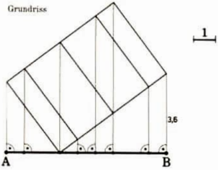
GEGEBEN

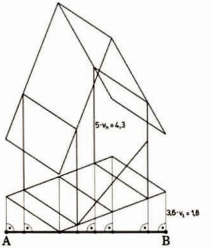




GESUCHT Normalbild für $\varphi = 30°$

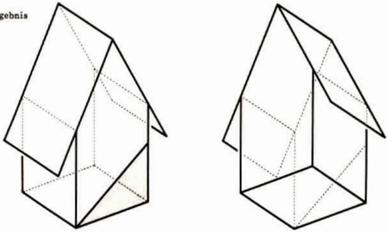
Grundriss

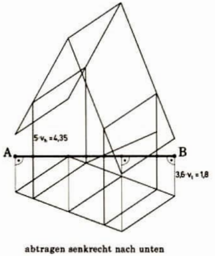




abtragen senkrecht nach oben

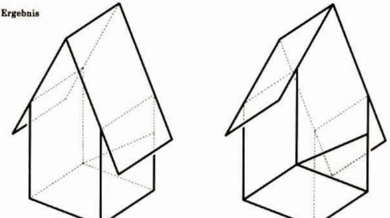
Ergebnis



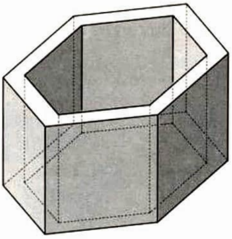


abtragen senkrecht nach unten

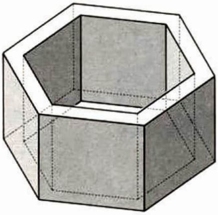
Ergebnis



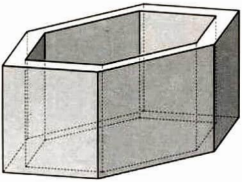
Normalbilder wirken natürlicher als Schrägbilder.



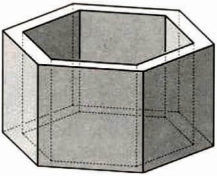
Sechskantrohr im Schrägbild ($\omega = 240°$, $v = 0{,}7$)



Sechskantrohr im Normalbild ($\varphi = 37°$)



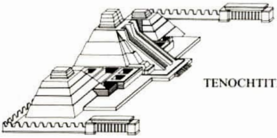
Sechskantrohr im Schrägbild ($\omega = 30°$, $v = 0{,}66$)



Sechskantrohr im Normalbild ($\varphi = 20°$)

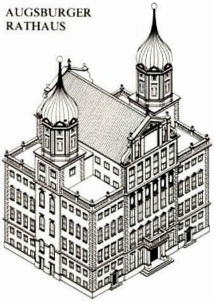
Aufgaben

1. ANSICHTEN
   Welche Ansichten sind im Schrägbild, welche im Normalbild gezeichnet? Stelle bei den Schrägbildern fest, ob sie durch Militär- oder Kavalierprojektion entstanden sind.



TENOCHTITLAN

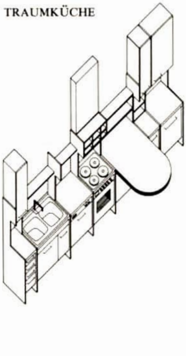
AUGSBURGER RATHAUS



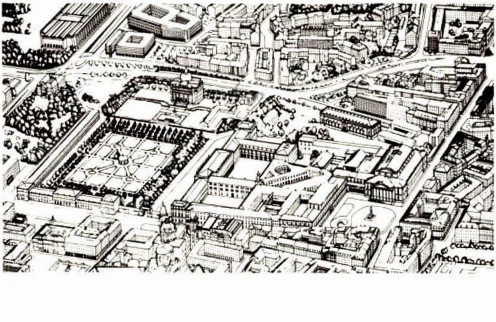
BAUHAUS

VILLA

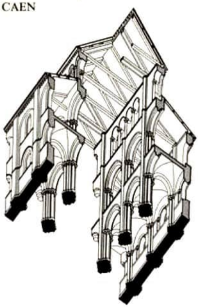
TRAUMKÜCHE



MÜNCHNER RESIDENZ MIT HOFGARTEN

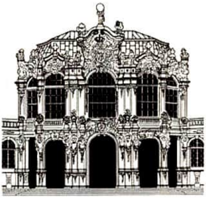


ST. ETIENNE,
CAEN

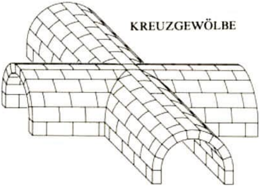


KIRCHE

ZWINGER

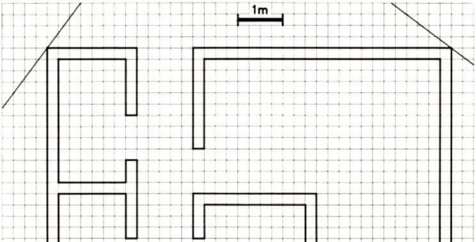


KREUZGEWÖLBE



2. Die Bilder zu den Aufgaben **25.e)** und **f)** im Kapitel **6** zeigen ein regelmäßiges Achtflach und einen Würfelstumpf; beide sind in einem Würfel eingebaut. Zeichne die beiden Körper (ohne Würfel) in Grund- und Aufriss. (Die Rissebenen sind parallel zu Seitenflächen des Würfels.)

3. WOHNRAUM
Das Bild zeigt den Grundriss einer 2,50 m hohen Wohnung. Zeichne die Wohnung in Militärprojektion für v = 0,5. Die Bezugstrecken sind links oben und rechts oben angedeutet.



4. HAUS

Die Tür hat die Breite 2. Alle Fenster (mit Läden) sind kongruent.

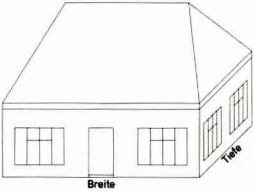
a) Bestimme durch Messung Breite und Höhe von Tür und Fenstern (ohne Läden).

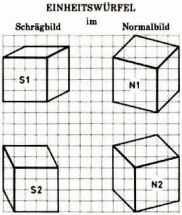
b) Bestimme durch Messung die Höhe (mit und ohne Dach), Breite und Tiefe des Hauses. Der Aufriss ist symmetrisch.

c) Zeichne den Grundriss.

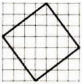
d) Zeichne das Haus in Militärprojektion für $v = 1$, $v = 0{,}5$ und verwende $1 \mathrel{\widehat{=}} 0{,}5$ cm. Lege die Bezugstrecke parallel zur Diagonale des Grundriss-Rechtecks.

e) Zeichne ein Netz des Dachs und berechne näherungsweise den Inhalt der Dachfläche.



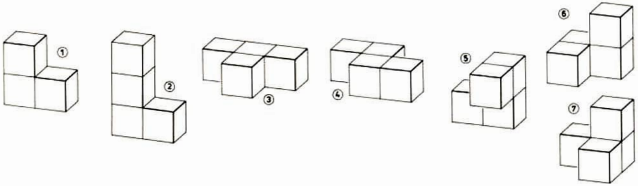


c)



5. SOMAWÜRFEL

Setzt man kongruente Würfel Fläche an Fläche so zusammen, dass kein Quader entsteht, so gibt es bei drei Würfeln nur eine Möglichkeit, bei vier Würfeln sechs Möglichkeiten.



Erstaunlicherweise lassen sich diese sieben Somateile zu einem Würfel (Kantenlänge?) zusammenbauen.

a) Zeichne die Somateile in Grund- und Aufriss.

b) Zeichne die Somawürfel im Schrägbild, verwende S2.

c) Zeichne die Somateile in Militärprojektion mit $v = 1$ oder $v = 0{,}6$. (Drehung siehe Bild, Bezugstrecke auf Gitterlinie)

d) Zeichne die Somateile im Normalbild, verwende N2.

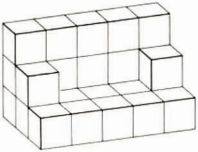
6. SOMASOFA

Auch das Somasofa ist aus den sieben Somateilen von Aufgabe **5.** zusammengesetzt.

Zeichne es (ohne verdeckte Kanten) im

a) Schrägbild mit beiden räumlichen Deutungen, verwendet S1.

b) Normalbild mit beiden räumlichen Deutungen, verwende N1.



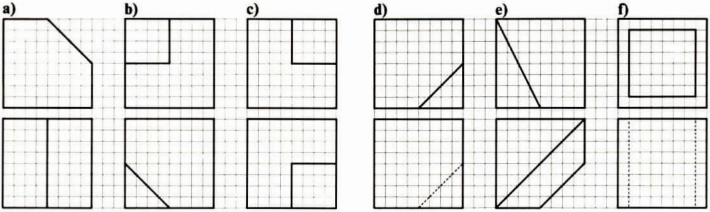
7. WÜRFELSCHNITTE

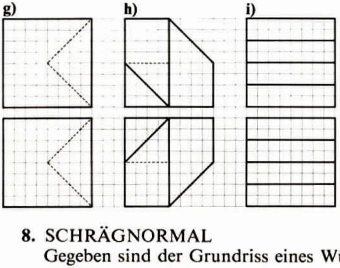
Von einem Würfel der Kantenlänge 4 ist ein Stück abgeschnitten. Grund- und Aufriss zeigen den Restkörper. (Aufriss oben).

a) Zeichne den Würfelrest im Schrägbild (wie S1, Kanten doppelt so lang).

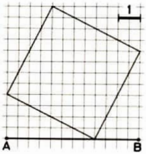
b) Zeichne den Würfelrest im Normalbild (wie N1, Kanten doppelt so lang).

c) Konstruiere die ebenen Schnittflächen in wahrer Größe.





SCHRÄGNORMAL

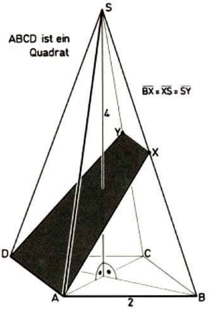


8. SCHRÄGNORMAL

Gegeben sind der Grundriss eines Würfels und die Bezugstrecke.

a) Zeichne den Würfel im Schrägbild mit $v = 0{,}5$ und $\omega = 45°$.

b) Zeichne den Würfel im Normalbild mit $v_t = 0{,}5$ und $v_h = 0{,}87$. Wenn du sorgfältig zeichnest, wirst du feststellen, dass er in der Höhe geringfügig von unserm Standardwürfel abweicht. Wie groß ist die Abweichung?



9. PYRAMIDENSCHNITT

a) Zeichne die Pyramide mit Schnittfläche in Normalbild.
(Stelle zwei passende ›Normalwürfel‹ aufeinander und dann die Pyramide hinein!)

b) Zeichne die Schnittfläche DAXY in wahrer Größe.

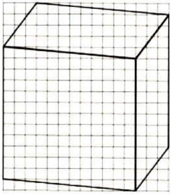
c) Zeichne von beiden Teilkörpern ein Netz, verwende $1 \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{cm}$.

10. Eine Pyramide hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck der Seitenlänge 4.
Die Spitze liegt 10 Einheiten senkrecht über der Sechseckmitte.
Zeichne die Pyramide

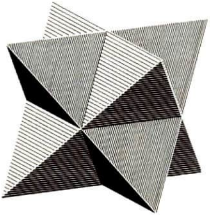
a) im Schrägbild mit $v = 0{,}5$ und $\omega = 30°$

b) im Normalbild mit $v_t = 0{,}6$ und $v_h = 0{,}8$.

•11. STELLA OCTANGULA



STELLA OCTANGULA



a) Zeichne in einem Würfel die drei Flächendiagonalen von einer Ecke aus und verbinde ihre Endpunkte. Es entsteht ein regelmäßiges Tetraeder (Vierflach). Es gibt zwei Möglichkeiten; zeichne sie getrennt im Schräg- und im Normalbild.

b) Zeichne in ein und demselben Würfel beide Tetraeder von **a)**. Sie durchdringen sich und bilden einen achtzackigen räumlichen Stern. Zeichne ihn nur mit sichtbaren Kanten im Schräg- und Normalbild.

12. ZELTDACH

Das Bild zeigt ein Haus mit einem Zeltdach. Die Spitze liegt senkrecht überm Mittelpunkt des Grundriss-Rechtecks.

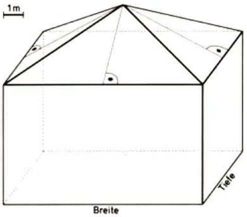
a) Warum ist das ein Schrägbild?

b) Wie tief und wie hoch (mit Dach) ist das Haus, wenn es 10 m breit ist und $v = 0{,}5$ ist?

c) Welche Dreieckshöhe im Dach erscheint in wahrer Größe? Warum?

d) Zeichne das Haus mit seiner schmalen Seite in wahrer Größe.

e) Zeichne das Haus so, dass Grundriss und Höhe in wahrer Größe erscheinen. Die Bezugstrecke bildet 45° mit einer Gitterlinie.



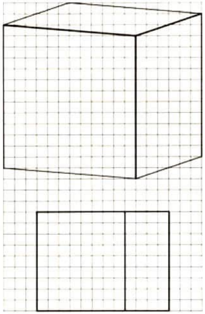
13. ZWÖLFFACH

Zeichne die Normalbilder ab. Setze jeweils auf den Würfel ein pyramidenförmiges Zeltdach: Die Spitze liegt halb so hoch überm Quadratmittelpunkt, wie der Würfel hoch ist.

Verpasse auch den restlichen Seitenflächen solche Pyramiden: ein Zwölfflach entsteht.

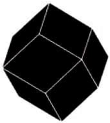
a) Warum sind die Würfelkanten nicht mehr Kanten im Zwölfflach? Grenze das Zwölfflach deutlich mit Farbe vom Würfel ab.

b) Zeichne das Zwölfflach im Grundriss, sodass der Würfel als Quadrat erscheint.



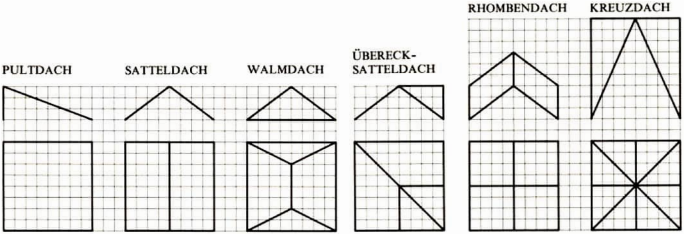
c) Bestimme die Anzahl e der Ecken, f der Flächen und k der Kanten und bestätige die Euler-Beziehung: $e + f = k + 2$.

d) Was für eine besondere Form haben die Seitenflächen?

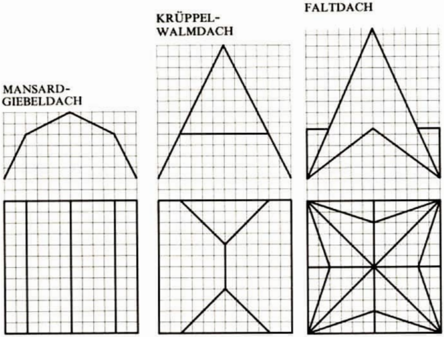


• **14.** VERDACHT

Grund- und Aufriss zeigen einige Dachformen. Setze das Dach jedesmal auf einen Würfel und zeichne das Ganze nur mit sichtbaren Kanten im Schräg- oder Normalbild mit jeweils beiden räumlichen Deutungen. (Wenn nichts vermerkt ist, liegen in den Normalbildern alle Ecken auf Gitterpunkten.)
Für die ersten sechs Dächer wähle man die Würfelkanten doppelt so lang wie bei S1 oder N1.



Wähle für die letzten drei Dächer die Würfelkanten dreimal so lang.
Mansard Giebeldach (wie S2 oder N2)
Krüppelwalmdach (wie S2 oder N2)
Faltdach (wie S1 oder N1, im Normalbild liegen zwei Ecken nicht auf Gitterpunkten).



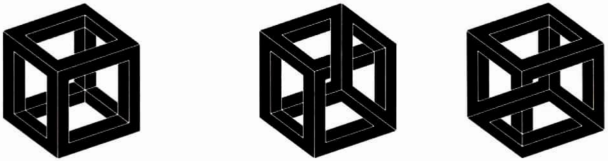
⁝15. a) Verbinde die Punkte (1 | 5), (8 | 1), (15 | 5), (15 | 13), (8 | 17), (1 | 13) und (8 | 9) so miteinander, dass ein Würfel-Normalbild entsteht, und strichle die verdeckten Kanten. Nimm $1 \triangleq 1$ cm.

b) Zeichne dünn in jede Seitenfläche eine kantenparallele Mittellinie so ein, dass sie windschief ist zur Mittellinie einer angrenzenden Seitenfläche. Eine Mittellinie ist ungefähr 8 lang. Zeichne dünn mit andrer Farbe eine Strecke der Länge 5 so in jede Mittellinie, dass die Endpunkte von den Kanten gleichen Abstand haben.

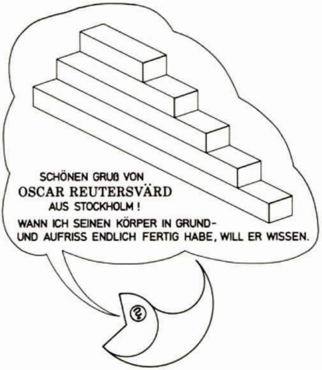
c) Verbinde jeden Streckenendpunkt mit den nächstgelegenen vier Streckenendpunkten angrenzender Seitenflächen: Es entsteht das Normalbild eines beinah regelmäßigen Zwanzigflachs. Hebe die sichtbaren Kanten deutlich hervor.

Eschers Trick:

Zwei Deutungen in einem Bild.



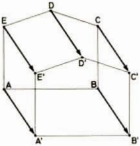
Links-rechts Oben-unten

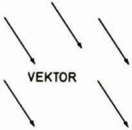


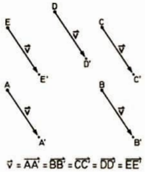
9. Kapitel

Vektoren

Verschiebt man eine Strecke [AB] parallel, dann bestimmen Strecke [AB] und Bildstrecke [A'B'] ein Parallelogramm.
Wenn man ein Fünfeck ABCDE verschiebt, dann bewegt sich jeder Punkt gleich weit in dieselbe Richtung. »gleich weit in dieselbe Richtung« lässt sich auch mit einem Pfeil festlegen: Die Pfeilrichtung sagt, wohin es geht, und die Pfeillänge sagt, wie weit es geht.





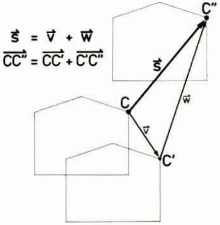


Alle Pfeile, die gleich lang sind, und in die gleiche Richtung zeigen, also gleichgerichtet sind, beschreiben dieselbe Verschiebung. Als Sammelbegriff für eine Menge aller gleich langen und gleich gerichteten Pfeile verwendet man die Bezeichnung **Vektor.** Jeder Pfeil der Menge heißt **Repräsentant** des Vektors. Oft nennt man auch die Pfeile kurz und bündig Vektoren. Das ist so ähnlich wie bei den Brüchen, wo zum Beispiel die Zahl mit dem Wert 0,5 durch unendlich viele Repräsentanten wie $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{4}$ oder ... dargestellt wird.

Bezeichnungen: Repräsentant und Vektor kennzeichnet man mit Anfangs- und Endpunkt und einem Pfeil darüber oder nur mit einem kleinen Buchstaben und einem Pfeil darüber.

Für Verschiebungen gilt der sofort einleuchtende

Satz:
Führt man zwei Verschiebungen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nacheinander aus, so gibt es eine Verschiebung $\vec{s}$, die dasselbe leistet.



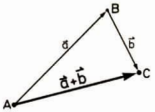
Auf den Beweis verzichten wir. Dieser Satz dient zur Definition der Summe zweier Vektoren:

Definition:

> Führt die Verschiebung $\vec{s}$ zum selben Ergebnis wie die Nacheinanderausführung der Verschiebungen $\vec{v}$ und $\vec{w}$, so nennt man $\vec{s}$ den **Summenvektor** von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und schreibt: $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$

Bei der Vektoraddition verwendet man dasselbe Pluszeichen wie bei der Zahlenaddition, weil beide dieselben Gesetzmäßigkeiten haben.

Ⓔ **Eindeutige Existenz:** Zu je zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es immer einen eindeutigen Summenvektor $\vec{s}$.

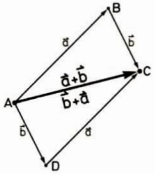


$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Zeichnerisch addiert man zwei Vektoren so:
An die Spitze des ersten Pfeils setzt man den Fuß des zweiten. Der Summenpfeil reicht dann vom Fuß des ersten bis zur Spitze des zweiten Pfeils. Welchen Pfeil man zuerst nimmt, ist egal, denn es gilt das

Ⓚ **Kommutativ-Gesetz:** Die Reihenfolge spielt beim Addieren keine Rolle.

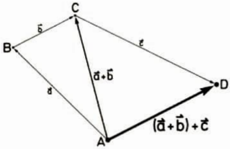


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

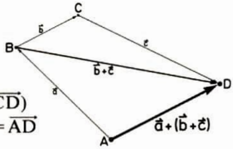
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

Ⓐ **Assoziativ-Gesetz:** Bei der Addition dreier Vektoren liefern beide Klammerungen dasselbe Ergebnis:



$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$
$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

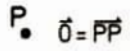
deswegen kann man die Klammern auch weglassen. Man sieht das leicht ein, wenn man die Eigenschaft E ausnutzt:



$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \quad = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Ⓝ **Neutrales Element:** Es gibt einen Vektor, der beim Addieren nichts bewirkt, den **Nullvektor $\vec{0}$;** bei ihm fallen Anfangs- und Endpunkt zusammen. Wegen seiner Länge null hat er keine Richtung.

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$

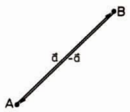


① **Inverse:** Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen **Gegenvektor** $-\vec{a}$. $-\vec{a}$ macht die Verschiebung $\vec{a}$ rückgängig.

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$,

also ist $\overrightarrow{BA}$ der Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

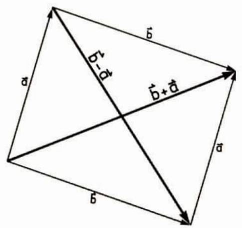


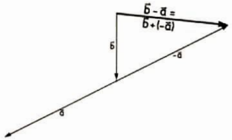
Wenn die Addition in einer Menge so erklärt ist, dass die Gesetze EKANI gelten, dann nennt man die Menge auch eine **kommutative Gruppe.** Beispiele für kommutative Gruppen sind
- Menge der Vektoren
- Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$
- Menge der Drehwinkel.

Aus Bequemlichkeit führt man auch eine Vektorsubtraktion ein. Man erklärt sie mit der Addition: Unter $\vec{b} - \vec{a}$ versteht man die Summe von $\vec{b}$ und dem Gegenvektor von $\vec{a}$.

$$\boxed{\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})}$$

Zeichnerisch kann man aber auch so vorgehen:
Man zeichnet die Pfeile $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom gleichen Punkt aus. Der Differenzvektor $\vec{b} - \vec{a}$ reicht dann von der Spitze von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$.





Aufgaben

KOSY ist die Abkürzung von Koordinatensystem, O ist der Ursprung im KOSY.

1. Zeichne in ein KOSY das Viereck ABCD und verschiebe es mit $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ 7
   zum Viereck A'B'C'D'. 1 0 11
   Verschiebe dann mit $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$ das Viereck A'B'C'D' zum Viereck A″B″- 3
   C″D″.
   Die Verschiebung $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$ führt ABCD direkt in A″B″C″D″ über.
   Bestimme die Koordinaten von X und Y, wenn gilt $\vec{s} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XY}$.
   a) $A(1 \mid 1)$, $B(4 \mid 1)$, $C(3 \mid 4)$, $D(0 \mid 3)$
   b) $A(1 \mid 1)$, $B(5 \mid 0)$, $C(3 \mid 2)$, $D(3 \mid 5)$

2. Zeichne in ein KOSY die Punkte $A(-1 \mid -2)$, $B(3 \mid 0)$, $C(2 \mid 2)$, $D(0 \mid 1)$ und $E(-2 \mid 3)$.
   Bestimme die Punkte V, W, X, Y und Z so, dass gilt:
   $\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{WB} = \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{DY} = \overrightarrow{ZE}$.
   a) $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ **b)** $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$ **c)** $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$

3. Zeichne in ein KOSY $A(1 \mid 0)$, $B(4 \mid 2)$ und $C(2 \mid 4)$.
   Zeichne den Summenvektor.
   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
   d $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ **e)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

4. Zeichne $A(1 \mid 1)$, $B(4 \mid 1)$, $C(6 \mid 3)$ und $D(3 \mid 4)$ in ein KOSY. Die Vektoren $\vec{a}$, 6
   $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind definiert durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. 0 0 7
   Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus: 0
   a) $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{DA}$ **d)** $\overrightarrow{BD}$

5. Zeichne das Fünfeck ABCDE mit $A(0 \mid 0)$, $B(3 \mid 0)$, $C(4 \mid 1)$, $D(4 \mid 4)$ und $E(1 \mid 3)$.
   $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind festgelegt durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = 2\overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$.
   Drücke folgende Vektoren mit A, B, C, D und E aus:
   a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $-\vec{b} - \vec{c}$ **c)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ **d)** $-(\vec{b} + c + \vec{d})$ **e)** $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

6. Vereinfache
   a) $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$
   d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT}$ **e)** $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ}$

7. Bestimme $\vec{x}$:
   a) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{0}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

8. ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$.
   Drücke mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:
   a) $\overrightarrow{ED}$ **b)** $\overrightarrow{DE}$ **c)** $\overrightarrow{FD}$ **d)** $\overrightarrow{FC}$
   e) $\overrightarrow{FB}$ **f)** $\overrightarrow{FA}$ **g)** $\overrightarrow{AD}$

Griechisches Alphabet

Α α	Α α	Alpha	Ν ν	Ν ν	Ny
Β β	Β β	Beta	Ξ ξ	Ξ ξ	Xi
Γ γ	Γ γ	Gamma	Ο ο	Ο ο	Omikron
Δ δ	Δ δ	Delta	Π π	Π π	Pi
Ε ε	Ε ε	Epsilon	Ρ ρ	Ρ ϱ	Rho
Ζ ζ	Ζ ζ	Zeta	Σ σ	Σ σ	Sigma
Η η	Η η	Eta	Τ τ	Τ τ	Tau
Θ ϑ	Θ ϑ	Theta	Υ υ	Υ υ	Ypsilon
Ι ι	Ι ι	Iota	Φ φ	Φ φ	Phi
Κ κ	Κ ϰ	Kappa	Χ χ	Χ χ	Chi
Λ λ	Λ λ	Lambda	Ψ ψ	Ψ ψ	Psi
Μ μ	Μ μ	My	Ω ω	Ω ω	Omega

Wortkunde: Griechisch

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
ἀξίωμα axioma	Werschätzung, Forderung	**Axiom** (das)		Grundvoraussetzung
βάσις basis	Schritt, Fuß Grundlage	**Basis** **basieren** auf	Schritt	Grundlage, -linie, -fläche, -zahl beruhen auf, sich gründen auf
γῆ gä γέω- geo-	Erde, Feld Land, Grund (Vorsilbe)	**Geometrie**	Landmessung	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren
		Geografie	Erdbeschreibung	Erdkunde
		Geologie	Erdwissenschaft	Lehre von Entstehung und Bau der Erde
		geozentrisch	erdmittelpunktig	auf die Erde als Mittelpunkt bezogen
γράφειν grafein γράμμα gramma	(ein)ritzen, schreiben zeichnen Buchstabe, (In)Schrift Geschriebenes, Zeichnung	**Grafik**	Schreib-, Zeichenkunst	Sammelbegriff für Holzschnitt, Kupferstich, Lithografie und Handzeichnung
(γράφειν ist verwandt mit ›kerben‹)		**Griffel**		Schreib-, Zeichenstift
		Fotografie	Lichtzeichnung	Verfahren zur Herstellung von Bildern, die durch Licht erzeugt werden
		Geografie	Erdbeschreibung	Erdkunde
		Paragraf	Danebengeschriebenes	mit § numerierter kleiner Abschnitt
		Parallelogramm	Nebeneinandergeschriebenes	Viereck mit parallelen Seiten
		Programm	Vorhergeschriebenes	festgelegter Ablauf einer Veranstaltung, von Befehlen (Computer-Programmierung)
		Pentagramm	Fünfzeichnung	fünfzackiger Stern, Drudenfuß
		Diagramm		zeichnerische Veranschaulichung
		Telegraf, -gramm	Fernschreiber, -schreiben	Fernschreiber, Fernschreiben
γωνία gonia	Winkel(maß), Ecke	**Gon**	Winkel	Gradmaß des Winkels: 100 Gon = 90°
(γωνία ist verwandt mit ›Knie‹)		**Goniometrie**	Winkelmessung	Rechnung mit Winkelfunktionen
		Polygon (das)	Vieleck	Vieleck
		Diagonale	Durcheck	Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken
		Pentagon (das)	Fünfeck	Fünfeck, amerikanisches Verteidigungsministerium (fünfeckiger Grundriss)
		Trigonometrie	Dreiecksmessung	Dreiecksberechnung, -messung
διά dia	durch, zwischen, auseinander	**Diagonale**	Durcheck	Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken
		Diagramm		zeichnerische Veranschaulichung
		Diapositiv		durchsichtiges Positiv eines Fotos
κατά kata	(her)unter, nieder	**Katheten**	Herabhängende	Dreieckseiten, die einen rechten Winkel bilden
		Kathode	Ausgang, Heimkehr	negative Elektrode

Wortkunde: Griechisch

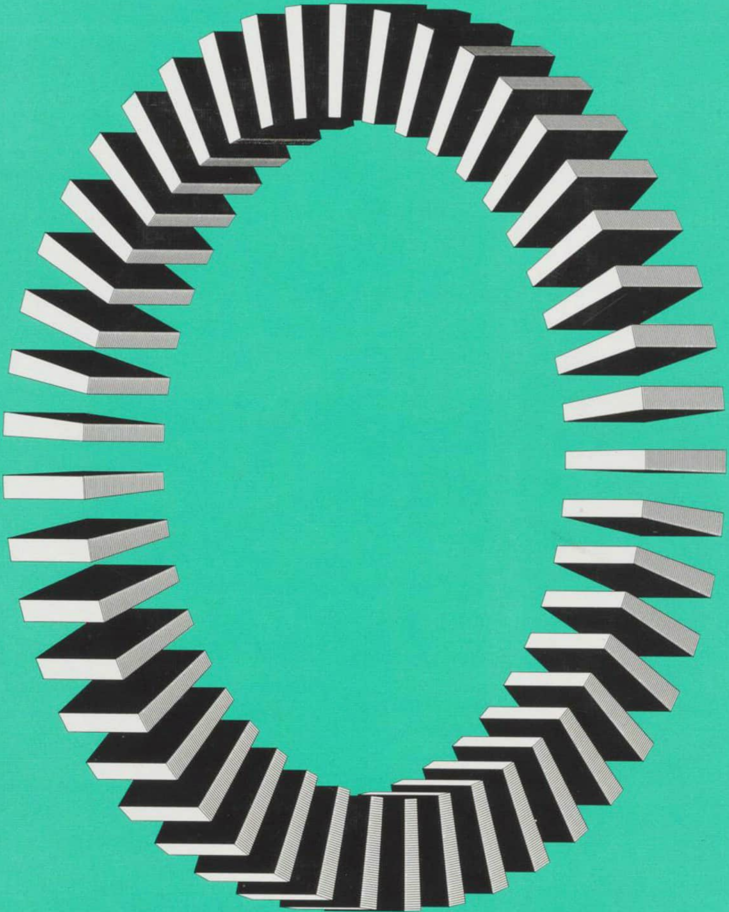
Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
κρίσίς krisis κριτήριον kritärion	(Unter-, Ent-) Scheidung, Urteil Kennzeichnen	**Krise**		Entscheidungssituation, Höhe-, Wendepunkt
		Kriterium		entscheidendes Kennzeichen
		Kritik		Beurteilung, (oft) Tadel
		kritisch		streng prüfend, tadelnd, bedenklich
μέτρον metron -μετρία -metria	Maß -messung	**Meter**	Maß	Längeneinheit
		Geometrie	Landmessung	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren
		Planimetrie	Flachmessung	Lehre von den ebenen Figuren
		Stereometrie	Raummessung	Lehre von den räumlichen Figuren
		Symmetrie	Ebenmaß	Ebenmaß, Spiegelungsgleichheit
παρά para	(da)neben, vorbei, gegen	**parallel**	nebeneinander	gleich laufend
		Parallelogramm	Nebeneinandergeschriebenes	Viereck mit parallelen Seiten
		Parallelprojektion		durch parallele Strahlen verursachter Schatten
		Parabel	Danebenwurf	Wurflinie
		Paragraf	Danebengeschriebenes	mit § numerierter kleiner Abschnitt
		paradox	gegen die Meinung	scheinbar widersinnig
πολύ poly	viel	**Polygon**	Vieleck	Vieleck
		Polyeder	Vielfläche	Vielflach, Vielflächner
		Polynom	Vielausdruck	mehrgliedriger Rechenausdruck
		Polygamie	Vielheirat	Vielehe
ὑπό hypo	unter, unterhalb	**Hypotenuse**	Daruntergespannte	Strecke ›unter‹, gegenüber dem rechten Winkel
		Hypothese	Unterlage, Unterstellung	unbewiesene Annahme
τράπεζα trapeza	Tisch	**Trapez**	Tisch	Viereck mit zwei parallelen Seiten

Stamm		**enthalten in**	**wörtlich übersetzt**	**Bedeutung**
cavea	Höhle, Käfig	**konkav**	hohl	nach innen gewölbt
circus	Kreis, Ring	**Zirkus**	Zirkus, Rennbahn	Zirkus
		zirka	ringsherum	ungefähr
		zirkulieren	kreisen	im Umlauf sein
		Zirkel		Gerät zum Kreiszeichnen und Streckenabtragen
		Zirkelschluss	sich im Kreis drehender Beweis	Beweis, bei dem die Behauptung in der Voraussetzung steckt
congruens	übereinstimmend	**kongruent**	übereinstimmend	deckungsgleich
finis	Grenze, Ende	**Finale**		Schlusssatz, -teil, Endrunde
		Finish		letzter Schliff, Endkampf
		definieren	abgrenzen	begrifflich bestimmen
		definitiv		endgültig
linea (linea ist verwandt mit Leine)	Faden, Linie	**Linie**	Linie	Linie
		Lineal		Gerät zum Zeichnen gerader Linien
		linear		geradlinig
ordo	Reihenfolge (An)Ordnung Rang	**Orden**		Ehrenzeichen
		ordnen		ordnen
		Order		Befehl, Auftrag
		ordinär	Entwicklung: ordentlich → gewöhnlich → niedrig → gemein → vulgär	
		Ordinalzahl		Ordnungszahl: 1, 2, 3, usw.
		Ordinate		y-Wert eines Punkts im Koordinatensystem
		koordinieren	beiordnen	aufeinander abstimmen
		Koordinaten		auf den Ursprung bezogene Zahlen
plenus	voll, vollständig	**Plenum**	Volles	Vollversammlung des Parlaments
		komplett		vollständig
		komplementär	voll machend	ergänzend
		Komplementwinkel		Winkel, die sich zu 90° ergänzen
		Supplement		Ergänzungsband, -teil
		Supplementwinkel		Winkel, die sich zu 180° ergänzen
postulare (das Stammwort ist poscere: fordern poscere ist verwandt mit forschen)	fordern	**Postulat**	Forderung	logische und notwendige Annahme, die unbewiesen, aber glaubhaft ist
		postulieren	fordern	ein Postulat aufstellen
quadrum	Viereck	**Quader**		Körper mit lauter rechteckigen Flächen
		Quadrat		rechtwinkliges Viereck mit gleich langen Seiten
		Quadrant		eines der vier Felder im Koordinatensystem

Wortkunde: Latein

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
rota	Rad, Scheibe (rota ist verwandt mit Rad)	**rotieren**	kreisförmig drehen	umlaufen, sich um eine Achse drehen
		Rotation		Drehung
		Rotor		sich drehender Teil einer elektrischen Maschine
scalae	Treppe, Leiter	**Skala**		Maßeinteilung in Messgeräten
		eskalieren		sich stufenweise steigern
struere	schichten, aufbauen (struere ist verwandt mit streuen)	**Struktur**	Gefüge, Bauwerk	Aufbau, innere Gliederung
		konstruieren	aufschichten, (er)bauen	eine Figur zeichnerisch darstellen, die Bauart einer Maschine, eines Gebäudes entwerfen
		konstruktiv		aufbauend
		instruieren	unterrichten, ausrüsten	in Kenntnis setzen, anleiten
		instruktiv		lehrreich
		Instrument		Gerät
transferre	hinübertragen, verschieben	**Transfer**	Übertrag	Zahlung ins Ausland in fremder Währung
		Translation	Übertragung, Verschiebung	Verschiebung
vehere	fahren, tragen	**Vehikel**	Fahrzeug	klappriges, altmodischesFahrzeug
		vehement	auffahrend	stürmisch
		Vektor	Fahrer, Träger	gerichtete Größe
		konvex	zusammengetragen	nach außen gewölbt, erhaben

Register



ISBN 3-486-03266-6

Bestell-Nr. **03266**-6