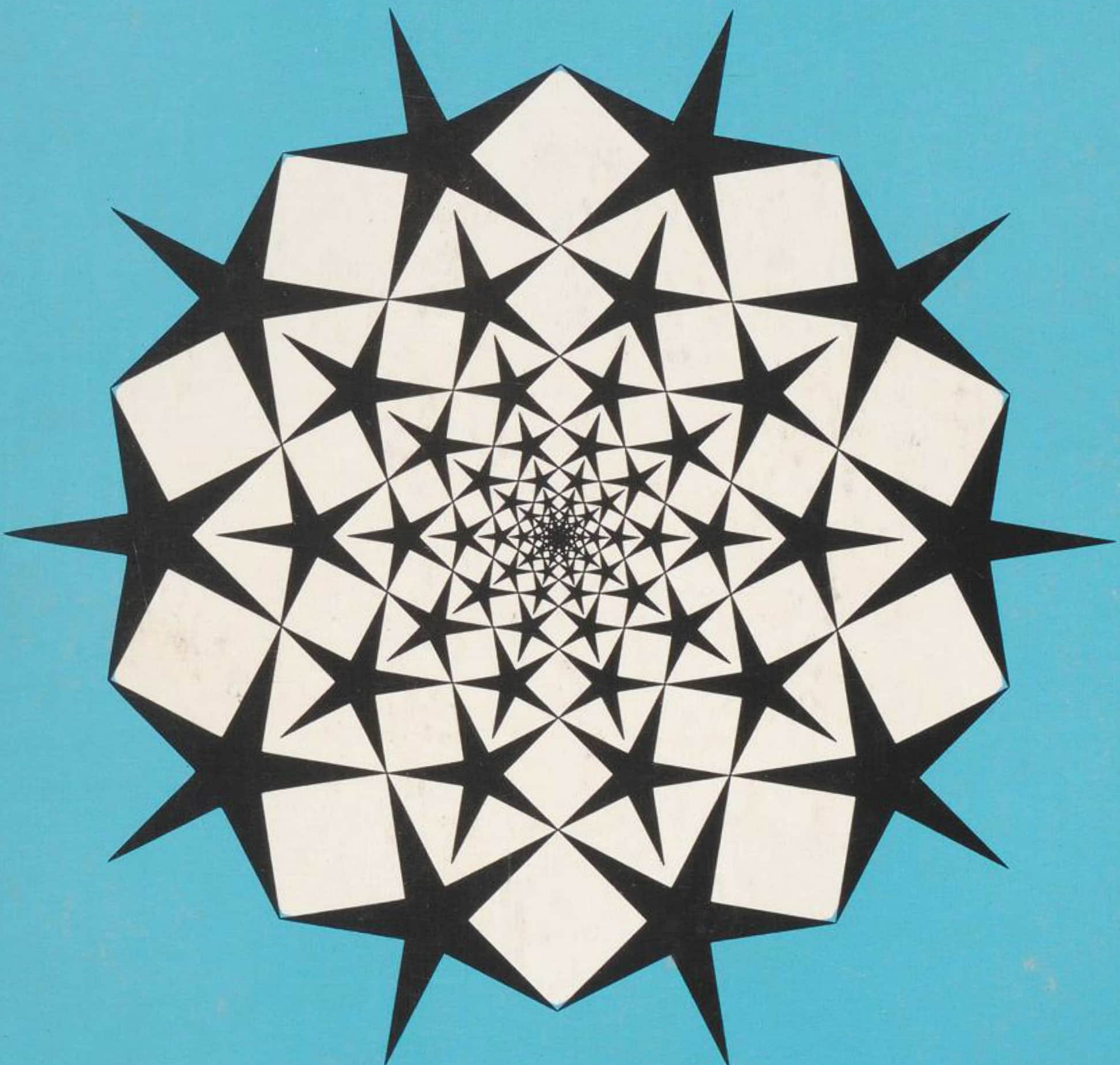
Barth · Krumbacher · Ossiander · Barth

Anschauliche Geometrie 9

Lösungen



Oldenbourg

Anschauliche Geometrie 9

Lösungen

Elisabeth Barth
Friedrich Barth · Gert Krumbacher
Konrad Ossiander

Oldenbourg

Das Papier ist aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff hergestellt, ist säurefrei und recyclingfähig.

2. Auflage 1999 R E
Druck 03 02
Die letzte Zahl bezeichnet das Jahr des Drucks.

Umschlag: Gert Krumbacher
Lektorat: Dr. Willibald Pricha
Herstellung: Karina Hack

Satz und Zeichnungen: Gert Krumbacher
Druck und Bindung: MM-Druck GmbH, München

ISBN 3-486-03297-6

1.Kapitel

Aufgaben zu 1.1

12/1. **a)** Nein, zum Beispiel $b_1 = 5$, $l_1 = 3$, $b_2 = 10$, $l_2 = 6$
b) $\frac{b}{s} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} a \cdot h_s$, also $h_a : h_s = 3 : 2$; **c)** $\frac{a}{a/2} = \frac{2}{1}$

12/2. $\frac{A'}{A} = \frac{3}{2}$ **14/3.** $\frac{s'}{s} = \frac{1}{1}$

12/4. $\frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b$, also $a : b = h_b : h_a$

13/5. **a)** $l = \frac{16}{7}$ **b)** $b' = \frac{63}{4}$ **c)** $\frac{A}{A'} = \frac{1}{25}$

13/6. **a)** $f = \frac{10}{3}$ **b)** $d = \frac{12}{5}$, $g = \frac{27}{5}$ **c)** $f = 9, h = 12$ **d)** $a = 2{,}5$
e) $a = 4, b = 3$ **f)** $h = 6, g = 9$ **g)** $b = \frac{8}{3}$ **h)** $e = \frac{6}{7}$

13/7. **a)** $\overline{A'B'} = \frac{4}{3}$ **b)** $\overline{BB'} = \frac{7}{2}$ **c)** $\overline{OB} = 12$

13/8. Parallelstrecken: 3, 6, 9 Teilstrecken auf b: 2, 5

13/9. Entfernungen: $\frac{8}{3}, \frac{20}{3}$

13/10. $\overline{FB} = \overline{ED}$, also $\overline{CF} : \overline{FB} = 3 : 1$, $\overline{CF} : \overline{CB} = 2 : 3$

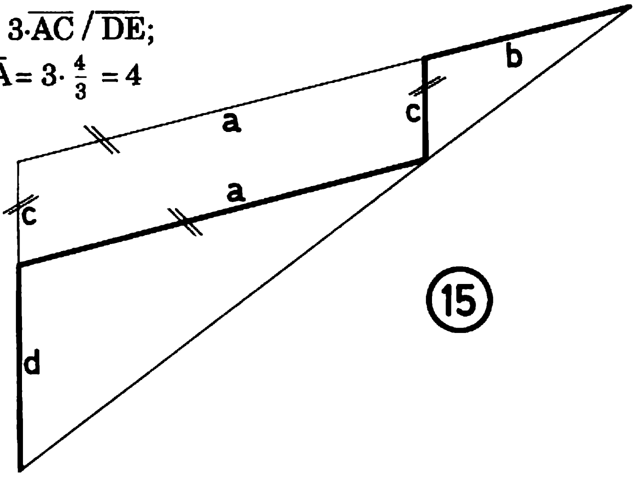
13/11. g sei die Parallele durch A zur x-Achse, h_B die Parallele durch B zur y-Achse, h_T die Parallele durch T zur y-Achse; $g \cap h_B = \{C\}$, $g \cap h_T = \{C_1\}$
$\overline{BC} : \overline{CA} = 8:5$, $\overline{SC_1} : \overline{C_1A} = 3:2$, also liegt S nicht auf AB,
analog erhält man: $T \in AB$, $U \notin AB$, $V \in AB$.

13/12. $\overline{FA} : \overline{AC} = 3 : \overline{DE}$, also $\overline{FA} = 3 \cdot \overline{AC} / \overline{DE}$;
wegen $\overline{AC} : \overline{DE} = \frac{4}{3}$ gilt $\overline{FA} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$

14/13. h = 30m

14/14. $\overline{AB} = 12$, $\overline{BT} = 9$, $\overline{AT} = 15$

14/15. $\left.\begin{array}{l} \frac{c+d}{a+b} = \frac{c}{b} \\ \frac{c+d}{a+b} = \frac{d}{a} \end{array}\right\} \frac{c}{b} = \frac{d}{a}$ also $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$

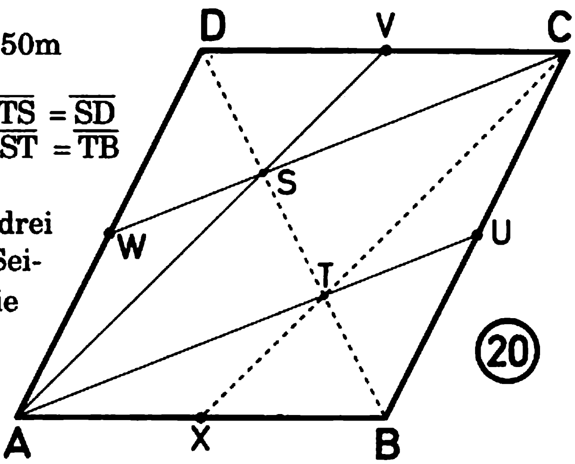


15

14/16. $d = 0{,}38\text{cm}$

14/17. $d = 0{,}325\text{cm}$

14/18. $b = 72\text{m}$ **15/19.** $d = 150\text{m}$



15/20. **a)** $\overline{AW} : \overline{WD} = \overline{TS} : \overline{SD} = 1{:}1$, also $\overline{TS} = \overline{SD}$
$\overline{CU} : \overline{UB} = \overline{ST} : \overline{TB} = 1{:}1$, also $\overline{ST} = \overline{TB}$

b) AV und CX teilen [BD] auch in drei gleich lange Strecken, wenn X Seitenmitte von [AB] ist (Beweis wie in **a)**). Aus der Eindeutigkeit von Teilpunkt S folgt: $S \in AV$.

15/21. $\overline{EF} + x = 10$, $y = \overline{EC}$
ΔUBC: $\frac{10}{10-x} = \frac{5}{5-y}$, also $x = 2y$ (*)
andrerseits gilt im ΔABV: $\frac{5}{x} = \frac{10}{10-y}$, also $50 - 5y = 10x$
mit (*): $50 - 5y = 20y$, also $y = 2$, und damit $x = 4$; $\overline{EF} = 6$; $\overline{GF} = 8$

15/22. $\left.\begin{array}{l} \frac{r}{q} = \frac{c}{a+b} \\ \frac{r}{q} = \frac{b}{a} \end{array}\right\}$ also $\frac{c}{a+b} = \frac{b}{a}$, das heißt $c = \frac{b^2}{a} + b$

16/23. **a)** $\overline{MS} : \overline{SR} = w{:}v$, $\overline{SM} : \overline{SR} = y{:}x \Rightarrow w{:}v = y{:}x \Rightarrow xw = yv$ **b)** $PQ \| AO$

16/24. $\left.\begin{array}{l} y{:}d = \overline{EC} : \overline{AC} \\ x{:}b = \overline{AE} : \overline{AC} \end{array}\right\}$ Addition ergibt $\frac{y}{d} + \frac{x}{b} = \frac{\overline{AE} + \overline{EC}}{\overline{EC}} = 1$

16/25. $\overline{DE} : s_c = \overline{BD} : \overline{BM_c} \Rightarrow \overline{DE} = s_c \cdot \overline{BD} : \overline{BM_c}$
$\overline{DF} : s_c = \overline{AD} : \overline{AM_c} \Rightarrow \overline{DF} = s_c \cdot \overline{AD} : \overline{AM_c}$ Addition ergibt
$$\overline{DE} + \overline{DF} = s_c \cdot \left(\frac{\overline{BD}}{\overline{BM_c}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{AM_c}} \right) = s_c \cdot \frac{c}{c/2} = 2s_c$$

16/26. Mit $\overline{FQ} = x$, $\overline{QE} = y$, $\overline{GP} = v$, $\overline{PH} = w$, $DB \cap QP = \{R\}$ gilt
$$\frac{\overline{RB}}{\overline{DR}} = \frac{y}{x} \text{ und } \frac{\overline{RB}}{\overline{DR}} = \frac{w}{v} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{w}{v} \Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{v+w}{v}.$$
TQ schneide GH in Z, also ist $\frac{\overline{GH}}{\overline{GZ}} = \frac{v+w}{\overline{GZ}} = \frac{x+y}{x}$
andrerseits gilt $\frac{\overline{GH}}{\overline{GP}} = \frac{v+w}{\overline{GP}} = \frac{x+y}{x}$
also ist $\overline{GP} = \overline{GZ} \Rightarrow P = Z$, das heißt $AC = PQ$ läuft durch T.

17/27. a) $\frac{\overline{WC}}{\overline{VA}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SA}+\overline{AC}}{\overline{SA}} = 1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{SA}} = \text{const} \Rightarrow$ S unverändert

b) $\sphericalangle VBW = 180° - \sphericalangle ABV - \sphericalangle CBW = 180° - \frac{\omega}{2} - (90° - \frac{\omega}{2}) = 90°$

17/28. a) $\overline{AM_c} : \overline{M_cB} = 1 = \overline{AI} : \overline{IV} \Rightarrow \overline{AI} = \overline{IV}$
$\Delta M_cVL \cong \Delta VJC$ (SWW-Satz), also $\overline{LM_c} = \overline{CJ}$

b) $\overline{BJ} : \overline{LM_c} = 2:1$, $\overline{BJ} : \overline{CJ} = 2:1$, $a : \overline{CJ} = 3:1$, $c : \overline{JK} = 3:1$, $\overline{VA} : \overline{VJ} = 3:1$
$b : \overline{CK} = 3:1$ (analoge Rechnung wie bei Seite a)

c) $b : \overline{KC} = a : \overline{CB} = 3:1$, also $JK \parallel AB$

d) Fläche(AM_cV) = Fläche(BVM_c), $[g = \overline{AM_c} = \overline{M_cB}$, gleiche Höhe h$]$
Fläche(AM_cV) = Fläche(AVC), $[g_1 = \overline{M_cV} = \overline{VC}$, gleiche Höhe $h_1]$
Fläche(BVM_c) = Fläche(BCV), $[g_2 = \overline{M_cV} = \overline{VC}$, gleiche Höhe $h_2]$
Fläche(VJC) = $\frac{1}{2}\overline{VC} \cdot h'$. Mit $h' = \frac{1}{3}h_2$ folgt: Fläche(VJC) = $\frac{1}{2}\overline{VC} \cdot \frac{1}{3}h_2$
also gilt Fläche(VJC) : Fläche(ABC) = 1 : 12

17/29. a) $\Delta UVM \cong \Delta WXM$ $[\overline{UM} = \overline{MX} = r, \overline{UV} = \overline{WX}, \sphericalangle MUV = \sphericalangle MXW,$
denn ΔUXM ist gleichschenklig$]$
$\Rightarrow \overline{MV} = \overline{WM}$, also ist ΔVWM ist gleichschenklig,
die Dreiecke ABM und VWM sind also gleichschenklig mit demselben Winkel an der Spitze $\Rightarrow \sphericalangle MVW = \sphericalangle MAB \Rightarrow AB \parallel VW = UX$

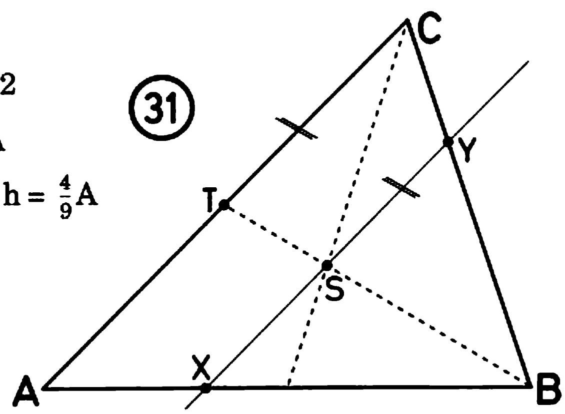
b) $\overline{PA} : \overline{VU} = \overline{AB} : \overline{VW} = \overline{AM} : \overline{VM}$, also folgt wegen $\overline{VU} = \overline{VW}$ auch
$\overline{PA} = \overline{AB}$; ebenso ergibt sich $\overline{AB} = \overline{BQ}$.
Konstruktion: Man verlängert die durch die Radien gegebene Sehne [AB] über A und B hinaus um $\overline{AB}$; verbindet man die Endpunkte mit dem Kreismittelpunkt, so ergeben die Schnittpunkte auf dem Kreis die gesuchte Sehne – diese wird gedrittelt.

18/30. Man zeichnet die Parallelen zu AB durch U beziehungsweise W.
Die vier Geraden durch C schneiden aus
der Parallele durch W drei gleich lange Strecken der Länge x aus,
der Parallele durch U drei gleich lange Strecken der Länge y aus.
Wegen $y = 3x$ folgt aus $x : \overline{VW} = y : \overline{VU}$ dann $\overline{VU} = 3 \cdot \overline{VW}$.

18/31. a) $\overline{TB} : \overline{SB} = 3:2 = \overline{CB} : \overline{YB}$
$\Rightarrow \overline{AC} : \overline{XY} = \overline{CB} : \overline{YB} = 3:2$

b) Fläche(ABC) = $\frac{1}{2}gh = A$
Fläche(XBY) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}g \cdot \frac{2}{3}h = \frac{4}{9}A$
Fläche(AXPC) = $\frac{5}{9}A$

31

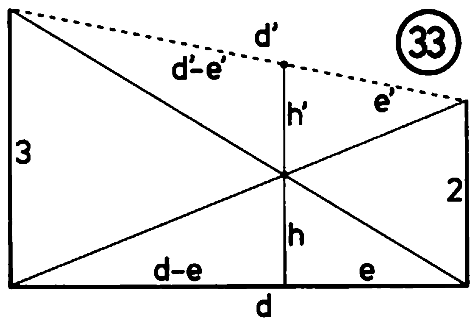


18/32. $AM_cM_aM_b$ ist ein Parallelogramm. Die Diagonale $[AM_a]$ halbiert die andere Diagonale $[M_cM_b]$. Ebenso halbiert im Parallelogramm $M_cBM_aM_b$ die Diagonale $[M_bB]$ die Diagonale $[M_cM_a]$.

18/33. **a)** Aus $\frac{h}{3} = \frac{e}{d}$ und $\frac{h}{2} = \frac{d-e}{d}$
folgt $h = \frac{6}{5}$
die Höhe beträgt 1,2m.

b) h hängt nicht von d ab.

c) Aus $\frac{h'}{3} = \frac{e'}{d'}$ und $\frac{h'}{2} = \frac{d'-e'}{d'}$
folgt $h' = \frac{6}{5}$
die Höhe beträgt 1,2m.



18/34. $ST \cap DC =: \{E\}$, $ST \cap AB =: \{F\}$
es seien $\overline{AF} = a_1$, $\overline{FB} = a_2$, $\overline{DE} = c_1$ und $\overline{EC} = c_2$;
dann gilt $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ und $\frac{a_1}{c_2} = \frac{a_2}{c_1} = \frac{\overline{SF}}{\overline{SE}}$
$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_2}{c_1} \Rightarrow c_1^2 = c_2^2 \Rightarrow c_1 = c_2$ und damit $a_1 = a_2$

18/35. **a)** $\overline{AB} : \overline{EQ} = \overline{DB} : \overline{DQ}$, $\overline{AB} : \overline{PF} = \overline{CA} : \overline{CP}$
$\left.\begin{array}{l} \overline{DS} : \overline{CS} = \overline{DB} : \overline{CA} \\ \overline{DS} : \overline{CS} = \overline{DQ} : \overline{CP} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{DB} : \overline{DQ} = \overline{CA} : \overline{CP}$
damit folgt $\overline{AB} : \overline{EQ} = \overline{AB} : \overline{PF} \Rightarrow \overline{EQ} = \overline{PF}$

b) Nach **a)** gilt $\overline{EQ} = \overline{PF} \Rightarrow \overline{EP} = \overline{QF}$, also ist der Mittelpunkt M von $[PQ]$ auch Mittelpunkt von $[EF]$.

c) MS schneide AB in U und DC in V
$\overline{AU} : \overline{UB} = \overline{PM} : \overline{MQ}$, also $\overline{AU} = \overline{UB}$, weil $\overline{PM} = \overline{MQ}$
$\overline{DV} : \overline{VC} = \overline{QM} : \overline{MP}$, also $\overline{DV} = \overline{VC}$.
Nach Aufgabe **34** halbiert TS die Basen,
das heißt V und U liegen auf TS. Also gilt TS = VU = MS.

19/36. **a)** $\frac{1}{m_h} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{ab} + \frac{b}{ab}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

b)

m_a	9	2,5	3	3
m_h	8	1,6	3	0

19/36. c)
$$\left.\begin{array}{l}\overline{XS}:\overline{AB}=\overline{DS}:\overline{AB}\\ \overline{DS}:\overline{DB}=\overline{CS}:\overline{CA}\\ \overline{CS}:\overline{CA}=\overline{SY}:\overline{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{XS}:\overline{AB}=\overline{SY}:\overline{AB}\quad\Rightarrow \overline{XS}=\overline{SY}$$

mit $x := \frac{1}{2}\overline{XY}$ gilt $x:c=\overline{AS}:\overline{AC}$, $x:a=\overline{SC}:\overline{AC}$

$$\Rightarrow \frac{x}{c}+\frac{x}{a}=\frac{\overline{AS}+\overline{SC}}{\overline{AC}}\Rightarrow \frac{x(c+a)}{ac}=1\Rightarrow 2x=\frac{ac}{a+c}$$

d) Für die Mittellinie gilt $m_a=\frac{a+c}{2}$

wegen $(a-c)^2\ge 0 \Rightarrow a^2-2ac+c^2\ge 0 \Rightarrow (a+c)^2\ge 4ac \Rightarrow \frac{a+c}{2}\ge\frac{2ac}{a+c}$

gilt $m_a \ge m_h$

19/37. Es seien $\overline{DF}=e$, $\overline{TF}=f$, $\overline{DZ}=h$; aus $\frac{f}{e}=\frac{b+g}{a+g}$, $\frac{f}{e}=\frac{m}{h}$ und $\frac{m}{h}=\frac{g}{a}$

folgt $\frac{g}{a}=\frac{b+g}{a+g} \Rightarrow ag+g^2=ab+ag \Rightarrow g^2=ab$

19/38. Die Parallele zu AC durch P schneide BC in F; $e:=\overline{BF}$.
Die Parallele zu BD durch Q schneide BC in G; $f:=\overline{CG}$.

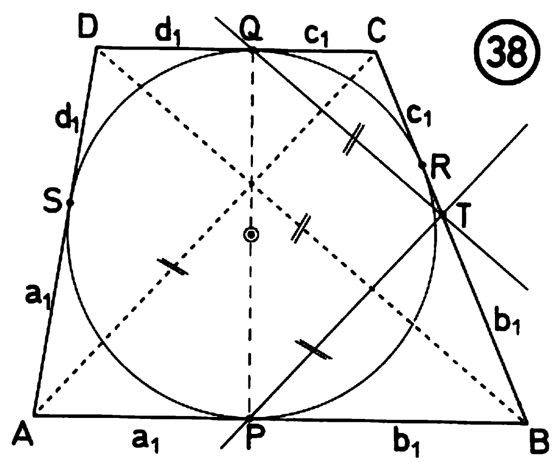
$$\left.\begin{array}{l}e:b=b_1:a\\ f:b=c_1:c\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{b_1}{a}+\frac{c_1}{c}=\frac{e+f}{b}$$

wegen $a_1:a=c_1:c$ folgt daraus

$$\frac{b_1}{a}+\frac{a_1}{a}=\frac{e+f}{b},$$

das heißt $1=\frac{e+f}{b}$

$\Rightarrow e+f=b \Rightarrow F=G=T.$



20/39. AB schneidet PV in D. $\overline{PD}=1$, weil Dreieck DBP gleichschenklig ist.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{s}{1}=\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}\\[4pt] \frac{x-s}{s-1}=\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{s}{1}=\frac{x-s}{s-1}\Rightarrow s^2-s=x-s\Rightarrow s^2=x$$

20/40. a) $x=8$ $y=12$ $w=4$ $z=12$ b) $x=7{,}5$ $y=6$ $z=10$

20/41. Immer gilt: $x=\frac{cb}{a}$

20/42. $\overline{AB}=a$, $\overline{DC}=\frac{a}{2}$;

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{DS}:\overline{SB}\\ \frac{a}{2}:a=\overline{DS}:\overline{SB}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{AP}:\overline{PB}=1:2\Rightarrow \overline{AP}=\frac{a}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BQ}:\overline{QA}=\overline{CS}:\overline{SA}\\ \frac{a}{2}:a=\overline{CS}:\overline{SA}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{BQ}:\overline{QA}=1:2\Rightarrow \overline{BQ}=\frac{a}{3}$$

Insgesamt gilt $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QB}=\frac{a}{3}$

21/43. **a)** $C(5|0)$ **b)** $A(1|2)$ $C(5|12)$ **c)** $A(0|1)$ $B(6|0)$ $C(0|5)$
d) 2 Lösungen: $S_1(5|4)$, $A_1(1|1)$ und $S_2(5|7)$, $A_2(1|10)$

21/44. Man trägt zum Beispiel $s_c = [CM_c]$ an und spiegelt C und S an M_c.
Dreieck ASS' ist konstruierbar aus $\overline{S'A} = \frac{16}{3}$ und $\overline{SA} = \frac{10}{3}$.

21/45. **a)** $x = 2$ **b)** $x = 39$ (Konstruktion mit der X–Figur)

21/46. **a)** $x = 4{,}5$ **b)** $x = 2{,}56$ (Konstruktion mit der V–Figur)

21/47. $x = 3{,}875$ **20/48.** $x = 8$

21/49. $u = 595$, $v = \frac{71400}{169}$, $w = \frac{7140}{13}$, $x = \frac{70805}{169}$, $\overline{TA} = 2028$, $\overline{TB} = 2636{,}4$

22/50. **a)** $\overline{CT} = 18$, $\overline{DT} = 14$ **a)** $\overline{CF}:\overline{FE} = 1:2$

22/51. **a)** $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot h}{\frac{1}{2}b \cdot h} = \frac{a}{b}$, $\frac{A_3}{A_4} = \frac{\frac{1}{2}u \cdot h'}{\frac{1}{2}v \cdot h'} = \frac{u}{v}$
b) $A_1 = \frac{1}{2}\overline{BV} \cdot d = A_3$, $d = d(BV, AU)$; $A_2 = \frac{1}{2}\overline{BV} \cdot d' = A_4$, $d' = d(CW, BV)$
c) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_3}{A_4}$ also $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$

Aufgaben zu 1.2

24/1. **a)** $a = 10$ **b)** $b = 9$ **c)** $c = 8$

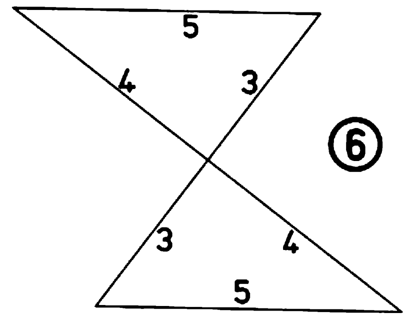
24/2. **a)** $c = 6$ $d = 3$ **b)** $e = 8{,}4$ **c)** $e = 5$
d) $b = \frac{30}{7}$ $c = 3$ $e = \frac{40}{7}$ $f = 4$
e) $\left.\begin{array}{l} \frac{e}{d} = \frac{b}{a} \\ \frac{f}{d} = \frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e+f}{d} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow \frac{e+f}{18-e-f} = 3 \Rightarrow e + f = 13{,}5$
$\frac{e}{f} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{e}{13{,}5-e} = \frac{4}{5} \Rightarrow e = 6$ $d = 4{,}5$ $f = 7{,}5$

24/3. **a)** $v = 6$ $w = 4$ $x = 4$ $y = 3$ $z = 9$
b) $r = 4{,}8$ $u = 8$ $v = 2{,}5$ $w = 3$ $x = \frac{10}{3}$ $y = \frac{14}{3}$ $z = \frac{28}{3}$

24/4. $b = 12m$ **25/5.** $x = \frac{s(1-a)}{a}$

25/6. Gegenbeispiel

$\frac{6}{5} \neq \frac{8}{5}$



25/7. a) $\frac{G}{2} : g = \frac{B}{2} : b \Rightarrow \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$

b) $\frac{G}{2} : \frac{B}{2} = \frac{g-f}{f} \Rightarrow \frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1$

$\Rightarrow \frac{g}{f} = \frac{g}{b} + 1 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ $\quad G = 8$

26/8. a) $x = \frac{r_1 z}{r_1 + r_2}, \quad y = \frac{r_1 z}{r_1 - r_2} \quad (r_1 > r_2)$

b) Für $r_1 = r_2$ gilt: S existiert nicht;

$x = \frac{7}{2}$ (falls beide Kreise höchstens einen Schnittpunkt haben)

Bei Berührung von außen gilt: $z = r_1 + r_2$, also $x = r_1$, $y = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_1 - r_2}$

wenn sich die Kreise schneiden, gilt: T existiert nicht; $y = \frac{r_1 z}{r_1 - r_2}$

c) $r_1 : r_2 = 7 : 3$

26/9. a) $x = 4 \quad y = 20 \quad w = 10 \quad z = 18$

b) $x = 10{,}5 \quad y = 5 \quad w = 12 \quad z = 4$

26/10. Aus $\frac{z}{a} = \frac{u}{y}$ und $\frac{b}{x} = \frac{u}{y}$ folgt $\frac{z}{a} = \frac{b}{x}$, also $z \cdot x = a \cdot b$.

26/11. Wegen $a \parallel b$ gilt: $a : c = \overline{AS} : \overline{SC}$ und $a : c = \overline{BS} : \overline{SD}$.

27/12. a) $d(T,c) = 27 \quad d(T,a) = 36$ b) $d(S,a) = \frac{36}{7} \quad d(S,c) = \frac{27}{7}$

27/13. a) $\overline{EC} = 2 \quad \overline{ED} = \frac{10}{3}$ b) $\overline{TA} : \overline{TD} = 3 : 1$

c) $\left.\begin{aligned} d(T,DE) : d(DE,AB) &= 1{:}2 = 2{:}4 \\ d(C,DE) : d(C,AB) &= 1{:}3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(T,c) = 2 \cdot d(C,c)$

27/14. a) DFBC muss eine Raute sein, das heißt $\overline{CD} = \overline{CB}$.

b) $\overline{AD} = \frac{b}{2}$; $\overline{AD} : \overline{AE} = b : c \Rightarrow \overline{AE} = \frac{c}{2} = \overline{EB}$

$\overline{DE} : \overline{EF} = \overline{AE} : \overline{EB} \Rightarrow \overline{DE} = \overline{EF} = \frac{a}{2}$; $\overline{GB} : a = \overline{EG} : \overline{EF} \Rightarrow \overline{GB} = 2\,\overline{EG}$

c) $\left.\begin{aligned} \overline{GB} : \overline{EG} = a : \overline{EF} &= \overline{CG} : \overline{FG} \\ \overline{CG} : \overline{FG} &= \overline{AG} : \overline{BG} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{GB}^2 = \overline{EG} \cdot \overline{AG}$

27/15. Vergleiche Lehrbuch.

Aufgaben zu 1.3

29/1. **a)** $p \parallel q$ **b)** p und q müssen nicht parallel liegen.

29/2. **a)** $p \parallel q$ **b)** p und q müssen nicht parallel liegen.

29/3. $\left.\begin{array}{l}\overline{KC} : \overline{AC} = \overline{QC} : \overline{PC} \\ \overline{LC} : \overline{BC} = \overline{QC} : \overline{PC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{KC} : \overline{AC} = \overline{LC} : \overline{BC} \Rightarrow AB \parallel KL$

29/4. **a)** $\overline{BC} : \overline{BC'} = r : r'$
b) $\overline{BD} : \overline{BD'} = r : r'$, also $\overline{BC} : \overline{BC'} = \overline{BD} : \overline{BD'} \Rightarrow DC \parallel D'C'$

29/5. $\left.\begin{array}{l}\overline{AB} : \overline{EB} = \overline{CB} : \overline{FB} \\ \overline{AB} : \overline{EB} = \overline{DB} : \overline{GB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{CB} : \overline{FB} = \overline{DB} : \overline{GB} \Rightarrow CD \parallel FG$

30/6. $\left.\begin{array}{l}\overline{AS} : \overline{A'S} = \overline{BS} : \overline{B'S} \\ \overline{BS} : \overline{B'S} = \overline{CS} : \overline{C'S}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AS} : \overline{A'S} = \overline{CS} : \overline{C'S} \Rightarrow AC \parallel A'C'$

30/7. EFGH ist ein Parallelogramm, denn es gilt $EH \parallel AB \parallel FG$ und $\overline{EH} : a = 1 : (k+1)$, $\overline{FG} : a = 1 : (k+1)$, das heißt $\overline{EH} = \overline{FG}$.

30/8. Wegen $DA \parallel BC$ und $\overline{DA} = \overline{DT} = x$, $\overline{BC} = \overline{CT} = y$ gilt:
$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{SC}} = \frac{x}{y} = \frac{\overline{DT}}{\overline{TC}}, \text{ also } \frac{\overline{DS}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{DT}}{\overline{TC}} \Rightarrow ST \parallel BC$$

30/9. **a)** Wegen $ZQ \parallel WP$ gilt: $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{AW}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \dfrac{2}{1} \Rightarrow \overline{AW} = \overline{WZ} = \overline{ZD}$
ähnlich ergibt sich $\overline{BX} = \overline{XY} = \overline{YC}$.
Es sei $\{E\} = AD \cap BC$, wegen $AB \parallel DC$ gilt: $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{DA}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{CB}} \Rightarrow$
$\dfrac{\overline{ED}}{\frac{1}{3}\overline{DA}} = \dfrac{\overline{EC}}{\frac{1}{3}\overline{CB}}$ also $\dfrac{\overline{ED}}{\overline{DZ}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{CY}} \Rightarrow DC \parallel ZY$. Analog gilt: $WX \parallel DC$

b) Die Gerade ES halbiert $[DC]$ und $[AB]$ (vergl. Aufgabe 34, S. 18). Ebenso halbiert SR die Strecke $[PQ]$, was man zum Beispiel bei Spiegelung von S an R erkennt (Parallelogramm!). Damit halbiert SR auch $[AB]$, und wegen der Eindeutigkeit gilt: ES = ER = SR.
Die Trapeze ABCD und WXYZ haben denselben Schnittpunkt E der verlängerten Schenkel. Da aber auch ihre Grundseiten parallel sind, gilt ES = EF, das heißt, E liegt auf SR.

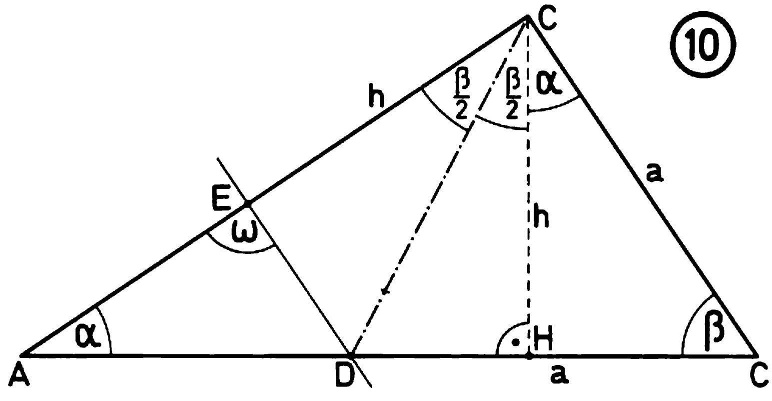
30/10. Dreieck DBC ist gleichschenklig.

$\Rightarrow \sphericalangle CDB = 90° - \frac{\beta}{2} = \alpha + \beta - \frac{\beta}{2} = \alpha + \frac{\beta}{2}$

$\Rightarrow \sphericalangle DCH = \frac{\beta}{2}$, also $\sphericalangle ECD = \beta - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

Es ergibt sich: $\Delta DHC \cong \Delta DCE$ (SWS)

$\Rightarrow \sphericalangle CED = 90° \Rightarrow \omega = 90°$.



2.Kapitel

Aufgaben zu 2.1

35/1. **a)** $\overline{AC} = 6{,}75$ **b)** $\overline{AC} = 3{,}6$ **c)** $\overline{AC} \approx 3{,}86$ **d)** $\overline{AC} = 11$ **e)** $\overline{AC} = 12{,}6$

35/2. **a)** $\tau = \frac{3}{11}$ **b)** $\tau = 6$ **c)** τ ist nicht definiert

35/3. **a)** $T(4|3{,}5)$ **b)** $T(8|5{,}5)$ **c)** $T(2|2{,}5)$

35/4. **a)** $\overline{AT} = 3{,}5$ $\overline{TB} = 1{,}5$ **b)** $\overline{AT} = 1{,}5$ $\overline{TB} = 3{,}5$
c) $\overline{AT} = \frac{40}{9}$ $\overline{TB} = \frac{50}{9}$ **d)** $\overline{AT} = \frac{54}{11}$ $\overline{TB} = \frac{45}{11}$

35/5. **a)** $\overline{AT} = \frac{55}{12}$ $\overline{TB} = \frac{77}{12}$ **b)** $\overline{AT} = \frac{11}{14}$ $\overline{TB} = \frac{143}{14}$

35/6. **a)** $T_1(8{,}5|5)$ $T_2(6{,}5|8)$ **b)** $T_1(5|2)$ $T_2(6{,}5|2{,}5)$

35/7. Basis $b = \frac{17}{5}$ $s = \frac{34}{5}$ **39/8.** $a = \frac{40}{9}$ $b = \frac{48}{9}$ $c = \frac{56}{9}$

35/9. **b)** $\frac{A}{A'} = \frac{15}{8}$

35/10. $\alpha_1 = \alpha_2 = 60°$; $\alpha_1 = \alpha_3 = 30°, \alpha_2 = 60°$; $\alpha_1 = \alpha_4 \approx 19{,}1°$, $\alpha_2 = \alpha_3 \approx 40{,}9°$

36/11. **a)** $T_1(2|0)$ $T_2(3|-\frac{5}{3})$ $N(3|-5)$
b) $T_1(1{,}5|0)$ $T_2 = B$ $T_3(3|-2{,}5)$
c) $T_1(1{,}2|0)$ $T_2(2{,}4|0)$ $T_3(3|-1)$ $T_4(3|-3)$

36/12. **a)** $T_1(\approx 3{,}4|\approx 9{,}9)$ $T_2(7|5)$ **b)** $T_1(3|10)$ $T_1'(7{,}5|3)$

Aufgaben zu 2.2

43/1. **a)** $\overline{AT_a} = 15$ $\overline{T_aB} = 10$ **b)** $\overline{AT_a} = \frac{14}{3}$ $\overline{T_aB} = \frac{35}{3}$
c) $\overline{AT_a} = 10$ $\overline{T_aB} = 12{,}5$ **d)** $\overline{AT_a} = 4{,}5$ $\overline{T_aB} = 1$

43/2. **a)** $\overline{AT_i} = 1{,}5$ $\overline{T_iB} = 4{,}5$ $\overline{AT_a} = 3$ $\overline{T_aB} = 9$
b) $\overline{AT_i} = 4{,}9$ $\overline{T_iB} = 2{,}1$ $\overline{AT_a} = 12{,}25$ $\overline{T_aB} = 5{,}25$
c) $\overline{AT_i} = 1{,}5$ $\overline{T_iB} = 2{,}5$ $\overline{AT_a} = 6$ $\overline{T_aB} = 10$

43/3. a) $\overline{T_iA} : \overline{AT_a} = 1:2$ $\quad\overline{T_iB} : \overline{BT_a} = 1:2$

b) $\overline{T_iA} : \overline{AT_a} = 2:5$ $\quad\overline{T_iB} : \overline{BT_a} = 2:5$

c) $\overline{T_iA} : \overline{AT_a} = 1:4$ $\quad\overline{T_iB} : \overline{BT_a} = 1:4$

43/4. Die Parallele zu AC durch P schneidet BC in S. PQ läuft durch den Mittelpunkt M von [SC], denn PSQC ist ein Parallelogramm. Wegen $\overline{AC} : \overline{PS} = 3:1$ und $\overline{PS} = \overline{CQ}$ folgt: Q teilt [AC] außen im Verhältnis 4 :1.

43/5. $\overline{M_1T} : \overline{TM_2} = r_1 : r_2 = \overline{M_1S} : \overline{SM_2}$

43/6. a) $\overline{AT_i} = 1{,}5 \quad \overline{AT_a} = 3$ $\qquad$ b) $\overline{AT_i} = 5 \quad \overline{AT_a} = 7{,}5$

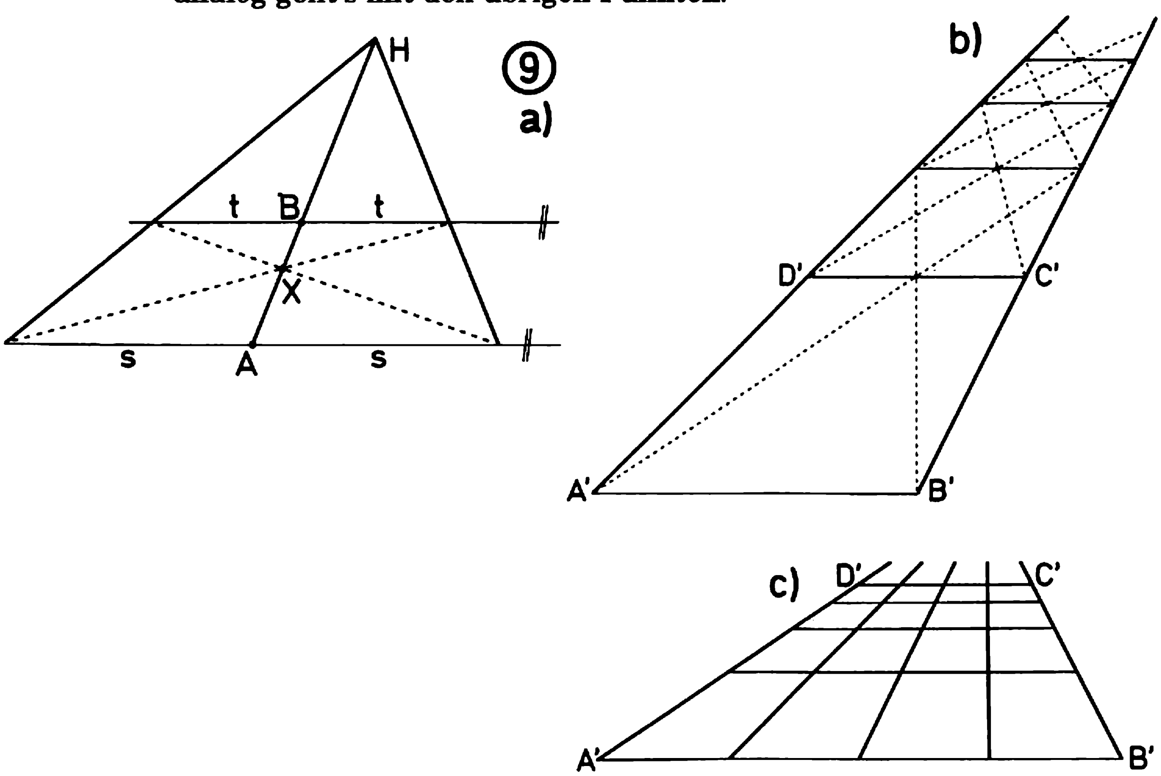
43/7. Es gilt $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AQ} : \overline{QB} = \tau$ (mit $\tau > 0$)

Multiplikation mit $\overline{PB} : \overline{AQ}$ liefert $\overline{AP} : \overline{AQ} = \overline{PB} : \overline{QB} = \tau \cdot \overline{PB} : \overline{AQ}$

$$\Rightarrow \tau \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{AQ}} = \tau' \Rightarrow \tau \cdot \frac{\overline{AQ} - \overline{AP} - \overline{BQ}}{\overline{AQ}} = \tau' \Rightarrow \tau\left(1 - \tau' - \tfrac{1}{\tau}\right) = \tau' \Rightarrow \tau' = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}$$

43/8. a) $T_1(-4{,}5|0) \quad T_2(-9|0) \quad T_3(6|0)$ $\qquad$ b) $\frac{x+3}{3-x} = \frac{t+3}{t-3} \Rightarrow t = \frac{9}{x} \quad (x \neq 0)$

43/9 a) $s : t = \overline{AX} : \overline{XB} = \overline{AH} : \overline{HB}$ (X- und V-Figur)
analog geht's mit den übrigen Punkten.



44/10. Quint: 40 cm, große Terz: 48 cm

44/11. Aus $\overline{CT} : \overline{PM_c} = \overline{TB} : \frac{c}{2}$ und $\overline{CT} : \overline{QM_c} = \overline{AT} : \frac{c}{2}$ folgt durch Addition

$$\frac{c}{c/2} = \frac{\overline{CT}}{\overline{PMc}} + \frac{\overline{CT}}{\overline{QMc}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{CT}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{PMc}} + \frac{1}{\overline{QMc}}\right)$$

44/12. $\rho\sigma\tau = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{1} = -1$, beziehungsweise $\frac{6}{4} \cdot \frac{3{,}6}{10{,}8} \cdot \frac{5{,}6}{2{,}8} = 1$

44/13. $\rho\sigma\tau = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$, beziehungsweise $\frac{7}{7} \cdot \frac{8{,}6}{4{,}3} \cdot \frac{5}{10} = 1$

45/14. M_c, M_a und M_b teilen [AB] bzw. [BC] bzw. [CA] jeweils im Verhältnis 1:1 $\Rightarrow$ $\rho\sigma\tau = 1$. Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA schneiden sich also s_c, s_a und s_b in einem Punkt.

45/15. Für die Teilverhältnisse gilt $\frac{1}{1} \cdot \frac{kb}{b-kb} \cdot \frac{a-ka}{ka} = 1$. Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA schneiden sich AD, BE und s_c also in einem Punkt.

45/16. $$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{a_2} \cdot \frac{a_2}{c_1} = 1$$

Aus der Umkehrung des Satzes von CEVA folgt die Behauptung.

45/17. Die Tangentenabschnitte von C bzw. A bzw. B aus an die Ankreise sind jeweils gleich lang:

(1): $c_1 + b_2 + b_1 = c_2 + a_1 + a_2$

(2): $a_2 + b_1 + b_2 = a_1 + c_2 + c_1$

(3): $b_2 + c_1 + c_2 = b_1 + a_2 + a_1$

(1) – (2): $c_1 = a_2$ (1) – (3): $b_1 = c_2$ (2) + (3): $b_2 = a_1$

damit gilt $\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{b_2}{c_1} \cdot \frac{c_2}{b_2} = 1$.

Aus der Umkehrung des Satzes von CEVA folgt die Behauptung.

Aufgaben zu 2.3

50/1. **a)** $M(10|4)$ $r = 4$ **b)** $M(8{,}25|4)$ $r = 1{,}25$ **c)** $M(0|4)$ $r = 4$
d) $M(8{,}75|4)$ $r = 2{,}25$ **e)** m_{AB}

50/2. Zeichnet man durch B die Parallele g zu HC, so gilt: g schneidet AC in S, wobei $\overline{CS} = a$ ist (ΔCBS ist gleichschenklig). $\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{b}{a}$ (1.Strahlensatz). Im zweiten Bild zeichnet man durch B die Parallele g zu CV. g schneidet AC in S, wobei $\overline{CS} = a$ ist (ΔBCS ist gleichschenklig).$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{b}{a}$ (1.Str.satz).

51/3. Die Punkte liegen auf dem Apollonioskreis mit dem Durchmesser $[TT_1]$, $T_1(14|11)$. Die Punkte liegen auf dem Fasskreisbogenpaar über der Sehne $[AB]$ zum Umfangswinkel 45°.

51/4. Der Kreis mit dem Durchmesser $[T_iT_a]$, $T_i(21|5)$, $T_a(28|5)$ schneidet GR etwa in $Z(7{,}5|22)$.

51/5. Der Apollonioskreis schneidet $[AB]$ in T.
CT halbiert γ, also ist $\sphericalangle ATC = 45° + \frac{\beta}{2}$. Da ΔMTC wegen $\overline{MT} = \overline{MC}$ gleichschenklig ist, folgt $\sphericalangle MTC = 45° + \frac{\beta}{2}$.
Somit gilt: $\sphericalangle MCB = 45° + \frac{\beta}{2} + 45° - \frac{\beta}{2} = 90°$, das heißt $MC \perp BC$.

51/6. Zeichnet man die Seitenmitten M_b und M_c ein, so gilt: ΔQMM_b ist gleichschenklig, denn $\sphericalangle QM_bM = \gamma + \beta$ (Außenwinkel!), $\sphericalangle M_bQM = \alpha/2 \Rightarrow$ $\sphericalangle QMM_b = \alpha/2$. Deshalb folgt $c/2 = \overline{M_bM} = \overline{M_bQ}$ und damit $\overline{CQ} = \overline{M_bC} + \overline{M_bQ} = b/2 + c/2$. Weil auch ΔPM_cM gleichschenklig ist, (Basiswinkel $\alpha/2$), folgt $\overline{M_cP} = \overline{M_cM} \Rightarrow \overline{BP} = \overline{M_cB} + \overline{M_cP} = c/2 + b/2$.

51/7. **a)** Strahlensatz: $\overline{DT} = 5 \Rightarrow \overline{AT} = 15$; $\overline{CT} = 3{,}5 \Rightarrow \overline{BT} = 10{,}5$
b) $x = \frac{40}{17}$ $y = \frac{28}{17}$ $u = \frac{120}{17}$ $v = \frac{84}{17}$

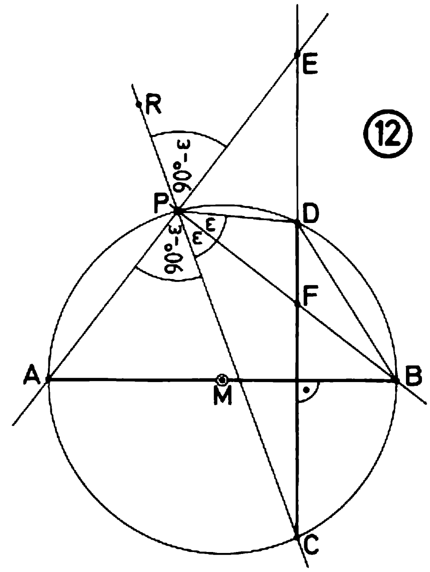
52/8. **a)** $\frac{r}{a-r} = \frac{b}{c} \Rightarrow r = \frac{ab}{c+b}$, $s = a - r = \frac{ac}{c+b}$
b) $y = \frac{bc}{c+b}$ $z = \frac{c^2}{c+b}$ $x = \frac{bc}{c+b}$

52/9. Aus $\overline{TD} : \overline{TC} = \overline{DV} : \overline{VC}$ und $\overline{TD} : \overline{TC} = d : b$ folgt $\overline{DV} : \overline{VC} = d : b$.
$\overline{AW} : \overline{WB} = \overline{DV} : \overline{VC}$ folgt ebenfalls aus dem Strahlensatz.

52/10. Vergleiche Umkehrung des Satzes über die Winkelhalbierenden im Dreieck.

52/11. Wegen des Strahlensatzes sind auch A, E, C und F harmonische Punkte.
Es gilt $\overline{BT} : \overline{TC} = \overline{AE} : \overline{EC} = \overline{AD} : \overline{CD} \Rightarrow DE = w_\delta$ und $DF = w_{\delta^*}$.

53/12. C und D liegen symmetrisch bezüglich $AB \Rightarrow \overline{CB} = \overline{BD}$.
Wegen $\overline{CB} = \overline{BD}$ folgt aus dem Umfangswinkelsatz:
$\sphericalangle CPB = \sphericalangle BPD =: \varepsilon$.
Nach THALES gilt:
$\sphericalangle APC = 90° - \varepsilon = \sphericalangle RPE$
(Scheitelwinkel)
$\sphericalangle DPE = 180° - 2\varepsilon - 90° + \varepsilon$
$= 90° - \varepsilon$.
PB und PE halbieren also den Innen- bzw. Außenwinkel im Dreieck CDP und teilen deshalb [CD] harmonisch.



53/13. a) Man konstruiert T_i und T_a ($\overline{AT_i} = \frac{10}{3}$, $\overline{AT_a} = 10$). Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ schneidet den Kreis um T_i mit $r = 3{,}5$ in C.

b) Man konstruiert T_i und T_a ($\overline{AT_i} = \frac{30}{7}$, $\overline{AT_a} = 10$). Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ schneidet den Kreis um M_b mit $r = 4{,}5$ in B.

c) Man konstruiert T_i und T_a ($\overline{BT_i} = \frac{21}{4}$, $\overline{BT_a} = 10{,}5$). Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ schneidet die Parallele zu BC im Abstand 2 in A_1 und A_2.

d) Teildreieck AH_aC ist konstruierbar aus b, h_a und $\sphericalangle AH_aC = 90°$. Der Thaleskreis über $[T_iT_a]$ ($\overline{AT_i} = \frac{10}{3}$, $\overline{AT_a} = 10$) schneidet CH_a in B.

53/14. a) Analog wie **13 c)** : es gibt zwei Lösungen.
b) Nur eine Lösung ergibt sich für $h_c = r_A = \frac{20}{7}$.

53/15. a) C(3|5) b) Angenähert C(10|3,5)

53/16. Das Entfernungsverhältnis von A und B ist 1:3, das von B und C ist 2:1, das von A und C ist 2:3. Die zugehörigen Apollonioskreise schneiden sich im Punkt für den Flughafen.

53/17. Das Entfernungsverhältnis von B und E ist 2:1. Der zugehörige Apollonioskreis schneidet den Kreis um T mit $r = \overline{BT}$ in zwei Punkten. Der Schatz liegt in S(≈5,3|≈6,3).

3.Kapitel

Aufgaben zu 3.1

60/1. **a)** $m = \frac{6}{5}$ **b)** $m = \frac{4}{3}$ **c)** $m = \frac{1}{4}$

60/2. **a)** $A'(6{,}5|2{,}5)$ $B'(3{,}5|5{,}5)$ **b)** $C'(3{,}5|4)$ **c)** $D'(0{,}5|5{,}5)$ $r' = 1{,}5$

60/3. **a)** $A'(1{,}5|0)$ $B'(9|0)$ $C'(4{,}5|7{,}5)$ **b)** $A'(2{,}25|1)$ $C'(3{,}75|4{,}75)$
c) $A'(-1|-0{,}2)$ $B'(9|-0{,}2)$ $C'(3|9{,}8)$
d) $A = 12{,}5$ $A'_a = 28{,}125$ $A'_b = \frac{225}{32}$ $A'_c = 50$

61/5. **a)** $A'(2{,}5|4{,}5)$ **b)** $B'(4{,}5|4{,}5)$ $C'(6|3{,}25)$
c) $A'(2{,}5|4{,}5)$ $r' = 1{,}5$

617. $m_1 = 1{,}75$ $m_2 = -1{,}75$ **61/8.** $m_1 = 2$ $m_2 = -2$

61/10. **a)** Wegen $AB \parallel A'B' = DC$ ist ABCD ein Trapez, $m = -\frac{1}{2}$
$A' = C$ $B' = D$ $C'(4{,}5|4)$ $D'(6{,}5|4)$
b) $k = -2$ $A'(18|13)$ $B'(4|9)$ $C' = A$ $D' = B$
c) $\frac{u}{u'} = \frac{2}{1}$ $\frac{A}{A'} = \frac{4}{1}$ beziehungsweise $\frac{u}{u'} = \frac{1}{2}$ $\frac{A}{A'} = \frac{1}{4}$

61/11. **a)** $u' = |m| \cdot u \Rightarrow m = \frac{2}{3}$ oder $m = -\frac{2}{3}$
b) $A' = m^2 \cdot A \Rightarrow m = \frac{4}{3}$ oder $m = -\frac{4}{3}$

61/12. **b)** $m = \frac{3}{4}$, $h_c = 4$, $h_c' = 3$, $F_{ABC} = 8$, $F_{A'B'C'} = 4{,}5$ **62/13** $F' = 5F$, also $m = \sqrt{5}$

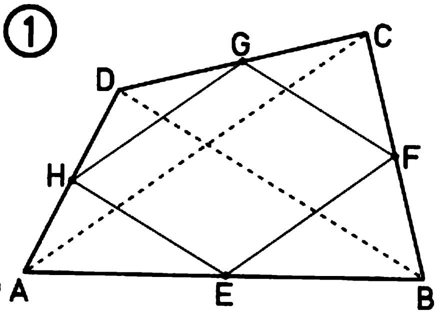
62/14. **a)** $m = -\frac{3}{4}$ **b)** $A'(6{,}5 | 4{,}5)$ $B'(5{,}75 | 1{,}5)$ $C'(8{,}75 | 1{,}5)$

62/15. **a)** $m_1 = \frac{5}{3}$ **b)** $\overline{B'C} = \frac{20}{3}$ **c)** $m_2 = \frac{2}{5}$ **d)** Parallelogramm **e)** $F_{AA'B} = \frac{8}{3}$

62/16. **b)** $m = \frac{4}{7}$, $\overline{CZ} = \frac{8}{3}$

62/17. **b)** F' liegt 1. auf ZF, 2. auf der Parallele zu AF durch A'. **c)** $d(Z, g') = 5$

Aufgaben zu 3.2



67/1. Aus dem Satz folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{HG} \\ \overline{HE} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{FG}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

EFGH ist ein Parallelogramm.
(Da jeweils drei Ecken des Vierecks in einer Ebene liegen, gilt der Beweis auch im Raum.)

67/2. a) Teildreieck BM_aS ist konstruierbar aus $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{3}s_a$ und $\frac{2}{3}s_b$.

b) im Schwerpunkt S mit $\overline{AS} = 2$ errichtet man das Lot auf s_a;
$\overline{SC} = 4$, $\overline{SM_c} = 2$

67/3. a) bei gleichschenkligen Dreiecken
a) bei rechtwinkligen und bei gleichschenkligen Dreiecken

67/4. a) S(6|4) M(7,5|4,5) b) S(8|6) M(6,5|5,5) c) S(7|4) M(7,5|0,5)
d) S(8|4) M(7,5|0,5) e) S(8|6) M(5,5|6) f) S(8|5) M(7,5|2,5)
g) S(7|6) M(8|5) h) S(8|5) M(7,5|2,5)

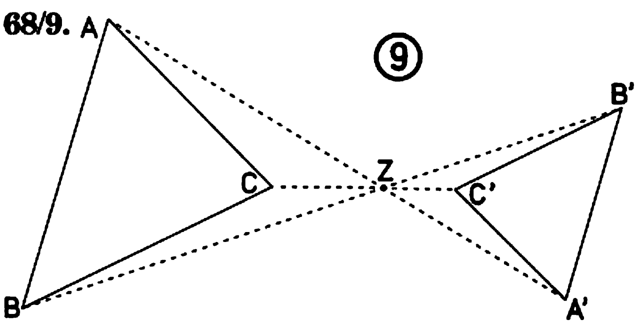
68/5. a) rechtwinklige Dreiecke b) gleichschenklige Dreiecke
c) gleichschenklige Dreiecke d) gleichseitige Dreiecke
e) gleichseitige Dreiecke f) rechtwinklige Dreiecke
g) stumpfwinklige Dreiecke

68/6. a) F(4,5|4,5) b) F(5,5|7) c) F(11|5) d) F(6,5|6,5)

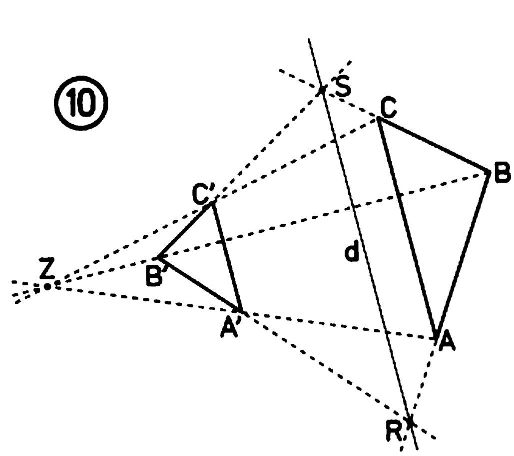
68/7. Der Feuerbachkreis ist Umkreis des Mittendreiecks, also ist sein Radius halb so groß wie der des Umkreises.

68/8. Das Lot auf MM_a durch M_a schneidet den Umkreis mit r = 10 in B(0|6) und C(18|0). Der Thaleskreis um M_a über [BC] schneidet den Feuerbachkreis in H_c ; BH_c schneidet den Umkreis in A(10|16).

68/9.



68/10. Es ergibt sich:
Z(0|5) R(13|0)
S(10|12) C'(6|8)
im Fall d || AB gilt
d = AB und C'= Z.



68/11. Die Pascalgerade geht durch

a) (0|4,5) und (14|4,5) **b)** (13,5|0) und (0|10,5)

c) (0|5) und (17|6)

68/12. Die Pascalgerade geht durch

a) (3|0) und (9|9) **b)** (0|6) und (8|3) **c)** (7|17) und (12|11)

69/13. **a)** Schnittpunkte: (1|2), (3|1,5), (5|1)

b) Schnittpunkte: (0|6), (5|6), (8|6)

Aufgaben zu 3.3

71/1. **a)** $\overrightarrow{AD}$ mit D(4|2) **b)** $\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{EF}$ mit E(4,5|0), F(2|4)

d) $\overrightarrow{CG}$ mit G(6|0)

71/2. **a)** $\vec{c} = -\frac{1}{9}\vec{a}$ **b)** $\vec{c} = 1{,}25\,\vec{a} - 1{,}75\,\vec{b}$

72/4. **a)** $\frac{1}{2}\vec{a}$ **b)** $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ **c)** $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

d) $\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b})$ **e)** $\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$ **f)** $\frac{5}{6}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$

72/5. **a)** $\vec{b}$ **b)** $\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$ **c)** $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ **d)** $-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

72/6. **a)** D(1,5|1,5) **b)** D(3,5|3) **c)** D(2|3,5)

72/7. **a)** $\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{a}$ **b)** $\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$ **c)** $-\frac{1}{3}\vec{a}$

d) $\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{a}$ **e)** $-\frac{5}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ **f)** $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

72/8. **a)** E(–3|2) **b)** E zieht mit 800 N

4.Kapitel

Aufgaben zu 4.1 und 4.2

80/1. Möglich ist zum Beispiel eine zentrische Streckung mit Z(3|5) und $m = -2$, dann eine Rechtsdrehung um A' mit $\varphi = 90°$, es ergibt sich $B_1'(9|9)$. Spiegelt man noch an A'C', so ergibt sich $B_2'(1|9)$.

80/2. **a)** $C'' = A$ **b)** $A'' = C$ **c)** $C'' = D$

80/3. **a)** $\alpha = 45°$ $\delta = \varepsilon = 90°$ $\varphi = \omega = 45°$ $\overline{BA} = 7$

$\overline{CD} = \overline{DA} = \overline{BD}$ $\overline{AC} : 7 = 7 : \overline{AD}$ $\Rightarrow 2\,\overline{AD}^2 = 49 \Rightarrow \overline{AD} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$

b) $\delta = 120°$ $\varepsilon = 60°$ $\gamma = 30°$ $\overline{BD} = 6$ $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ $\overline{DC} = 12$

80/4. $u' = m \cdot u \Rightarrow m = 1{,}5$ $a' = 12$ $b' = 9$ $c' = 4{,}5$ $d' = 7{,}5$

80/5. $m = 0{,}4$ $a' = 1{,}6\sqrt{5}$ $c' = 4{,}4$ $F = 22$ $F' = m^2\,F = 3{,}52$

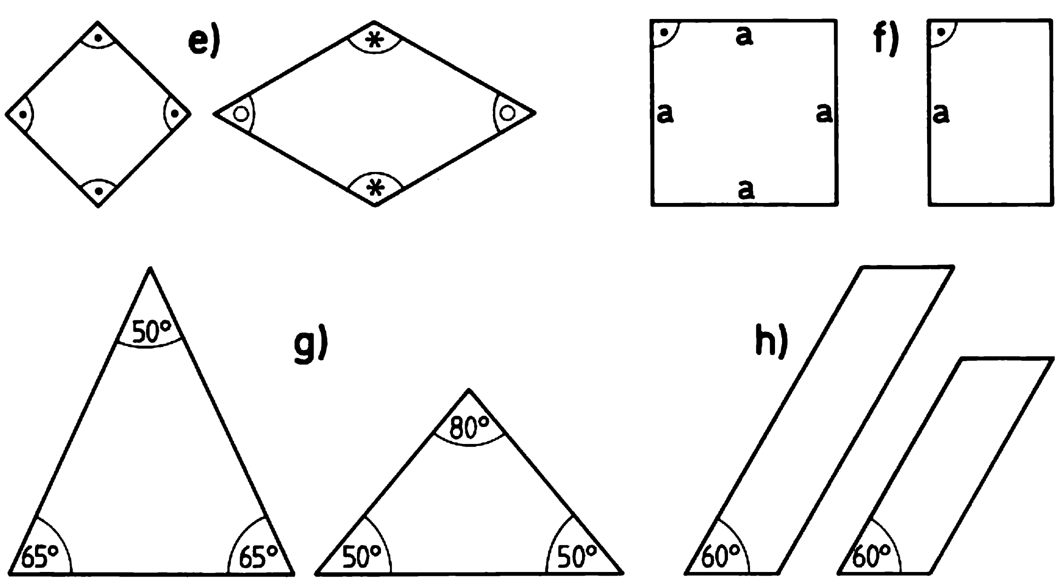
80/6. $\sphericalangle A$ ist gemeinsam $\sphericalangle D = \sphericalangle C = 90°$ (1.Ähnlichkeitssatz)

81/7. Wegen des 1.Ähnlichkeitssatzes gilt:
$\Delta AFE \sim \Delta BDF$ $\Delta AHE \sim \Delta BCH$ $\Delta AGD \sim \Delta BCG$

81/8. **a)** 1.Ähnlichkeitssatz **b)** 1.Ähnlichkeitssatz **c)** 3.Ähnlichkeitssatz

81/9. **a)** 1.Ähnlichkeitssatz **b)** 2.Ähnlichkeitssatz

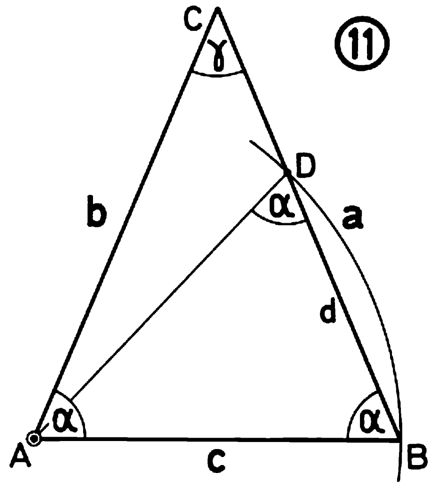
81/10. Gegenbeispiele für nicht ähnliche Figuren:



81/11. **a)** Wegen des 1.Ähnlichkeitssatzes gilt: $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

b) $\frac{c}{d} = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \sqrt{ad}$

c) ist γ kleiner/gleich/größer als 60°, so ist Fläche(ΔABD) kleiner/ gleich/größer als Fläche(ΔABC).

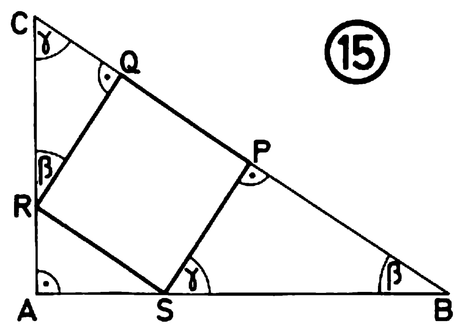


81/12. **a)** $\Delta AHH_c \sim \Delta AH_aB \sim \Delta HH_aC$ (1.Ähnlichkeitssatz)

b) $\Delta AH_aC \sim \Delta BCH_b \Rightarrow h_a : h_b = b : a$

82/13. **a)** $\sphericalangle A = \sphericalangle E$ (Umfangswinkel) $\sphericalangle D = \sphericalangle B = 90° \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta CEB$

b) $\frac{b}{h_c} = \frac{2r}{a} \Rightarrow r = \frac{ab}{2h_c}$ $\quad F = \frac{1}{2} ch_c = \frac{1}{2} c \cdot \frac{ab}{2r} = \frac{abc}{4r}$



82/14. $\Delta ADC \sim \Delta BDC$, da $\sphericalangle A = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle D$ ist gemeinsam

$\overline{CD} : \overline{AD} = \overline{BD} : \overline{CD} \quad \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}$

82/15. $\Delta CRQ \sim \Delta SBP \Rightarrow \overline{RQ} : \overline{CQ} = \overline{BP} : \overline{PS}$

$\Rightarrow \overline{RQ} \cdot \overline{PS} = \overline{CQ} \cdot \overline{BP} \Rightarrow \overline{PQ}^2 = \overline{CQ} \cdot \overline{BP}$

82/16. $\Delta AXD \sim \Delta BXY \sim \Delta CDY$

$\Rightarrow \overline{AX} : \overline{AD} = \overline{BX} : \overline{BY} = \overline{DC} : \overline{CY} \quad \Rightarrow \overline{AX} \cdot \overline{CY} = \overline{AD} \cdot \overline{DC} = \text{const}$

82/17. $\Delta OSE \sim \Delta IAS \Rightarrow \overline{OS} : \overline{SE} = \overline{SA} : \overline{SI} \Rightarrow \overline{OS} \cdot \overline{SI} = \overline{SE} \cdot \overline{SA}$

83/18. **a)** $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ABE$ (Umfangswinkel über [AE])

$\sphericalangle ECB = \sphericalangle EAB$ (Umfangswinkel über [BE])

$\Rightarrow \Delta AEB$ ist gleichschenklig, das heißt $\overline{AE} = \overline{EB}$

b) $\sphericalangle EAD = \sphericalangle DCB$, Scheitelwinkel bei D

c) $\Delta CEB \sim \Delta DEB$, da $\sphericalangle ECB = \sphericalangle DBE$ und $\sphericalangle E$ gemeinsam

$\Rightarrow \overline{BE} : \overline{CE} = \overline{DE} : \overline{BE} \Rightarrow \overline{BE} = \overline{AE} = \sqrt{\overline{CE} \cdot \overline{DE}}$

83/19. $\Delta CDB \sim \Delta CEB$, da $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CEB$ (Umfangswinkel über gleich langer Sehne s), $\sphericalangle DCB$ ist gemeinsam $\Rightarrow s : \overline{CD} = \overline{CE} : s \Rightarrow s = \sqrt{\overline{CD} \cdot \overline{CE}}$

83/20. **a)** $\sphericalangle PQT = \sphericalangle PCT = \frac{1}{2}\gamma$ (Umfangswinkel)

$\sphericalangle TCQ = \frac{1}{2}\gamma = \sphericalangle QTB$ (Sehnentangentenwinkel)

$\Rightarrow PQ \parallel AB$ (Z-Winkel)

b) $\sphericalangle CPQ = \delta = \sphericalangle CTQ$ (Umfangswinkel über $[CQ]$)

$\sphericalangle QPT = \sphericalangle QCT = \frac{1}{2}\gamma$

$\Rightarrow \sphericalangle CPT = \delta + \frac{1}{2}\gamma = \sphericalangle CTB$

außerdem gilt: $\sphericalangle PCT = \sphericalangle TCQ = \frac{1}{2}\gamma$

c) $\sphericalangle PQC = \sphericalangle PTC = \varepsilon$ (Umfangswinkel über $[CP]$)

$\sphericalangle PQT = \frac{1}{2}\gamma = \sphericalangle PTA$ (Umfangswinkel bzw. Sehnentang.winkel)

$\Rightarrow \sphericalangle CQT = \sphericalangle CTA = \varepsilon + \frac{1}{2}\gamma$

außerdem gilt: $\sphericalangle ACT = \sphericalangle TCQ = \frac{1}{2}\gamma$

d) aus **b)** folgt: $\overline{CT}:\overline{CP} = \overline{CB}:\overline{CT} \Rightarrow \overline{CT} = \sqrt{\overline{CP}\cdot\overline{CB}}$

aus **c)** folgt: $\overline{CT}:\overline{CQ} = \overline{CA}:\overline{CT} \Rightarrow \overline{CT} = \sqrt{\overline{CA}\cdot\overline{CQ}}$

83/21. **a)** $F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ **b)** $a = 3\sqrt{3}$ **c)** $h = 4{,}5$

84/22.

	F	a	b	c	u	h_a	h_b	h_c
a)	24	4	13	15	32	12	$\frac{48}{13}$	$\frac{16}{5}$
b)	36	9	10	17	36	8	7,2	$\frac{72}{17}$
c)	$16\sqrt{3}$	8	8	8	24	$4\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$	$4\sqrt{3}$
d)	12	5	5	8	18	$\frac{24}{5}$	$\frac{24}{5}$	3
e)	84	a) 15 b) 13	a) 13 b) 15	14	42	a) 11,2 b) 168/13	a) 168/13 b) 11,2	12
f)	42	7	a) 15 b) $\sqrt{673}$	20	a) 42 b) $27+\sqrt{673}$	12	a) 5,6 b) $84/\sqrt{673}$	4,2

84/23. **a)** $F = \frac{1}{2}c\sqrt{a^2 - c^2/4}$ **b)** $F = 12$ **c)** $h_a = 4{,}8$ $h_c = 4$

84/24. Die Kreise um M_1 mit $r_1 = 6{,}5$ und um M_2 mit $r_2 = 4$ schneiden sich in den gesuchten Mittelpunkten K und L, die symmetrisch bezüglich M_1M_2 liegen. Fläche(M_1M_2K) $= \frac{5}{16}\sqrt{615}$, der Abstand d von K und M_1M_2 ist gleich der Dreieckhöhe: $d = h = \frac{1}{16}\sqrt{615} = \sqrt{\frac{615}{256}} > r = \sqrt{\frac{576}{256}}$

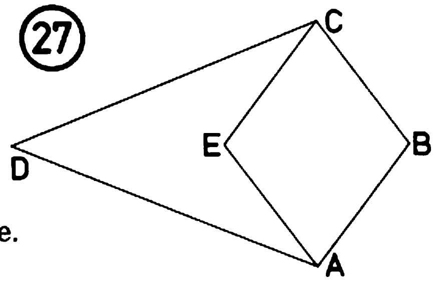
kleinste Entfernung zweier Kreispunkte: $2\cdot(\frac{1}{16}\sqrt{615} - 1{,}5) \approx 0{,}1$

84/25. **a)** $\frac{1}{2}\sqrt{3135}$ **b)** $4\sqrt{65} - 12$

c) Fläche(ACD) = 36 $\Rightarrow h_a = 8 \Rightarrow$ Fläche(ABC) = 80
$\Rightarrow$ Fläche(ABCD) = 116

84/26. $A = 420\,m^2$ $K = 105\,000$ DM

27



85/27. Eine solche Formel kann es nicht geben, Gegenbeispiel: Die Vierecke ABCD und AECD stimmen in den Seitenlängen überein, haben aber verschiedene Flächeninhalte.

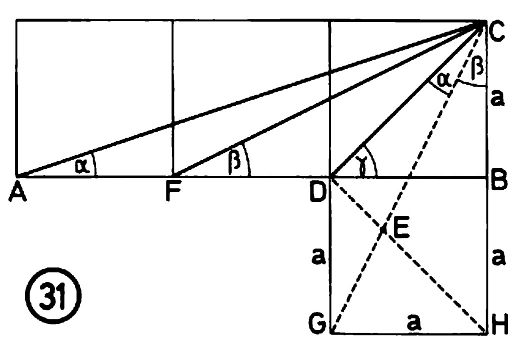
85/28. **a)** $3150\,m^2$ **b)** $27\,km^2$

85/29. **a)** $a : b = \sqrt{2} : 1$

b) $A = 625\,cm^2$ $a_4 = 25\sqrt{\sqrt{2}}$ cm $\approx$ 29,7cm $b_4 = \frac{25}{\sqrt{\sqrt{2}}}$ cm $\approx$ 21,0 cm

85/30. $\overline{A'Z} = \overline{A'Y}$ (gleich lange Tangentenabschnitte)
$\Rightarrow \sphericalangle A'ZY = \sphericalangle ZYA' = 90° - \alpha/2$
analog: $\sphericalangle B'ZX = \sphericalangle ZXB' = 90° - \beta/2$, $\sphericalangle C'XY = \sphericalangle XYC' = 90° - \gamma/2$
$\Rightarrow \sphericalangle YZX = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\sphericalangle ZXY = \frac{\beta+\gamma}{2}$, $\sphericalangle XYZ = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ [$\sphericalangle A' = \alpha$, $\sphericalangle B' = \beta$, $\sphericalangle C' = \gamma$]
aus der Winkelsumme in ΔZBY folgt $\sphericalangle ZBY = \gamma/2 \Rightarrow \sphericalangle BYX = \alpha/2$,
analog: $\sphericalangle AXY = \beta/2$, $\sphericalangle AXZ = \gamma/2$, $\sphericalangle XZC = \alpha/2$, $\sphericalangle CZY = \beta/2$,
A und C liegen auf dem Thaleskreis über [ZX]
$\Rightarrow$ $\sphericalangle CAX = \sphericalangle CZX = \alpha/2$ (Umfangswinkel)
$\sphericalangle ACZ = \sphericalangle AXZ = \gamma/2$ (Umfangswinkel)
analog liefern die Thaleskreise über [YZ] bzw. über [YX] :
$\sphericalangle YBC = \beta/2$, $\sphericalangle ZCB = \gamma/2$ bzw. $\sphericalangle YBA = \beta/2$, $\sphericalangle XAB = \alpha/2$,
also gilt: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
CZ schneide AB in S $\Rightarrow$
$\sphericalangle CSB = 180° - \beta - \gamma/2 = 90° + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - \beta - \gamma/2 = 90° + \alpha/2 - \beta/2 = \sphericalangle CZB'$
$\Rightarrow AB \| A'B'$

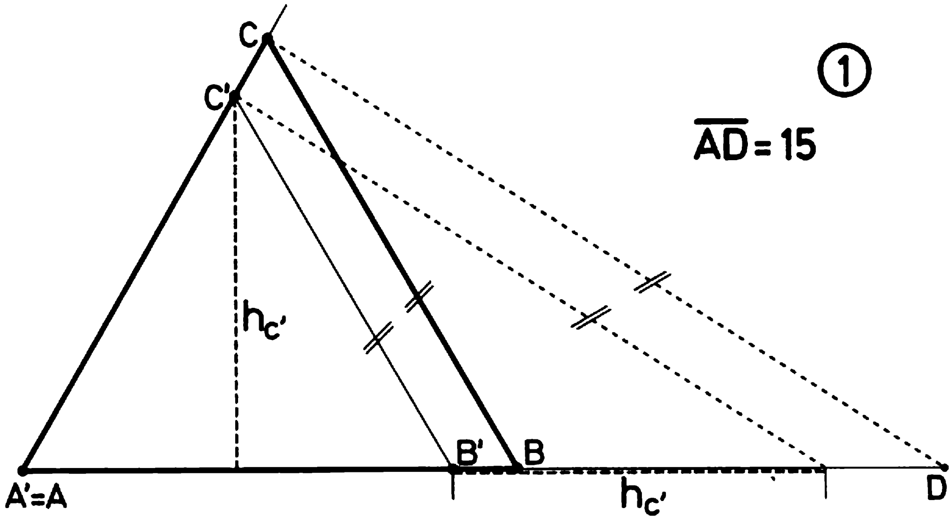
85/31.
$\Delta ABC \sim \Delta CDE$ wegen $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE = 90°$
und $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1 = \overline{DC} : \overline{DE} \Rightarrow \sphericalangle CDE = \alpha$
$\Delta FBC \cong \Delta GHC \Rightarrow \sphericalangle GCH = \beta$
insgesamt: $\alpha + \beta = 45° = \gamma$



31

Aufgaben zu 4.3

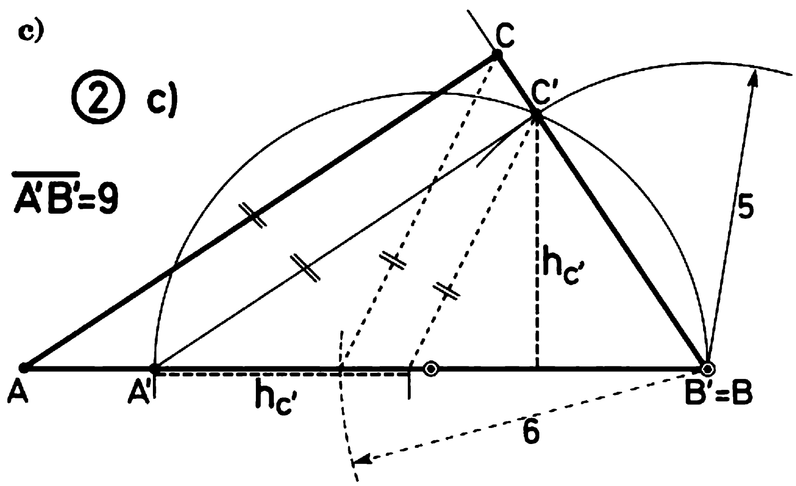
87/1.



87/2. **a)** Man konstruiert ein ähnliches Dreieck A'B'C' aus den Winkeln und zeichnet w_β' ein. Auf w_β' trägt man von B' aus eine Strecke der Länge 6 ab und zeichnet durch den Endpunkt die Parallele zu A'C'.

b) Man konstruiert ein ähnliches Dreieck A'B'C' aus den Winkeln und verfährt dann wie in Aufgabe **1.**

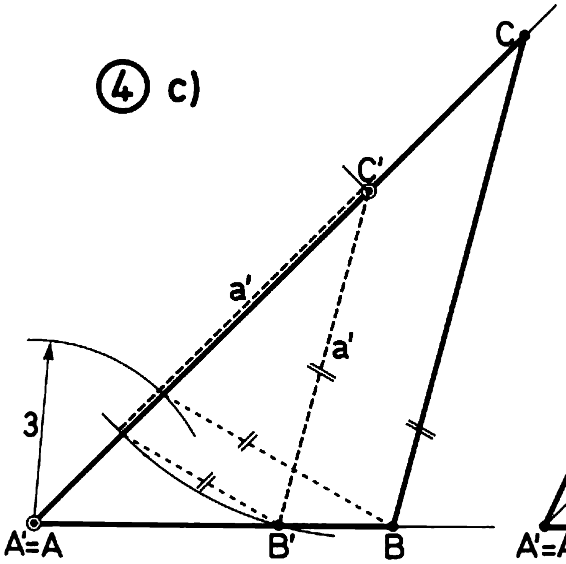
c)

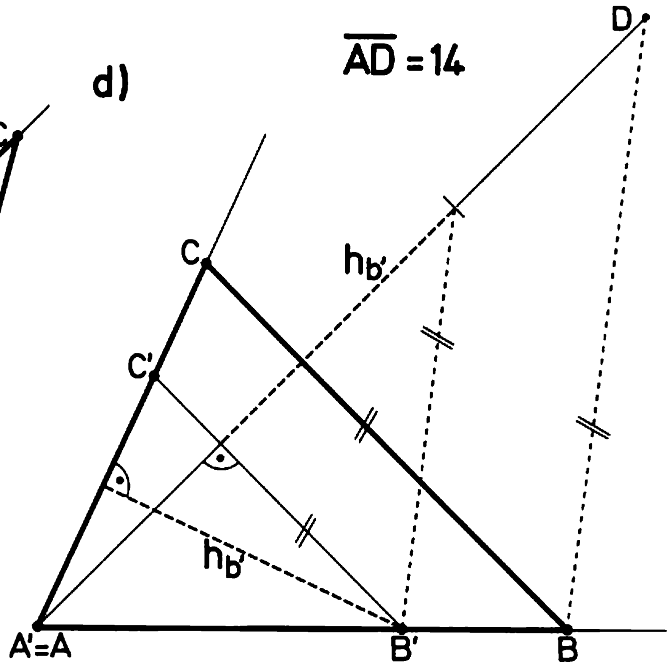


87/3. **a)** Konstruktion von ΔA'B'C' mit c'= 5 und b'= 7, dann Streckung mit Zentrum B' und Faktor $m = s_b/s_{b'}$, sodass $s_b = 7$ ist.

b) Konstruktion von ΔA'B'C' aus den Winkeln, dann u' z. B. von A aus auf [AB abtragen und ΔA'B'C' zentrisch strecken mit Zentrum A' und m = u/u'.

88/4. **a)** und **b)** analog **2.a)**





88/5. **a)** Konstruktion von $\Delta A'B'C'$ mit $c' = 8$, $b' = 5$ und $\alpha = 50°$, dann zentrische Streckung mit Zentrum B' und Faktor $m = s_b/s_{b'}$.

b) Konstruktion von $\Delta A'B'C'$ mit $c' = 2$, $a' = 3$ und $\beta = 105°$, dann zentrische Streckung mit Zentrum C' und Faktor $m = h_c/h_{c'}$.

88/6. **a)** Konstruktion von $\Delta A'B'C'$ mit $a' = 4$, $b' = 2$ und $c' = 5$, dann zentrische Streckung mit Zentrum C' und Faktor $m = w_\gamma/w_{\gamma'}$.

b) Konstruktion von $\Delta A'B'C'$ mit $a' = 3$, $b' = 4$ und $c' = 6$, dann zentrische Streckung z.B. mit Zentrum A' und Faktor $m = u/u'$.

88/7. Konstruktion von $\Delta A'B'C'$ mit $a' = 4$, $b' = 3$ und $c' = 2$, weil sich die Seiten umgekehrt verhalten wie die zugehörigen Höhen, dann zentrische Streckung mit Zentrum B' und Faktor $m = (a-b)/(a'-b')$.

88/8. Die Höhen verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten. Konstruktion von $\Delta A'B'C'$ mit $a' = 7{,}5$, $b' = 10$ und $c' = 12$, dann zentrische Streckung mit Zentrum C' und Faktor $m = h_c/h_{c'}$.

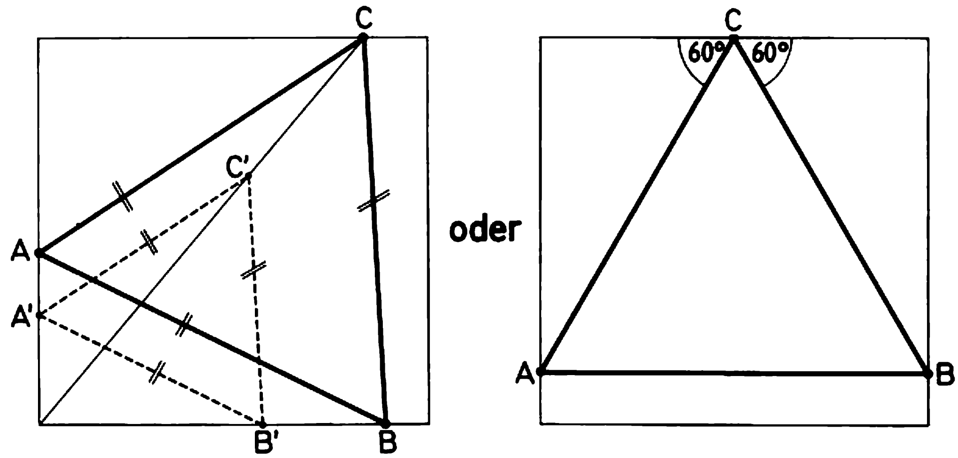
88/9. a) Konstruktion von A'B'C'D' mit $a' = 2$ und $b' = 1$, dann zentrische Streckung mit Zentrum A' und Faktor $m = \overline{AC}/\overline{A'C'}$.

b) Konstruktion von A'B'C'D' aus den Winkeln, dann zentrische Streckung mit Zentrum A' und Faktor $m = u/u'$.

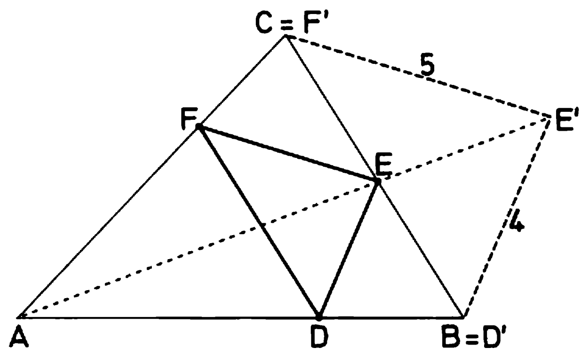
88/10. Konstruktion von A'B'C'D' aus den sich senkrecht halbierenden Diagonalen $e' = 2$ und $f' = 3$, dann zentrische Streckung mit Zentrum A' und Faktor $m = a/a'$.

88/11. Konstruktion von ΔA'B'C' mit $a' = 6$, $b' = 5$ und $c' = 4$ und seines Umkreises, dann zentrische Streckung vom Umkreismittelpunkt aus mit Faktor $m = r/r'$.

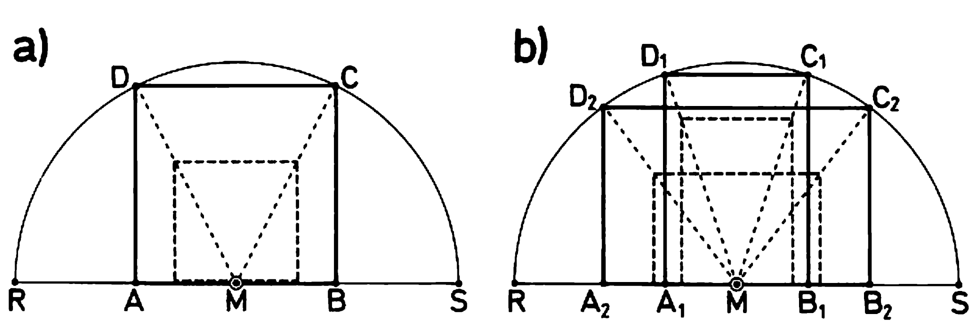
88/12.



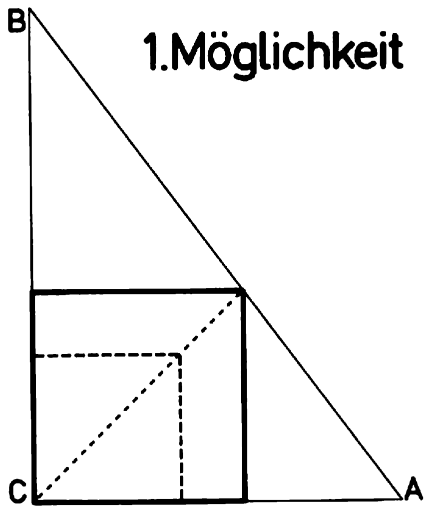
88/13.

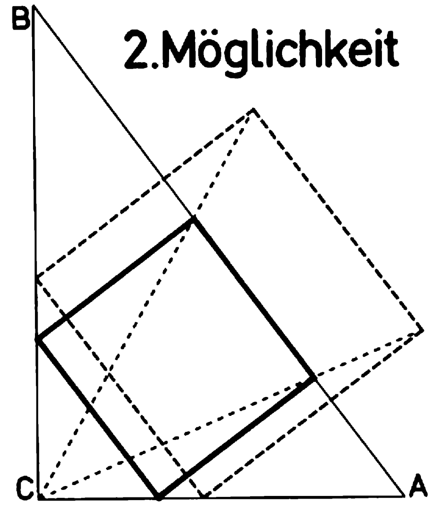


88/14.



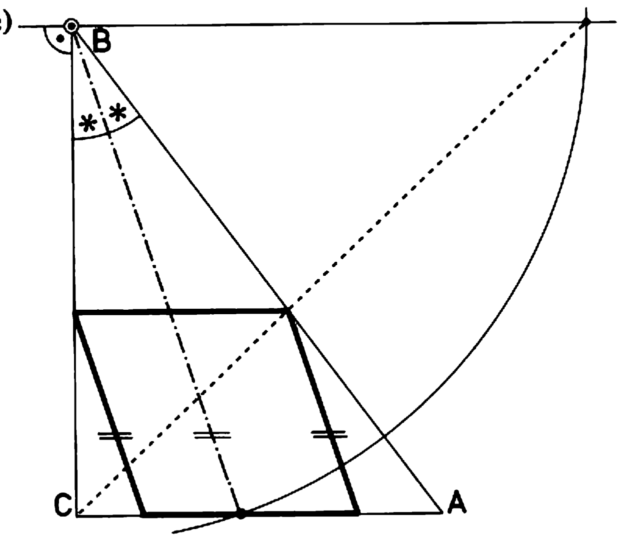
88/15. **a)**



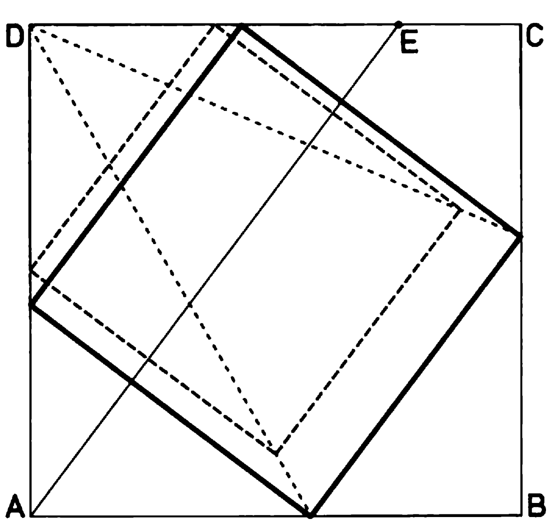


b) Es gibt zwei Lösungen ähnlich wie in **a)** (1.Möglichkeit) und zwei weitere ähnlich wie in **a)** (2.Möglichkeit).

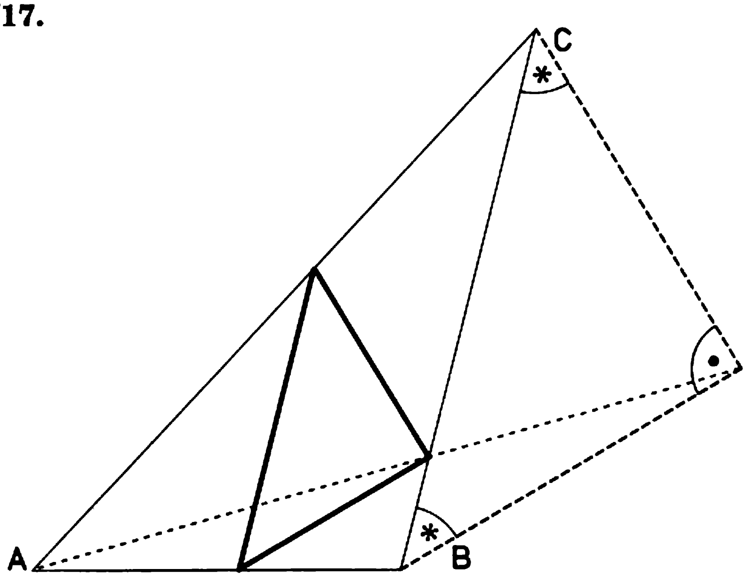
c)



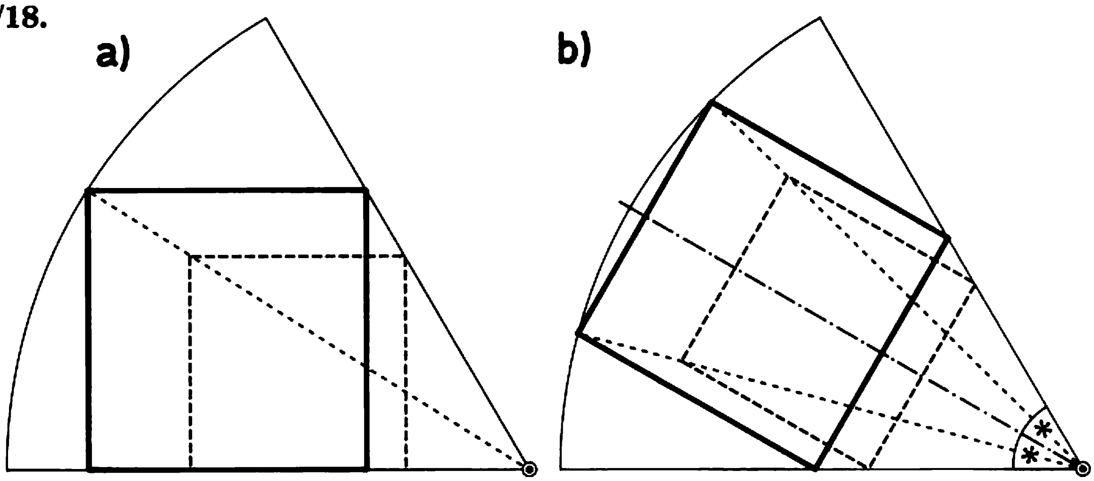
88/16.



88/17.



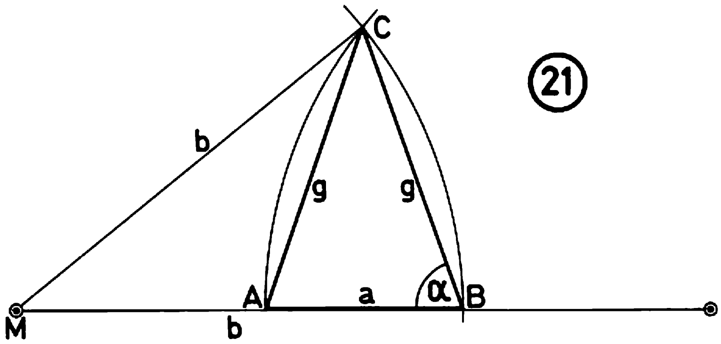
89/18.



89/19. Der Umkreis von ΔPQR muß auf den gegebenen Kreis k_1 abgebildet werden: dies leistet eine zentrische Streckung mit $Z(18|3)$ und $m = 3/2 = r/r_1$.
$P(6|12)$, $Q_1(0|9)$, $R_1(7{,}5|1{,}5)$ sind die Ecken des gesuchten Dreiecks.

89/20. Man wählt U' auf c und zeichnet V' auf b so, daß U'V' || RS ist.
W' ergibt sich aus U'W' || RT und V'W' || ST. Mit zentrischer Streckung von B aus findet man dann $U(5|0)$, $V(7|6)$ und $W(1|2)$.

89/21.



21

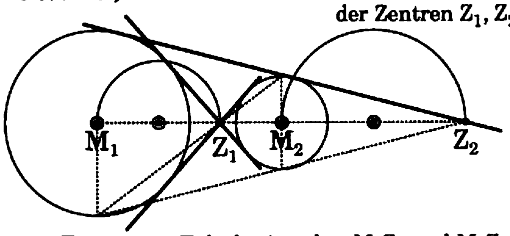
$\Delta MBC \sim \Delta CAB$, denn die beiden gleichschenkligen Dreiecke stimmen in einem Basiswinkel überein.

$\Rightarrow g : b = a : g \Rightarrow g = \sqrt{ab}$

Aufgaben zu 4.4

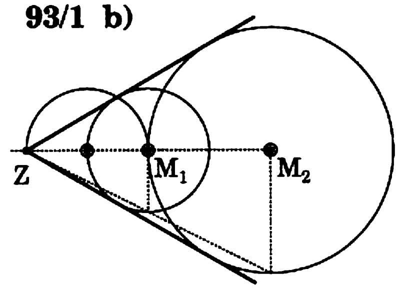
93/1 a)

Linien zur Konstruktion der Zentren Z_1, Z_2

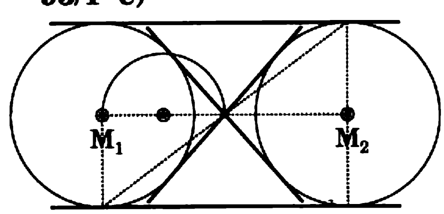


Tangenten: Taleskreise über M_1Z_1 und M_2Z_2
eine Tangente ist nicht eingezeichnet,
sie würde sonst die Konstruktion verdecken.

93/1 b)

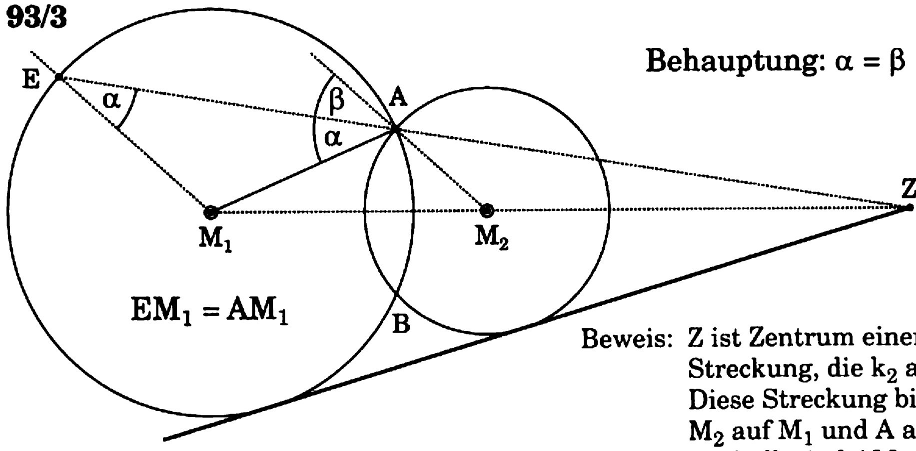


93/1 c)



93/2 **a)** Berührung von außen
b) Schnitt zweier Kreise
c) Berührung von innen
d) Ineinander liegend

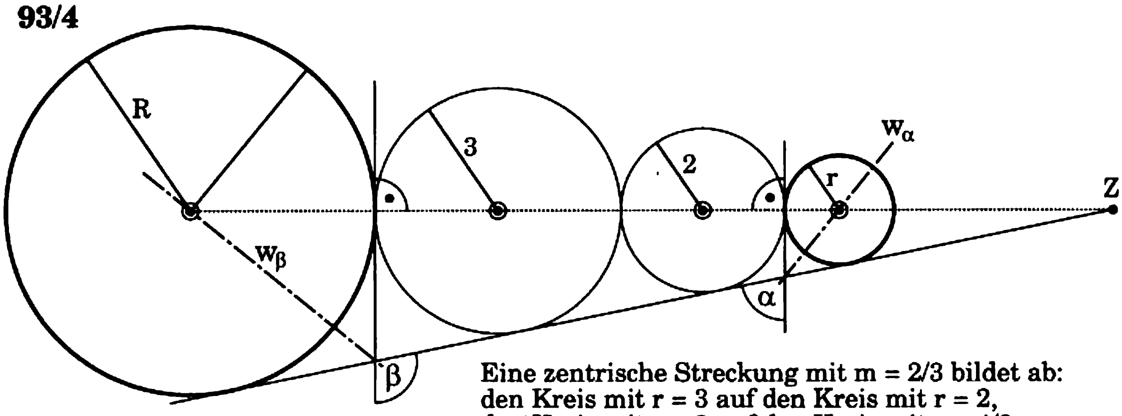
93/3



Behauptung: $\alpha = \beta$

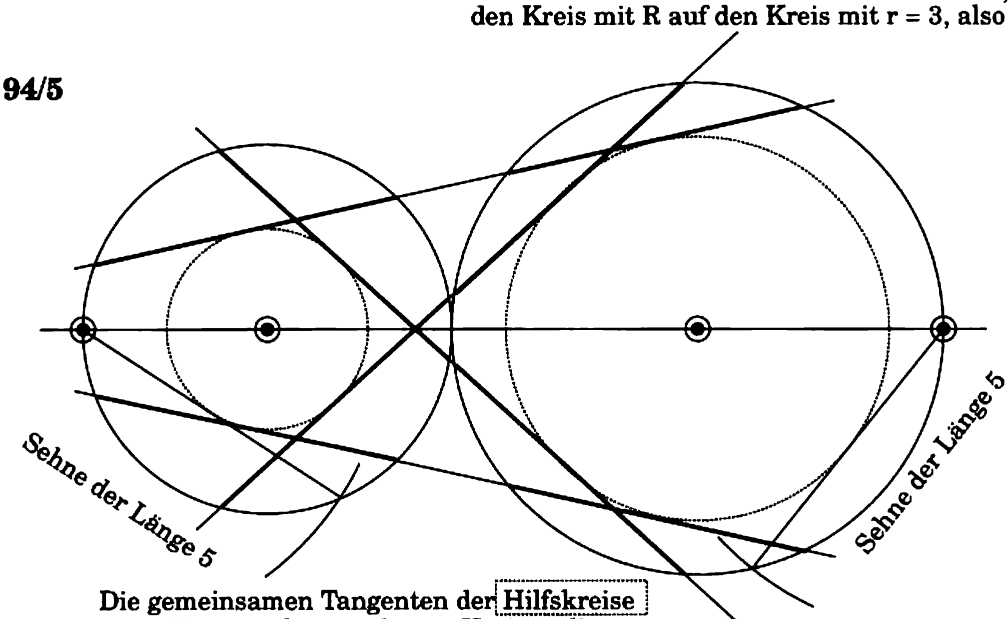
Beweis: Z ist Zentrum einer zentrischen Streckung, die k_2 auf k_1 abbildet.
Diese Streckung bildet ab:
M_2 auf M_1 und A auf E.
Deshalb sind AM_2 und EM_1 parallel, und α und β sind Z-Winkel, also $\alpha = \beta$.

93/4



Eine zentrische Streckung mit m = 2/3 bildet ab:
den Kreis mit r = 3 auf den Kreis mit r = 2,
den Kreis mit r = 2 auf den Kreis mit r = 4/3,
den Kreis mit R auf den Kreis mit r = 3, also R = 4,5

94/5



Die gemeinsamen Tangenten der Hilfskreise schneiden aus den gegebenen Kreisen die gesuchten acht Sehnen aus.

94/6. **a)** $c = 0{,}5\sqrt{14}$ $\quad d = \sqrt{14}$ **b)** $a = 15$ $\quad b = 9$ $\quad c = 6$ $\quad d = 22{,}5$

94//7. **a)** $d = 8{,}6$ **b)** $a = 15$ $\quad b = 27$ $\quad c = 21$

94//8. **a)** $b = 8$ $\quad c = 10$ **b)** $a = 4{,}5$ $\quad b = 2{,}5$

94/9. **a)** Das Dreieck mit den Seiten r, a und b ist wegen seiner Winkel ein 'halbes gleichseitiges Dreieck' $\Rightarrow a = 2r$.
Der Strahlensatz liefert: $b^2 = (a + r)\cdot a/2 \Rightarrow b^2 = 3r^2 \Rightarrow b = r\sqrt{3}$.

b) Sekantensatz: $c(c + r) = 3r^2 \Rightarrow c = \frac{r}{2}(\sqrt{3} - 1)$

94/10. b) $a + b = 2r = 2\cdot\overline{GE} \Rightarrow \overline{GE} = (a + b)/2$

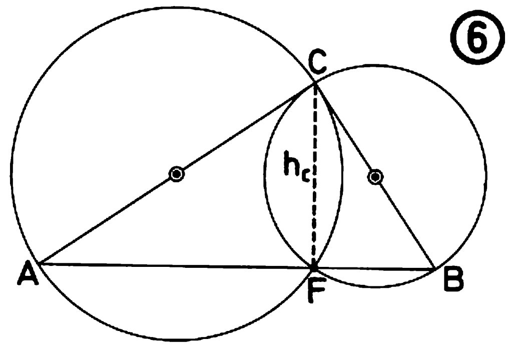
c) $\overline{GC}^{\,2} = ab$ (Sehnensatz) $\Rightarrow \overline{GC} = \sqrt{ab}$

d) $\overline{GF} \cdot r = ab$ (Sehnensatz) $\Rightarrow r = (a + b)/2 \Rightarrow \overline{GF} = \frac{2ab}{a+b}$

94/11. Sekanten-Tangenten-Satz:

$\overline{AC}^{\,2} = \overline{AF} \cdot \overline{AB}$

$\overline{BC}^{\,2} = \overline{BF} \cdot \overline{AB}$



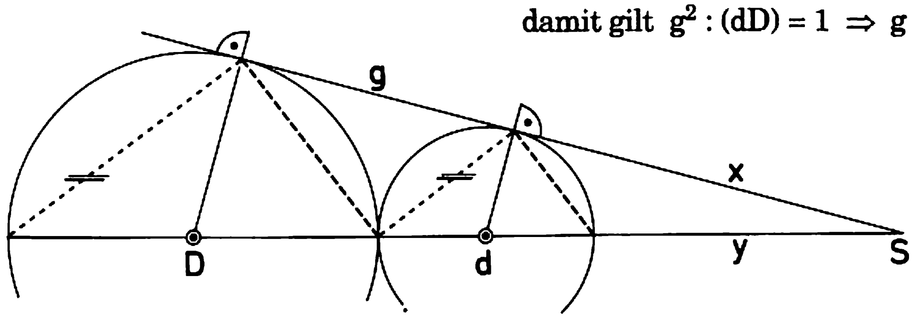
95/12. Wegen $\overline{BC} = \overline{CE} = a$ liefert der Sehnensatz: $a \cdot a = (c+b)(c-b) \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

95/13. Spiegelung von C an AB und Anwendung des Sehnensatzes ergibt:
$h_c^{\,2} = \overline{AF} \cdot \overline{FB}$

95/14. Sekanten-Tangenten-Satz: $t^2 = r \cdot 3r \Rightarrow t = r\sqrt{3}$

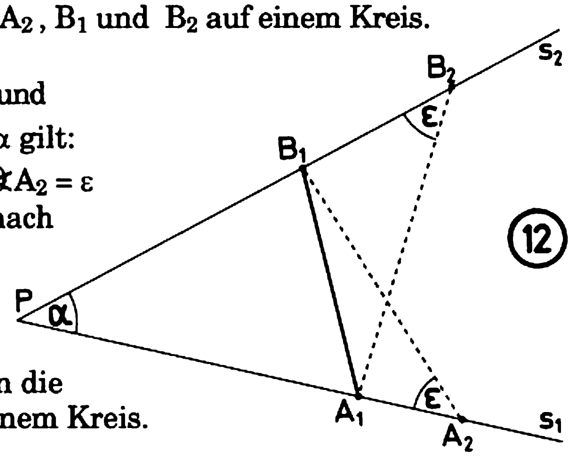
95/15. $\Delta APD \sim \Delta CPD$, dann $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ (Umfangswinkel = Sehnentangentenwinkel) und $\sphericalangle P$ ist gemeinsam,
$\Delta ABP \sim \Delta BPC$, dann $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ (Umfangswinkel = Sehnentangentenwinkel) und $\sphericalangle P$ ist gemeinsam.
$\Rightarrow d : \overline{AP} = c : \overline{PD}$, bzw. $a : \overline{AP} = b : \overline{PB} \Rightarrow d : c = \overline{AP} : \overline{PD}$
bzw. $a : b = \overline{AP} : \overline{PB} \Rightarrow d : c = a : b \Rightarrow ac = bd$

95/16. Wegen des Strahlensatzes gilt $\frac{g}{D} = \frac{x}{y+d}, \frac{g}{d} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{g^2}{dD} = \frac{x^2}{y(y+d)}$
der Sehnen-Tangenten-Satz liefert: $x^2 = y(y + d)$
damit gilt $g^2 : (dD) = 1 \Rightarrow g = \sqrt{dD}$



95/17. **a)** Wenn für zwei Halbgeraden s_1 und s_2 mit gemeinsamem Anfangspunkt P gilt: $\overline{PA_1}\cdot\overline{PA_2}=\overline{PB_1}\cdot\overline{PB_2}$ ($A_1, A_2 \in s_1, B_1, B_2 \in s_2$), dann liegen die Punkte A_1, A_2, B_1 und B_2 auf einem Kreis.

Beweis:
Wegen $\overline{PA_1}:\overline{PB_2}=\overline{PB_1}:\overline{PA_2}$ und des gemeinsamen Winkels α gilt:
$\Delta PA_2B_1 \sim \Delta PB_2A_1 \Rightarrow \sphericalangle B_2 = \sphericalangle A_2 = \varepsilon$
das heißt, B_2 und A_2 liegen nach dem Umfangswinkelsatz auf dem Fasskreisbogen über $[A_1B_1]$.



b) Wegen $6\cdot 8 = 4\cdot 12 = 48$ liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis.

96/18. $\overline{PB}\cdot\overline{PA}$ ist konstant. Wegen $\overline{PB}\cdot\overline{PA} = t^2$ liegen die Punkte auf einem Kreis k um P mit $r = t$. Die Schnittpunkte von k und PA sind auszunehmen.

96/19. **a)** Sekanten-Tangenten-Satz: $s^2 = h(h + 2r) \Rightarrow s = \sqrt{h^2 + 2rh}$

b) $s_2 \approx 5{,}048$ km, $s_{100} \approx 35{,}693$ km, $s_{2000} \approx 159{,}637$ km, $s_{10000} \approx 357{,}071$ km

96/20. **a)** Sekanten-Tangenten-Satz: $p = t^2 = \overline{PU}\cdot\overline{PV} = (a - r)(a + r) = a^2 - r^2$
die Punkte gleicher Potenz $p > 0$ liegen auf einem Kreis um M mit Radius a.

b) $p = -\overline{PU}\cdot\overline{PV} = -(r + a)(r - a) = a^2 - r^2$
die Punkte gleicher Potenz $p < 0$ liegen auf einem Kreis um M mit Radius a. Für die Potenz gilt nach **a)** und **b)**: $-r^2 \le p < \infty$
im Fall $p = 0$ liegt P auf dem Kreis mit Radius r.

96/21. **a)** $\boxed{1}$ Liegt P auf der Chordale UV, so liegen drei Fälle vor:

α): $P \in]UV[: \Rightarrow p_1 = -\overline{PU}\cdot\overline{PV} = p_2$

β): $P = U$ oder $P = V : \Rightarrow p_1 = 0 = p_2$

γ): $P \in UV \setminus [UV] : \Rightarrow p_1 = \overline{PU}\cdot\overline{PV} = p_2$

$\boxed{2}$ Gilt umgekehrt $p_1 = p_2 = p$, so kann man wegen der Definition der Potenz (Vorzeichen!) wieder drei Fälle unterscheiden:

α): $p < 0$, das heißt, P muss im Durchschnitt der beiden Kreisflächen liegen, jedoch nicht auf dem Rand. Liegt P aber nicht auf der Chordale, so ergibt das Einzeichnen von PU zusammen mit der Definition der Potenz sofort einen Widerspruch zur Gleichheit.

β): $p = 0$, das heißt, P muss auf beiden Kreisen liegen, also $P = U$ oder $P = V$.

γ): $p > 0$, das heißt, P muss im Äußeren der beiden Kreise liegen. Liegt P aber nicht auf der Chordale, so ergibt das Einzeichnen von PU zusammen mit der Definition der Potenz wieder einen Widerspruch.

Aus $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ folgt die Behauptung.

b) Schneidet ein Kreis k um Mittelpunkt M mit Radius r die gegebenen Kreise k_1 in S_1 und k_2 in S_2 rechtwinklig, so gilt für die Potenzen von M bezüglich k_1 bzw. k_2:

$p_1 = \overline{MS_1}^2 = r^2$, denn MS_1 ist Tangente von k_1,

$p_2 = \overline{MS_2}^2 = r^2$, denn MS_2 ist Tangente von k_2.

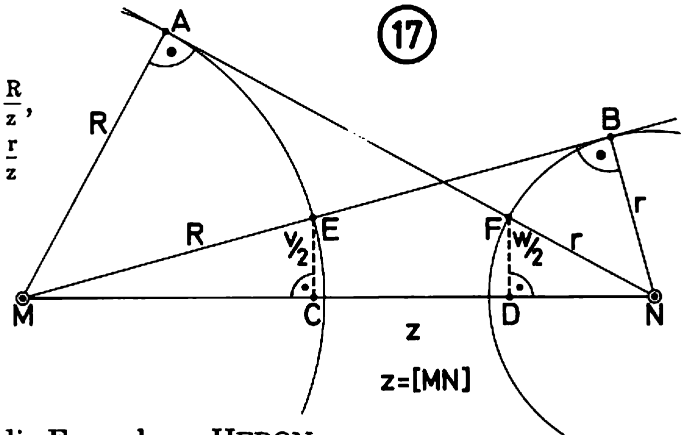
Damit gilt $p_1 = p_2$, das heißt, M liegt auf der Chordale.

97/22. Mit $\overline{MN} = z$ gilt:

$\Delta DFN \sim \Delta MAN \Rightarrow \frac{w/2}{r} = \frac{R}{z}$,

$\Delta MCE \sim \Delta MNB \Rightarrow \frac{v/2}{R} = \frac{r}{z}$

$\Rightarrow v = w$



97/23. **a)** Für $d = 0$ ergibt sich die Formel von HERON.

b) $F = 12\sqrt{14}$

97/24. Vertauscht man im gegebenen Sehnenviereck die Seiten c und d, so bleibt e erhalten, die andere Diagonale sei f_1. Vertauscht man dagegen die Seiten b und c, so bleibt f erhalten, und $e_2 = f_1$. Nach PTOLEMAIOS

gilt: $\boxed{1}$ $ef = ac + bd$ $\boxed{2}$ $ef_1 = ad + bc$ $\boxed{3}$ $f_1 \cdot f = ab + cd$

Division von $\boxed{2}$ durch $\boxed{3}$: $\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$

$f = e \cdot \frac{ab + cd}{ad + bc}$ eingesetzt in $\boxed{1}$ ergibt $e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$;

dividiert man $\boxed{3}$ durch $\boxed{2}$ und setzt in $\boxed{1}$ ein,

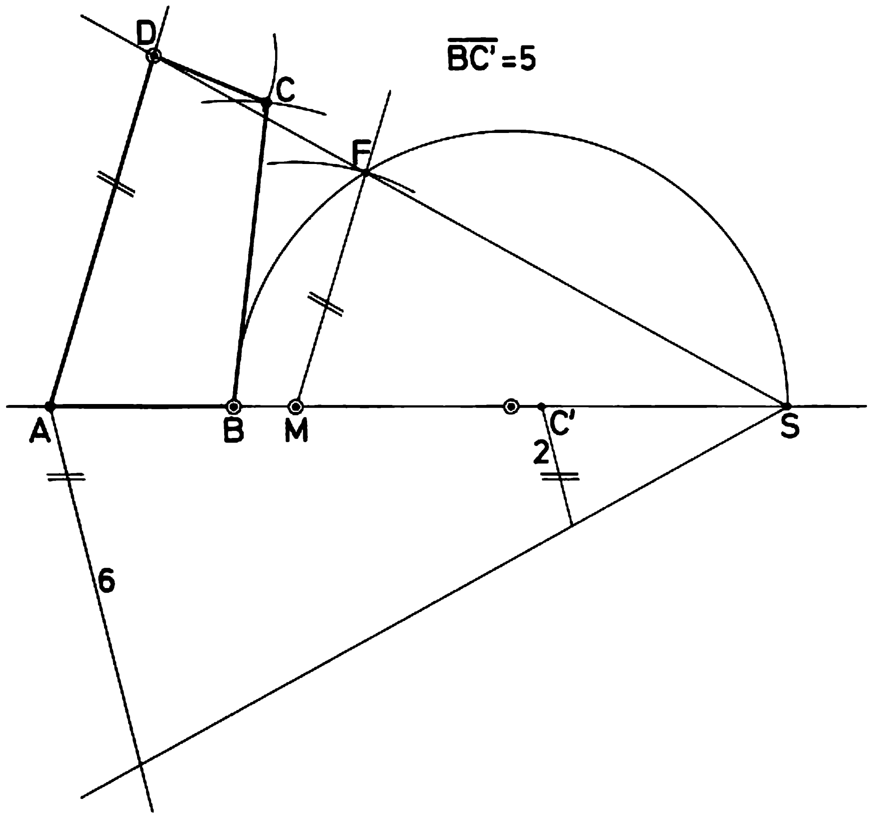
so folgt $f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.

97/25 4r·Fläche(ABD) = adf; Quadrieren und HERON liefern:

$$r^2 = \frac{a^2 d^2 f^2}{16 \cdot \frac{a+d+f}{2} \cdot \frac{-a+d+f}{2} \cdot \frac{a+d-f}{2} \cdot \frac{a-d+f}{2}}$$

$$r^2 = \frac{a^2 d^2 f^2}{(a + d + f)(a + d - f)(f + a - d)(f - a + d)}$$

$$r^2 = \frac{a^2 d^2 f^2}{[(a + d)^2 - f^2][f^2 - (a - d)^2]}$$; f^2 aus Aufgabe **19.** einsetzen:



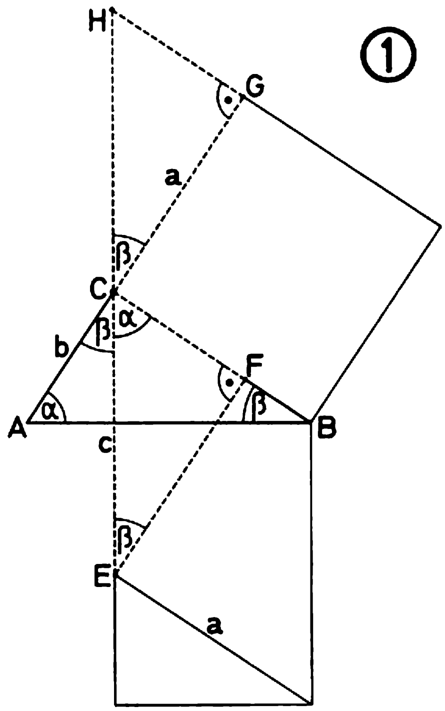
D
C
$\overline{BC'}=5$
F
A
B
M
C'
S
2
6

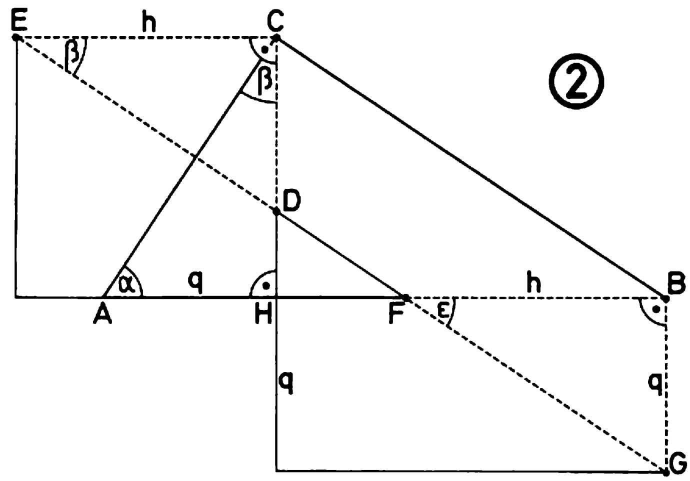
5.Kapitel

Beweise

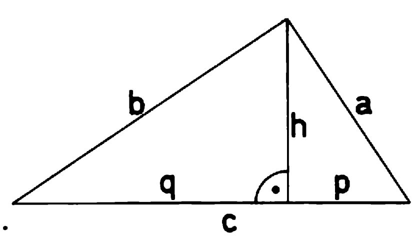
113/1. $\Delta ABC \cong \Delta CEF$ (WSW)
$\Delta ABC \cong \Delta CHG$ (WSW)
$\Rightarrow \Delta CEF \cong \Delta CHG$

1132. $\Delta AHC \cong \Delta DCE$ (WSW) $\Rightarrow \overline{CD} = q$
$\Delta EDC \cong \Delta FGB$ (SWS) $\Rightarrow \varepsilon = \beta$





113/3. Umkehrung: Hat ein Quadrat über einer Dreieckseite denselben Inhalt wie das Rechteck aus der längsten Seite und dem anliegenden Seitenabschnitt, so ist das Dreieck rechtwinklig.
Beweis:
Es gelte $a^2 = cp$. Wegen $a^2 = p^2 + h^2$ und
$b^2 = q^2 + h^2$ gilt dann auch:
$b^2 = q^2 + h^2 = q^2 + a^2 - p^2 = q^2 + cp - p^2$
$= q^2 + pq = cq$
aus $a^2 = cp$ und $b^2 = cq$ folgt durch Addition:
$a^2 + b^2 = c(p + q) = c^2$,
also ist das Dreieck rechtwinklig.



113/4. Umkehrung: Ist in einem Dreieck der Inhalt des Höhenquadrats gleich dem des Rechtecks aus den beiden zugehörigen Seitenabschnitten, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Beweis:

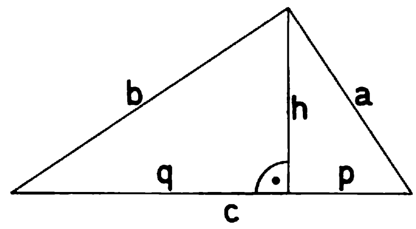
aus $b^2 = q^2 + h^2$ und $a^2 = p^2 + h^2$

folgt $a^2 + b^2 = 2h^2 + p^2 + q^2$,

wegen $h^2 = pq$ folgt:

$a^2 + b^2 = p^2 + 2pq + q^2 = (p+q)^2 = c^2$,

also ist das Dreieck rechtwinklig.



113/5. $\frac{1}{2}(a+b)\cdot(a+b) = \frac{1}{2}c^2 + 2\cdot\frac{1}{2}ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

113/6. Dreht man das Viereck ABLT um 90° nach rechts (um A), so kommt es mit Viereck APRC zur Deckung. Da ABLUFT durch Achsenspiegelung an TL und CAPRIB durch Punktspiegelung am Mittelpunkt von [CR] ensteht, folgt die Flächengleichheit der Sechsecke. Es gilt also:

$a^2 + b^2 + 2\cdot\frac{1}{2}ab = c^2 + 2\cdot\frac{1}{2}ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Ein Umkreis existiert, wenn $\sphericalangle ACR + \sphericalangle P = 180°$.

Wegen $\sphericalangle ACR = \sphericalangle ATL = 45°$ ist dies nur der Fall,

wenn $\sphericalangle ACR + 90° + 90° - \alpha = 180°$ ist, das heißt $\alpha = 45°$.

114/7. a) Die Kongruenz der entsprechenden Teilfiguren liefert die Zerlegungsgleichheit.

b) Die gleich bezeichneten Teilfiguren sind kongruent. Ist b die kleinere Kathete und gilt $h > 2q$, so braucht man mehr als vier Stücke.

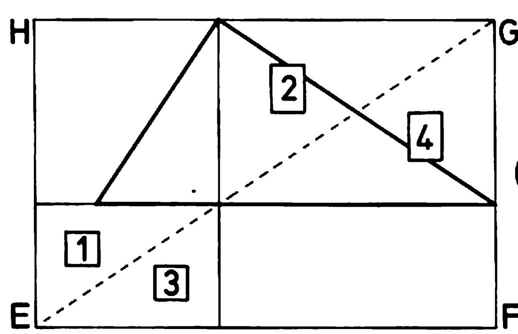
114/8. bis 12. Aus der Konstruktionsabfolge der Zerlegungen ergibt sich jeweils die Flächengleichheit der gleich bezeichneten Teilfiguren. Durch Addition ergibt sich jedesmal der Pythagoras.

115/13. $\boxed{1} = \boxed{3}$, $\boxed{2} = \boxed{4}$

$\Delta EFG \cong \Delta EGH \Rightarrow$

$\boxed{1} + \boxed{2} + h^2 = \boxed{3} + \boxed{4} + pq$

$\Rightarrow h^2 = pq$



13

115/14. Wegen $m = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ gilt:

$a = \frac{a'}{c'}\cdot c$, $b = \frac{b'}{c'}\cdot c$

Einsetzen in $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt $a\cdot\frac{a'}{c'}\cdot c + b\cdot\frac{b'}{c'}\cdot c = c^2$, also $aa' + bb' = cc'$.

115/15. Für das Hypotenusenquadrat gilt: $c^2 = 4\cdot\frac{1}{2}ab + (a-b)^2 = 2ab + III$

für die Summe der Kathetenquadrate gilt: $a^2 + b^2 = 4\cdot\frac{1}{2}ab + I + II$

wegen $c^2 = a^2 + b^2$ folgt: $I + II = III$.

115/16. Ist h die zur Grundlinie c gehörige Höhe, so gilt:

$\boxed{1} + \boxed{2} = \frac{ch + c(c-h)}{2} = \frac{c^2}{2}$; andrerseits gilt:

$\boxed{1} + \boxed{2} = \frac{1}{2}b\cdot h_b + \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}a^2$,

Gleichsetzen liefert $a^2 + b^2 = c^2$.

115/17. Für den Flächeninhalt F des großen Quadrats gilt:

$F = c^2$ beziehungsweise $F = 4\cdot\frac{1}{2}ab + (a-b)^2$

$\Rightarrow c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$.

Pythagoräische Tripel

116/1. **a)** $(2x)^2 + (x^2-1)^2 = 4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$, $(x > 1)$

b) $(2xy)^2 + (x^2-y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2$, $(x > y)$

c) $(2x+1)^2 + (2x^2+2x)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 =$
$= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 8x^3 + 4x^2 + 4x = (2x^2 + 2x + 1)^2$

d) $(x^2 + 2xy)^2 + (2y^2 + 2xy)^2 = x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2 + 4y^4 + 8xy^3 + 4x^2y^2 =$
$x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 4x^3y + 8xy^3 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)^2$

116/2. $k^2 + n^2 = (2n+1) + n^2 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

116/3. Es sei $a \in \mathbb{N}$; wegen $a = b$ gilt dann $a^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

116/4. Es seien a, b und c ein Pythagoräisches Tripel. Dann gilt $h = \frac{ab}{c}$.

Wäre $h \in \mathbb{N}$, so würde folgen: $ab = kc$ mit $k \in \mathbb{N}$ und daraus

$a = \frac{kc}{b} = \frac{l\cdot bc}{b}$ mit $l \in \mathbb{N}$ wegen ggT(b,c) = 1, also $a = lc$, **Widerspruch**!

116/5. Wenn a, b und c ein primitives Pythagoräisches Tripel bilden, so sind sie paarweise teilerfremd, das heißt, a und b können nicht beide gerade sein. Wären a und zugleich b ungerade, so hätten sowohl a^2 als auch b^2 den Rest 1 bei Teilung durch 4. Damit würde c^2 bei Teilung durch 4 den Rest 2 ergeben, was nicht möglich ist (weil dann c gerade und somit c^2 durch 4 teilbar sein müsste).

Man kann also ohne Einschränkung annehmen:
a gerade, b ungerade, c ungerade.

α) Annahme: Eine Zahl ist durch 4 teilbar.
Wegen $a = 2k$ und b, c ungerade folgt aus $a^2 = c^2 - b^2$:
$4k^2 = (c - b)(c + b)$; weil $(c - b)$ und $(c + b)$ gerade sind, gilt:
$4k^2 = 2l \cdot 2m$. Addition der Gleichungen $c + b = 2m$ und $c - b = 2l$ liefert: $2c = 2(l + m)$, also $c = l + m$, wobei entweder l oder m gerade sein muss, da c ungerade ist. Es sei z.B. m gerade, also $m = 2n$,
dann gilt $4k^2 = 2l \cdot 2m \Rightarrow k^2 = lm \Rightarrow k^2 = l \cdot 2n \Rightarrow$ k ist gerade
$a^2 = 4k^2 = 4(2k')^2 = 16k'^2 \Rightarrow a = 4k'$.

β) Annahme: Keine Zahl ist durch 3 teilbar.
Dann ergäben sich bei Teilung durch 3 die Reste $\bar{a} = 1$ oder 2, $\bar{b} = 1$ oder 2, $\bar{c} = 1$ oder 2. Die Quadrate a^2, c^2, b^2 hätten somit die Reste $\bar{a}^2 = 1$, $\bar{b}^2 = 1$, $\bar{c}^2 = 1$. Wegen $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 2 \neq \bar{c}^2$ ist dies unmöglich.

γ) Annahme: Keine Zahl ist durch 5 teilbar.
Dann ergäben sich bei Teilung durch 5 die Reste $\bar{a} = 1, 2, 3$ oder 4, ebenso $\bar{b} = 1, 2, 3$ oder 4 und $\bar{c} = 1, 2, 3$ oder 4. Die Quadrate hätten die Reste $\bar{a}^2 = 1$ oder 4, ebenso $\bar{b}^2 = 1$ oder 4 und $\bar{c}^2 = 1$ oder 4.

$\Rightarrow \bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 2$ oder $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 0$ oder $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 3$
Widerspruch **Widerspruch** **Widerspruch**

116/6. **a)** Fläche(ABC) $= \rho \cdot \frac{1}{2}(a + b + c)$

$$\Rightarrow 2\rho = \frac{4 \cdot \text{Fläche(ABC)}}{a + b + c} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} ab}{a + b + c} = \frac{2ab}{a + b + c} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{a + b + c} = a + b - c$$

b) Man darf annehmen: a gerade, b ungerade und c ungerade

$$\Rightarrow \rho = \frac{a + b - c}{2} = \frac{2k + 2l + 1 - (2m + 1)}{2} = k + l - m \in \mathbb{N}$$

116/7. ab und $(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} = (a + b)c$ sind natürliche Zahlen.

$$(ab)^2 + [(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}\,]^2 = a^2b^2 + (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + b^2) =$$
$$= a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 = (a + b)^4 - (2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3)$$
$$= (a + b)^4 - 2ab(a + b)^2 + a^2b^2 = [(a + b)^2 - ab]^2$$

116/8. Nach DIOPHANTOS (Lehrbuch!) lässt sich ein Pythagoräisches Tripel a, b und c so darstellen: $a = 2rs$, $b = r^2 - s^2$, $c = r^2 + s^2$, $(r, s \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot c}{a + b + c} = \frac{2rs(r^2 - s^2)(r^2 + s^2)}{2rs + r^2 - s^2 + r^2 + s^2} = \frac{2rs(r^2 - s^2)(r^2 + s^2)}{2r(r + s)} = s(r - s)(r^2 + s^2)$$

116/9. Nach Aufgabe **5.** gilt: $a = 4k$ und außerdem enthält das Tripel genau eine durch 3 teilbare Zahl, diese kann nur a oder b sein. Wäre nämlich $c = 3n$, so ließe a bei Teilung durch 3 den Rest $\bar{a} = 1$ oder 2 und ebenso $\bar{b} = 1$ oder 2. Die Quadrate a^2, b^2 und c^2 hätten also die Reste $\bar{a}^2 = 1$, $\bar{b}^2 = 1$ und $\bar{c}^2 = 0$, was wegen $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 2$ nicht möglich ist.
$\Rightarrow A = \frac{a+b}{2} = \frac{4k \cdot b}{2} = 2k \cdot b = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6l.$

Konstruktionsaufgaben

116/1. **a)** Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $c = 8{,}5$, $p = 6{,}5$ und $q = 2$ ergibt $b^2 = 17$.
b) Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a = 2{,}5$ und $b = 4$ ergibt $c^2 = 22{,}25$
c) Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks mit $a = 2{,}5$ und $c = 4$ ergibt $b^2 = 9{,}75$

116/2. **a)** Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit $a = b = 3 \Rightarrow c^2 = 18$
b) Rechtwinkliges Dreieck mit $a = 3$, $b = 6 \Rightarrow c^2 = 45$
c) Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit $c = 3 \Rightarrow a^2 = b^2 = 4{,}5$

116/3. **a)** Rechtwinkliges Dreieck mit $a = 6$, $p = 4{,}5 \Rightarrow a^2 = cp$
b) $a = 12$ $b = 3$ **c)** $a = 9$ $b = 4$ **d)** $a = 9$ $b = 4$

117/4. **a)** Man verwandelt das Dreieck in ein Rechteck, dann das Rechteck mithilfe des Kathetensatzes in ein Quadrat ($a \approx 5{,}3$).
b) wie **a)** ($a \approx 3{,}95$)

117/5. **a)** $\sqrt{41}^{\,2} = 5^2 + 4^2$ **b)** $\sqrt{65}^{\,2} = 7^2 + 4^2$
c) $3^2 = \sqrt{5}^{\,2} + 2^2$ **d)** $8^2 = \sqrt{39}^{\,2} + 5^2$

117/6. **a)** $\sqrt{3}^{\,2} = 3 \cdot 1$ **b)** $\sqrt{6}^{\,2} = 2 \cdot 3$ **c)** $\sqrt{14}^{\,2} = 2 \cdot 7$

117/7. **a)** $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \sqrt{n}^{\,2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{4} + n = \frac{n^2 + 2n + 1}{4} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$
b) $9^2 = 8^2 + \sqrt{17}^{\,2}$

117/8. Durch Wegscheren einer Ecke entsteht ein Viereck, durch Wegscheren einer weiteren Ecke ein Dreieck. Das Dreieck wird in ein Rechteck verwandelt. Aus dem Rechteck läßt sich mithilfe des Kathetensatzes das gesuchte Quadrat konstruieren. ($a = 4\sqrt{3} \approx 6{,}9$)

Einfachere Aufgaben

117/1.

	a	b	c	h	q	p	F
a)	7	24	25	6,72	23,04	1,96	84
b)	12	5	13	$\frac{60}{13}$	$\frac{25}{13}$	$\frac{144}{13}$	30
c)	7,5	4	8,5	$\frac{60}{17}$	$\frac{64}{34}$	$\frac{225}{34}$	15
d)	$3\sqrt{5}$	$\frac{3}{2}\sqrt{5}$	7,5	3	1,5	6	11,25
e)	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	5	2	1	4	5
f)	$2\sqrt{17}$	$\frac{1}{2}\sqrt{17}$	8,5	2	0,5	8	8,5

(bei **f)** gibt es eine zweite symmetrische Lösung)

117/2.

	a	h	F
a)	6	$3\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$
b)	$\frac{2}{3}\sqrt{15}$	$\sqrt{5}$	$\frac{5}{3}\sqrt{3}$
c)	$2\sqrt{15}$	$3\sqrt{5}$	$15\sqrt{3}$

118/3.

	a	c	h_a	h_c	F
a)	$2{,}5\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5}$	5	12,5
b)	$\sqrt{29}$	4	$\frac{20}{29}\sqrt{29}$	5	10
c)	$3\sqrt{2}$	6	$3\sqrt{2}$	3	9

118/4. **a)** $d = 5\sqrt{2}$ **b)** $d = 10$ **c)** $e = 18$ $f = 24$
d) $e = f = 25$ **e)** $e = 41$ $f = \sqrt{337}$

118/5. $2s + s\sqrt{2} = 30 \Rightarrow s = 15(2 - \sqrt{2}),\quad b = 30(\sqrt{2} - 1)$

118/6. $u = 30\sqrt{\sqrt{3}}$

100/7. $b = 17(\sqrt{5} - 1)$

118/8. $s = 4$ $u = 10$

100/9. $a = 13$ $r = \frac{60}{13}$

118/10. a) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a^2}{a^2/2} = \frac{2}{1}$ $\qquad \frac{u_1}{u_2} = \frac{4a}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

b) $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a^2\sqrt{3}/4}{a^2\sqrt{3}/16} = \frac{4}{1}$ $\qquad \frac{u_1}{u_2} = \frac{3a}{3a/2} = \frac{2}{1}$

118/11. a) $\frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ab \Rightarrow h = \frac{ab}{c}$

b) $hc = ab \Rightarrow h^2c^2 = a^2b^2 \Rightarrow h^2(a^2 + b^2) = a^2b^2 \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

118/13. $a = 6{,}5 \quad b = 8{,}5 \quad c = 5\sqrt{5}$

118/14. $a = 5\sqrt{2} \qquad b = 4\sqrt{2} \qquad c = \sqrt{82}$
wegen $a^2 + b^2 = c^2$ ist ΔABC rechtwinklig, $F = 20$.

118/15. Es gilt: $a = c = 8{,}5$ und $b = d = 6{,}5$. Deshalb ABCD ein Parallelogramm.
$\overline{AC} = 10\sqrt{2} \quad \overline{BD} = \sqrt{29}$

119/16. **a)** $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 5$
b) $D_1(5 + 2\sqrt{6}\,|5) \qquad D_2(5 - 2\sqrt{6}\,|5) \qquad E_1(8|0) \qquad E_2(8|8)$
c) $\overline{MF}^2 = 24{,}25 < 25 \;\Rightarrow\;$ F liegt im Kreis.

119/17. Auf dem Kreis liegen A, E, Z, P, C, Y und V. Im Kreis liegen G, H und S. Außerhalb liegen X, B und D. Der Kreis geht durch den Ursprung.

119/18. A(21|8) D(34|0) G(0|21) R(8|16) $\overline{GD} = \sqrt{1597}$, $l_{GRAD} = \sqrt{89} + 2\sqrt{233}$

119/19. Mit M(x|y) ergeben sich die Gleichungen:
I $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ II $x^2 + (y - 9)^2 = r^2$
III $(x - 1{,}5)^2 + (y - 13{,}5)^2 = r^2$, die Lösung ergibt M(7,5|9) und $r = 7{,}5$.

119/20. $e = \overline{MB} - \overline{MA} = \frac{1}{2}\sqrt{37} - \sqrt{5}$

119/21. Aus $\sqrt{(x - 6{,}5)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 2{,}5)^2 + (y - 6)^2}$ folgt $y = \frac{2}{3}x$.

119/22. $\overline{AB} = \sqrt{45} \quad F = 22{,}5 = \frac{1}{2}\sqrt{45}\,d \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{45}$

120/23. $h = r - \sqrt{r^2 - l^2/4} \approx 13{,}3\,\text{m}$

120/24. Der Messwert 17 ist falsch, weil d irrational ist (Abweichung: 0,17%).

120/25. $c = 8 \qquad a = b = \sqrt{65} \qquad \frac{a - c}{c} = 0{,}778\% \qquad \alpha = \beta > 60°$ wegen $a = b > c$.

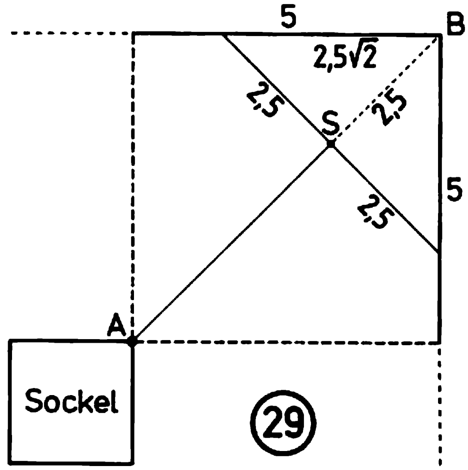
120/26. $s = \sqrt{80}$

120/27. **a)** $e = \sqrt{(r + h)^2 - r^2} \approx 19{,}5\,\text{km}$
b) mit e aus **a)** gilt: $e' = e + x = e + \sqrt{(r + h')^2 - r^2} \approx 35{,}5\,\text{km}$

120/28. a) $m = \frac{2,7}{30} = 9\%$ b) $m = \frac{826}{\sqrt{15000^2 - 826^2}} \approx 5,5\%$

c) 45°: $m = 100\%$ 30°: $m = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 57,7\%$ 60°: $m = \sqrt{3} \approx 173\%$

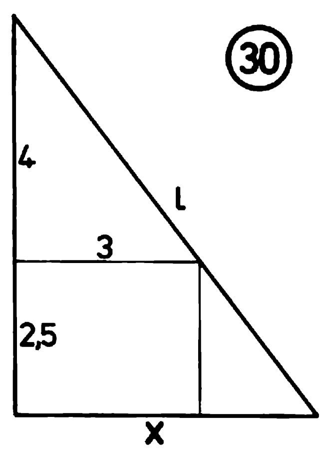
d) aus $\frac{s}{w} = 0,2$ und
$s^2 + w^2 = 4000^2$
folgt $s \approx 784$m



29

121/29. $\overline{AS} = 5\sqrt{2} - 2,5 \approx 4,6 < 5$

30



121/30. Aus $x : 3 = 6,5 : 4$
folgt $x = 4,875$
$l = \sqrt{6,5^2 + 4,875^2} = 8,125$

121/31. $\overline{ED} = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\overline{EC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
$\overline{VM} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $\overline{BV} = \sqrt{(a^2 + b^2)/4 + c^2}$

121/32. $\overline{MC} = 42,5$ $S = 5 \cdot 12 + 30 \cdot 42 = 1320$ $V = 1260$

121/33. a) $a\sqrt{5}$ $\frac{a}{2}\sqrt{10}$ $\frac{a}{2}\sqrt{13}$ $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ $a\sqrt{2}$ $\frac{a}{2}\sqrt{13}$
b) $\frac{a}{2}\sqrt{6}$ $\frac{3}{2}a$ $\frac{a}{2}\sqrt{6}$ $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\frac{3}{2}a$

122/34. M sei der Mittelpunkt des Quadrats und P die senkrechte Projektion von X auf ABCD:
$\overline{BM} = \sqrt{2}$ $\overline{BS} = 3\sqrt{2}$ $\overline{XP} = 2$ $\overline{BP} = \sqrt{2,5}$ $\overline{BX} = \sqrt{6,5}$ $h_{Trapez} = 2,5$
Fläche(BCYX) = $\frac{2+1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$ $S = 4 + 4 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{17}}{2} = 4(1 + \sqrt{17})$

122/35. $\frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot d}{2} \Rightarrow d = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

122/36. a) $d = r\sqrt{2}$ b) $e = r\sqrt{2}$ **103/37.** $e = 10\,\text{cm}$

122/38. $t = 25 - \sqrt{25^2 - 24^2} = 18$

122/39. $x = \frac{a}{2}\sqrt{6}$ $y = a\sqrt{2{,}5 + \sqrt{2}}$ $z = a\sqrt{1 + 0{,}5\sqrt{2}}$

122/40. a) $\dfrac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2}}{a} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{5}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ d) $\dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

123/41. $5^2 + 3^2 = \sqrt{5^2 + 3^2}^{\;2}$

123/42. $F = 4 \cdot \frac{50 \cdot 24}{2} = 2400$

die Gleichungen $\frac{e+f}{2} = 2400$ und $e^2/4 + f^2/4 = 2500$ ergeben:

$e^4 - 10\,000\,e^2 + 4800^2 = 0 \;\Rightarrow\; e_1 = 80 \quad e_2 = 60 \quad f_1 = 60 \quad f_2 = 80$

123/43. $s = \sqrt{5}$, $\overline{PA} = \sqrt{10}$; die dritte Ecke des Dreiecks mit den Katheten 1 und 2 sei R, der Höhenfußpunkt H. Kathetensatz:

$1^2 = \sqrt{5}\,\overline{RH} \;\Rightarrow\; \overline{RH} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \;\Rightarrow\; \overline{QH} = \sqrt{\frac{4}{5}} \;\Rightarrow\; \overline{QA} = \sqrt{10}$

das heißt, P und Q liegen auf einem Kreis um A.

123/44. Der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks ABCD sei M.

Wäre $\alpha = \sphericalangle DMA = 90°$, so würde gelten

$\overline{MD} = h_1 = \frac{210}{\sqrt{421}}$ und $\overline{AM} = h_2 = \frac{240}{\sqrt{481}}$

wegen $h_1{}^2 + h_2{}^2 \neq 15^2$ ist dies unmöglich $\Rightarrow \alpha \neq 90°$.

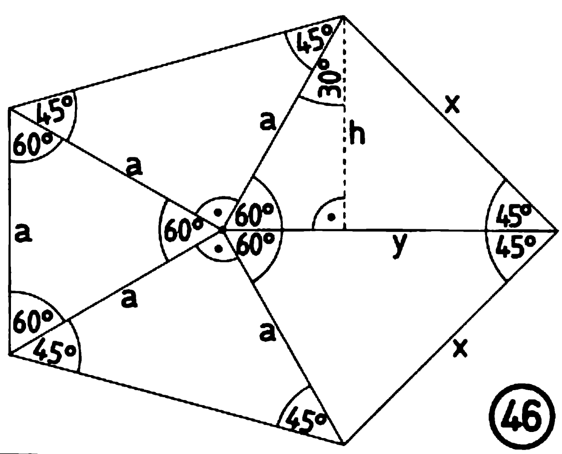
123/45. Für die Hypotenusen der gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke ergeben sich der Reihe nach $a\sqrt{2}$, $2a$, $2a\sqrt{2}$, $4a$, $4a\sqrt{2}$, $8a$, $8a\sqrt{2}$, $16a$ aus $4a = 12$ folgt $a = 3$.

123/46. $a\sqrt{2} = 82 \;\Rightarrow\; a = 41\sqrt{2}$

$h = \frac{41}{2}\sqrt{6}$

$y = h + \frac{1}{2}a = \frac{41}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + 1)$

$x = h\sqrt{2} = 41\sqrt{3}$



46

123/47. a) Wegen $20^2 = 12^2 + 16^2$ und $39^2 = 15^2 + 36^2$ ist ABCD ein Trapez, weil AB || CD ist.

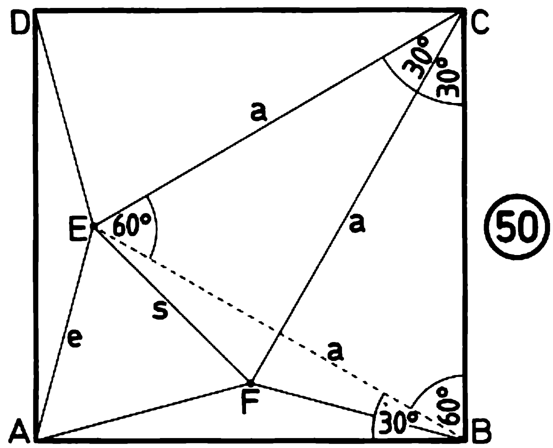
b) $d_1 = d_2 = 45$

c) $x = 10$ $z = 12$ $b = d = \sqrt{1305}$

123/48. $e = 51$, $f = 74$; zeichnet man die Höhe h des Trapezes durch C (Höhenfußpunkt H), so gilt: $h = 24$, $\overline{HB} = 25$
$\Rightarrow \beta < 45°$, weil $24 < 25$ und $\sphericalangle CHB = 90°$ ist.

105/49. $v = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,a \qquad w = \frac{2}{5}\sqrt{5}\,a$

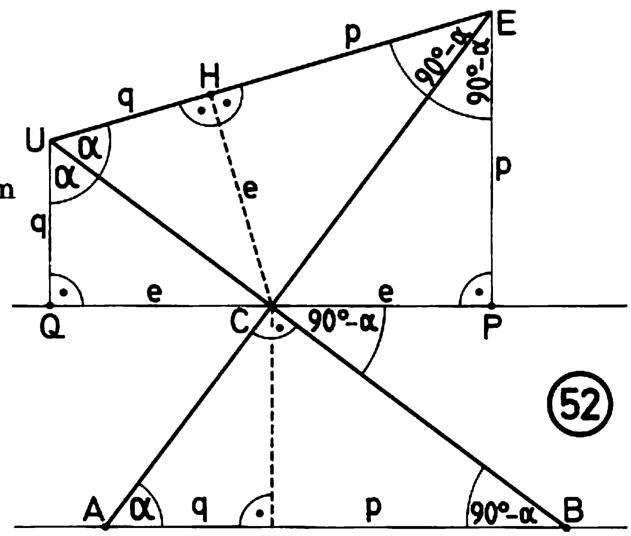
123/50. $\Delta EFC \cong \Delta EAB$ (SWS)
$\Rightarrow e = s$
$s^2 = (a/2)^2 + (a - a/2\sqrt{3})^2$
$\Rightarrow s = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$



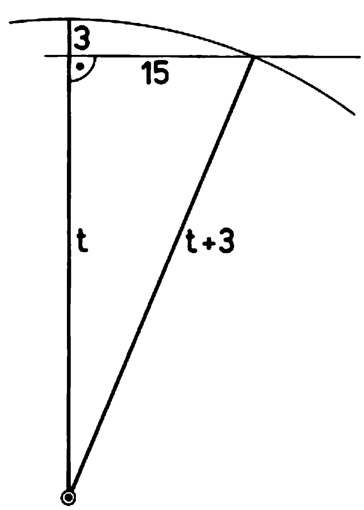
124/51. $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,z$, $x = \sqrt{3}\,z$, $y = \frac{3}{2}\,z$
$\frac{1}{2}\,z + y = 8\text{m} \Rightarrow$
$z = 4\text{m}$, $x = 4\sqrt{3}$ m, $h = 2\sqrt{3}$ m

124/52. **a)** Die Kongruenzsätze liefern (siehe Skizze!):
$e = \overline{QC} = \overline{CH} = \overline{CP}$

b) Die Behauptung folgt aus den Kongruenzsätzen.
$F = ab = 12$



124/53. $(t + 3)^2 = t^2 + 15$
$6t + 9 = 225$
$\Rightarrow t = 36$ cm
●●●●●●●●●●●●●●●●
oder Sehnensatz:
$3 \cdot (2t + 3) = 15 \cdot 15$
$\Rightarrow t = 36$ cm



Schwierigere Berechnungen

124/1. $v + w = 2a \Rightarrow a = \frac{v+w}{2}$; $\quad g^2 = vw$ (Höhensatz) $\Rightarrow g = \sqrt{vw}$

$g^2 = ha$ (Kathetensatz) $\Rightarrow vw = h \cdot \frac{v+w}{2} \Rightarrow h = \frac{2vw}{v+w}$

$q^2 = a^2 + (a - v)^2$ (Pythagoras) $\Rightarrow q^2 = \left(\frac{v+w}{2}\right)^2 + \left(\frac{v+w}{2} - v\right)^2 = \frac{v^2 + w^2}{2}$

$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{v^2+w^2}{2}}$

125/2. $v^2 = x(v + w)$

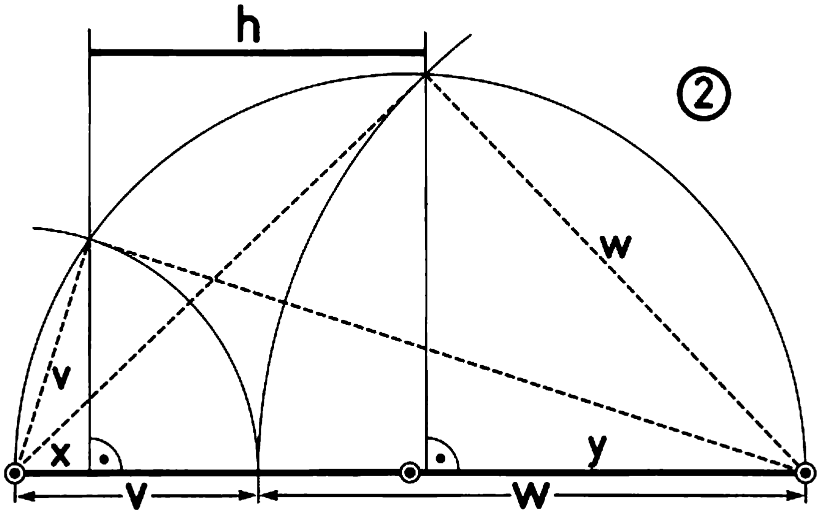
$\Rightarrow x = \frac{v^2}{v+w}$

$w^2 = y(v + w)$

$\Rightarrow y = \frac{w^2}{v+w}$

$h = v + w - x - y$

$= \frac{2vw}{v+w}$



125/3. Der Kreisradius sei r: $a = v + r = v + \frac{w-v}{2} = \frac{v+w}{2}$

Sekantentangentensatz: $g^2 = vw \Rightarrow g = \sqrt{vw}$

Kathetensatz: $g^2 = ha \Rightarrow h = \frac{2vw}{v+w}$

125/4. $d = \overline{DB} = 25$; $\quad \frac{d \cdot y}{2} = \frac{15 \cdot 20}{2} \Rightarrow y = 12$; $\quad \overline{DP} = \overline{QB} = 9$ (Pythagoras)

$\overline{PQ} = 25 - 2 \cdot 9 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{193}$ (Pythagoras)

$\frac{xz}{2} = \frac{7 \cdot 12}{2} \Rightarrow z = \frac{84}{193}\sqrt{193}$

125/5. Parallelogrammseite $a = 26$, $x = \sqrt{31^2 + 12^2} = \sqrt{1105}$

$y = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}$; $\quad \frac{1}{4}z^2 = 13^2 - (3\sqrt{13})^2 \Rightarrow z = 4\sqrt{13}$

125/6. Haben die abgesägten Dreiecke die Schenkellänge s, so gilt:

I $b^2 = 2s^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b \qquad$ II $b + 2s = a$

I in II eingesetzt: $b + b\sqrt{2} = a \Rightarrow b = a(\sqrt{2} - 1)$

$F = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}s^2 = 2a^2(\sqrt{2} - 1)$

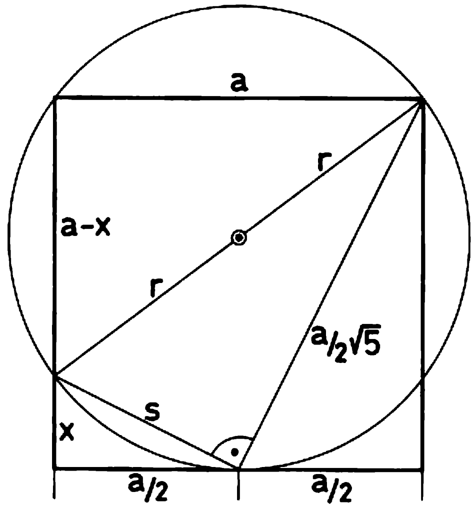
125/7. a) $r = \frac{1}{2}a \qquad$ b) $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

125/7. c) I $\quad a^2 + (a-x)^2 = 4r^2$

II $\quad x^2 + \frac{1}{4}a^2 = s^2$

III $\quad s^2 + \frac{5}{4}a^2 = 4r^2$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}a,\ r = \frac{5}{8}a,\ s = \frac{1}{4}a\sqrt{5}$



d) $r\sqrt{2} + r = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow r = a(2-\sqrt{2})$

Sekanten-Tangenten-Satz:

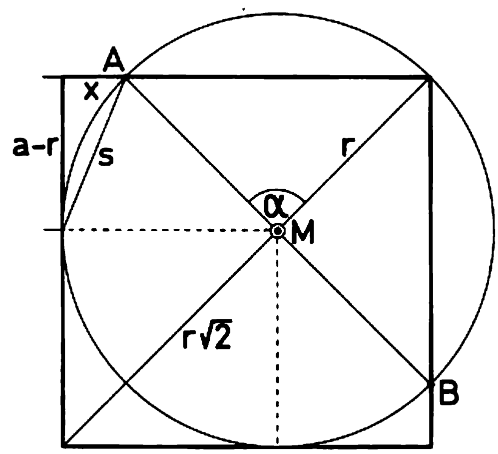
$xa = (a-r)^2 \;\Rightarrow\; x = a(3-2\sqrt{2})$

$x^2 + (a-r)^2 = s^2$

$\Rightarrow s = \sqrt{20 - 14\sqrt{2}}\,a$

$\alpha = 90° \;$ wegen $\;(a-x)^2 = 2r^2$

$\Rightarrow\; M \in AB$



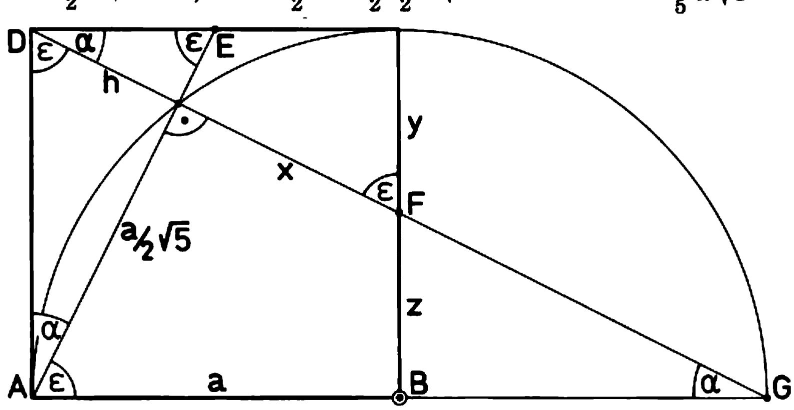
e) $a = R + R\sqrt{2} \;\Rightarrow\; R = a(\sqrt{2}-1)$

$r\sqrt{2} + r = a\sqrt{2} - a \;\Rightarrow\; r = a(3-2\sqrt{2})$

f) $a = r + \sqrt{r^2 + \frac{1}{4}a^2} \;\Rightarrow\; r = \frac{3}{8}a$

g) $\Delta AED \cong \Delta BGF$ (WSW) $\quad \Rightarrow z = \frac{1}{2}a \Rightarrow y = \frac{1}{2}a$

$x = \frac{1}{2}a\sqrt{5} - h, \qquad \frac{a \cdot a/2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{5}\cdot h \qquad \Rightarrow h = \frac{1}{5}a\sqrt{5} \qquad x = \frac{3}{10}a\sqrt{5}$



h) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}s\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot a$

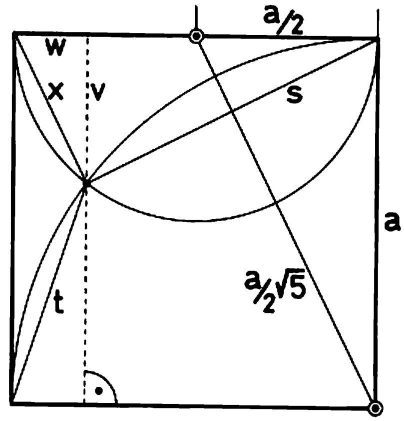
$\Rightarrow s = \frac{2}{5}a\sqrt{5}$

$x^2 + s^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}a\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}a\cdot v = \frac{1}{2}x\cdot s \Rightarrow v = \frac{2}{5}a$

$w = \sqrt{x^2 - v^2} = \frac{1}{5}a$

$t = \sqrt{w^2 + (a-v)^2} = \frac{1}{5}a\sqrt{10}$



i) $r + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1)$

j) $v^2 = (a - \frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 + (a - \frac{1}{2}a\sqrt{2})^2 \quad\Rightarrow\quad v = a(\sqrt{2}-1) \qquad w = v$

k) $(r + \frac{1}{2}a)^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a - r)^2 \quad\Rightarrow\quad r = a/8$

l) $\left(\frac{a-2r}{2}\right)^2 + (a-r)^2 = (\frac{1}{2}a + r)^2 \quad\Rightarrow\quad r = (2-\sqrt{3})a \qquad s = r$

m) $h + r = a,\ h^2 = r(a+r)$ (Sekanten-Tangenten-Satz)

$\Rightarrow \sqrt{r^2 + ar} + r = a \quad\Rightarrow\quad r = a/3$ (h ist Höhe in ΔABM)

n) ist x die längere Teilstrecke von a, so gilt:

$2x^2 = s^2 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{1}{2}s\sqrt{2};\ s^2 = a^2 + (a-x)^2 \quad\Rightarrow\quad s = a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

o) $a^2 + (a+x)^2 = 4a^2$

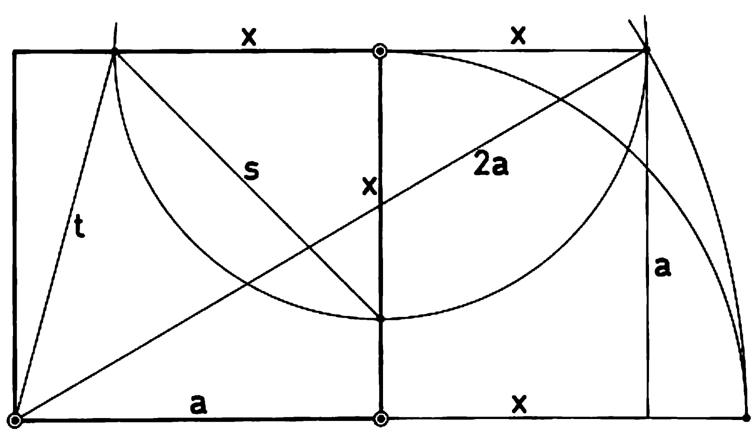
$\Rightarrow x = a(\sqrt{3}-1)$

$2x^2 = s^2$

$\Rightarrow s = (\sqrt{6}-\sqrt{2})a$

$t^2 = a^2 + (a-x)^2$

$\Rightarrow t = a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

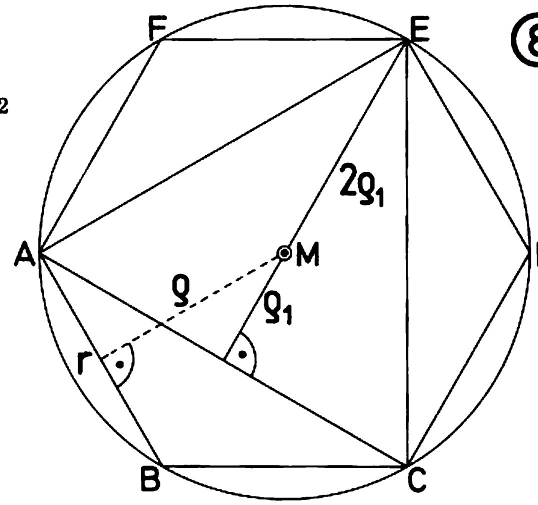


126/8. a) $\rho = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$

b) $F = 6 \cdot \frac{1}{2} r \cdot \frac{1}{2} r\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, r^2$

c) $\rho_1 = \frac{1}{2} r$

d) $F_1 = \frac{1}{2} F = \frac{3}{4}\sqrt{3}\, r^2$



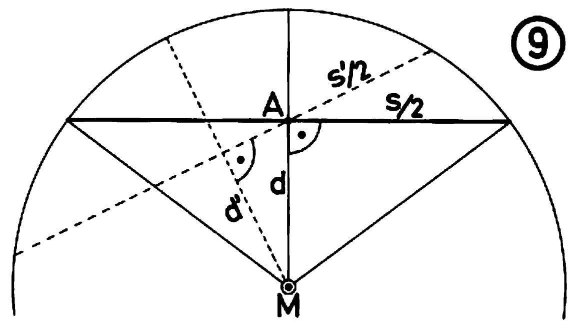
8

126/9. Die kleinste Sehne ist das Lot zu MA; $s = 8$

$s = 2\sqrt{r^2 - d^2}$

$s' = 2\sqrt{r^2 - d'^2} \Rightarrow$

wegen $d' < d$ gilt $s < s'$.



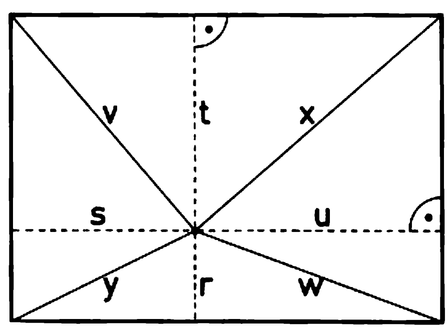
9

126/10. $x^2 = t^2 + u^2$, $v^2 = t^2 + s^2$

$y^2 = r^2 + s^2$, $w^2 = r^2 + u^2$

durch Addition folgt:

$x^2 + y^2 = v^2 + w^2$



10

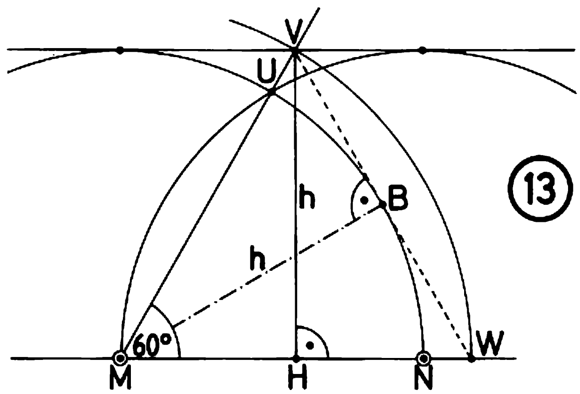
126/11. $y = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ $\quad z = \sqrt{(\frac{3}{2} a)^2 + (\frac{1}{2} a)^2} = \frac{1}{2} a\sqrt{10}$

126/12. $\overline{AC} = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow x = a(\sqrt{3} - 1)$

$z^2 = (a - x)^2 + a^2/4 \Rightarrow z = a\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} a(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

$a\rho = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} a \quad \Rightarrow \rho = \frac{1}{4} a\sqrt{3}$

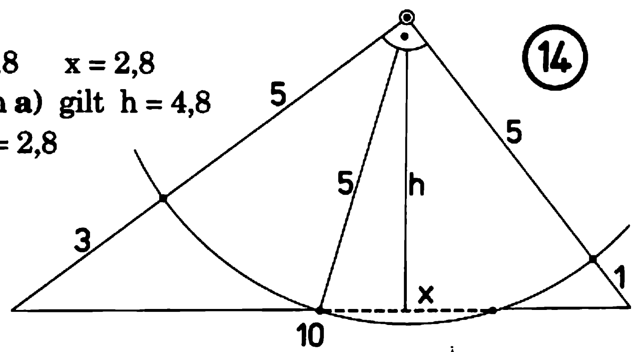
126/13. ΔMNU ist nach Konstruktion gleichseitig, ebenso ist auch ΔMWV gleichseitig, weil $\sphericalangle M = 60°$ und $\overline{MW} = \overline{MV}$ ist. Da für die Höhe in ΔMWV gilt $h = \overline{HV} = \overline{MB}$, muss VW Tangente sein.



126/14. **a)** $h = 4{,}8 \qquad x = 2{,}8$

b) wie in **a)** gilt $h = 4{,}8$

$\Rightarrow z = 2{,}8$



126/15. Nach PTOLEMAIOS gilt: $e^2 = vw + s^2 \;\Rightarrow\; e = \sqrt{vw + s^2}$

für die Flächen des Sehnenvierecks gilt:

$F = \frac{e(ab + cd)}{4r} = \frac{\sqrt{vw + s^2} \cdot (ws + vs)}{4r}$ andrerseits aber auch

$F = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{v + w}{2} \sqrt{s^2 - (\frac{w - v}{2})^2}$

gleichsetzen ergibt $r = s\sqrt{\frac{vw + s^2}{4s^2 - (w - v)^2}}$

126/16. Mit $\overline{AM_a} = x$ und $\overline{HM_a} = h$ gilt

$x^2 = v^2 + h^2 = b^2 + a^2/4, \qquad h^2 = a^2/4 - w^2$

$\Rightarrow\; v^2 + a^2/4 - w^2 = b^2 + a^2/4 \;\Rightarrow\; b^2 = v^2 - w^2$

126/17. **a)** $x = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ **b)** $2r = \frac{1}{2}a \;\Rightarrow\; r = a/4$

c) $r + r\sqrt{2} = \frac{1}{2}a \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)a$

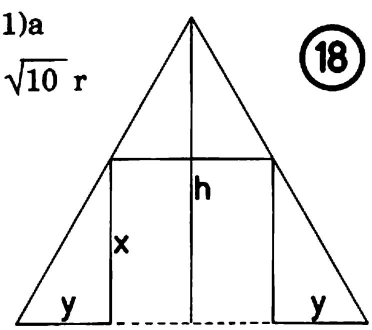
d) $r^2 = (3a/2)^2 + (a/2)^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{5}\sqrt{10}\, r$

127/18. **a)** $s = \frac{2}{3}b\sqrt{3}$

b) Strahlensatz: $\frac{y}{x} = \frac{a/2}{h}$

$h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, x$

$2y + x = a \;\Rightarrow\; x = a(2\sqrt{3} - 3)$



127/18. **c)** $2r = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a$

d) $r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$

$2r + 3\rho = h = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \Rightarrow \rho = \frac{1}{18}a\sqrt{3}$

127/19. **a)** $\overline{M_cH_c} = q - \frac{1}{2}c$ und $\overline{M_cH_c} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}c - r\right)^2 - r^2} - r$

Gleichsetzen dieser Gleichungen liefert schließlich $r = b - q$, wenn man $cq = b^2$ einsetzt.

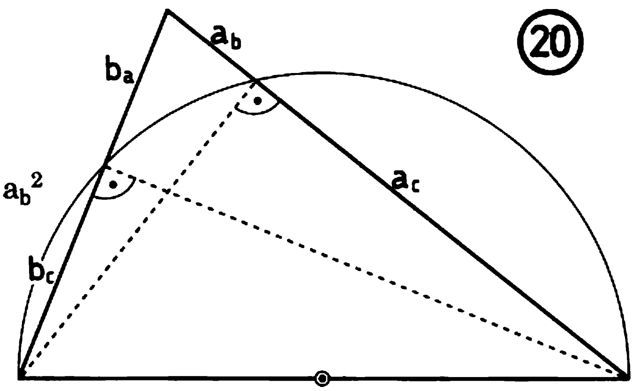
b) Nach **a)** gilt: $r_1 = b - q$ und analog $r_2 = a - p \Rightarrow r_1 + r_2 = a + b - c$

Für die Dreieckfläche gilt: $F = \frac{1}{2}ab = r\cdot\frac{1}{2}u \quad (u = a + b + c) \Rightarrow$

$\frac{1}{2}ab = r\cdot\frac{1}{2}(a + b + c) \Rightarrow 2r = \frac{2ab}{a + b + c} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{a + b + c} = a + b - c,$

insgesamt folgt also: $2r = r_1 + r_2 \Rightarrow$ M halbiert $[M_1M_2]$

20



127/20. Sekantensatz: $a\cdot a_b = b\cdot b_a$

$\Rightarrow a(a - a_c) = b(b - b_c)$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = b\cdot b_c - a\cdot a_c \quad (*)$

Pythagoras: $c^2 - a_c^2 = b^2 - a_b^2$

$\Rightarrow c^2 = b^2 + a_c^2 - (a - a_c)^2$

$= b^2 - a^2 + 2a\cdot a_c$

Einsetzen von (*) ergibt:

$c^2 = b\cdot b_c - a\cdot a_c + 2a\cdot a_c$

$= b\cdot b_c + a\cdot a_c$

127/21. Pythagoras:

$a^2 = e_1^2 + f_1^2,\ c^2 = e_2^2 + f_2^2,$

$b^2 = e_2^2 + f_1^2,\ d^2 = e_1^2 + f_2^2,$

Addition ergibt: $a^2 + b^2 = b^2 + d^2$

Vertauscht man im Sehnenviereck ABCD die Seiten b und c, so bekommt man das Sehnenviereck ABC'D mit demselben Umkreis und $b' = c$, $c' = b$.

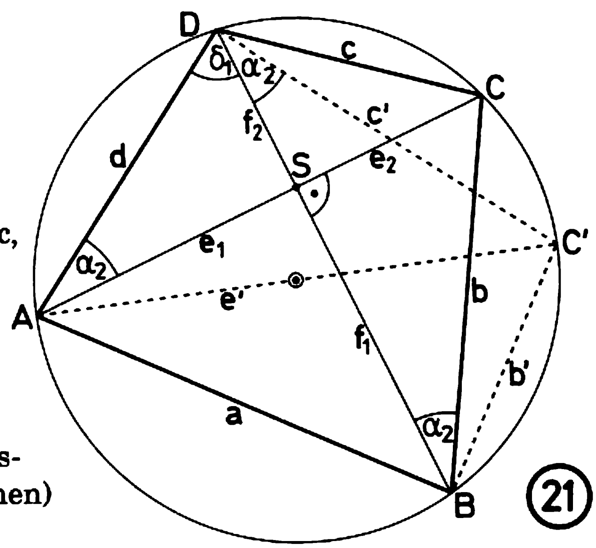
Wegen $\alpha_2 = \sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ (Umfangswinkel) und

$\alpha_2 = \sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC'$ (Umfangswinkel über gleich langen Sehnen)

gilt $\sphericalangle ADC' = \delta_1 + \alpha_2 = 90°$,

da $\delta_1 + \alpha_2 = 90°$ (ΔASD)

$\Rightarrow \Delta AC'D$ ist rechtwinklig $\Rightarrow \overline{AC'} = 2r \Rightarrow c'^2 + d^2 = b^2 + d^2 = 4r^2$



21

127/22. a) $2r + a = 2a \Rightarrow r = \frac{1}{2}a$

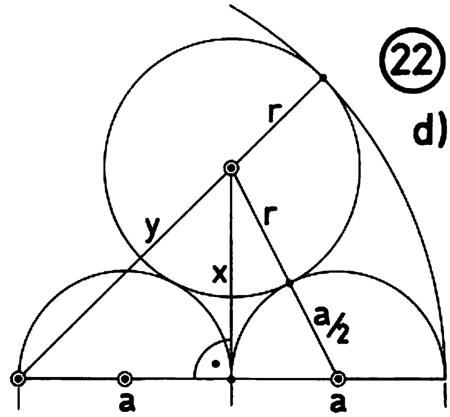
b) $r + a\sqrt{2} = 2a \Rightarrow r = a(2 - \sqrt{2})$

c) $(2a - r)^2 = a^2 + (a + r)^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3}a$

d) $x = \sqrt{(r + \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{r^2 + ar}$

$r + y = 2a$

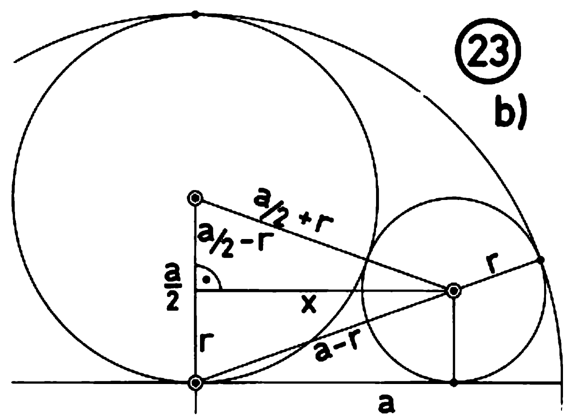
$r + \sqrt{a^2 + r^2 + ar} = 2a \Rightarrow r = \frac{3}{5}a$



127/23. a) $(r + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 + (a - r)^2$

$\Rightarrow r = \frac{1}{3}a$

b) $x^2 = (a - r)^2 - r^2 = a^2 - 2ar$,
einsetzen in
$(\frac{1}{2}a - r)^2 + x^2 = (r + \frac{1}{2}a)^2$
ergibt $r = \frac{1}{4}a$



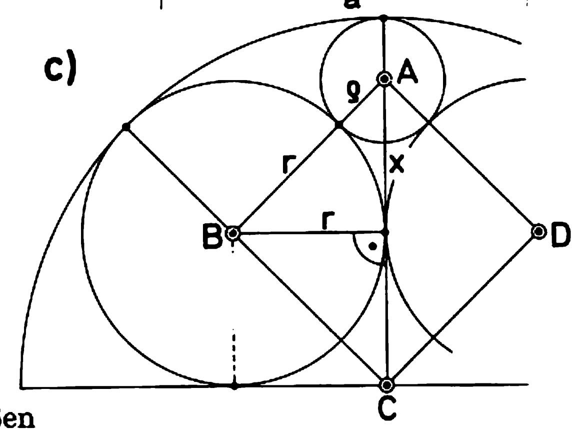
c) $a = r + r\sqrt{2} \Rightarrow r = a(\sqrt{2} - 1)$

$x = a - \rho - r = a(2 - \sqrt{2}) - \rho$

$(r + \rho)^2 = r^2 + x^2$

$\Rightarrow \rho = (3 - 2\sqrt{2})a$,

wegen $x = r$ ist ABCD ein Quadrat.



128/24. a) Die Mittelpunkte der drei großen Kreise bilden ein gleichseitiges Dreieck mit $h = r\sqrt{3}$. Der andere Mittelpunkt ist zugleich Umkreismittelpunkt.

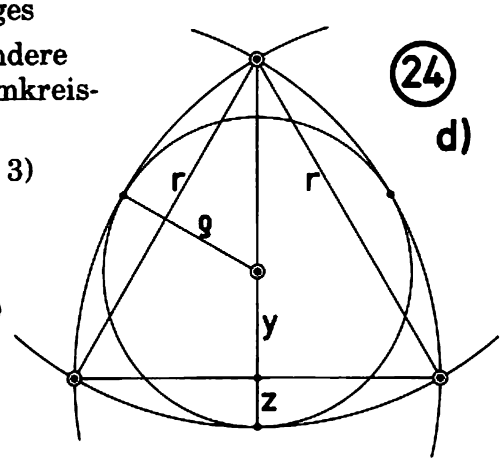
$\Rightarrow \rho = \frac{2}{3}r\sqrt{3} - r = \frac{1}{3}r(2\sqrt{3} - 3)$

b) $\rho = \frac{2}{3}r\sqrt{3} + r = \frac{1}{3}r(2\sqrt{3} + 3)$

c) $\rho = r + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{3}r(3 + \sqrt{3})$

d) $z = r - \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, $y = \frac{1}{6}r\sqrt{3}$

$\rho = y + z = \frac{1}{3}r(3 - \sqrt{3})$



128/25. $\overline{MS} = 12$, $\overline{AS} = 12\sqrt{2}$, $\overline{BS} = 4\sqrt{13}$, Höhensatz: $\overline{MS}^2 = \overline{BM} \cdot x \Rightarrow x = 18$
$\Rightarrow r = 13$, also $\overline{ML} = 5 \Rightarrow \overline{SL} = 13$

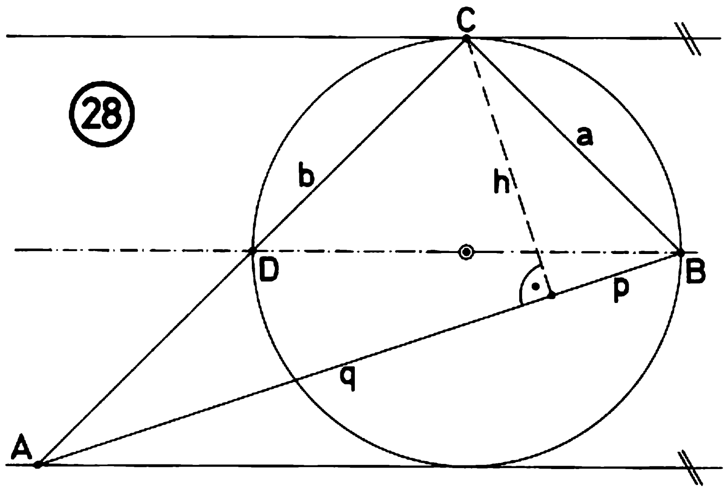
128/26. Aus $x^2 = a^2 + a^2$ (gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck) und
$x \cdot 2x = (r - a)(r + a)$ (Sehnensatz) folgt $x = \frac{1}{5} r\sqrt{10}$.

128/27. a) $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ b) $\frac{b}{a} = \sqrt{5} - 1$

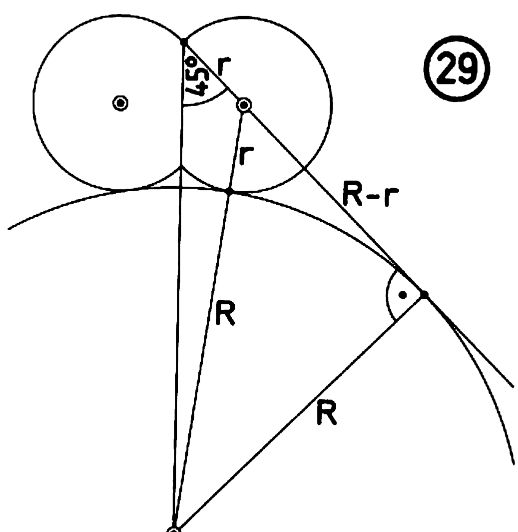
128/28. a) $a = d\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}\,d$,
$c = d\sqrt{10}$

b) $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$
$\Rightarrow h = \frac{2}{5}\sqrt{10}\,d$
$h^2 = q(c - q)$
$\Rightarrow q = \frac{4}{5}\sqrt{10}\,d$,
$p = \frac{1}{5}\sqrt{10}\,d$ $(q > p)$

c) $s_a = \frac{1}{2}\sqrt{34}\,d$
(Pythagoras)
$s_b = 2d$, $s_c = \frac{1}{2}\sqrt{10}\,d$.

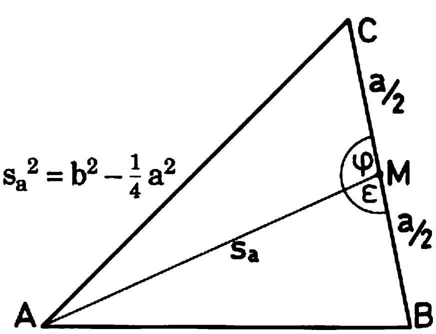


129/29. $(R + r)^2 = (R - r)^2 + R^2$
$\Rightarrow R = 4r$



129/30. $\frac{2}{3}\rho\sqrt{3} + \rho = r \Rightarrow \rho = r(2\sqrt{3} - 3)$

129/31. 1.Fall: $\varepsilon = \varphi = 90°$: $s_a^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$, $s_a^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$
Addition liefert
$2s_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2$
$\Rightarrow s_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$



2.Fall: Einer der beiden Winkel, z.B. ε, ist spitz, also ist φ stumpf:
Der erweiterte Pythagoras für die Dreiecke ABM bzw. AMC ergibt:

$$c^2 = s_a{}^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 - 2 \cdot \tfrac{1}{2} a \cdot a_{sa}$$
$$b^2 = s_a{}^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} a \cdot a_{sa}$$

Addition liefert wie im 1.Fall: $s_a{}^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Analog gilt: $s_b{}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, $s_c{}^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$,

durch Addition ergibt sich $s_a{}^2 + s_b{}^2 + s_c{}^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

129/32. 1.Fall: $\alpha = \beta = 90° \Rightarrow$ ABCD ist ein Rechteck; es gilt:
$a^2 + b^2 = e^2,\ \ a^2 + b^2 = f^2 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

2.Fall: Ein Winkel, z.B. α, ist spitz $\Rightarrow$ β ist stumpf.
Der erweiterte Pythagoras für ΔABC bzw. ΔABD ergibt:
$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab_a$ und $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab_a \Rightarrow 2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

129/33. **a)** $2h_a{}^2 = s^2 \Rightarrow h_a = \frac{1}{2}s\sqrt{2} = h_b$

$h_a{}^2 + (s - h_a)^2 = c^2 \Rightarrow c = s\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$h_c{}^2 = s^2 - c^2/4 \Rightarrow h_c = \frac{1}{2}s\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ **b)** $c = s\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $s_c = h_c$ $\quad s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (vergleiche Aufgabe **31.**)

$s_a = \frac{1}{2}s\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} = s_b$

129/34. $h^2 = b^2 - q^2,\ h^2 = a^2 - p^2 \Rightarrow b^2 - q^2 = a^2 - p^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = p^2 - q^2$

129/35. Die kürzere Kathete sei q, der Radius des großen Kreises sei r:
$y^2 = q \cdot 2r,\ \ x^2 = q \cdot r$ (Kathetensatz, q ist auch Hypotenusenabschnitt der rechtwinkligen Dreiecke in den Thaleshalbkreisen!) $\Rightarrow y^2 = 2x^2$

129/36. Mit $d(P,c) = r$, $d(P,a) = s$ und $d(P,b) = t$ gilt:
$u^2 + r^2 = z^2 + t^2,\quad v^2 + s^2 = x^2 + r^2,\quad w^2 + t^2 = y^2 + s^2$
Addition: $u^2 + r^2 + v^2 + s^2 + w^2 + t^2 = z^2 + t^2 + x^2 + r^2 + y^2 + s^2$,
$\Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2$

129/37. **a)** Für die Höhe x des Dreiecks aus den drei Mittelpunkten gilt:
$x = \sqrt{(r + \rho)^2 - \rho^2} = \sqrt{r^2 + 2\rho r} \Rightarrow h = r + \rho + x = r + \rho + \sqrt{r(r + 2\rho)}$

b) Mit x – wie in **a)** – gilt: $x = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 - \frac{1}{16}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{1}{4}(3 + 2\sqrt{2})a \Rightarrow \frac{a}{b} = 4(3 - 2\sqrt{2})$

130/38. $(s/2)^2 + (m - r)^2 = R^2 \Rightarrow s = \sqrt{R^2 - (m - r)^2}$

130/39. **a)** $R^2 - (m - r)^2 \geq 0$ **b)** nein

c) $s' = 2\sqrt{r^2 - (m - R)^2}$

d) konzentrische Kreise: $s = 2\sqrt{R^2 - r^2}$
Berührung von innen: $s = 2\sqrt{R^2 - (2r - R)^2}$

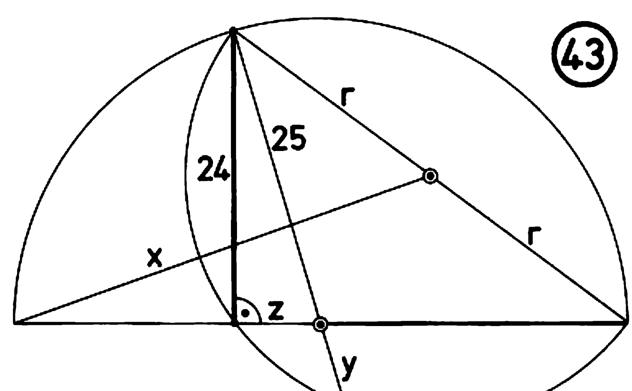
130/40. **a)** $2h = m + r + R \Rightarrow h = \frac{1}{2}(m + r + R)$
für die Fläche des Dreiecks aus den beiden Mittelpunkten und einem Schnittpunkt der Kreise gilt: $F = \sqrt{h(h - R)(h - r)(h - m)}$ (HERON)
oder auch: $F = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{1}{2} s = \frac{1}{4} ms$,
Gleichsetzen ergibt: $s = \frac{4}{m} \sqrt{h(h - R)(h - r)(h - m)}$

b) $s = 2r \Rightarrow m = \sqrt{R^2 - r^2}$

130/41. Fällt man von P aus die Lote auf die Schenkel, so ergibt sich ein Rechteck mit den Seiten $\frac{1}{2}v\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}w\sqrt{2}$.
Aus $\overline{CP}^2 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2$ folgt $v^2 + w^2 = 2\,\overline{CP}^2$.

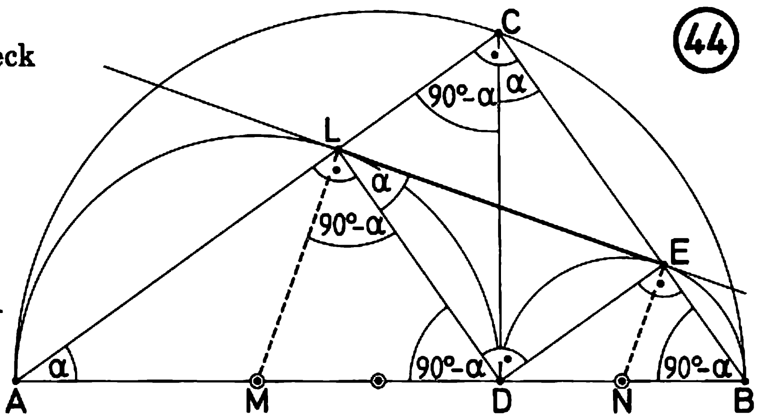
130/42. Dreieck VAM ist gleichseitig wegen $\overline{VM} = \overline{AM}$ und $\sphericalangle AMV = 60°$,
$\Rightarrow \overline{AV} = r = \frac{1}{3}s\sqrt{3} \Rightarrow \overline{VP} = \sqrt{\frac{7}{12}}\,s$ (Pythagoras),
Sehnensatz: $\overline{CP}(2r - \overline{CP}) = \overline{VP} \cdot \overline{PW} \Rightarrow \overline{PW} = \frac{1}{4}s\sqrt{\frac{12}{7}}$,
$\overline{VW} = \overline{VP} + \overline{PW} = \frac{5}{21}s\sqrt{21}$.

131/43. $z = 7$ (Pythagoras)
$y = 7$ (Sehnensatz)
$r = 20$ (Pythagoras)
Sekantensatz:
$(x - 20)(x + 20) = 18 \cdot 50$
$\Rightarrow x = 10\sqrt{13}$



131/44. **a)** CLDE ist wegen seiner rechten Winkel einRechteck
$\Rightarrow \overline{EL} = \overline{CD} = 24$

b) eine Winkelbetrachtung zeigt:
$\overline{EL} \perp \overline{ML}$ und
$EL \perp NE$
$\Rightarrow$ EL ist gemeinsame Tangente.



c) $\sphericalangle B = 90° - \alpha$
$\sphericalangle DEB = 90°$
$\sphericalangle DEL = 90° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle A + \sphericalangle E = 180° \Rightarrow$ ABEL ist ein Sehnenviereck.

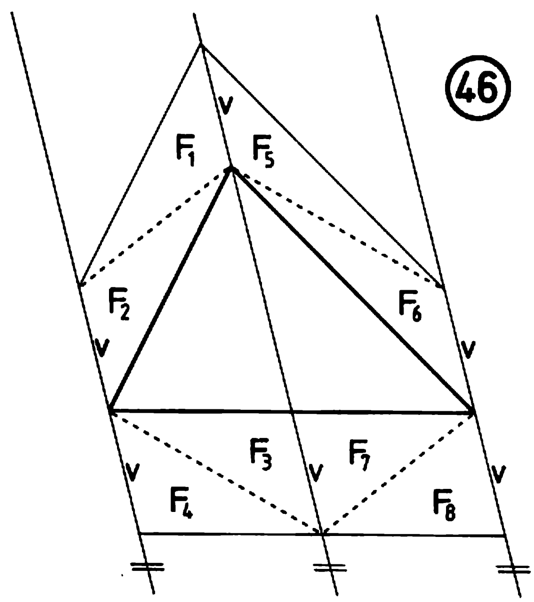
131/45. $p^2 + (1-q)^2 = x^2 + 1 + (x+p)^2 + q^2 \Rightarrow x^2 + px + q = 0$

a) $x_1 = 0 \quad x_2 = -3$ **b)** $x_1 = -2 \quad x_2 = 1$

c) $x_1 = -3 \quad x_2 = 4$ **d)** $x_{1;2} = 2$ **e)** $x_1 = -2{,}5 \quad x_2 = 2$

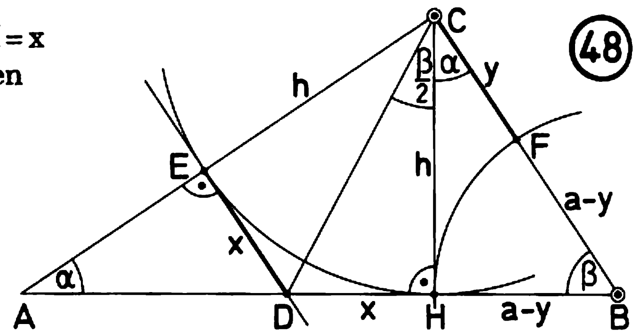
f) keine Schnittpunkte, also keine Lösung

131/46. Wegen gleicher Grundlinien und Höhen gilt:
$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$
$F_5 = F_6 = F_7 = F_8$
$\Rightarrow \boxed{1} + \boxed{2} = \boxed{3}$



131/47. Ist H der Höhenfußpunkt und $\overline{DH} = x$, so folgt aus dem erweiterten Pythagoras:
$b^2 = q^2 + d^2 + 2qx \Rightarrow 2x = \frac{1}{q}(b^2 - q^2 - d^2)$,
$a^2 = p^2 + d^2 - 2px \Rightarrow 2x = \frac{1}{p}(p^2 + d^2 - a^2)$
$\Rightarrow \frac{1}{q}(b^2 - q^2 - d^2) = \frac{1}{p}(p^2 + d^2 - a^2)$
$\Rightarrow a^2q + b^2p = (p+q)d^2 + pq(p+q) \Rightarrow a^2q + b^2p = c(d^2 + pq)$

131/48. $\Delta DCE \cong \Delta DHC$ (SsW) $\Rightarrow$ $\overline{DH} = x$
deshalb ist EDHC ein Drachen
und $\sphericalangle DCH = \frac{1}{2}\beta$,
wegen $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CDH$
$= 90° - \frac{1}{2}\beta = \alpha + \frac{1}{2}\beta$
ist ΔDBC gleichschenklig,
das heißt, $\overline{DB} = \overline{CB}$ $\Rightarrow$ $x = y$

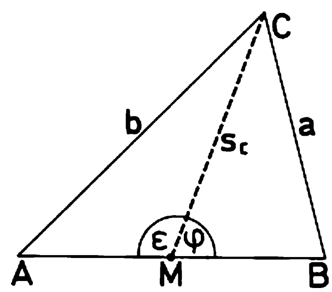


131/49. Umkehrung: Gilt im ΔABC: **1)** $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \gamma = 90°$
2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2aa_b \Rightarrow \gamma < 90°$
3) $c^2 = a^2 + b^2 + 2aa_b \Rightarrow \gamma < 90°$

Beweis: **1)** siehe Umkehrung des Pythagoras
2) wäre $\gamma \geq 90°$, so ergäbe sich mit dem erweiterten Satz von Pythagoras ein Widerspruch
3) analog wie **2)**

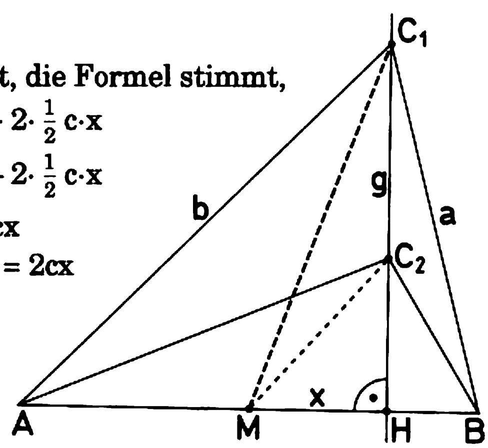
131/50. 1.Fall: $\varepsilon = \varphi = 90°$, das heißt,
ΔABC ist gleichschenklig
$s_c{}^2 = b^2 - c^2/4,\; s_c{}^2 = a^2 - c^2/4$
$\Rightarrow s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$

2.Fall: Ein Winkel ist spitz, z.B. φ
$b^2 = s_c{}^2 + c^2/4 + 2\cdot\frac{1}{2}\,c\cdot c_{sc}$
$a^2 = s_c{}^2 + c^2/4 - 2\cdot\frac{1}{2}\,c\cdot c_{sc}$
$\Rightarrow 2s_c{}^2 = \frac{1}{2}\,[2(a^2 + b^2) - c^2]$
$\Rightarrow s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$



132/51. **a)** Im Fall $a = b$ gilt $x = 0$, das heißt, die Formel stimmt,
im Fall $a > b$ gilt: $a^2 = s_c{}^2 + c^2/4 + 2\cdot\frac{1}{2}\,c\cdot x$
$b^2 = s_c{}^2 + c^2/4 - 2\cdot\frac{1}{2}\,c\cdot x$
$\Rightarrow a^2 - b^2 = 2cx$
im Fall $a < b$ gilt analog: $b^2 - a^2 = 2cx$
insgesamt folgt: $x = \dfrac{|a^2 - b^2|}{2c}$

b) ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen konstant, so ist nach **a)** auch die senkrechte Projektion x von [MC] auf AB konstant $\Rightarrow$ $C \in g \perp AB$.



Liegt umgekehrt C auf $g \perp AB$, so folgt:
$b^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$, $a^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2$
$\Rightarrow b^2 - a^2 = \overline{AH}^2 - \overline{HB}^2 = \text{const}$

132/51. c) hat P gleiche Potenz bzgl. k_1 und k_2, so gilt mit $\overline{PM_1} = a$ und $\overline{PM_2} = b$:
$a^2 - r_1^2 = b^2 - r_2^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = r_1^2 - r_2^2$ ist konstant.
Nach **b)** liegt P deshalb auf einem Lot zur Zentrale.

132/52. a) Pythagoras: $h_c^2 = b^2 - c_b^2 = (b + c_b)(b - c_b)$
erweiterter Pythagoras: $a^2 = b^2 + c^2 (\pm) 2cc_b$
$\Rightarrow c_b = \frac{1}{2c} \left|b^2 + c^2 - a^2\right|$

b) $h_c^2 = b^2 - c_b^2 = [b + \frac{1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2)]\,[b - \frac{1}{2c}(b^2 + c^2 - a^2)]$
$= \frac{1}{2c}[(b + c)^2 - a^2] \cdot \frac{1}{2c}[a^2 - (b - c)^2]$
$= \frac{1}{4c^2}(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$

c) $2s = a + b + c \qquad b + c - a = 2(s - a)$
$a + b - c = 2(s - c) \qquad a - b + c = 2(s - b)$
$h_c^2 = \frac{1}{4c^2} \cdot 2s \cdot 2(s - a) \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - b)$
$F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2}{c} \sqrt{s(s - a)(s - c)(s - b)} = \sqrt{s(s - a)(s - c)(s - b)}$

132/53. $\frac{h - 2{,}4}{2{,}4} = \frac{h}{x}$ (Strahlensatz, x ist 2.Kathete) $\Rightarrow hx = 2{,}4(h + x)$

aus $h^2 + x^2 = 49$ und $hx = 2{,}4(h + x)$ folgt:

$h^2 + 2hx + x^2 = 49 + 2hx \Rightarrow h^2 + 2hx + x^2 = 49 + 4{,}8(h + x)$

$\Rightarrow (h + x)^2 = 49 + 4{,}8(h + x) \Rightarrow (h + x)^2 - 4{,}8(h + x) + 2{,}4^2 = 54{,}76$

$\Rightarrow (h + x - 2{,}4)^2 = 54{,}76 \qquad \Rightarrow h + x = 9{,}8 \quad \text{I}$

weiter gilt: $h^2 - 2hx + x^2 = 49 - 4{,}8(h + x)$

$\Rightarrow (h - x)^2 = 49 - 47{,}04 \qquad \Rightarrow h - x = 1{,}4 \quad \text{II}$

Addition von I und II liefert: $h = 5{,}6$

132/54. $u = 2\sqrt{612{,}5} - 35 \approx 14{,}5 \qquad x = \frac{1}{2}u \approx 7{,}25 \qquad w = x$

$v = 35 - \sqrt{612{,}5} \approx 10{,}25 \qquad y = \sqrt{918{,}75} - \sqrt{612{,}5} \approx 5{,}56$

$z = 35 - \sqrt{918{,}75} \approx 4{,}69$

133/55. **a)** Das Lot durch M_1 auf AB schneide AB in F, $z = \overline{M_1F}$, $\overline{CB} = x$, und $\overline{BF} = y$. Dann gilt für ΔFDM_1: $z^2 = r^2 - (x + y)^2$ und $\overline{M_1M_2}^2 =$

$z^2 + (R + y)^2 = r^2 - (x + y)^2 + (R + y)^2 = r^2 + R^2 - x^2 - 2xy + 2Ry \quad \boxed{1}$

Wegen der harmonischen Teilung gilt aber $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DB}$,

das heißt $\frac{2R - x}{x} = \frac{2R + 2y + x}{2y + x} \Rightarrow 2Ry - 2xy - x^2 = 0$,

damit lautet $\boxed{1}$: $\overline{M_1M_2}^2 = r^2 + R^2 \Rightarrow \sphericalangle T = 90°$;

schneiden sich umgekehrt die Kreise rechtwinklig, so gilt:

$r^2 + R^2 = (R - x + r)^2 \Rightarrow x^2 + 2rR - 2rx - 2Rx = 0 \Rightarrow$

$2x^2 + 4rR - 4rx - 4Rx = 0 \Rightarrow 4rR - 2Rx - 2rx + x^2 = -x^2 + 2Rx + 2rx$

$\Rightarrow (2R - x)(2r - x) = 2x(R + r) - x^2$

$\Rightarrow \frac{2R - x}{x} = \frac{2(R + r) - x}{2r - x}$, also $\overline{AC} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DB}$

b) Weil ein Apollonioskreis zu [AB] einen Durchmesser eines Kreises durch A und B immer harmonisch teilt, schneiden sich die Kreise nach **a)** senkrecht.

6.Kapitel

144/1. **a)** $\overline{AT} = 6{,}5(\sqrt{5} - 1)$ $\qquad$ $\overline{TB} = 6{,}5(3 - \sqrt{5})$

a) $\overline{AC} = 13 + \overline{AT} = 6{,}5(\sqrt{5} + 1)$ (oder $\overline{AC} = 6{,}5(\sqrt{5} + 3)$)

144/2. $\overline{AT} = 4(\sqrt{5} - 1)$ $\qquad$ $\overline{AC} = 8 + 4(\sqrt{5} - 1) = 4(1 + \sqrt{5})$

$\overline{AD} = \overline{TB} = 4(3 - \sqrt{5})$

144/3. Eine Strecke a heißt stetig geteilt, wenn der größere Streckenabschnitt x geometrisches Mittel von a und der Reststrecke $a - x$ ist.

144/4. Mit $\overline{ZP} = x$, $\overline{AB} = c$ und $\overline{AT} = z$ gilt:
$s : x = x : (s - x)$ (stetige Teilung). Wegen $\overline{QT} = x$ liefert der Strahlensatz: $s : x = a : z$ und $x : (s - x) = z : (a - z)$ $\Rightarrow$ $a : z = z : (a - z)$

144/5. **a)** vergl. Lehrtext $\quad$ **b)** $18° = \frac{36°}{2}$ $\quad$ **c)** $24° = \frac{60°}{4} + \frac{36°}{4}$

d) $3° = \frac{24°}{8}$ $\quad$ **e)** $81° = 2 \cdot 36° + \frac{36°}{4}$

144/6. **a)** Kathetensatz: $b^2 = c_a{}^2 = c(c - c_a)$ $\Rightarrow$ $c : c_a = c_a : (c - c_a)$

b) Man konstruiert den Teilpunkt $T = H_c$ auf c. Die Höhe h_c schneidet den Thaleskreis über c in C.

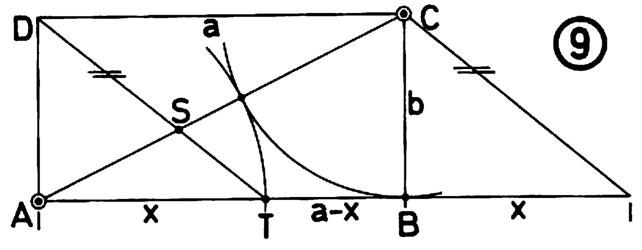
144/7. $f_1 \approx -2{,}9\%$ $\quad$ $f_2 \approx 1{,}1\%$ $\quad$ $f_3 \approx -0{,}43\%$ $\quad$ $f_4 \approx 1{,}6\%$ $\quad$ $f_5 \approx -0{,}063\%$

144/8. $\overline{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,c$, Fläche(ABC) $= \frac{1}{2}c^2 = \rho \cdot s = \rho \cdot \frac{1}{2}c(\sqrt{5} + 1)$ $\Rightarrow$ $\rho = \frac{1}{4}c(\sqrt{5} - 1)$

$\Rightarrow \overline{H_cS} = 2\rho = \frac{1}{2}c(\sqrt{5} - 1)$, $\quad \overline{SC} = \frac{1}{2}c(3 - \sqrt{5})$

144/9. **a)** Nach Konstruktion gilt $DT \parallel CE$. Da T die Strecke [AE] stetig teilt, folgt aus dem Strahlensatz, dass S die Strecke [AC] stetig teilt.

b) $\overline{AC} = 6\sqrt{5}$ $\quad$ $\overline{AS} = 3(3\sqrt{5} - 5)$ $\quad$ $\overline{SC} = 3(5 - \sqrt{5})$



145/10. a) $\frac{a}{xa} = \frac{xa-a}{a} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \tau$, also $\frac{1}{x} = \sigma$

b) $a + ya = xa \Rightarrow y = x - 1 = \tau - 1 = \sigma$

145/11. Nach Aufgabe **8.** teilt der Schnittpunkt von Inkreis und Höhe die Höhe stetig, weil $c = h_c$ ist $\Rightarrow \rho = \sqrt{5} - 1$

145/12. $\overline{QU} = a$, $\overline{MD} = \overline{MP} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\,a \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{MP} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$

$\Rightarrow \overline{PQ} : \overline{QU} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

145/13. $s^2 = (1 - s)\cdot 1 \Rightarrow s^2 + s - 1 = 0$, also $s = \sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Das umbeschriebene Rechteck ist deshalb ein Goldenes Rechteck.

145/14. $\overline{AC} = \overline{CE} = 2a = \overline{CF}$

$\overline{BD} = \overline{BF} = d - a$

$\overline{AD} = \overline{AE} = d$

ΔACE ist gleichschenklig, also ist zu zeigen, dass gilt:

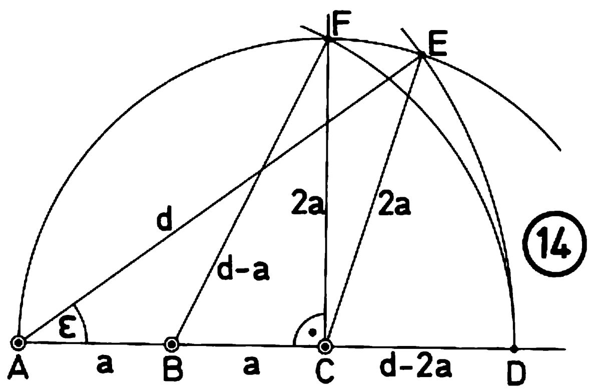
$\frac{d}{2a} = \tau$

Pythagoras in ΔBCF:

$(d - a)^2 = a^2 + 4a^2$

$\Rightarrow d = a(\sqrt{5} + 1)$

$\Rightarrow \frac{d}{2a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \tau \Rightarrow \varepsilon = 36°$

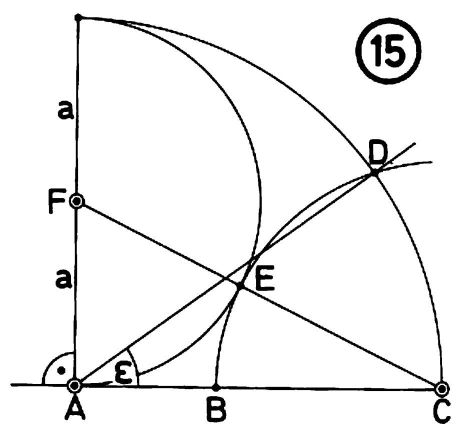


146/15. a) Wegen $\overline{AC} = \overline{AD} = 2a$ ist ΔACD gleichschenklig. Weil B nach Konstruktion [AC] stetig teilt, gilt:

$\overline{BC} = \frac{2a}{2}(\sqrt{5} - 1) = a(\sqrt{5} - 1) = \overline{DC}$

$\overline{AD} : \overline{DC} = (2a) : (a(\sqrt{5} - 1))$

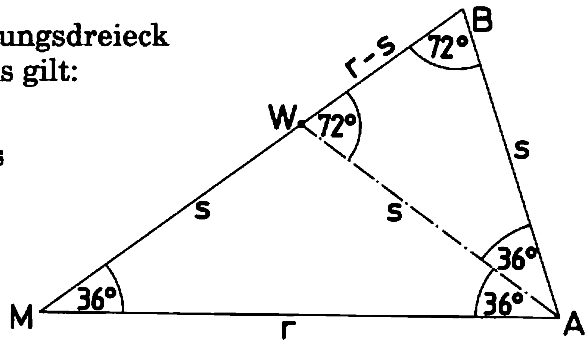
$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \tau \Rightarrow \varepsilon = 36°$



b) Man konstruiert z.B. zuerst ΔACD aus $\overline{AC} = \overline{AD} = 8$ und $\measuredangle DAC = 36°$, die restlichen beiden Ecken findet man mithilfe der Fünfeckseite $s = \overline{CD}$.

c) Der Mittelpunktswinkel eines Bestimmungsdreiecks ist 36°.

d) Für das Bestimmungsdreieck ABM des Zehnecks gilt:
$\Delta ABM \sim \Delta BWA$
$\overline{AW} = \overline{MW} = \overline{AB} = s$
$\Rightarrow r : s = s : (r - s)$



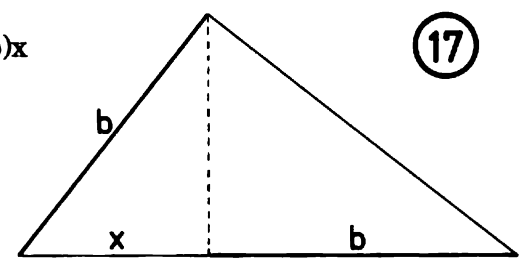
146/16. $\frac{\overline{AT} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{TB} \cdot h_2}{2}$;
es gilt der Strahlensatz:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{CB}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AT} + \overline{TB}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} + 1, \text{ daraus folgt:}$$

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{\overline{AT}/\overline{TB} + 1}. \text{ Mit } \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = x \text{ gilt also}$$

$$x = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$$

146/17. Kathetensatz: $b^2 = (x + b)x$
$\Rightarrow \frac{b}{x} = \frac{x}{b} + 1$, mit $\frac{x}{b} =: z$
$\frac{1}{z} = z + 1 \Rightarrow z^2 + z + 1 = 0$
$\Rightarrow z = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$



17

146/18. $t = v$ (Mittelparallele), $h = \frac{2v}{2}\sqrt{3} = v\sqrt{3}$, $r = \frac{2v}{3}\sqrt{3}$,
ist M Kreismittelpunkt, N Mittelpunkt von t und R Endpunkt von s auf dem Kreis, so gilt wegen $\overline{MN} = \frac{1}{6}v\sqrt{3}$ nach Pythagoras in ΔMNR:
$(s + \frac{1}{2}v)^2 + (\frac{1}{6}v\sqrt{3})^2 = (\frac{2}{3}v\sqrt{3})^2$
$\Rightarrow s^2 + vs - v^2 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)v \Rightarrow s : t = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$

146/19. Das Fünfeck von Dürer ist nicht regelmäßig. Nachrechnen (mit Trigonometrie) zeigt: $\alpha = \beta \approx 108{,}4°$, $\gamma = \varepsilon \approx 107°$, $d \approx 109{,}2°$

147/20. Mit $a = 2r$ und $\overline{TP} = x$ gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz:
$a^2 = (a + x)x$, also $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x} \Rightarrow \overline{QP} : \overline{QT} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \tau$
Da die Endpunkte der beiden eingezeichneten Durchmesser ein Rechteck bilden (Halbierung der Diagonalen und Thales), gilt:
$QB \parallel TS \Rightarrow \overline{BP} : \overline{BS} = \overline{QP} : \overline{QT} = \tau$ (Strahlensatz)

147/21. $\overline{AN}$ und $\overline{AB}$, $\overline{AB}$ und $\overline{AI}$, $\overline{AT}$ und $\overline{AI}$ und ebenso bei den übrigen Diagonalen und Seiten.

147/22. **a)** Der Radius des ersten Kreises ist $\sqrt{5} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{5} - 1$

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{AB} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$

b) $\overline{AT} = \sqrt{5} - 1$, $\overline{TB} = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow \overline{AT}:\overline{TB} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \tau$

147/23. $\overline{AB} = \sqrt{5}$, $\overline{AT} = \overline{AM} + \overline{MT} = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \tau$

$\overline{TB} = \sqrt{5} - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$

147/24. $r = \sqrt{5}$, $\overline{AD} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $\overline{AB} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{30 - 10\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sigma$$

147/25. Das Trapez ist Teilfigur eines regelmäßigen Fünfecks $\Rightarrow \frac{l}{k} = \tau$.

147/26. Rechteckdiagonale $d = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 5)}$. Mithilfe der Flächenberechnung $\frac{\tau \cdot 1}{2} = \frac{d \cdot z}{2}$ ergibt sich $z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5}(10 + 2\sqrt{5})}$. Aus Symmetriegründen folgt: $x = z$ und $w_1 = w_2 = w$ (äußere Diagonalenabschnitte):

$$w = \sqrt{1 - z^2} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}}$$

$$y = d - 2w = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 5)} - 2\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{20}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 \cdot \frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} = z$$

148/27. Wegen $\frac{\tau + 1}{\tau} = \frac{\tau^2}{\tau} = \tau$ sind ACNL, BDEM, BCNM, usw. Goldene Rechtecke.

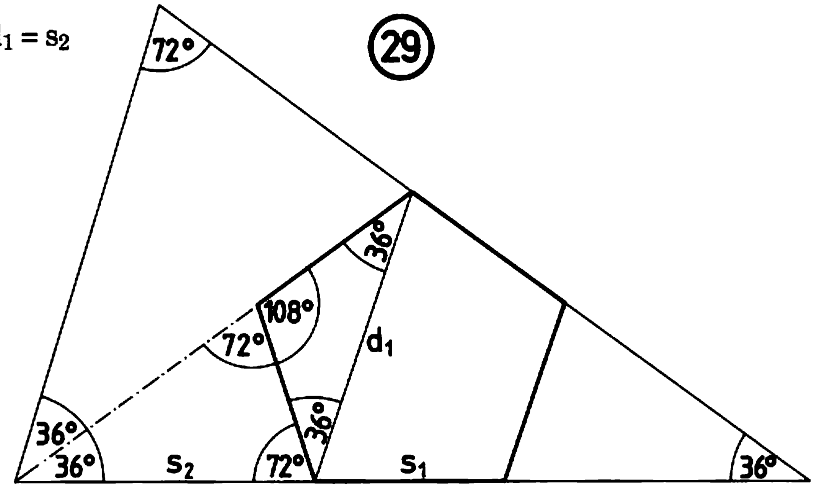
148/28. Die kürzere Parallelogrammseite sei s, die längere $s + x$. Dann gilt wegen der Ähnlichkeit:

$(s + x) : s = s : x \Rightarrow (s + x) : s = \tau = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$

148/29. Die Figur entsteht durch zentrische Streckungen am Zentrum Z.
Es ergeben sich die Beziehungen:

$\frac{d_1}{s_1} = \tau$ und $d_1 = s_2$

$\Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \tau.$



148/30. a) $h = \sigma b \approx 14{,}5\text{m}$

b) Pythagoras in ΔABE:

$(h + R)^2 = b^2 + R^2$

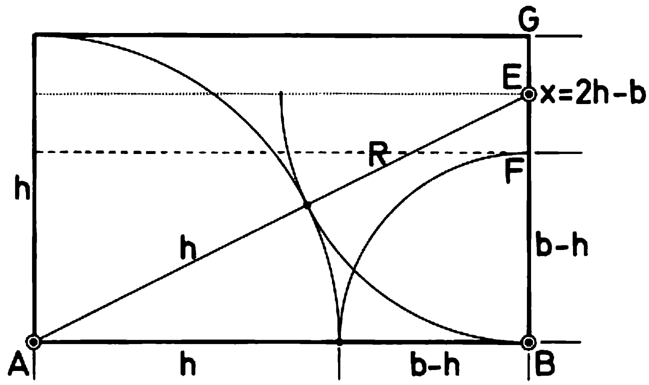
$\Rightarrow R = \frac{b^2 - h^2}{2h}$

$\overline{EF} = \frac{b^2 - h^2}{2h} - (b - h)$

$= \frac{h}{2} + \frac{b^2}{2h} - b$

$= \frac{\sigma b}{2} + \frac{b^2}{2\sigma h} - b$

$= b \cdot \frac{2\sigma - 1}{2}$



wegen $h = \sigma b$ und $\frac{1}{\sigma} = \sigma + 1$

wegen $\frac{1}{2}x = h - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b(2\sigma - 1)$ ist E also Mittelpunkt von [FG].

7.Kapitel

Aufgaben zu 7.1

156/1. Dreiseitige Pyramiden

156/2. Dies ist immer möglich. Der abgeschnittene Eckpunkt muss von den Punkten, in denen die Kanten durchgeschnitten werden, gleiche Entfernung haben.

156/3. a) Die Ebene enthält den Höhenfußpunkt und die Spitze, aber keine Kante.
b) Die Ebene enthält den Höhenfußpunkt und eine einzige Kante.

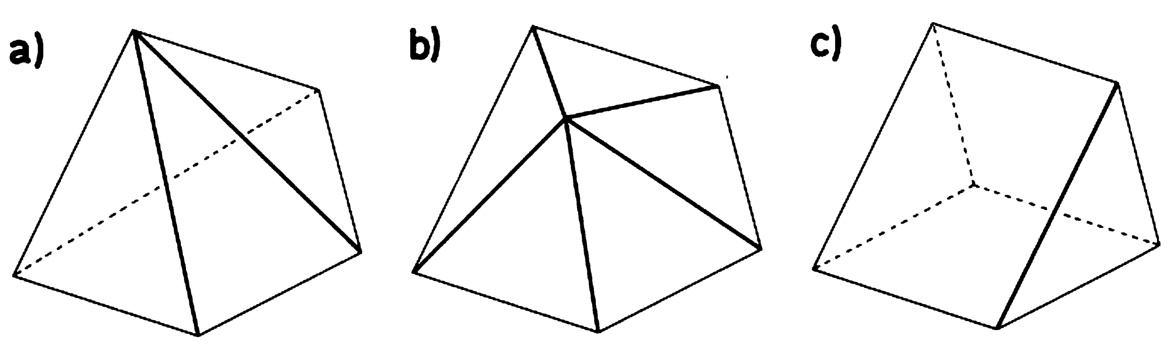
156/4.

n	k	e	f
3	6	4	4
5	10	6	6
16	32	17	17
100	200	101	101
m	2m	m + 1	m + 1

156/5. a) 8 Seitenflächen b) 31 Seitenflächen c) 96 Kanten

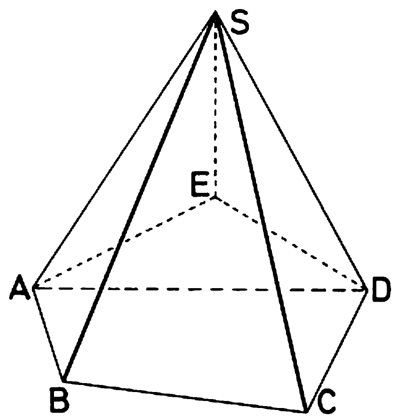
156/6. a) Hat die Grundfläche n Seiten, so kommen noch $\frac{2n}{2}$ Seitenkanten dazu, also hat die Pyramide insgesamt 2n Kanten.
b) Ist die Grundfläche ein n-Eck, so hat die Pyramide n+1 Ecken. Weil zur Grundfläche noch n Seitenflächen-Dreiecke dazukommen, hat die Pyramide n+1 Flächen.

156/7.

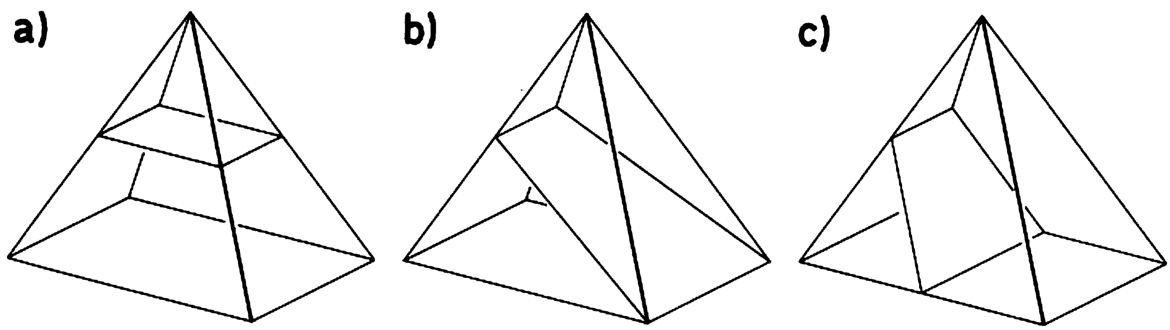


156/8. **a)** z.B. in Richtung der Höhe

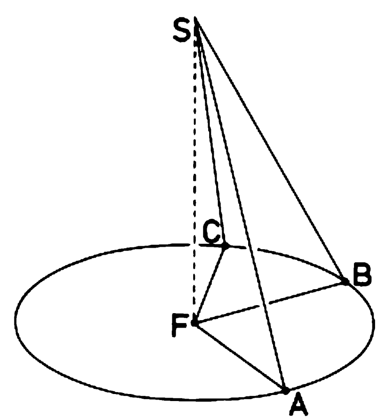
b) z.B. in Richtung eines Lots der Ebene E(A,D,S)



156/9.



157/10. **a)** Die Dreiecke ASF, BSF, CSF usw. sind kongruent nach dem SsW-Satz,
$\Rightarrow \overline{FA} = \overline{FB} = \overline{FC} = \ldots$
$\Rightarrow$ F ist Umkreismittelpunkt.



b) Aus $\overline{SM} = \sqrt{81 + 25} = \sqrt{106}$
und $\overline{SU} = \sqrt{81 + 16} = \sqrt{97}$ folgt:
Die Pyramide ist nicht gerade.

c) Weil der Höhenfußpunkt außerhalb der Grundfläche liegt, sieht die gerade Pyramide MIES nicht gerade gerade aus.

157/11.

	s	g	h	M
a)	3	4	1	$8\sqrt{5}$
b)	$2\sqrt{5}$	6	$\sqrt{2}$	$12\sqrt{11}$
c)	8	2	$\sqrt{62}$	$12\sqrt{7}$
d)	$\sqrt{10}$	2	$2\sqrt{2}$	12
e)	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$	$2\sqrt{15}$
f)	3	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$12\sqrt{2}$

158/12.

	s	g	h	M
a)	10	6	8	$18\sqrt{91}$
b)	6	3,6	4,8	$\frac{162}{25}\sqrt{91}$
c)	$\frac{1}{2}\sqrt{1049}$	5	16	240

158/13. a) Umkugel

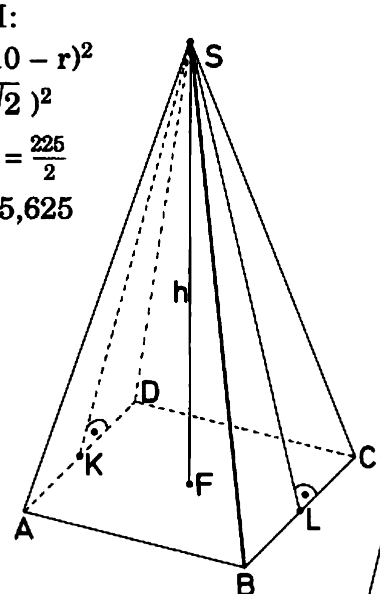
ΔAFM:

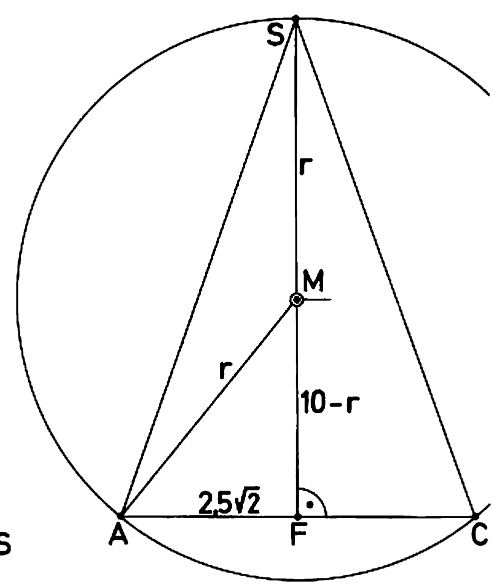
$r^2 - (10 - r)^2$

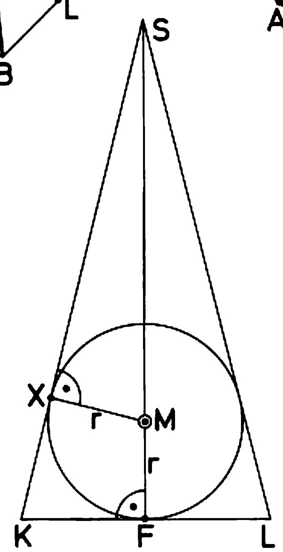
$= (\frac{5}{2}\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow 20r = \frac{225}{2}$

$\Rightarrow r = 5{,}625$







Inkugel

$\Delta XMS \sim \Delta FSK$:

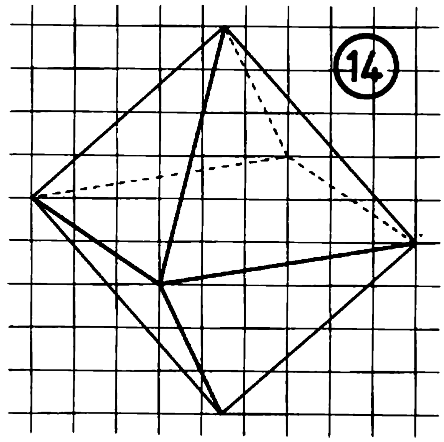
$\Rightarrow \frac{r}{\overline{MS}} = \frac{g}{2 \cdot \overline{KS}}$

$\Rightarrow \frac{r}{10 - r} = \frac{5}{2\sqrt{106{,}25}}$

$\Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{17} + 1}$

$\Rightarrow r = \frac{5}{8}(\sqrt{17} - 1)$

b) ähnlich wie in **a)** ergibt sich:
Umkugel $r = \frac{17}{8}a$
Inkugel: $r = \frac{1}{16}(\sqrt{201} - 3)a$



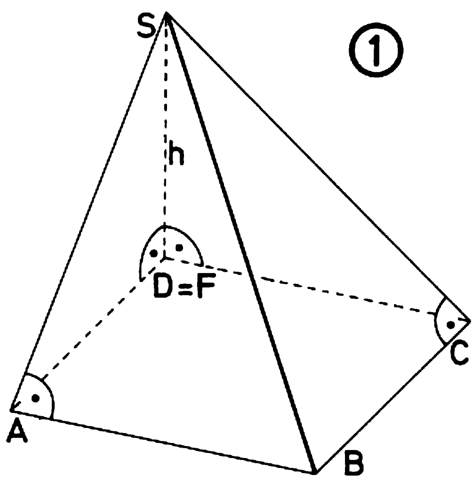
158/14. **a)** Oktaeder

b) $S = 50\sqrt{3}$

c) $\overline{S_1S_2} = 5\sqrt{2}$

159/15. **a)** h^* sei Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 6r: $h^* = 3\sqrt{3}\,r$
$h = h^* + 2r = (3\sqrt{3} + 2)r$
b) h^* sei Höhe im regelmäßigen Tetraeder mit Seitenlänge 6r: $h^* = 2\sqrt{6}\,r$
$h = h^* + 2r = (2\sqrt{6} + 2)r$

Aufgaben zu 7.2



163/1. $SD \perp DA$, $SD \perp DC$,
$SC \perp CB$, $SA \perp AB$
$E(A,D,S) \perp E(A,B,C)$
$E(D,C,S) \perp E(A,B,C)$
$E(A,D,S) \perp E(D,C,S)$
$E(B,C,S) \perp E(C,S,D)$
$E(A,B,S) \perp E(A,D,S)$

163/2. **a)** Kantenwinkel: $\sphericalangle UFS \approx 76{,}7°$ $\sphericalangle USF \approx 26{,}7°$
$\sphericalangle CUS \approx 72{,}1°$ $\sphericalangle USC \approx 35{,}8°$ (im Rechteck: 90°)
b) $\varphi \approx 67{,}4°$
c) $\sphericalangle[E(U,C,S), E(F,U,C)] \approx 76°$ $\sphericalangle[E(F,U,S), E(F,U,C)] \approx 71{,}6°$

163/3. **a)** $\varphi \approx 54{,}7°$ **b)** $\varphi = 45°$ **c)** $\varphi \approx 31{,}7°$

163/4. **a)** $\varphi \approx 70{,}5°$ **b)** $\varphi \approx 109{,}5°$ **c)** $\varphi \approx 138{,}2°$

164/5. **a)** $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$ $\varphi \approx 54{,}7°$
b) $\overline{AS} = \overline{BS} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$ $\varphi_1 \approx 63{,}4°$
$\overline{CS} = \overline{DS} = \frac{3}{2}a$ $\varphi_2 \approx 41{,}8°$

c) $\overline{AS} = a$ $\varphi_1 = 90°$
$\overline{BS} = \overline{DS} = a\sqrt{2}$ $\varphi_2 = 45°$
$\overline{CS} = a\sqrt{3}$ $\varphi_3 \approx 35{,}3°$

164/6. a) $h = 3\sqrt{3}$ b) $h = \frac{3}{2}\sqrt{6}$ c) $h = 3$
d) $h = 3\sqrt{3}$ e) $h = \sqrt{3}$ f) $h = 3$

164/7. a) $S = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{3} + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sqrt{67} = 9\sqrt{3} + 9\sqrt{67} = 9(\sqrt{3} + \sqrt{67})$
b) $\varphi \approx 77{,}8°$ c) $\varphi \approx 57{,}8°$

164/8. a) $\overline{EF} = 10$, $\overline{EF} = \overline{LF} = \overline{EI} = \overline{FI} = \overline{LI} = 5\sqrt{2}$
b) ΔLMI ist gleichschenklig-rechtwinklig; $d(M;LI) = \frac{5}{2}\sqrt{2}$
c) $\sphericalangle(EI, FI) = \sphericalangle(EL, LF) = 90°$ $\sphericalangle(EL, EF) = \sphericalangle(EF, FL) = 45°$
$\sphericalangle(LF, FI) = \sphericalangle(FI, IL) = \sphericalangle(IL, LF) =$
$= \sphericalangle(EI, EL) = \sphericalangle(EL, LD) = \sphericalangle(LI, IE) = 60°$
d) $\sphericalangle[EL, E(E,F,I)] = \sphericalangle[LF, E(E,F,I)] = \sphericalangle[IL, E(E,F,I)] = 45°$
$\sphericalangle[EI, E(E,F,L)] = \sphericalangle[FI, E(E,F,L)] = \sphericalangle[IL, E(E,F,L)] = 45°$
$\sphericalangle[LF, E(E,I,L)] = \sphericalangle[FI, E(F,I,L)] \approx 54{,}7°$
$\sphericalangle[EF, E(E,I,L)] \approx 35{,}3°$ $\sphericalangle[EF, E(F,I,L)] \approx 35{,}3°$
$\sphericalangle[EI, E(F,I,L)] = \sphericalangle[LE, E(F,I,L)] \approx 54{,}7°$
e) $\sphericalangle[E(E,F,L), E(E,F,I)] = 90°$
$\sphericalangle[E(E,F,L), E(F,L,I)] = \sphericalangle[E(E,F,L), E(E,L,I)] \approx 54{,}7°$
$\sphericalangle[E(E,L,I), E(F,L,I)] \approx 70{,}6°$
$\sphericalangle[E(E,L,I), E(E,F,I)] = \sphericalangle[E(F,I,L), E(E,F,I)] \approx 54{,}7°$

164/9. a) Die Grundfläche der Pyramide ist das Quadrat EFGH, die Höhe ist [FB].
b) $\sphericalangle(FB, FG) = \sphericalangle(FB, FE) = 90°$ $\sphericalangle(FG, GB) = 45°$
$\sphericalangle(GH, GB) = 90°$ $\sphericalangle(HG, HB) \approx 54{,}7°$ $\sphericalangle(HE, HB) \approx 54{,}7°$
$\sphericalangle(EH, EB) = 90°$ $\sphericalangle(FE, EB) = 45°$
d) $\sphericalangle[E(F,G,E), E(F,G,B)] = \sphericalangle[E(F,G,E), E(F,E,B)] = 90°$
$\sphericalangle[E(F,G,E), E(H,E,B)] = \sphericalangle[E(F,G,E), E(G,H,B)] = 45°$
e) $\sphericalangle[E(F,B,G), E(F,B,E)] = \sphericalangle[E(F,E,B), E(H,E,B)] = 90°$
$\sphericalangle[E(H,E,B), E(H,G,B)] = 60°$
$\sphericalangle[E(H,G,B), E(G,F,B)] = 90°$
$\sphericalangle[E(G,F,B), E(H,E,B)] = \sphericalangle[E(F,E,B), E(G,H,B)] = 45°$

Aufgaben zu 7.3

167/1. Netze liegen vor in **b)**, **e)**, **g)** und **h)**.

167/2. **a)** Es ergeben sich näherungsweise die Punkte:
$S_2(19|7)$, $S_3(11|24)$, $S_4(1|21)$

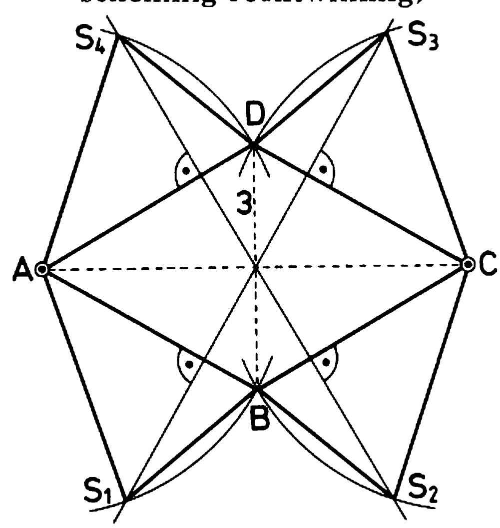
b) $h \approx 6{,}3$

168/3. **a)** Wegen $\overline{BD} = 6$ gilt: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 60°$
$\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA = 120°$

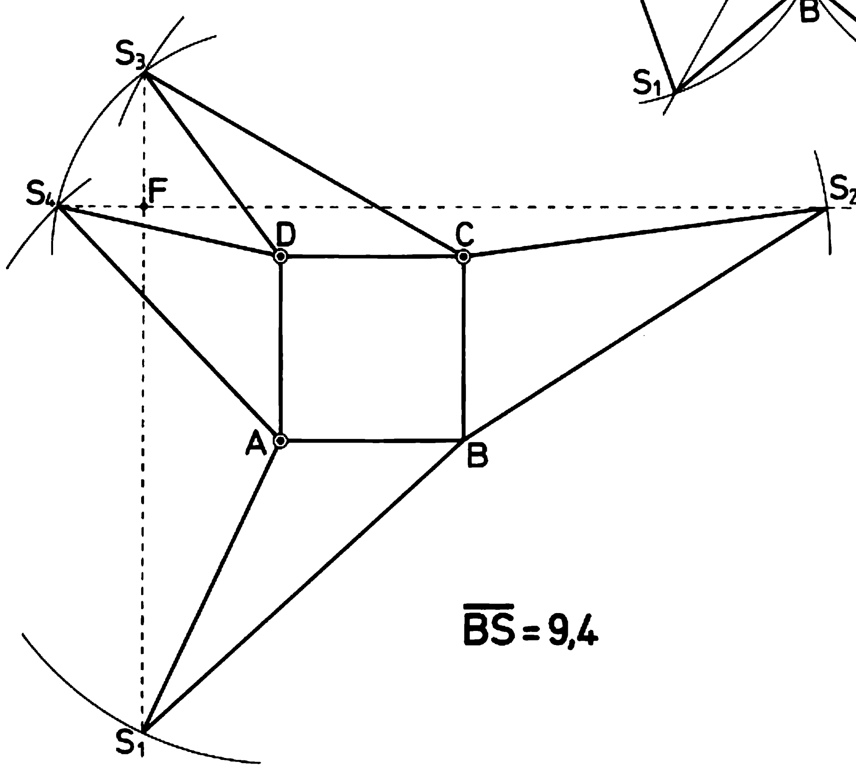
b) $\overline{AS} = \overline{CS} = 6 \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle MAS = \sphericalangle MCS = 30°$ (denn ΔMAS ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks)
$\overline{BS} = \overline{DS} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sphericalangle MBS = \sphericalangle MDS = 45°$ (denn ΔMBS ist gleichschenklig-rechtwinklig)

c) $S = \frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{14}$
$= 18\sqrt{3} + 18\sqrt{7} = 18(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

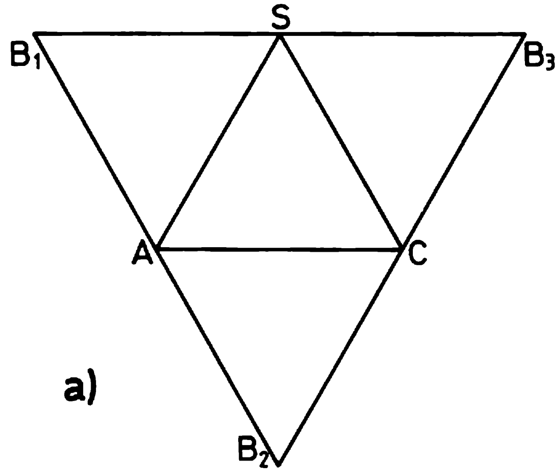
d)

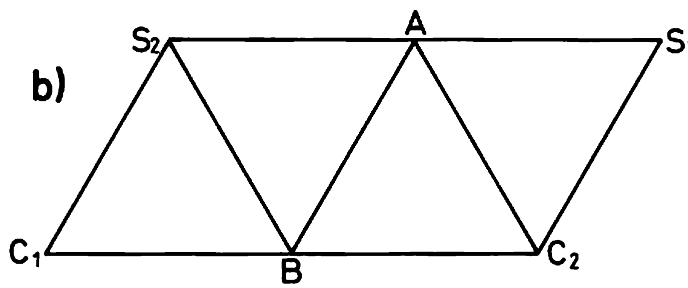


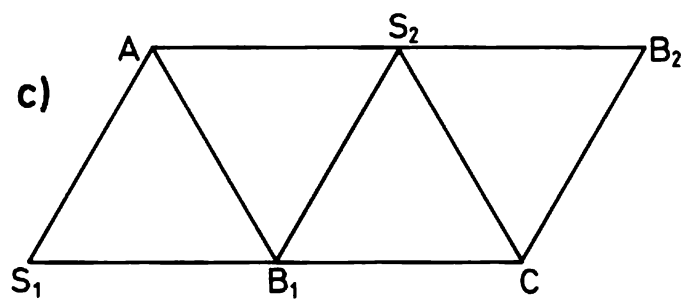
168/4.

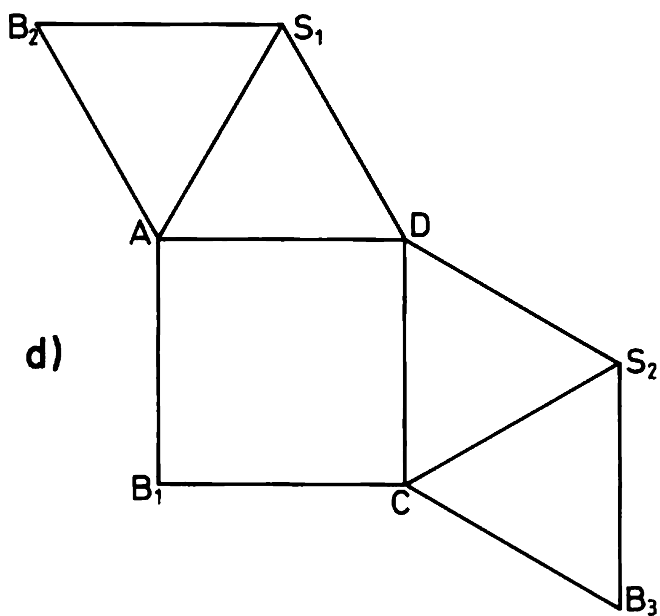


168/5.

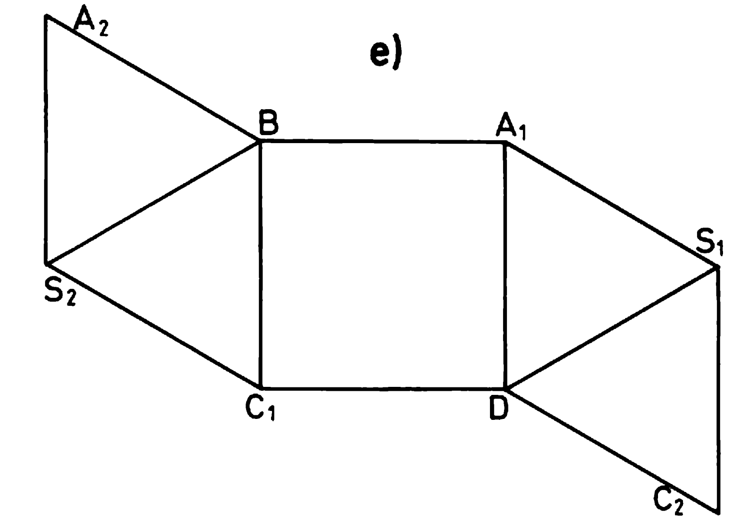


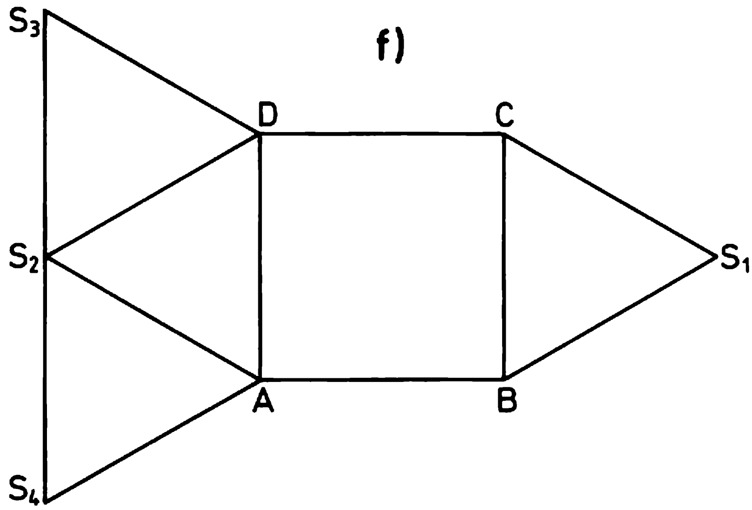


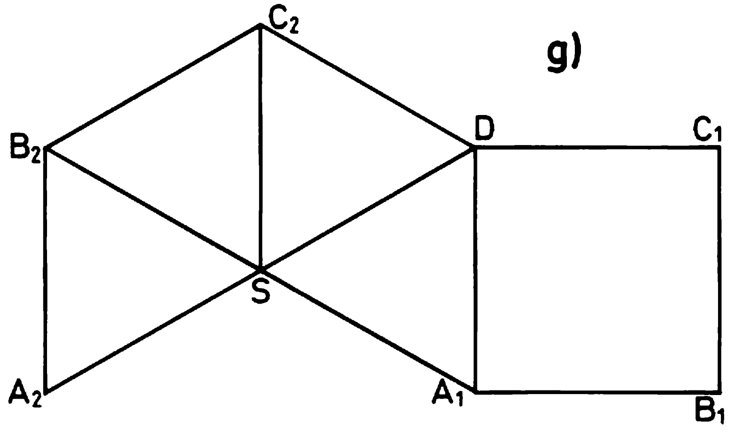




168/5.







Aufgaben zu 7.4

177/1.

	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
minimal	3	4	4	6	6
maximal	4	6	6	10	10

177/2. **a)** In einer Ecke treffen sich drei Kanten.
b) Die Begrenzungsflächen sind gleichseitige Dreiecke.

177/3. Regelmäßige, fünfseitige Pyramide, Oktaeder

177/4. **a)**

	Würfel	Tetraeder	Oktaeder
Symmetrieebenen	9	6	5
Symmetrieachsen	3	0	5

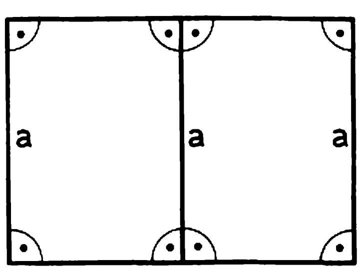
b) Bis aufs Tetraeder sind alle Platonischen Körper punktsymmetrisch.

177/5.

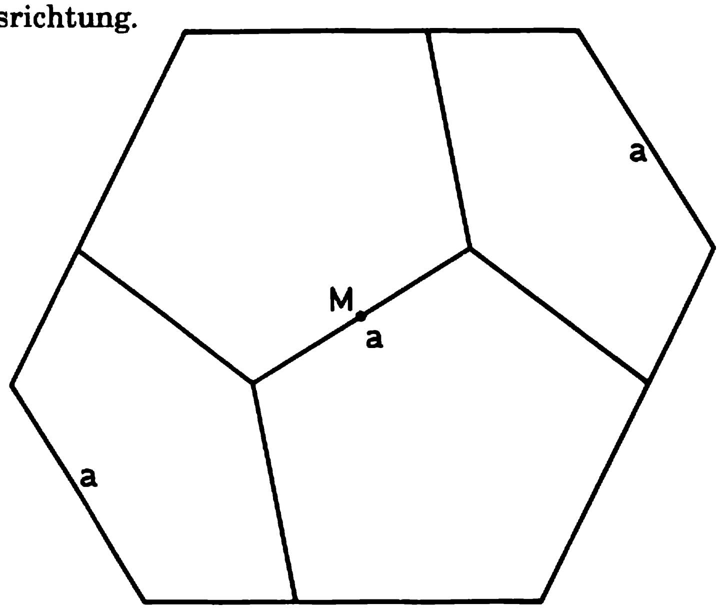
Flächenanzahl	6	10	12	14	16
Symmetrieebenen	4	6	2	4	4
Symmetrieachsen	0	5	0	3	1
punktsymmetrisch	nein	nein	nein	nein	nein

(vergl.Lehrbuch S.140)

177/6. Auf die mit a bezeichneten Kanten blickt man senkrecht, die mit einem Bogen versehenen Winkel sieht man in wahrer Größe. PR bedeutet Projektionsrichtung.

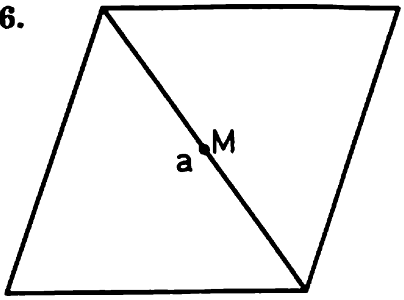


a) **Würfel**
PR: Flächendiagonle der Deckfläche

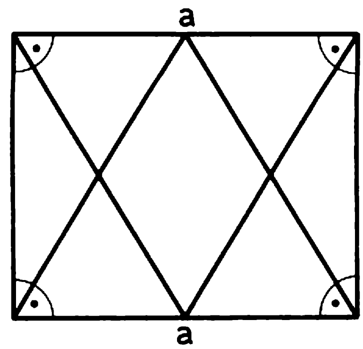


b) **Dodekaeder**
PR: Gerade durch Mittelpunkt M von a und Mittelpunkt der zu a parallelen Kante

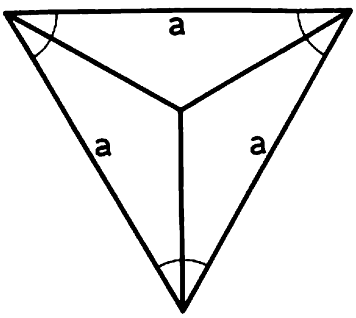
177/6.



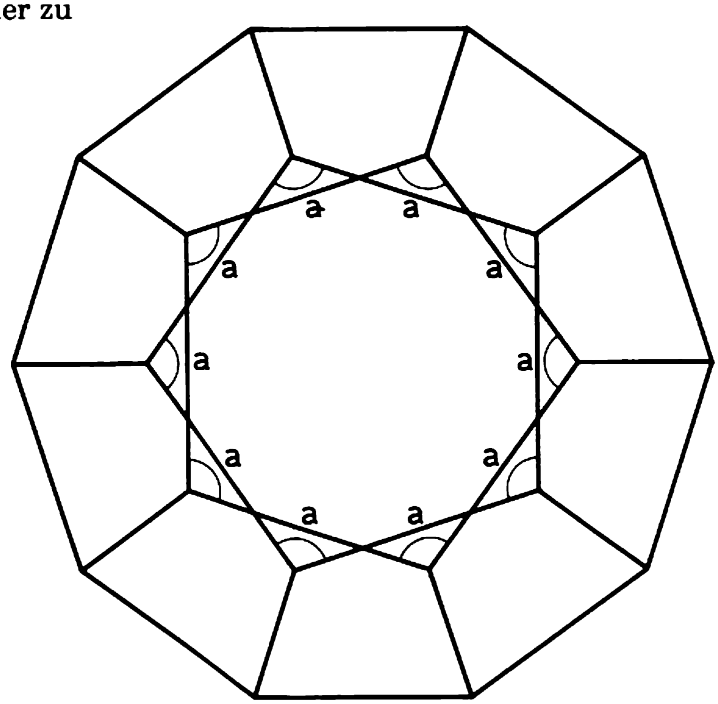
c) **Oktaeder**
PR: Gerade durch Mittelpunkt M von a und Mittelpunkt der zu a parallelen Kante



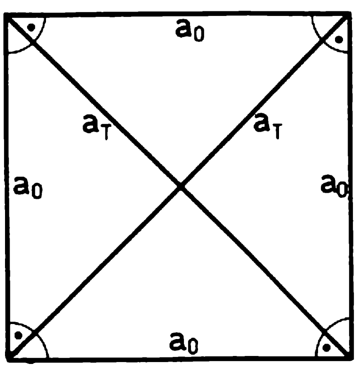
e) **Oktaeder**
PR: Höhe eines Seitenflächendreiecks



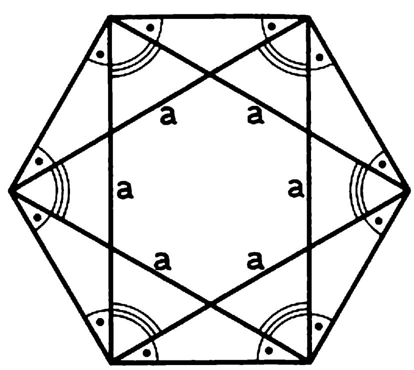
d) **Tetraeder**
PR: Tetraederhöhe



f) **Dodekaeder**
PR: Lot einer Fünfeckebene

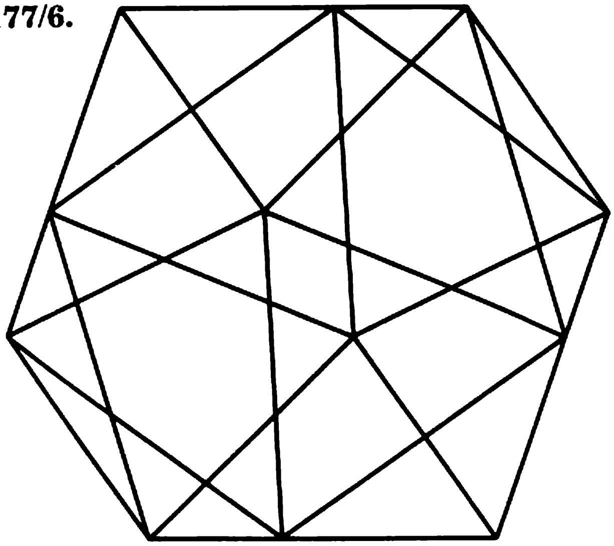


i) **Tetraeder**
PR: Gerade durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten
Oktaeder
PR: Gerade durch die Spitzen

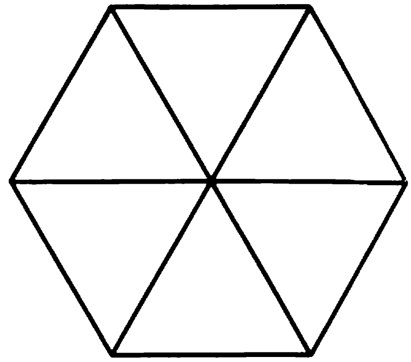


g) **Oktaeder**
PR: Lot einer Dreieckebene

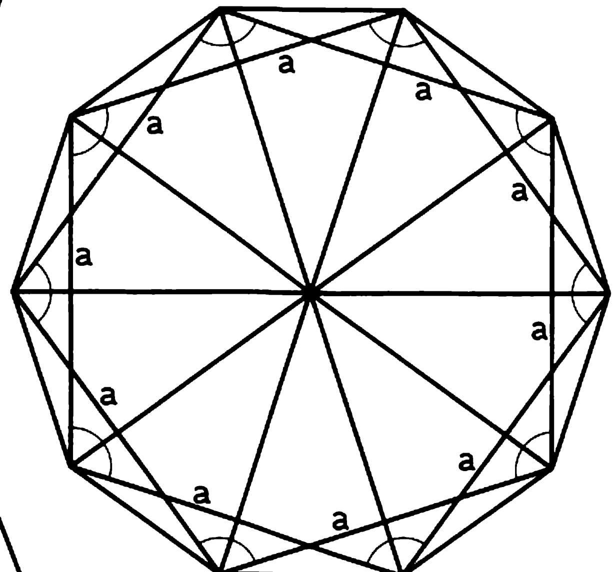
177/6.



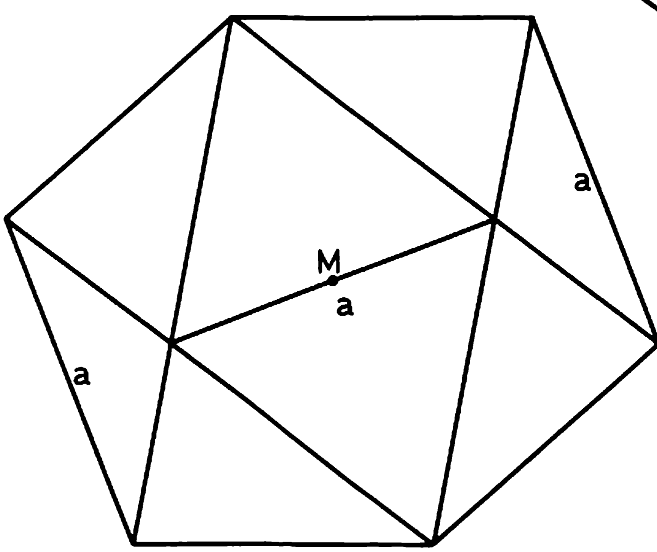
h) **Ikosaeder**
PR: Parallel zur Grundfläche, sodass insgesamt 4 Dreiecke in der Projektion als Strecke erscheinen



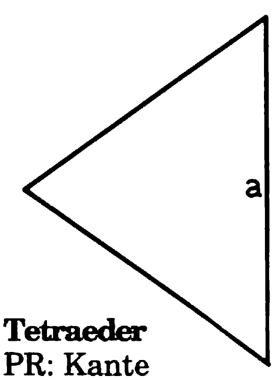
j) **Würfel**
PR: Raumdiagonale



k) **Ikosaeder**
PR: Gerade durch gegenüberliegende Ecken



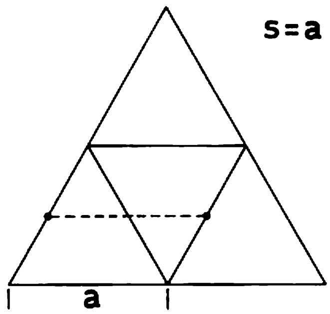
m) **Ikosaeder**
PR: Gerade durch Mittelpunkt M von a und Mittelpunkt der a gegenüberliegenden Kante



l) **Tetraeder**
PR: Kante

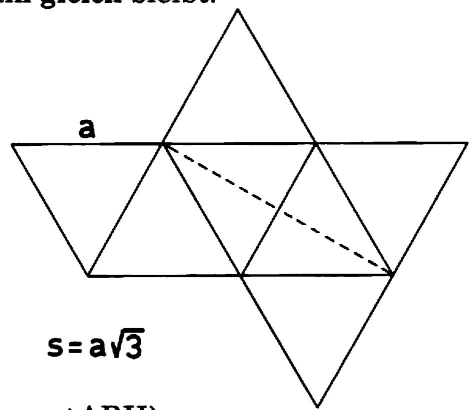
178/7. Die Flächenmittelpunkte des einen Körpers sind jeweils die Ecken des anderen Körpers. Es tauschen sich jeweils die Anzahlen der Flächen und Ecken aus, während die Kantenanzahl gleich bleibt.

178/8.



s = a

178/9.



$s = a\sqrt{3}$

178/10. $\overline{HB} = a\sqrt{3}$, $\quad \frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot h$ (Fläche von ΔABH)

$\Rightarrow h = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$

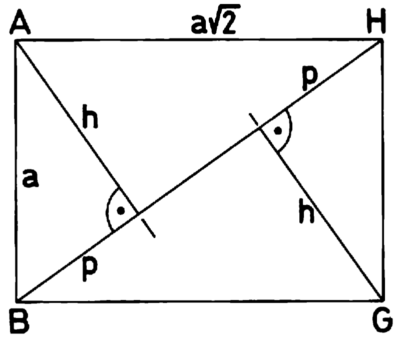
Höhensatz: $h^2 = p(\overline{HB} - p)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}a^2 = p(a\sqrt{3} - p)$

$\Rightarrow p^2 - a\sqrt{3} + \frac{2}{3}a^2 = 0$

$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$

$(p_2 = \frac{2}{3}a\sqrt{3})$ $\quad (p < a!)$



178/11. a) N ist Mitte von $[DC]$

$\overline{MN} = a$, $h = \overline{EN} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

$\overline{EH} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}\overline{EN} \cdot \overline{MR} = \frac{1}{2}\overline{MN} \cdot \overline{EH}$

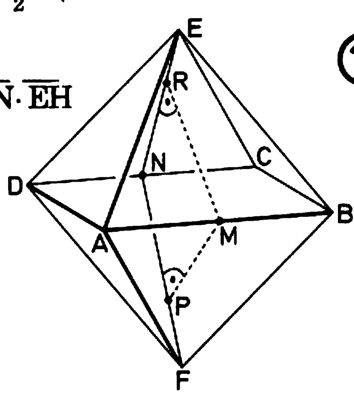
$\Rightarrow \overline{MR} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$

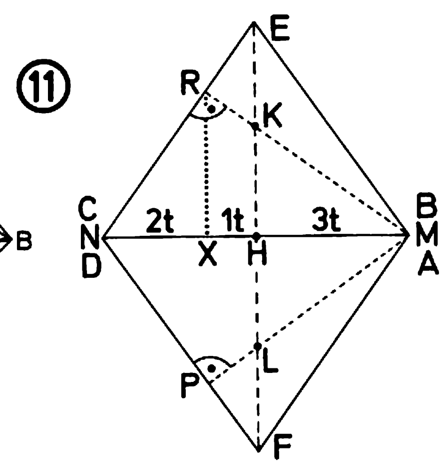
Pythagoras in ΔMRE:

$\overline{ER} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{2}{3}a^2}$

$= \frac{1}{6}a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{ER} = \frac{1}{3}\overline{EN}$





b) Strahlensatz in ΔHNE: $\overline{XR} : \overline{HE} = \overline{NR} : \overline{NE} \Rightarrow \overline{XR} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$

Strahlensatz in ΔMXR: $\overline{HK} : \overline{MH} = \overline{XR} : \overline{MX} \Rightarrow \overline{HK} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{HK} = \frac{1}{4}a\sqrt{2} \Rightarrow \overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{EF}$

179/12. **a)** $S = a^2\sqrt{3}$ **b)** $h = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$ **c)** $r = \frac{1}{4}a\sqrt{6}$

d) $r = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$ **e)** $r = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ **f)** $d = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

Aufgaben zu 7.5

185/1. **a)** $V = 288$ **b)** $V = 4320$ **c)** $V = 18\sqrt{3}$ **d)** $V = 12\sqrt{3}$

185/2. $S \approx 132\,777\ m^2$ $V \approx 2\,363\,535\ m^3$

185/3. $S = a^2(1 + \sqrt{2})$ $V = \frac{1}{6}a^3$

185/4. $a = 2m$ $h_s = \frac{1}{2}\sqrt{13}\ m$ $M = 2\sqrt{13}\ m^2 \approx 7{,}2m^2$

185/5. $h = \frac{1}{2}\sqrt{82}\ m$ $V = \frac{3}{2}\sqrt{82}\ m^3 \approx 13{,}58m^3$

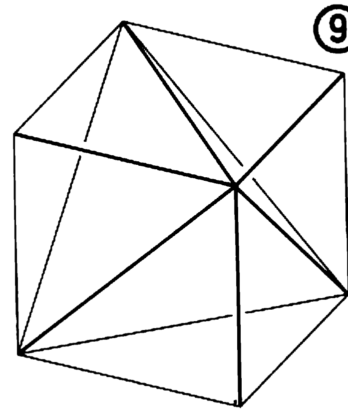
185/6. $\rho = \frac{m}{V} = \frac{7{,}4g}{\frac{2{,}1^3}{3}\sqrt{2}\ cm^3} \approx \cancel{3},4\ g/cm^3$ 117

185/7. $\rho = \frac{107g}{\frac{3}{2}\cdot 1{,}6^2\cdot\sqrt{3}\,(4{,}2 + 2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{7{,}68})\ cm^3} \approx 2{,}7\ g/cm^3$

185/8. **a)** $V_T = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$

b) $V_O = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2} \Rightarrow V_T : V_O = 1 : 4$

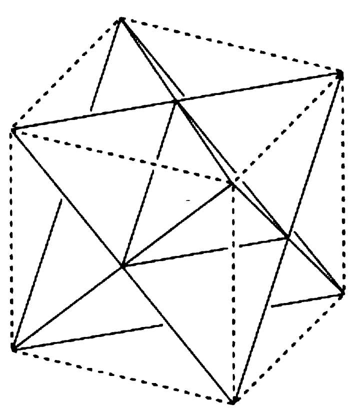
9



185/9. **a)** Es gibt zwei solcher Tetraeder.

b) $V = \frac{1}{3}a^3$ $V_T : V_W = 1 : 3$

185/10. **a)**



b) $V_S = a^3 - 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a\cdot\frac{a}{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^3$

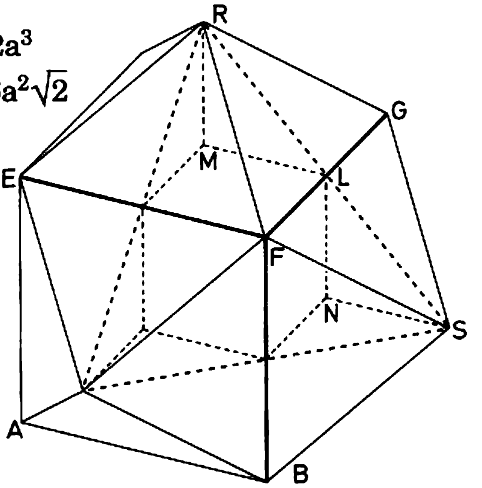
$V_S : V_W = 1 : 2$

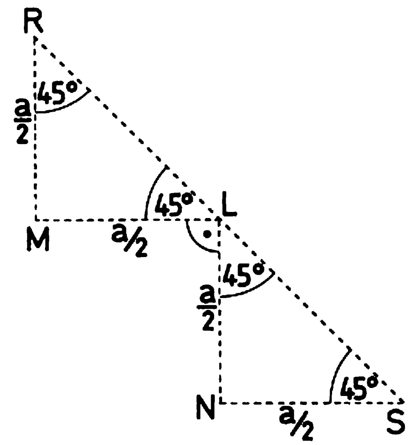
186/11. a) 87,5%

b) $h_{oben}{}^3 = \frac{1}{2}h^3 \Rightarrow h_{oben} \approx 0{,}794h \Rightarrow h_{unten} \approx 20{,}6\% \cdot h \approx 30{,}3m$

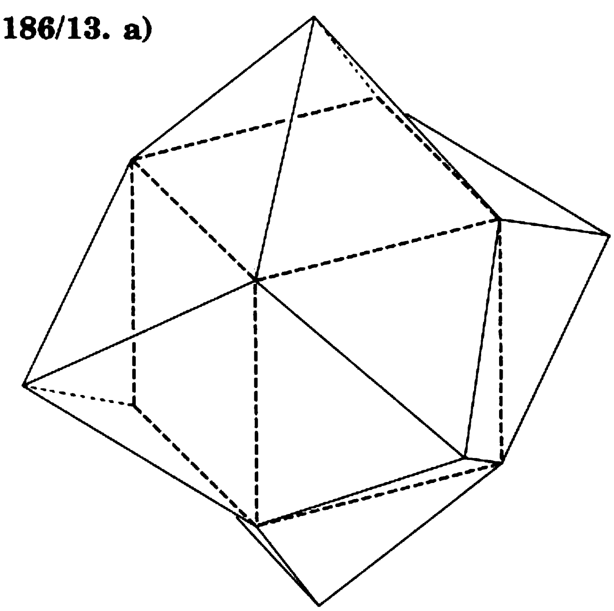
186/12. a) Es ist zu zeigen: FSGR ist eine Raute.Es gilt: $\overline{FS} = \overline{SG} = \overline{GR} = \overline{RF}$.
Weil die Dreiecke MLR und NSL gleichschenklig-rechtwinklig sind, folgt: $\sphericalangle RSL = 180°$. Deshalb liegen R, F, S und G in einer Ebene, und FSGR ist somit eine Raute.

b) $V = 2a^3$
$S = 6a^2\sqrt{2}$





186/13. a)

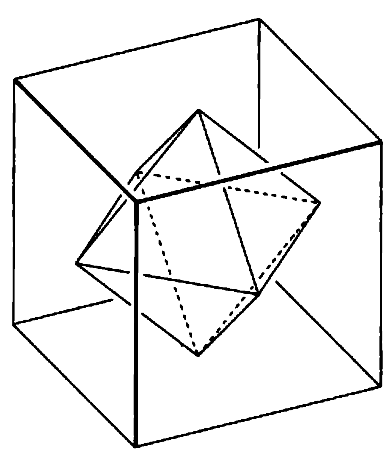


b) $V = (1 + \sqrt{2})a^3$
$S = 6\sqrt{3}\,a^2$

c) die Pyramidenspitzen sind die Ecken eines regel–mäßigen Oktaeders
$V_O = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1)^3a^3$
$= \frac{1}{6}(7 + 5\sqrt{2})a^3$

186/14. b) $V_O = \frac{1}{6}a^3$
$V_O : V_W = 1 : 6$

a)



187/15. **a)** $V_O : V_T = 1 : 2$ **b)** $S_O : S_T = 1 : 2$

187/16. **a)** $V_K : V_G = 1 : 27$ **b)** $S_K : S_G = 1 : 9$

187/17. **a)** Würfelstumpf **b)** $V_O : V_{WS} = 8 : 5$

c) $S_O : S_{WS} = 4\sqrt{3} : (3 + \sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} - 1) : 1$

187/18. **a)** Würfel **b)** $V_O : V_W = 9 : 2$ **c)** $S_O : S_W = 3\sqrt{3} : 2$

187/19. **a)** $V = 288\,m^3$ **b)** $V = 224\,m^3$ **c)** $V = 256\,m^3$ **d)** $V = 192m^3$

188/20. **a)** $x_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ $x_2 = a(\sqrt{2} - 1)$

b) $S_1 = a^2(3 + \sqrt{3})$ $S_2 = 12a^2(\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{3}\,a^2(3 - 2\sqrt{2})$

c) $d_1 = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$ $d_2 = \frac{1}{3}a\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{2})$

d) $V_1 = \frac{5}{6}a^3$ $V_2 = \frac{7}{3}a^3(\sqrt{2} - 1)$

188/21. **a)** $S' = 4S$ **b)** $S' = k^2 S$

188/22. **a)** $V' = 2V$ **b)** $V' = 4V$ **c)** $V' = 8V$

188/23. **a)** $h = a$ **b)** $V = \frac{1}{3}a^3$ **c)** $S = a^2(1 + \sqrt{5})$

d) $\delta \approx 65{,}9°$ **e)** $\varepsilon \approx 54{,}7°$ **f)** $\varphi \approx 63{,}4°$

g) $\gamma \approx 48{,}2°$ **h)** $\eta \approx 70{,}5°$ **i)** $\iota \approx 101{,}5°$

k) $\kappa \approx 53{,}1°$

189/24. **a)** $S = 3a^2(1 + \sqrt{3})$ $V = \frac{3}{2}a^3$

b) $V_O : V_W = 4 : 3$ **c)** $S_O : S_W = 2\sqrt{3} : 3$

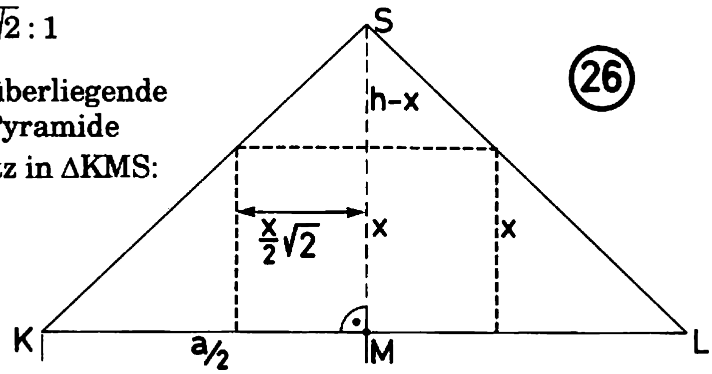
d) Die 14 Spitzen sind Ecken des Zwölfrautenflachs.

189/25. $V_W : V_O : V_T = \sqrt{\sqrt{3}} : \sqrt{2} : 1$

189/26. K und L sind gegenüberliegende Kantenmitten der Pyramide ABCDS. Strahlensatz in ΔKMS:

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}x\sqrt{2}} = \frac{h}{h - x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ah}{a + h\sqrt{2}}$$



189/27. Dodekaeder, Würfelstumpf 3 (Lehrbuch S.138)

Aufgaben zu 7.6

191/1.

G	D	h	V
22,5	2,5	24	260
16	9	6	74
12	3	7	49
27	3	10	130

191/2. $V = 37\,916\,\frac{2}{3}\,\text{cm}^3 \approx 38\,\text{dm}^3$; die Seitenflächen sind gleichschenklige Trapeze mit der Schenkellänge $s = 2{,}5\sqrt{402}$ cm ≈ 50 cm.

191/3. **a)** Prisma (zum Beispiel: $c = a$, $d = 0$):

$$V = \tfrac{1}{6}(2ab + 2a\cdot 0 + a\cdot 0 + ba)h = \tfrac{1}{6}\cdot 3abh = \tfrac{1}{2}h\cdot b\cdot a = Ga$$

Pyramide (zum Beispiel: $c = d = 0$):

$$V = \tfrac{1}{6}(2ab + 2\cdot 0\cdot 0 + a\cdot 0 + b\cdot 0)h = \tfrac{2}{6}abh = \tfrac{1}{3}Gh$$

Pyramidenstumpf ($d : b = c : a \Rightarrow d = \frac{cb}{a}$):

$$V = \tfrac{1}{6}(2ab + 2cd + a\cdot \tfrac{cb}{a} + bc)h$$
$$= \tfrac{1}{3}(ab + cd + bc)h = \tfrac{1}{3}(ab + cd + \sqrt{bc\cdot bc}\,)h,$$

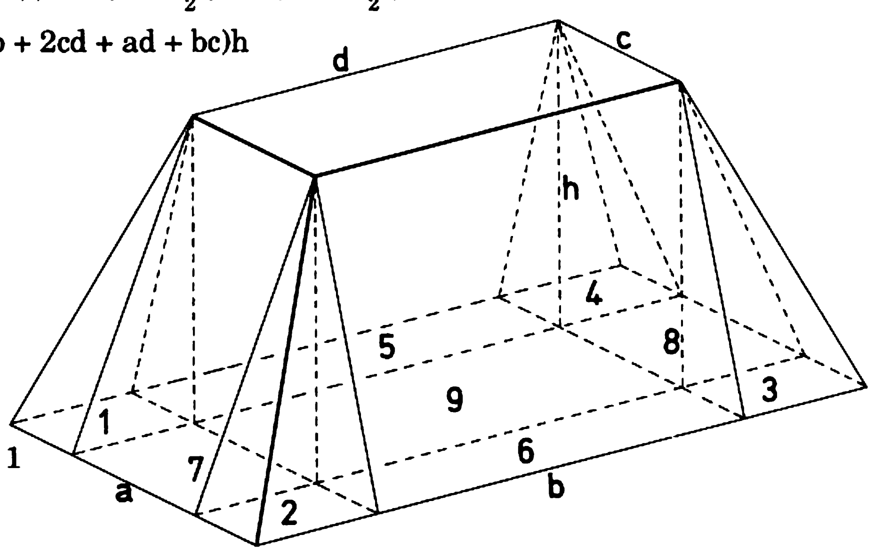
weil Grund- und Deckfläche ähnliche Rechtecke sind,
gilt: $c : a = d : b$, also $cb = ad \Rightarrow$

$$V = \tfrac{1}{3}(ab + cd + \sqrt{ad\cdot bc}\,)h = \tfrac{1}{3}(G + D + \sqrt{DG})h$$

b) Keil (zum Beispiel $d = 0$): $V = \frac{1}{6}(2ab + bc)h = \frac{1}{6}(2a + c)hb$

c) Die Körper mit den Grundflächen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ und $\boxed{4}$ ergeben zusammen eine Pyramide, $\boxed{5}$ und $\boxed{6}$ ergeben ein Prisma, ebenso $\boxed{7}$ und $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ ist ein Quader:

$$V = \tfrac{1}{3}(a - c)(b - d)h + \tfrac{1}{2}(a - c)hd + \tfrac{1}{2}(b - d)hc + cdh$$
$$V = \tfrac{1}{6}(2ab + 2cd + ad + bc)h$$

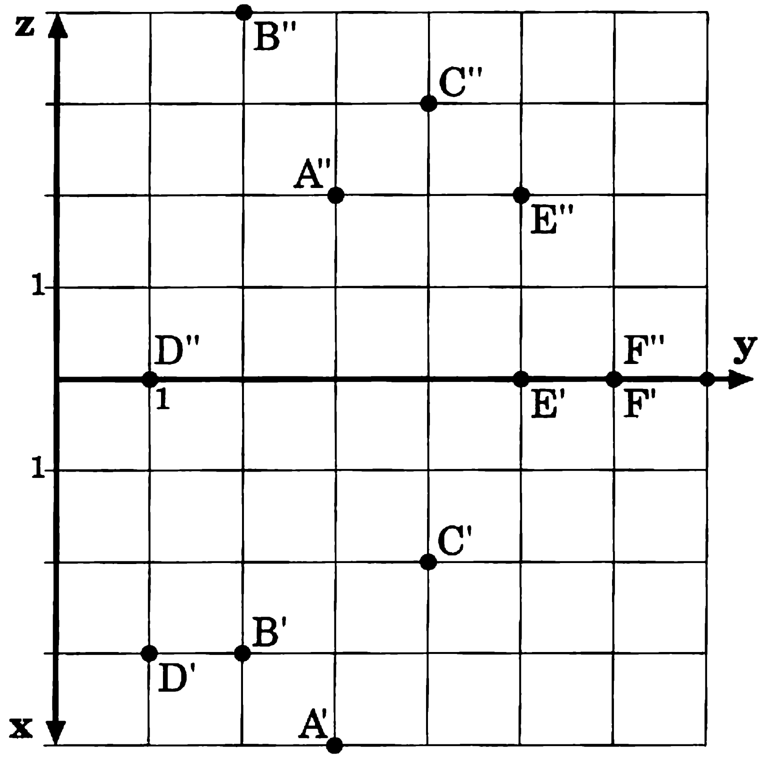


192/4. $V = 83{,}6\,\text{m}^3$
$m \approx 224$ t

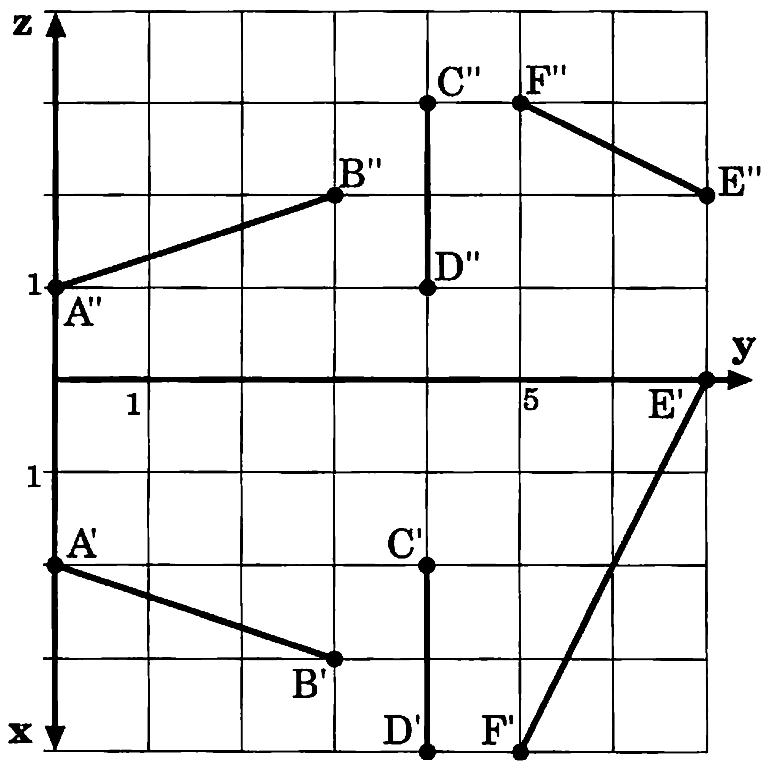
192/5. **a)** $V' = 130$
$V = 126\,\frac{2}{3}$
b) $G : D = 1 : 1$

Lösungen zum Additum Darstellende Geometrie

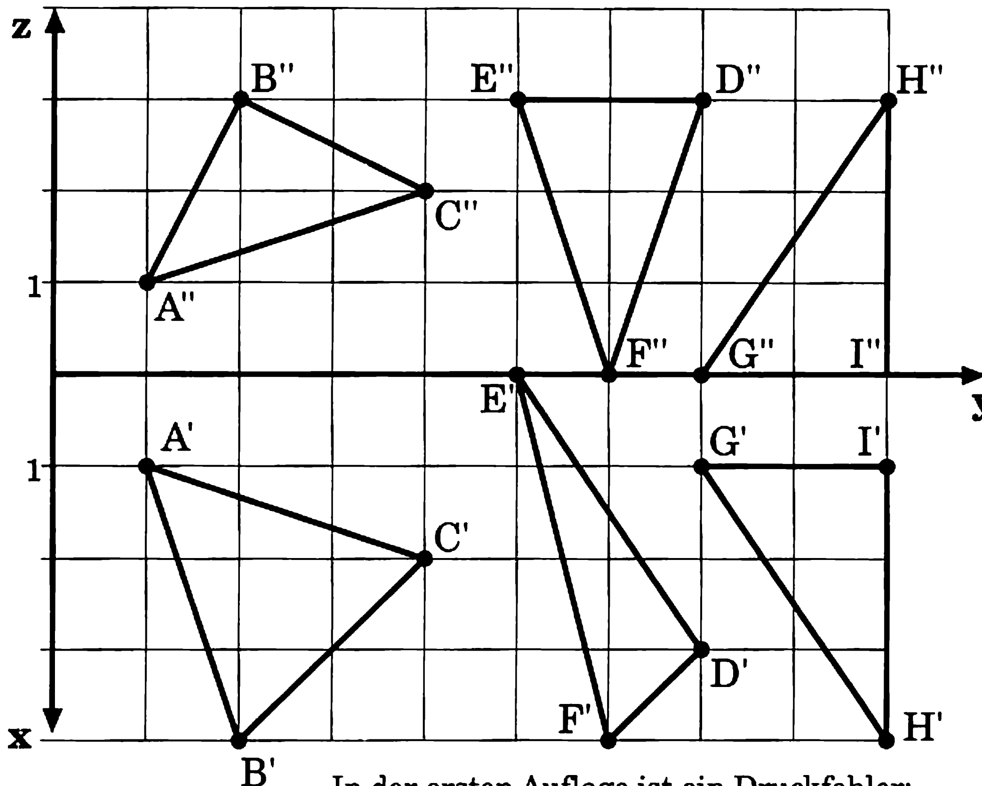
10/1.



10/2.

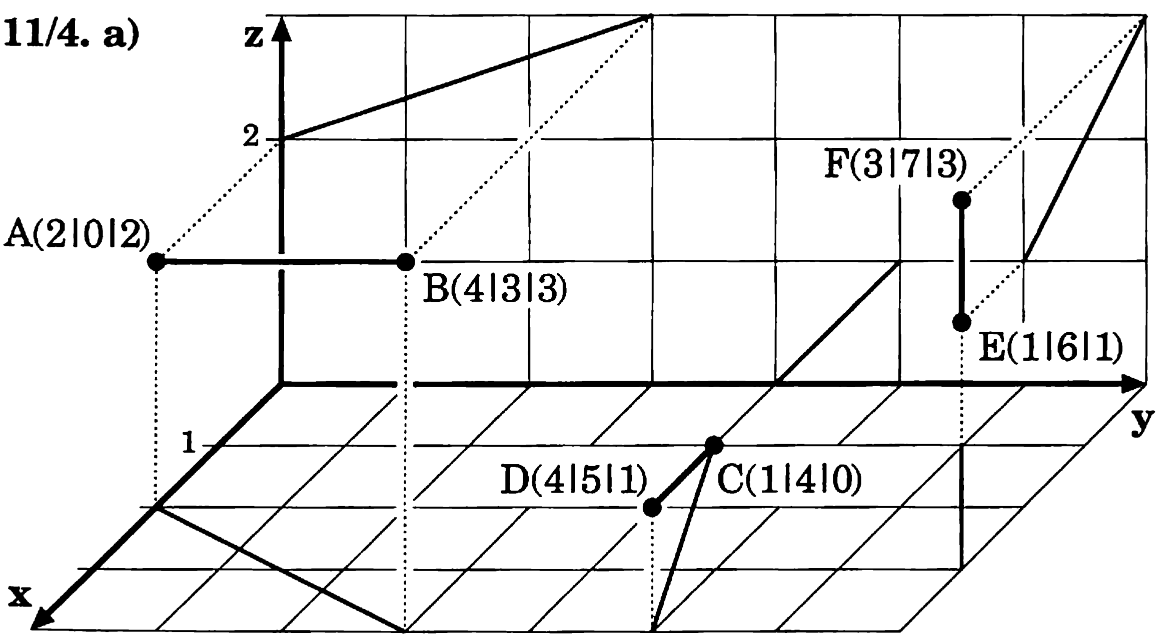


10/3.

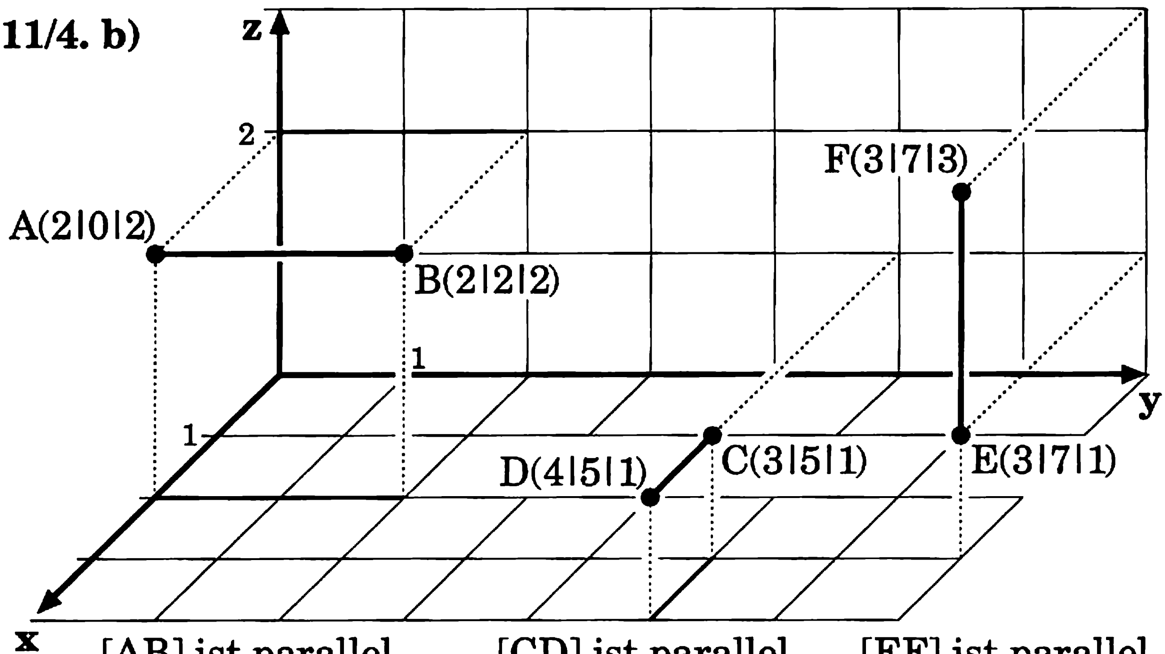


In der ersten Auflage ist ein Druckfehler:
Statt A(1 | 1 | 11) muss es heißen A(1 | 1 | 1).

11/4. a)



11/4. b)

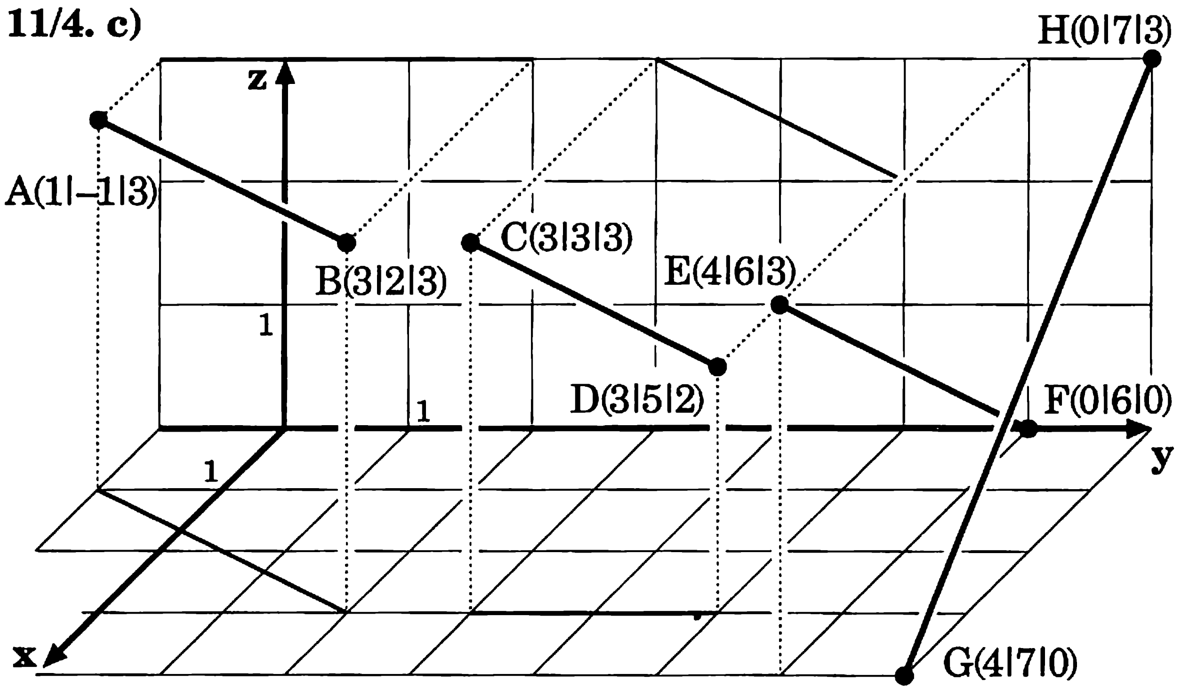


[AB] ist parallel zur y-Achse.

[CD] ist parallel zur x-Achse.

[EF] ist parallel zur z-Achse.

11/4. c)

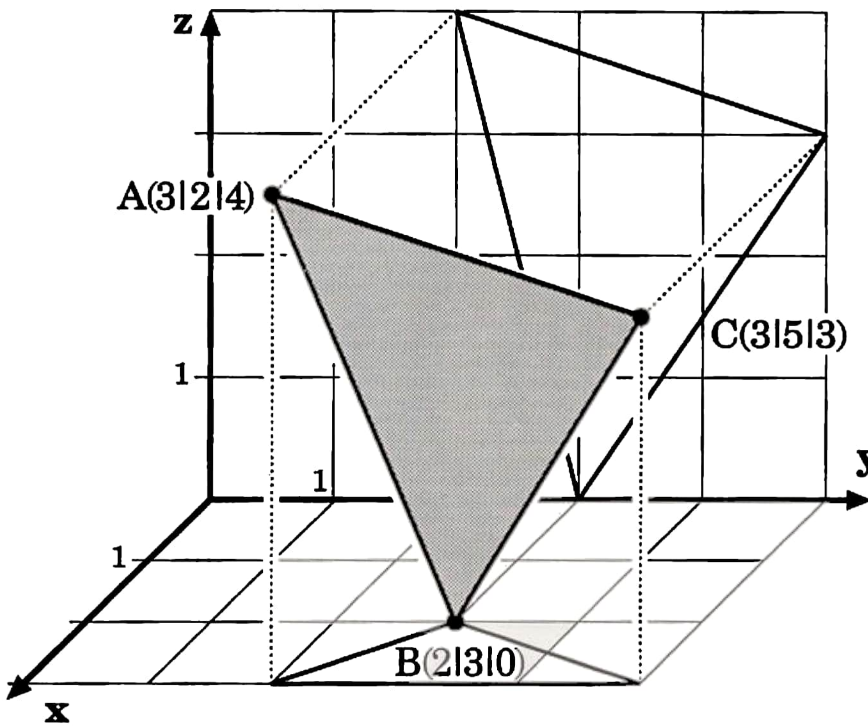


[AB] ist parallel zur xy-Ebene.

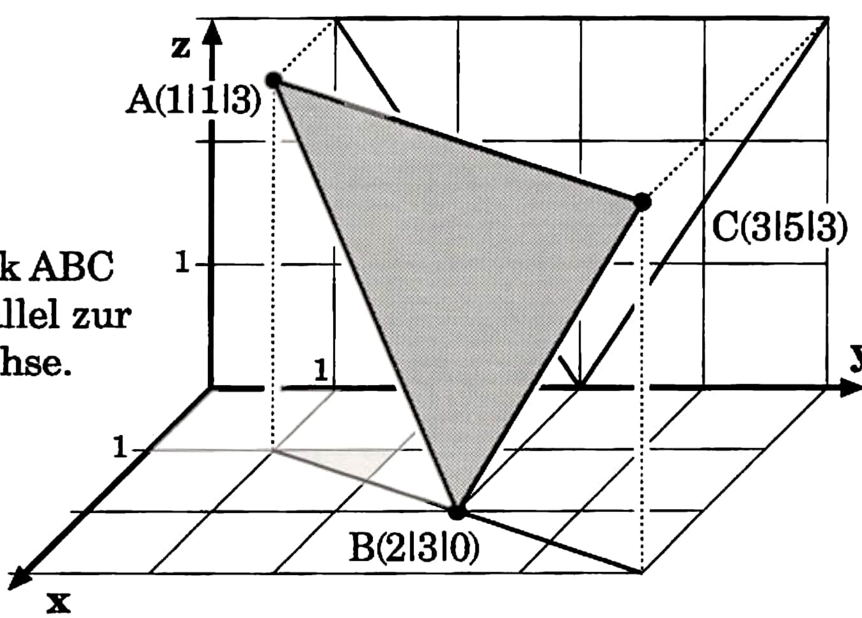
[CD] ist parallel zur yz-Ebene.

[EF] und [GH] sind parallel zur xz-Ebene.

11/5. a)

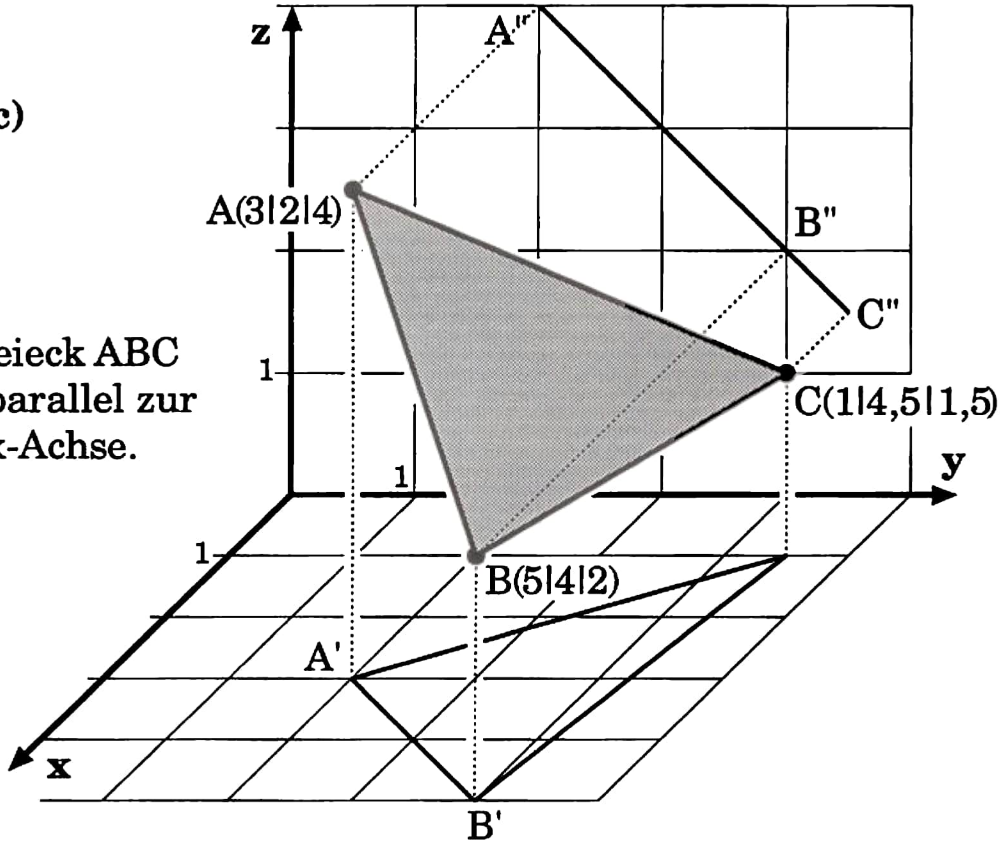


12/5. b)



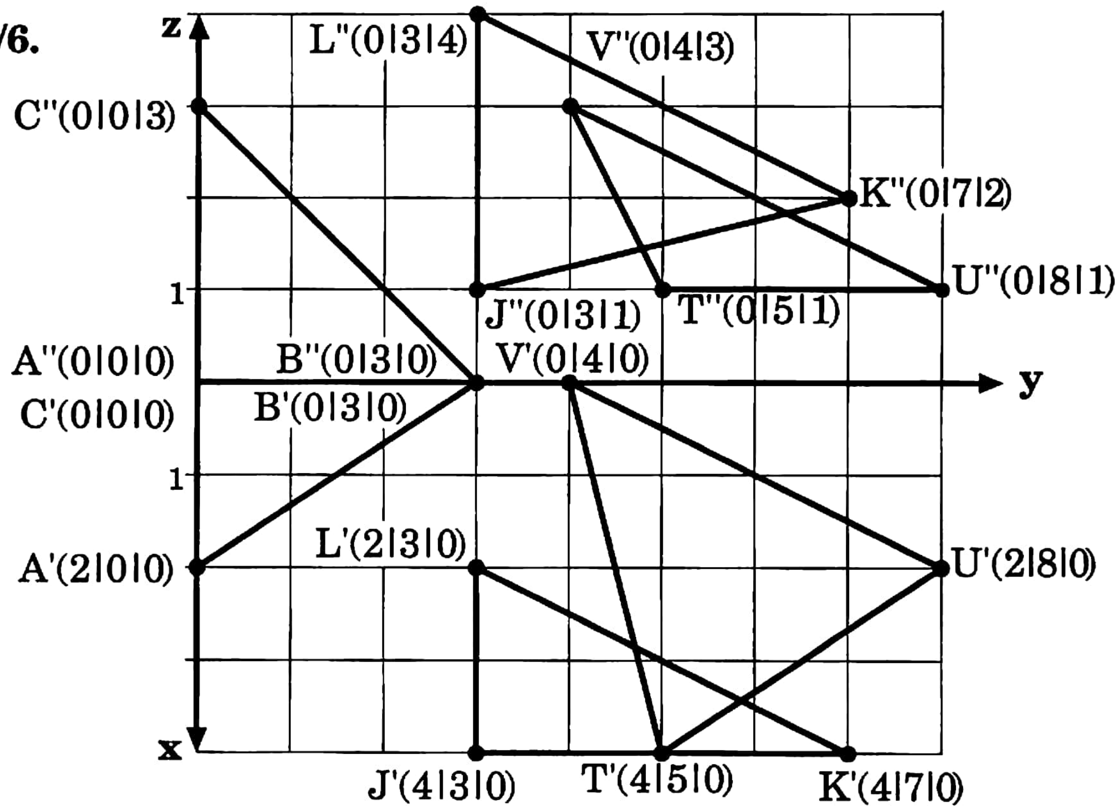
Dreieck ABC
ist parallel zur
z-Achse.

12/5. c)

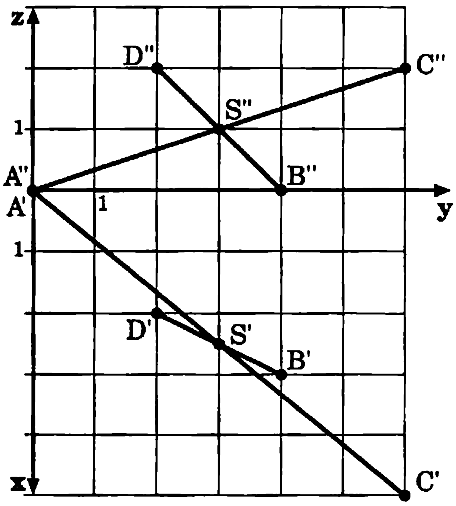


Dreieck ABC ist parallel zur x-Achse.

12/6.

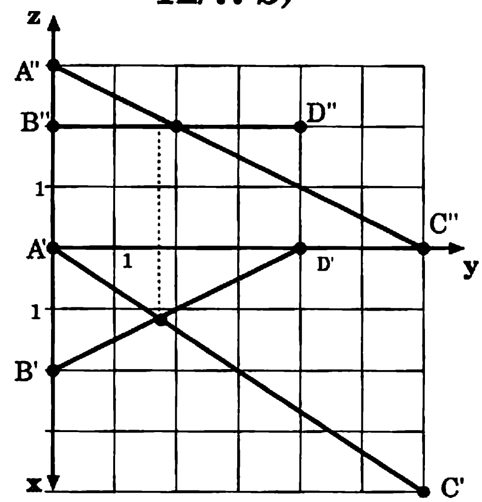


12/7. a)



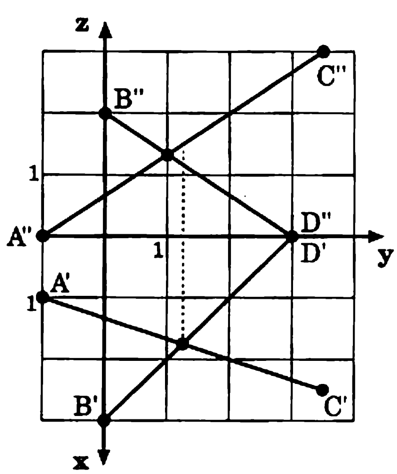
AC und BD schneiden
sich in S(2,5|3|1),
also ist das Viereck eben.

12/7. b)



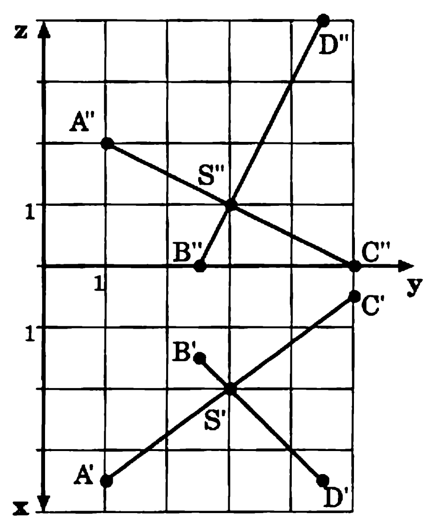
AC und BD sind windschief,
also ist ABCD ein Tetraeder.

12/7. c)



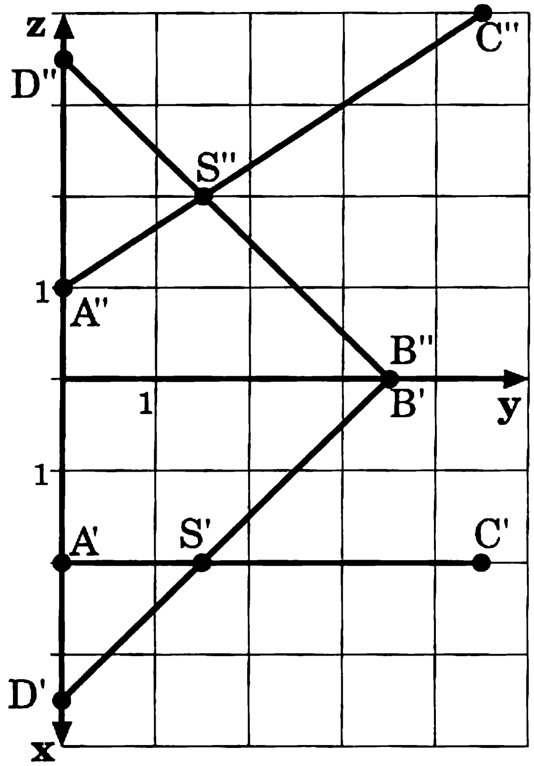
AB und CD sind windschief,
also ist ABCD ein Tetraeder.

12/7. d)

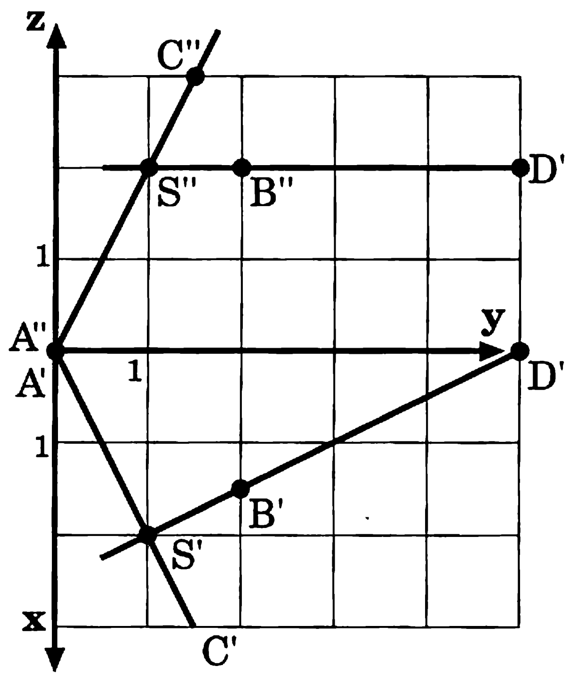


AC und BD schneiden
sich in S(2|3|1),
also ist das Viereck eben.

12/8. a) **D(3,5 | 0 | 3,5)**

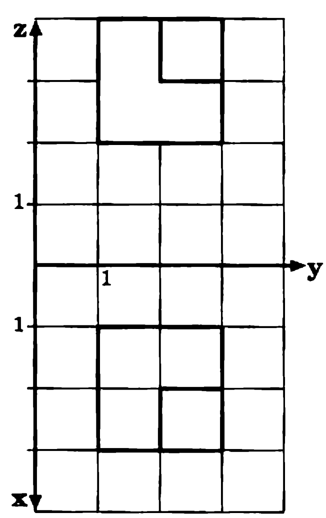


12/8. b) **D(0 | 5 | 2)**

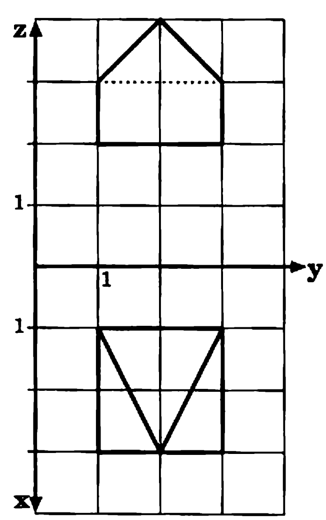


18/1 K1—G4—A3 K2—G3—A2 K3—G3—A4
K4—G1—A3 K5—G5—A1 K6—G2—A1 K7—G4—A3

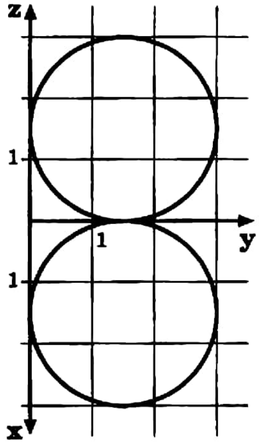
18/2. a)



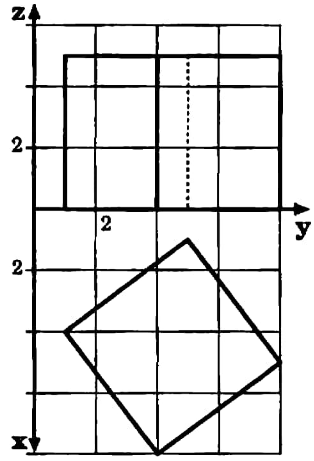
18/2. b



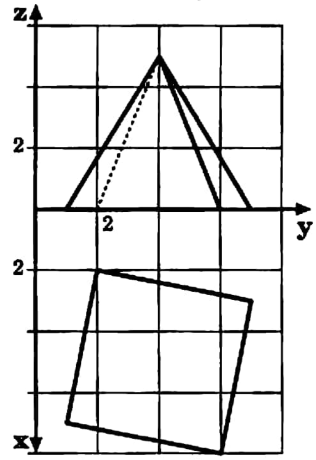
18/3. a)



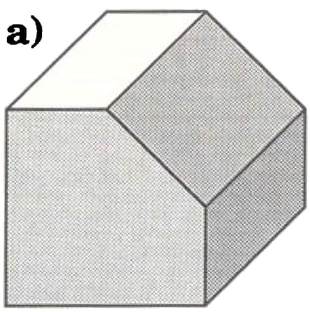
18/3. b)



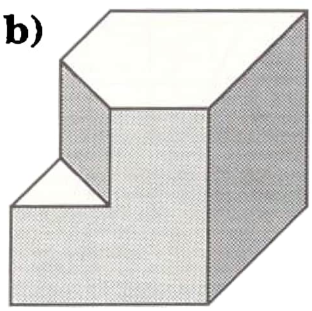
18/3. c)



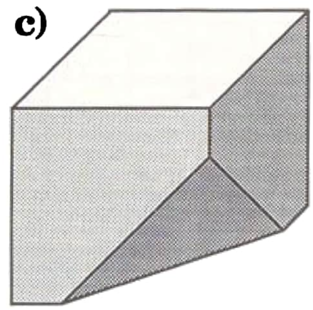
19/4 **a)**



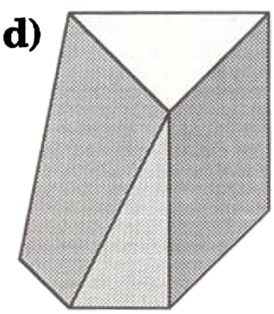
b)



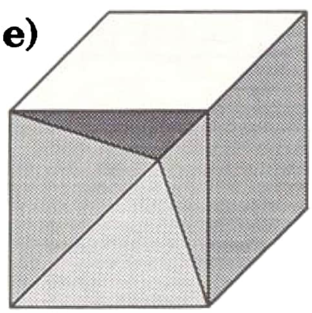
c)



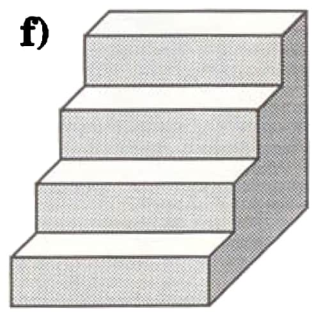
d)



e)

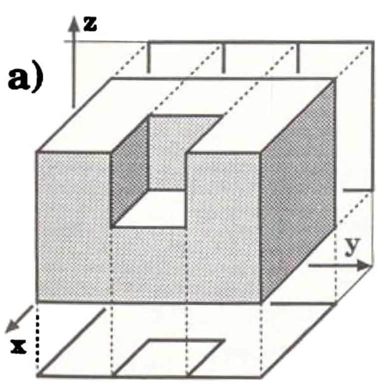


f)

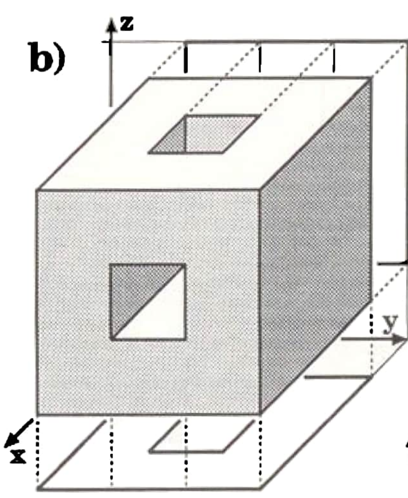


20/5

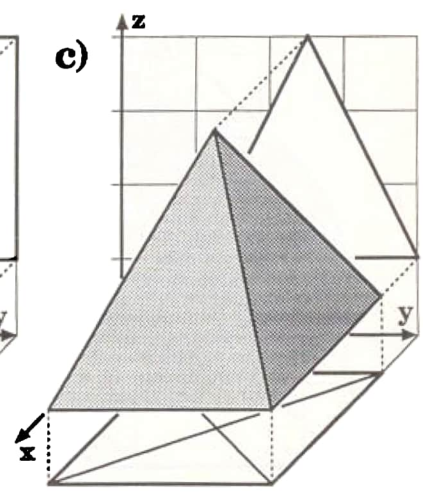
a)



b)

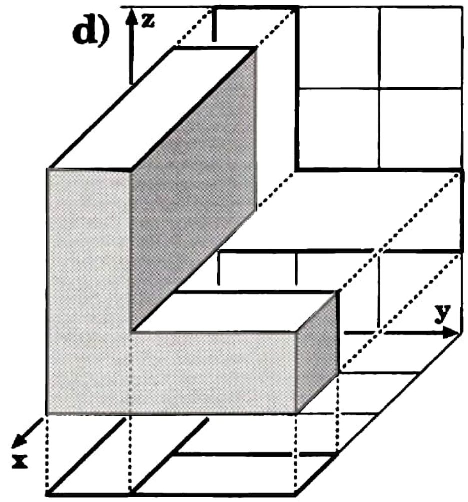


c)

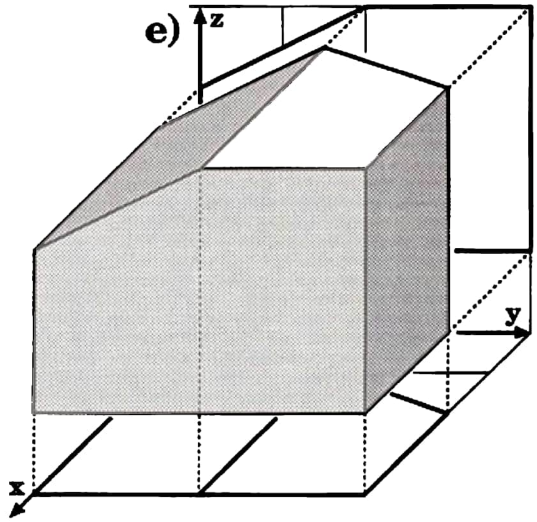


20/5

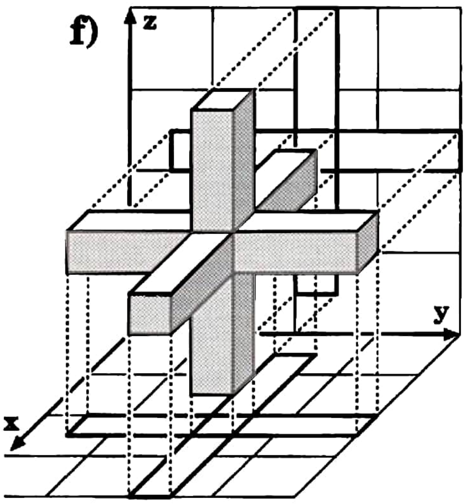
d)



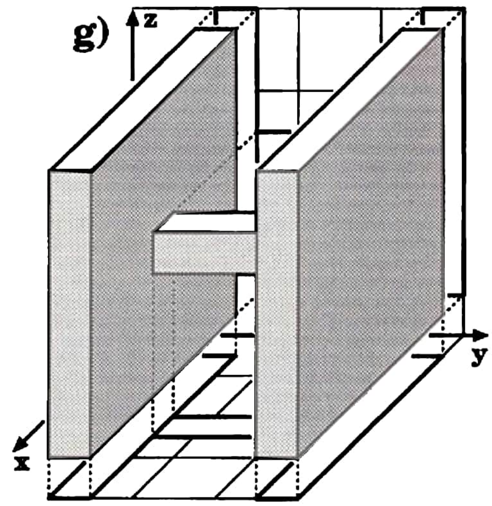
e)



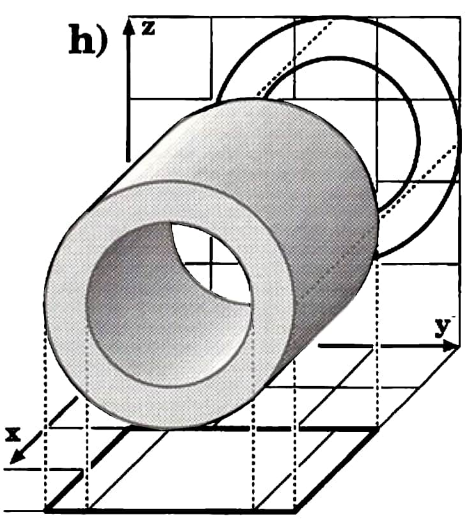
f)



g)

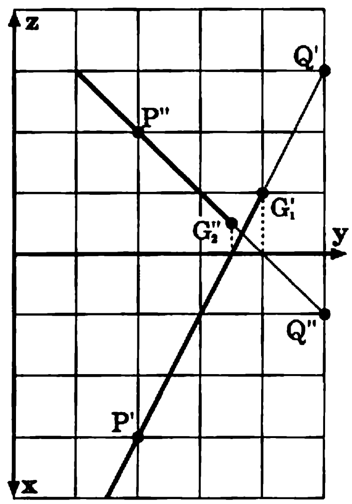


h)

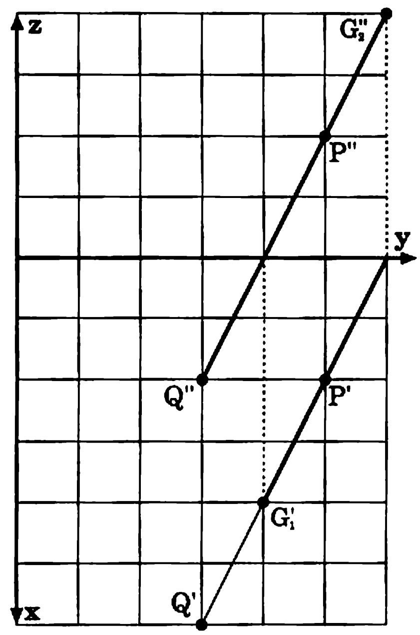


26/1.

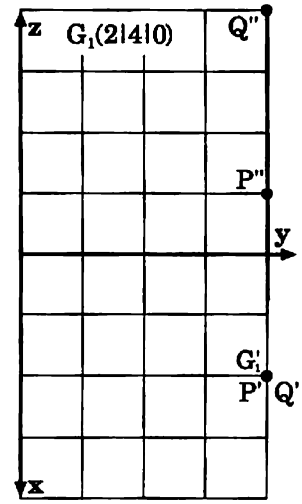
a) $G_1(-1|4|0)$ $G_2(0|3{,}5|0{,}5)$



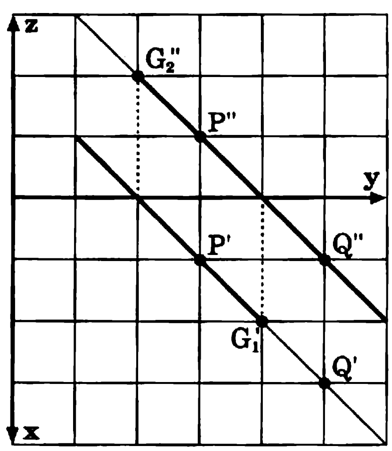
b) $G_1(4|4|0)$ $G_2(0|6|4)$



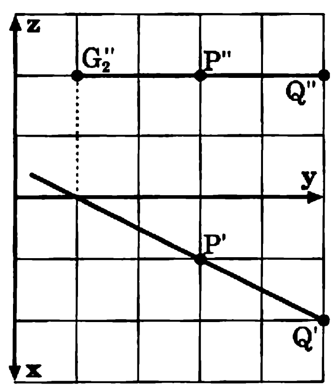
c) G_2 gibt es nicht



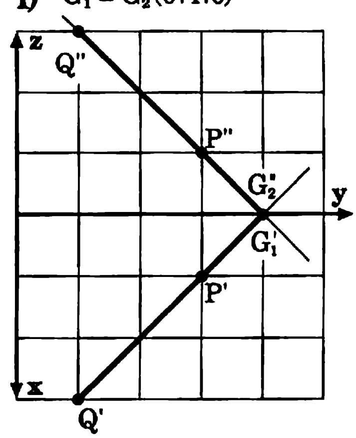
d) $G_1(2|4|0)$ $G_2(0|2|2)$



e) $G_2(0|1|2)$ G_1 gibt es nicht.



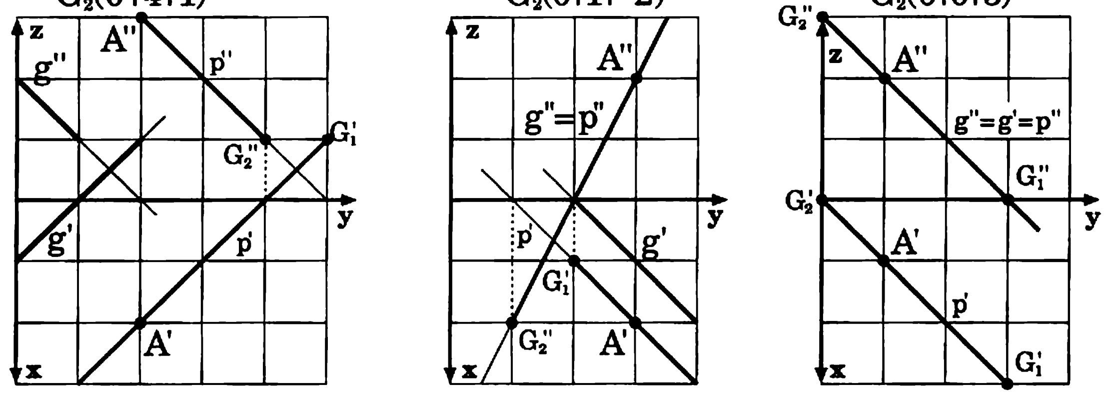
f) $G_1 = G_2(0|4|0)$



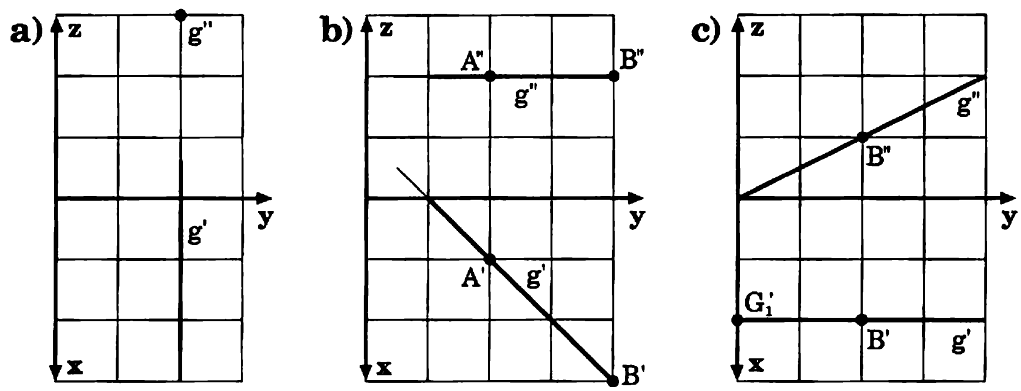
26/2.
- **a)** a ist parallel zur y-Achse
- **b)** b liegt in der Aufrissebene und ist parallel zur y-Achse.
- **c)** c liegt in der Grundrissebene und ist senkrecht zur y-Achse.
- **d)** d liegt in der Aufrissebene und ist senkrecht zur y-Achse.
- **e)** Die Gerade e gibt es nicht.

26/3.

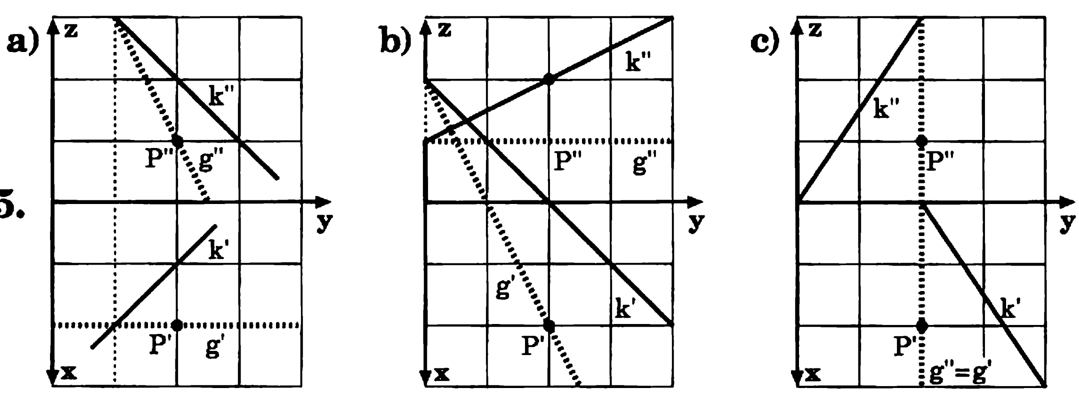
a) $G_1(-1|5|0)$ $G_2(0|4|1)$ b) $G_1(1|2|0)$ $G_2(0|1|-2)$ c) $G_1(3|3|0)$ $G_2(0|0|3)$



26/4.



27/5.



27/6.

a) Schnittpunkt (–1|1|3)

b) Parallelenpaar

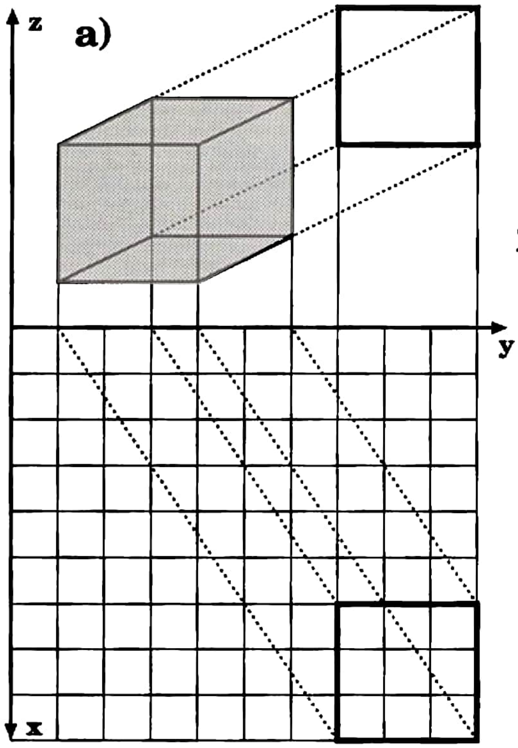
c) k liegt vor g, k liegt über g.

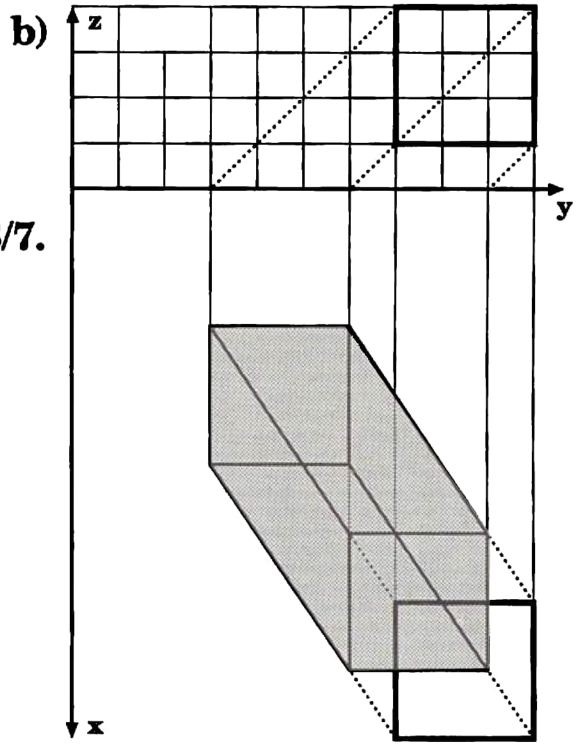
d) Schnittpunkt (–1|2|–1)

e) g liegt vor k, k liegt über g.

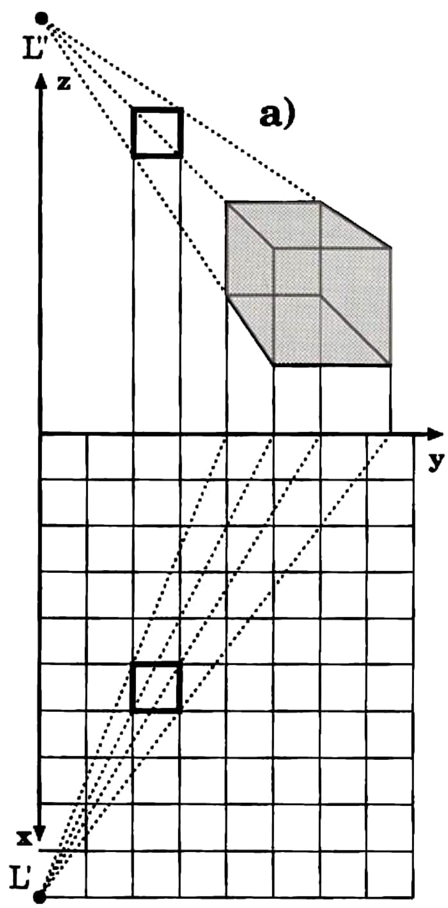
f) Schnittpunkt (1|2|1)

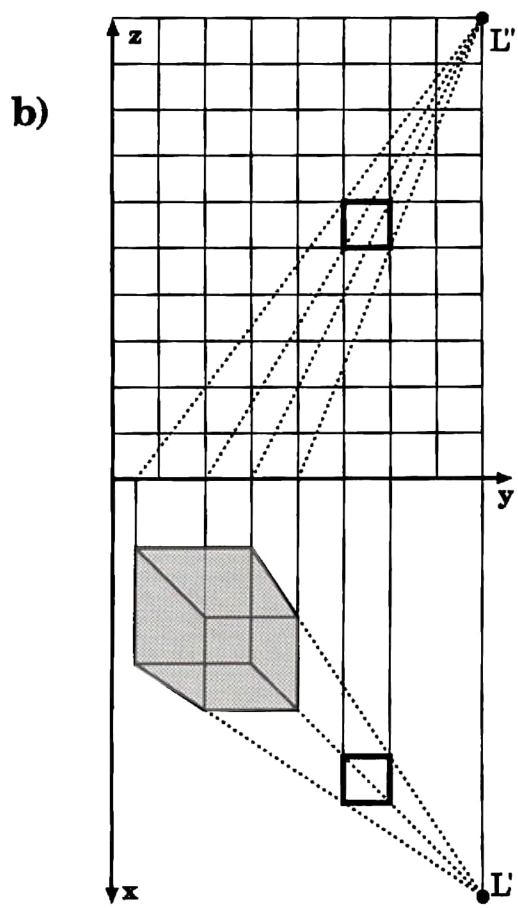
28/7.



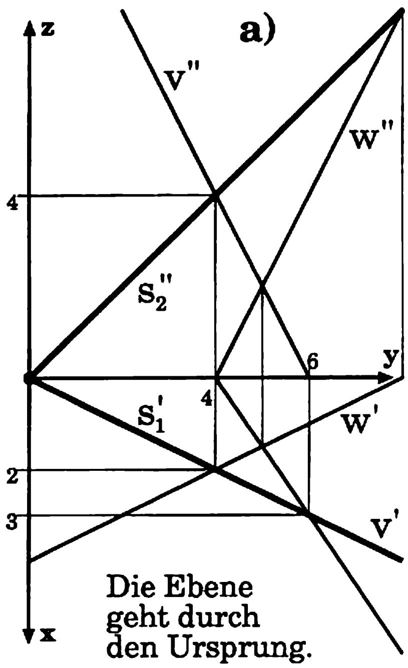


28/8.

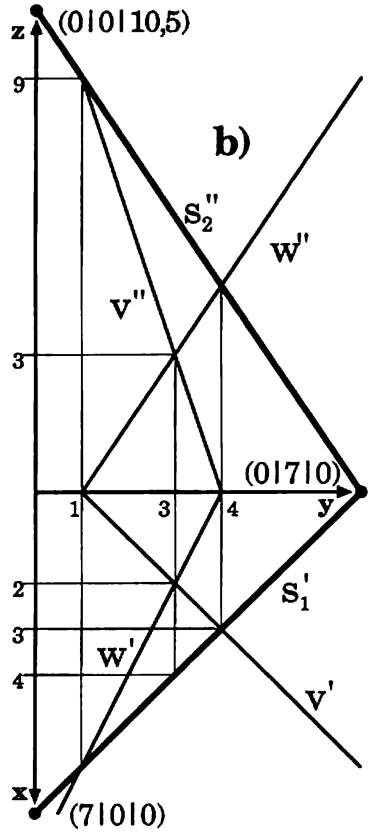


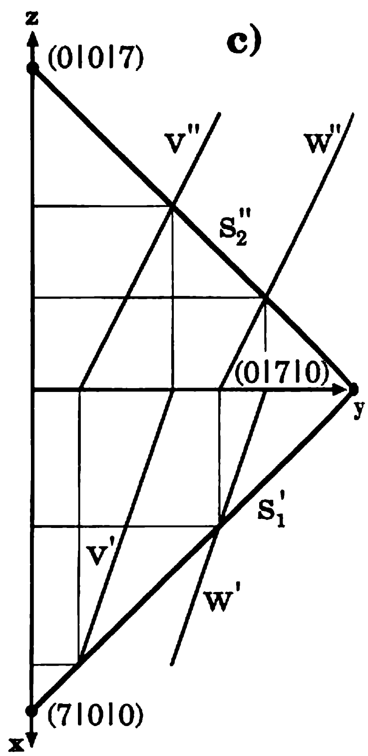


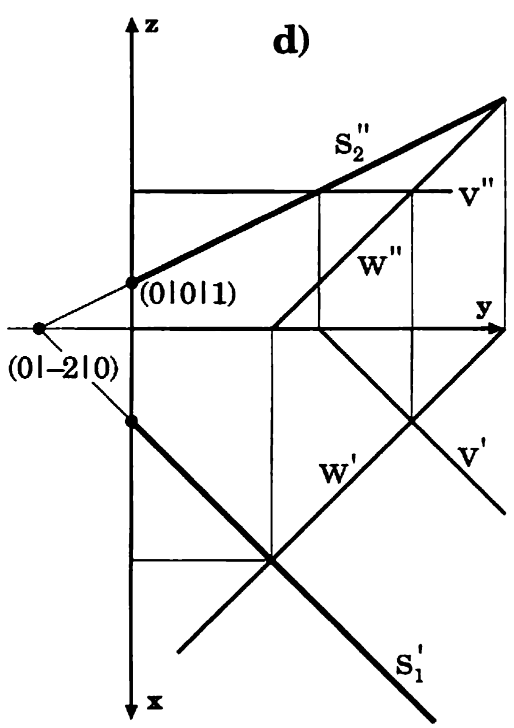
38/1.



Die Ebene geht durch den Ursprung.

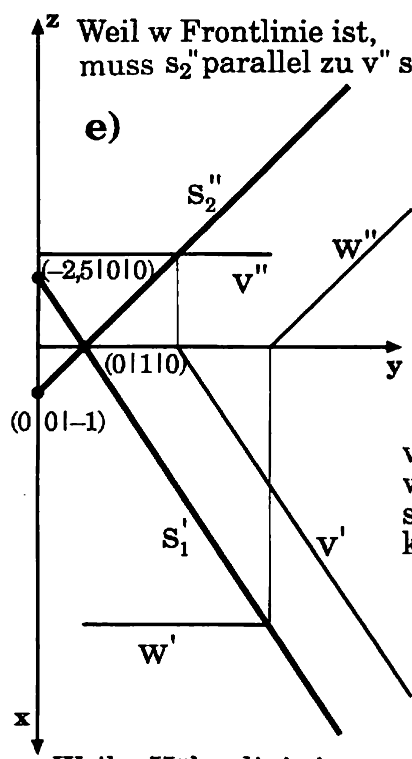






Weil v Höhenlinie ist, muss s_1' parallel zu v' sein.

Weil w Frontlinie ist, muss s_2'' parallel zu v'' sein.

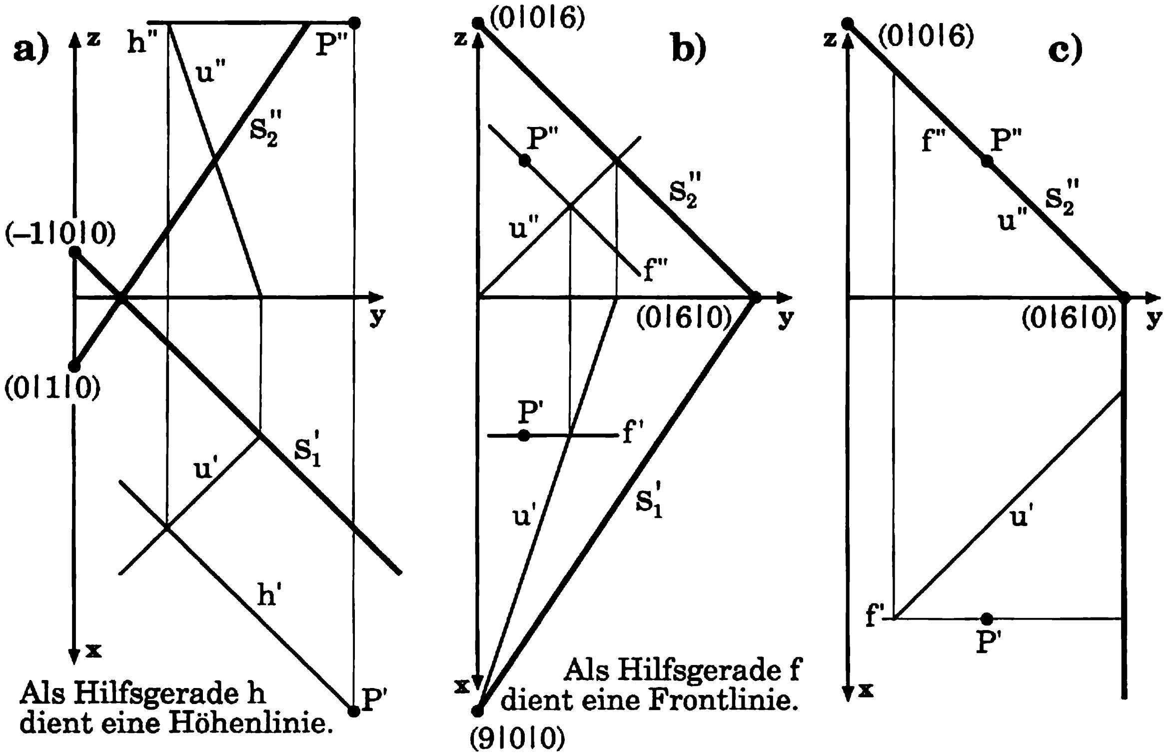


Weil v Höhenlinie ist, muss s_1' parallel zu v' sein.

f)

v und w sind windschief, spannen also keine Ebene auf.

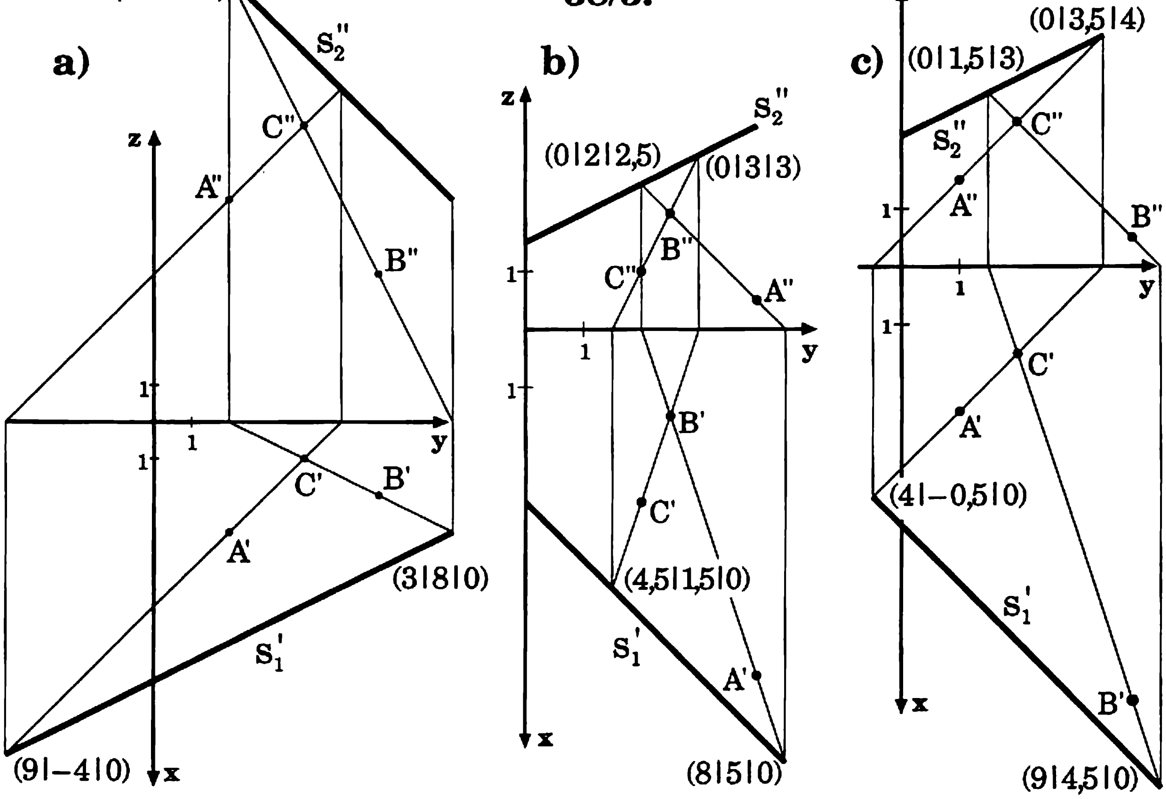
38/2.



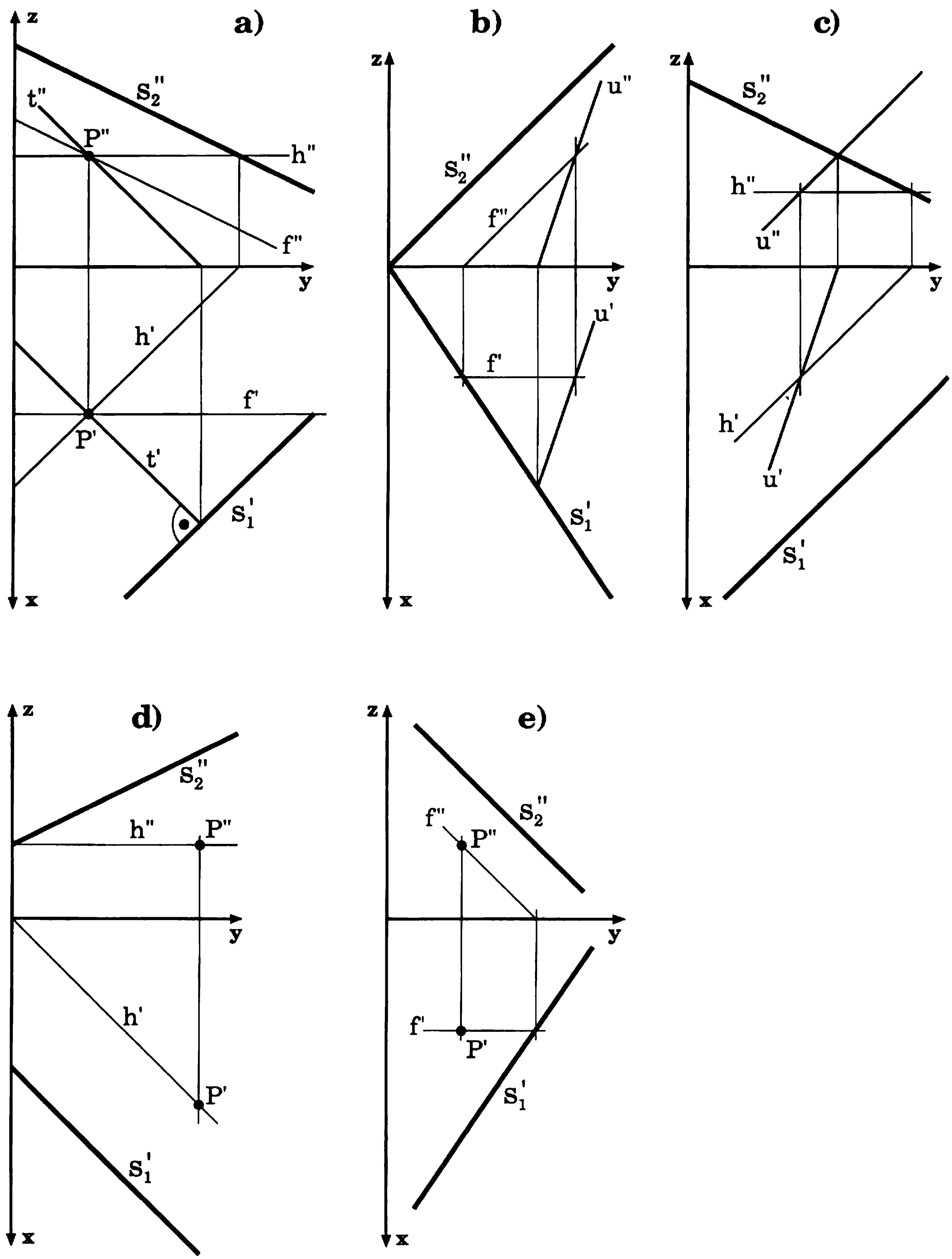
Als Hilfsgerade h dient eine Höhenlinie.

Als Hilfsgerade f dient eine Frontlinie.

38/3.

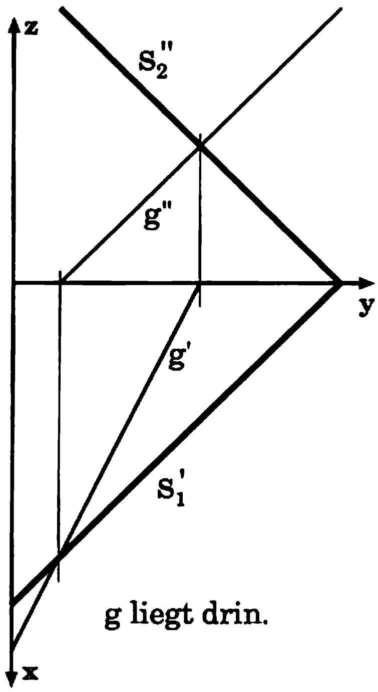


39/4.


a)
z
s_2''
t''
P''
h''
f''
y
h'
f'
P'
t'
s_1'
x
b)
z
u''
s_2''
f''
y
u'
f'
s_1'
x
c)
z
s_2''
h''
u''
y
h'
u'
s_1'
x
d)
z
s_2''
h''
P''
y
h'
P'
s_1'
x
e)
z
f''
P''
s_2''
y
f'
P'
s_1'
x

39/5.

a)

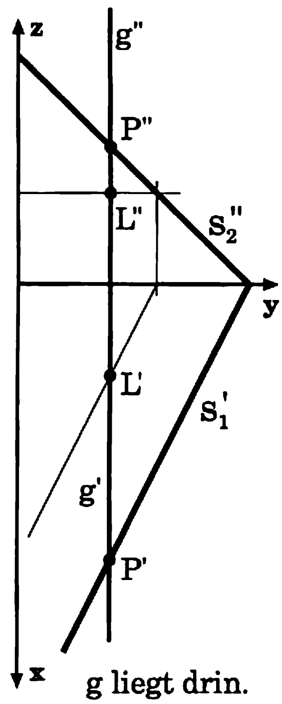


g liegt drin.

b)

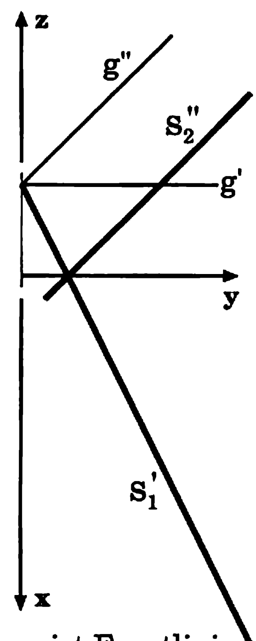
g liegt nicht drin.

c)



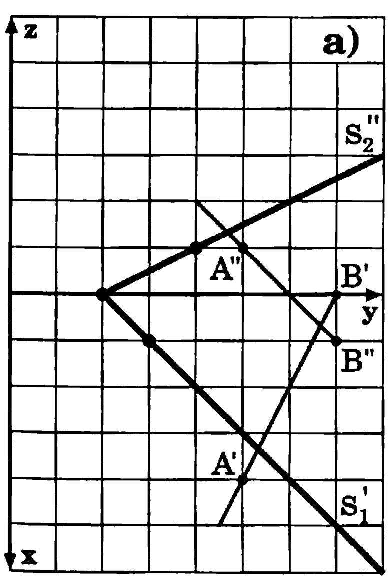
g liegt drin.

d)

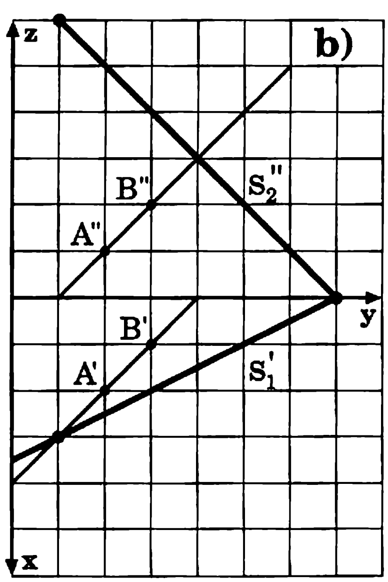


g ist Frontlinie, liegt also drin.

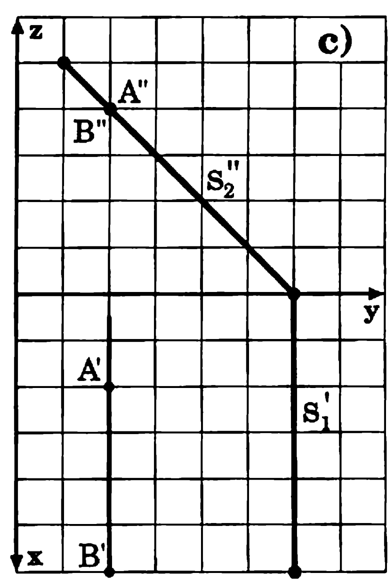
39/6.



Die Gerade liegt nicht in der Ebene.

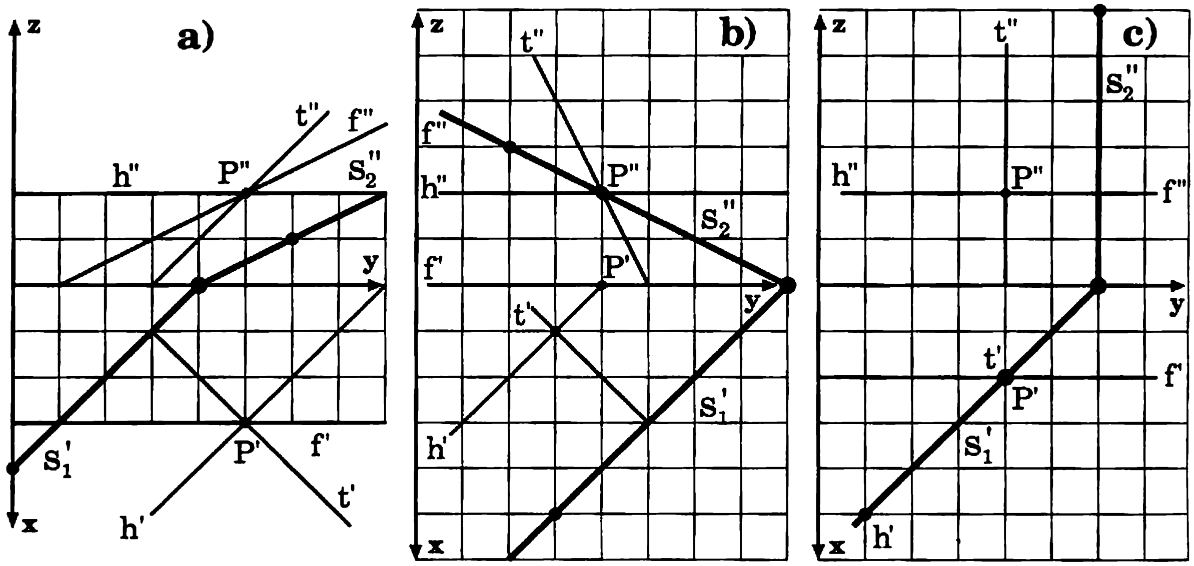


Die Gerade liegt in der Ebene,weil sie beide Spuren schneidet.

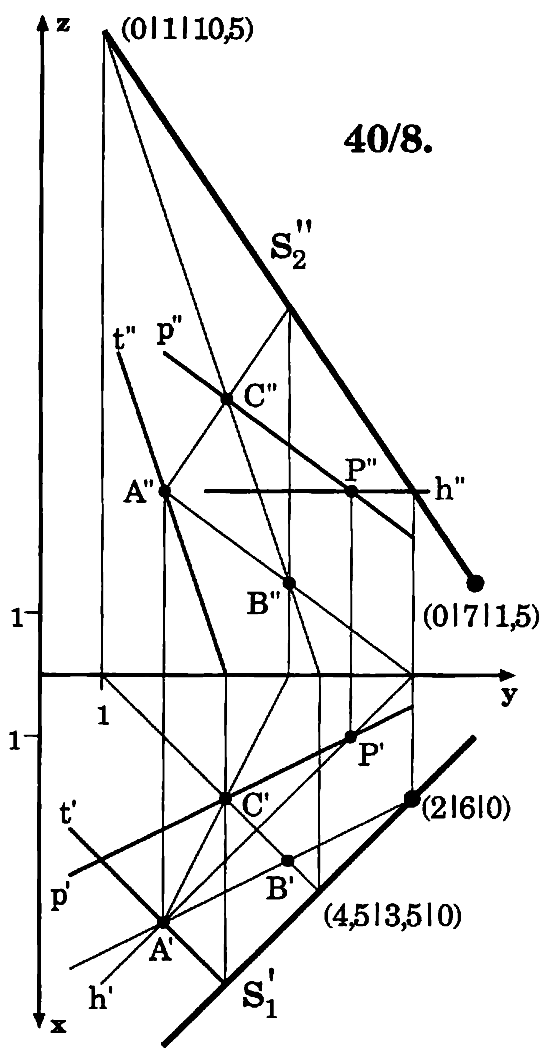


Die Gerade liegt in der Ebene,weil sie eine Spur schneidet und zur andern parallel ist.

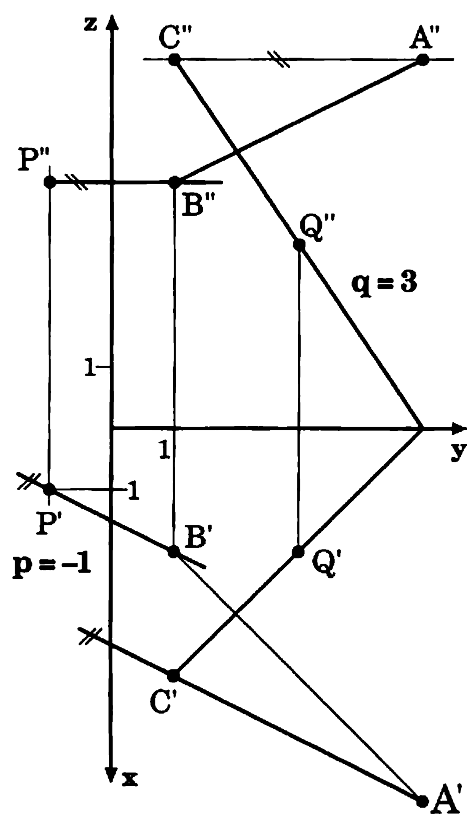
40/7.


a)
b)
c)
z
y
x
h"
P"
t"
f"
s_2''
s_1'
P'
f'
t'
h'

40/8.

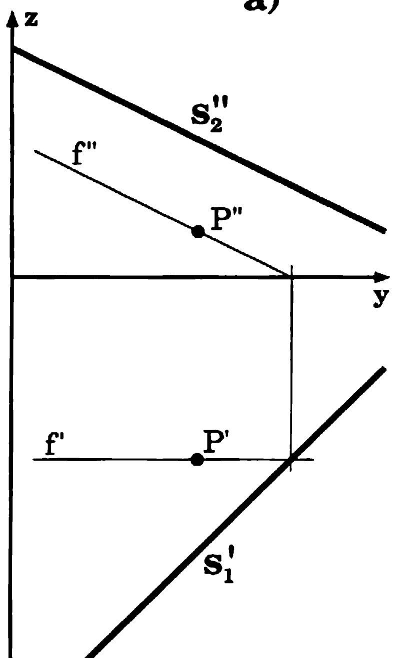

z
(0|1|10,5)
S_2''
t"
p"
C"
A"
P"
h"
B"
(0|7|1,5)
1
y
x
P'
C'
t'
p'
B'
(2|6|0)
(4,5|3,5|0)
A'
h'
S_1'

40/9.


z
C"
A"
P"
B"
Q"
q = 3
1
y
P'
B'
Q'
p = –1
C'
x
A'

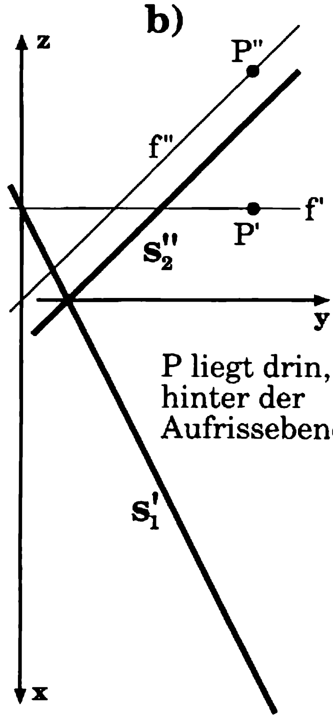
40/10.

a)



P liegt drin.

b)



P liegt drin, hinter der Aufrissebene.

c)

P liegt drüber.

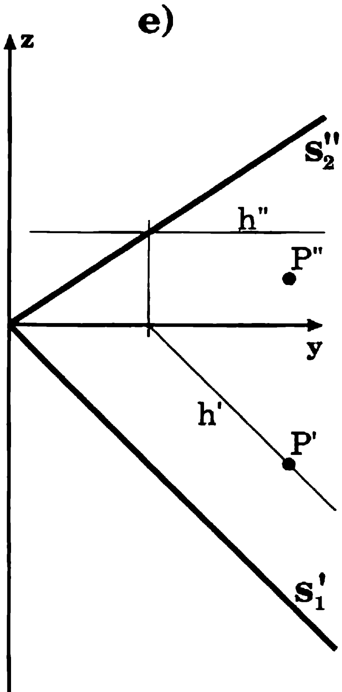
d)

P liegt drunter.

h)

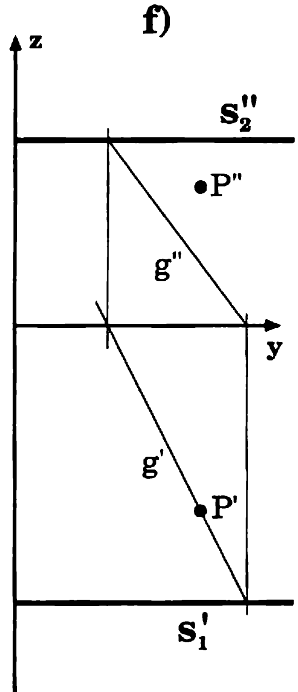
Die Ebene ist parallel zur z-Achse. Die Grundrisse aller Ebenenpunkte fallen mit s_1' zusammen. P liegt also nicht in der Ebene, er liegt links davon.

e)



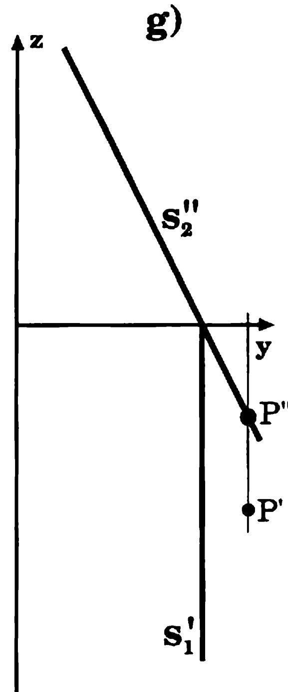
P liegt drunter.

f)



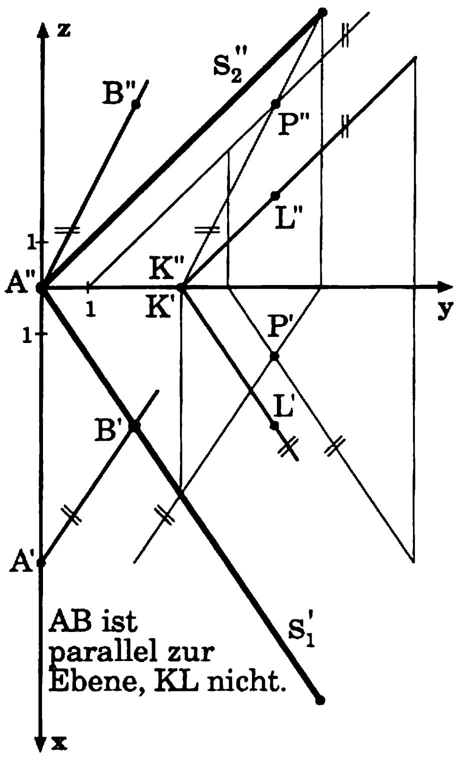
P liegt drüber.

g)



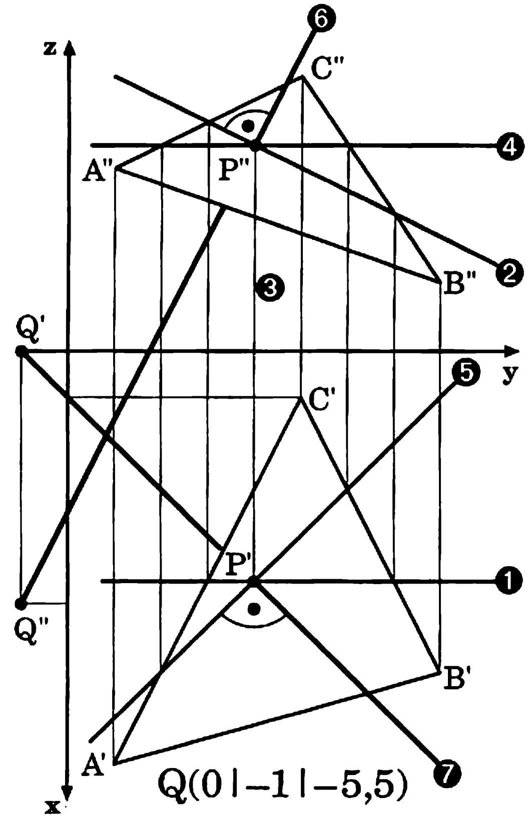
P liegt drin.

41/11.



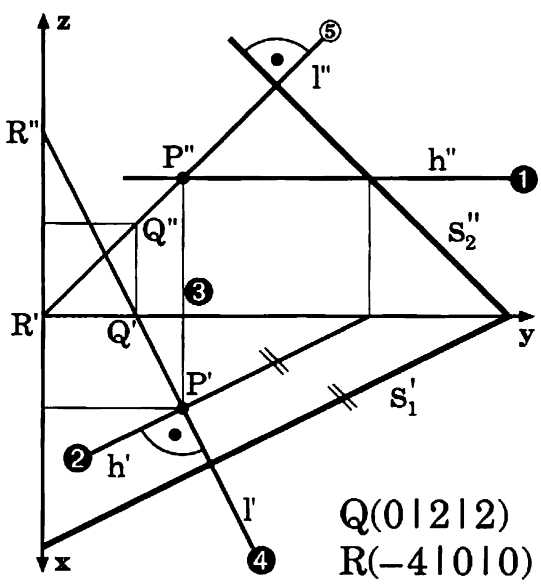
AB ist parallel zur Ebene, KL nicht.

41/12.



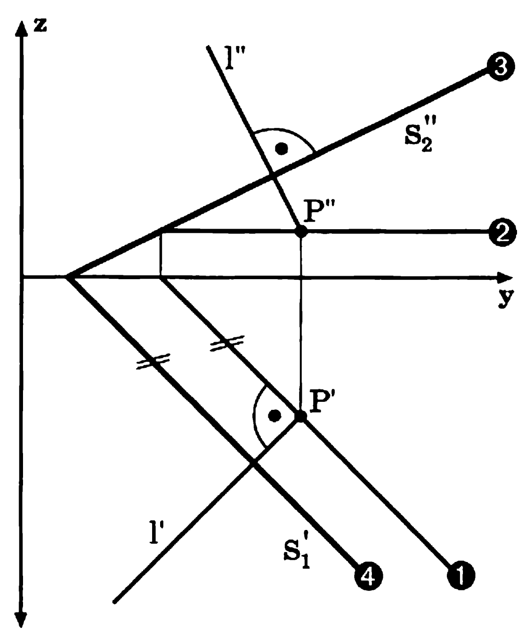
Q(0|−1|−5,5)

41/13.

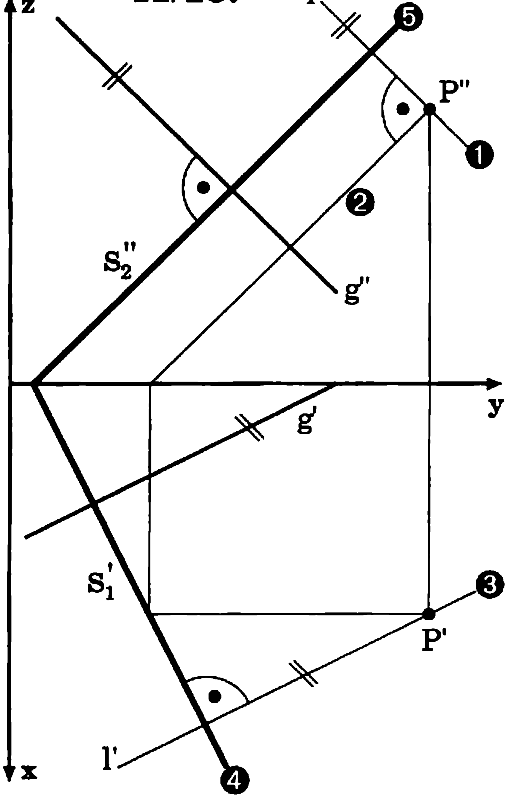


Q(0|2|2)
R(−4|0|0)

41/14.

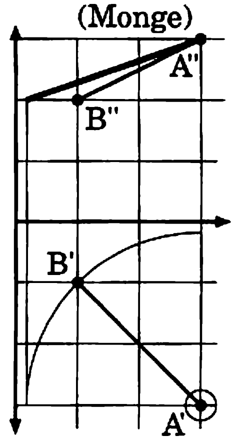


41/15.

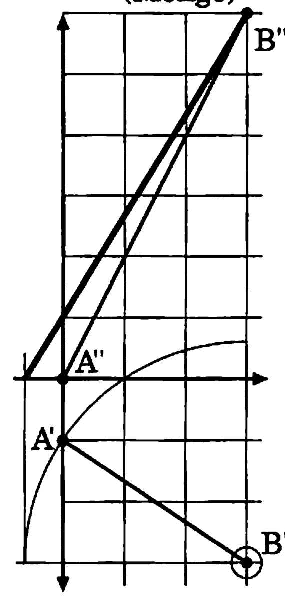


46/1.

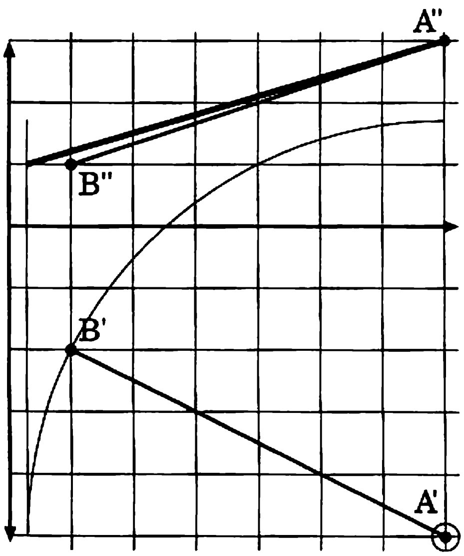
a) s = 3
φ ≈ 24°
(Monge)



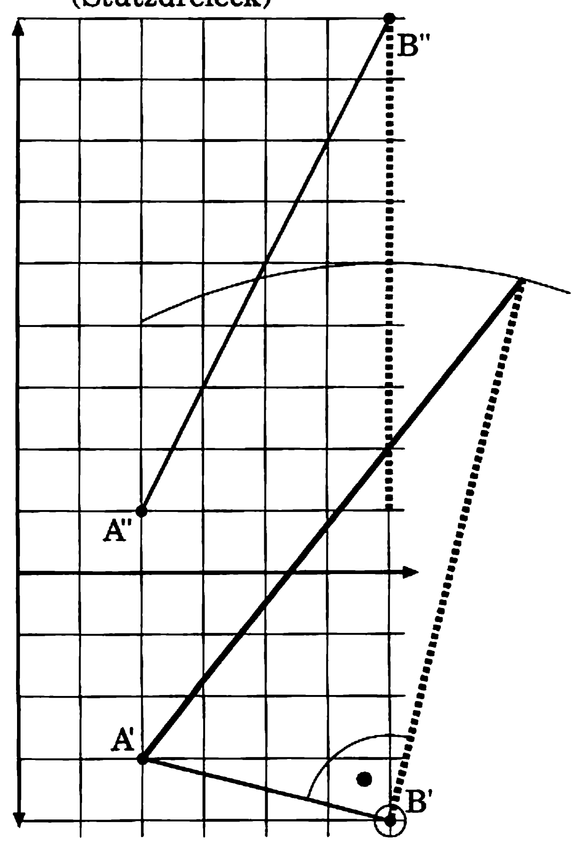
b) s = 7
φ ≈ 59°
(Monge)



c) s = 7, φ ≈ 17° (Monge)

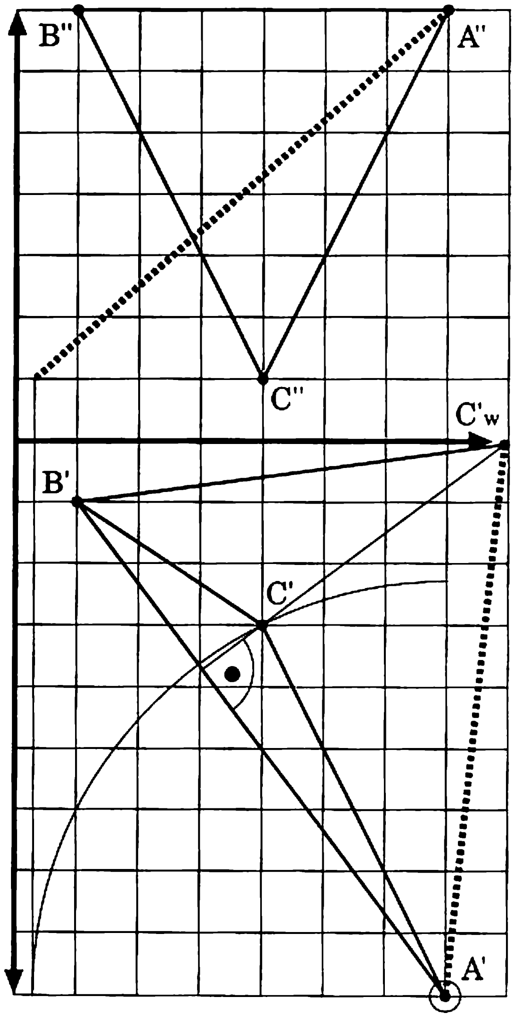


d) s = 9
φ ≈ 63°
(Stützdreieck)

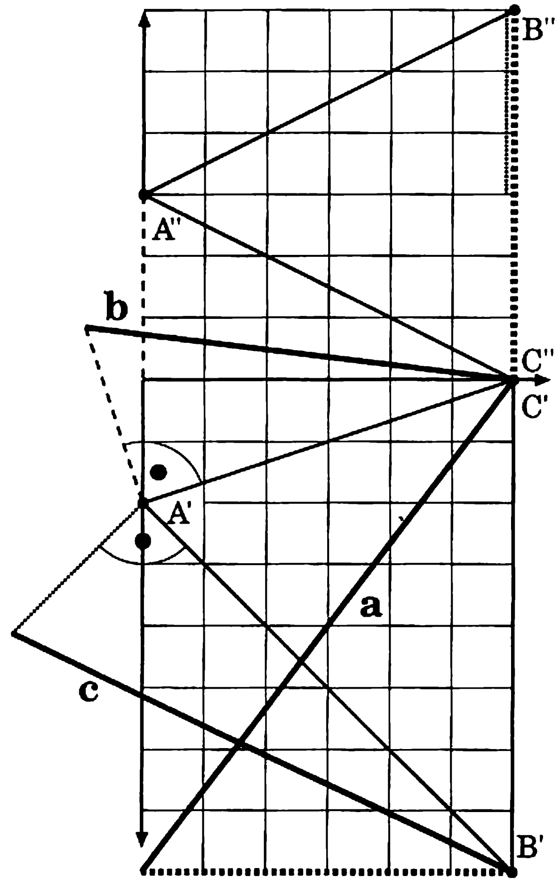


46/2.

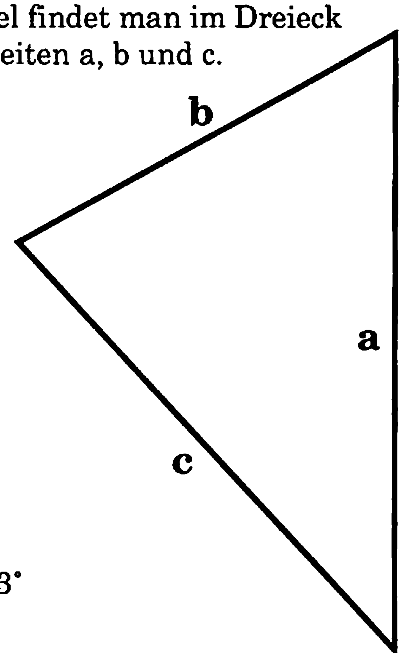
a) $a = 7,\ b = 9,\ c = 10,$
$\alpha \approx 43^\circ, \beta \approx 61^\circ, \gamma \approx 76^\circ$

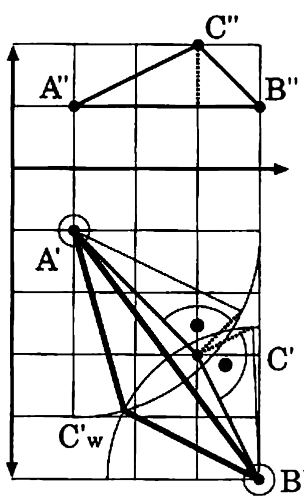


b) $a = 10, b = 7, c = 9$
$\alpha \approx 76^\circ, \beta \approx 43^\circ, \gamma \approx 61^\circ$



Die Seitenlängen a, b und c sind mit Stützdreiecken konstruiert. Die Winkel findet man im Dreieck mit den Seiten a, b und c.

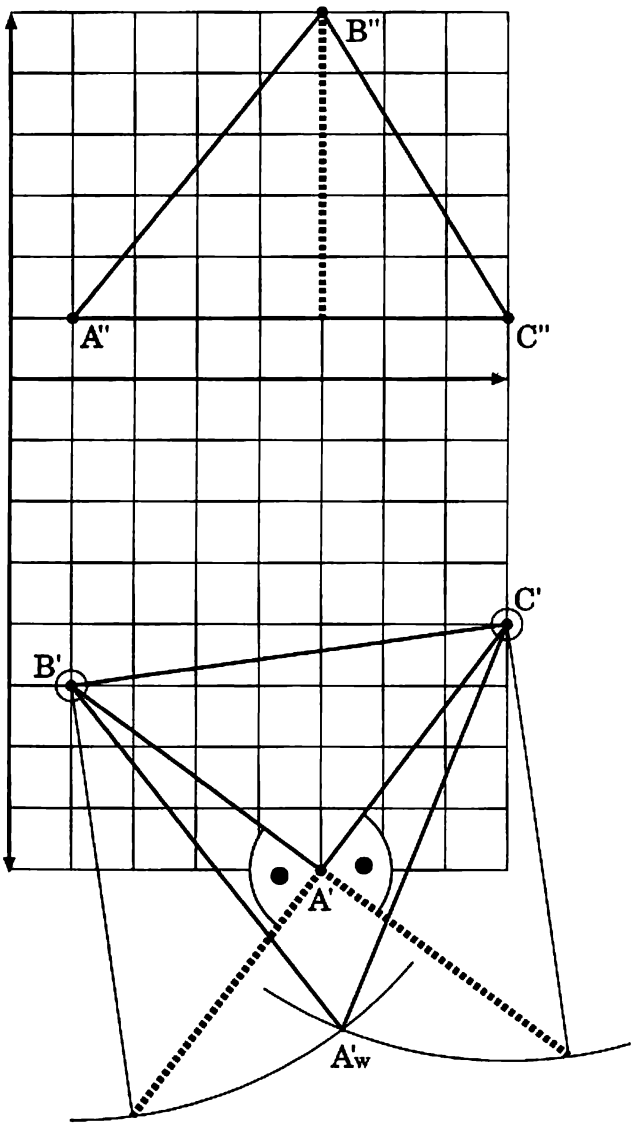




c) $a = \sqrt{6} \approx 2{,}45$, $b = 3,$
$c = 5, \alpha \approx 21^\circ, \beta \approx 26^\circ, \gamma \approx 133^\circ$

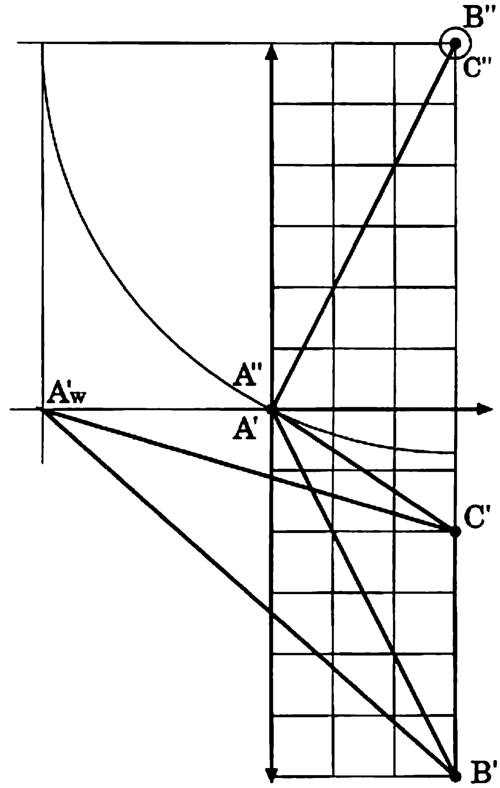
46/2.

d) $a = b = c = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$
$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$



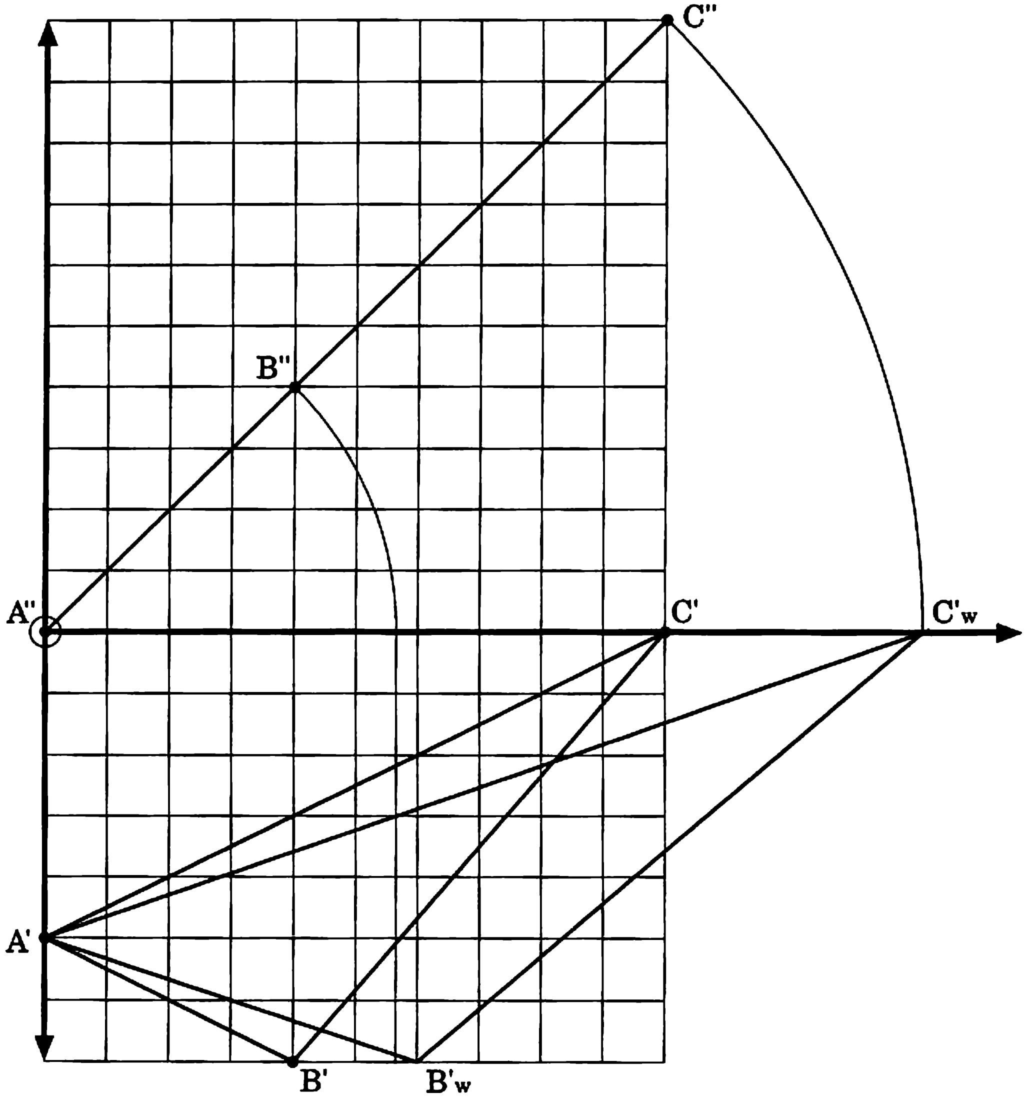
47/3.

a) $a = 4,\ b = 7,\ c = 9$
$\alpha \approx 25^\circ,\ \beta \approx 48^\circ,\ \gamma \approx 107^\circ$



47/3.

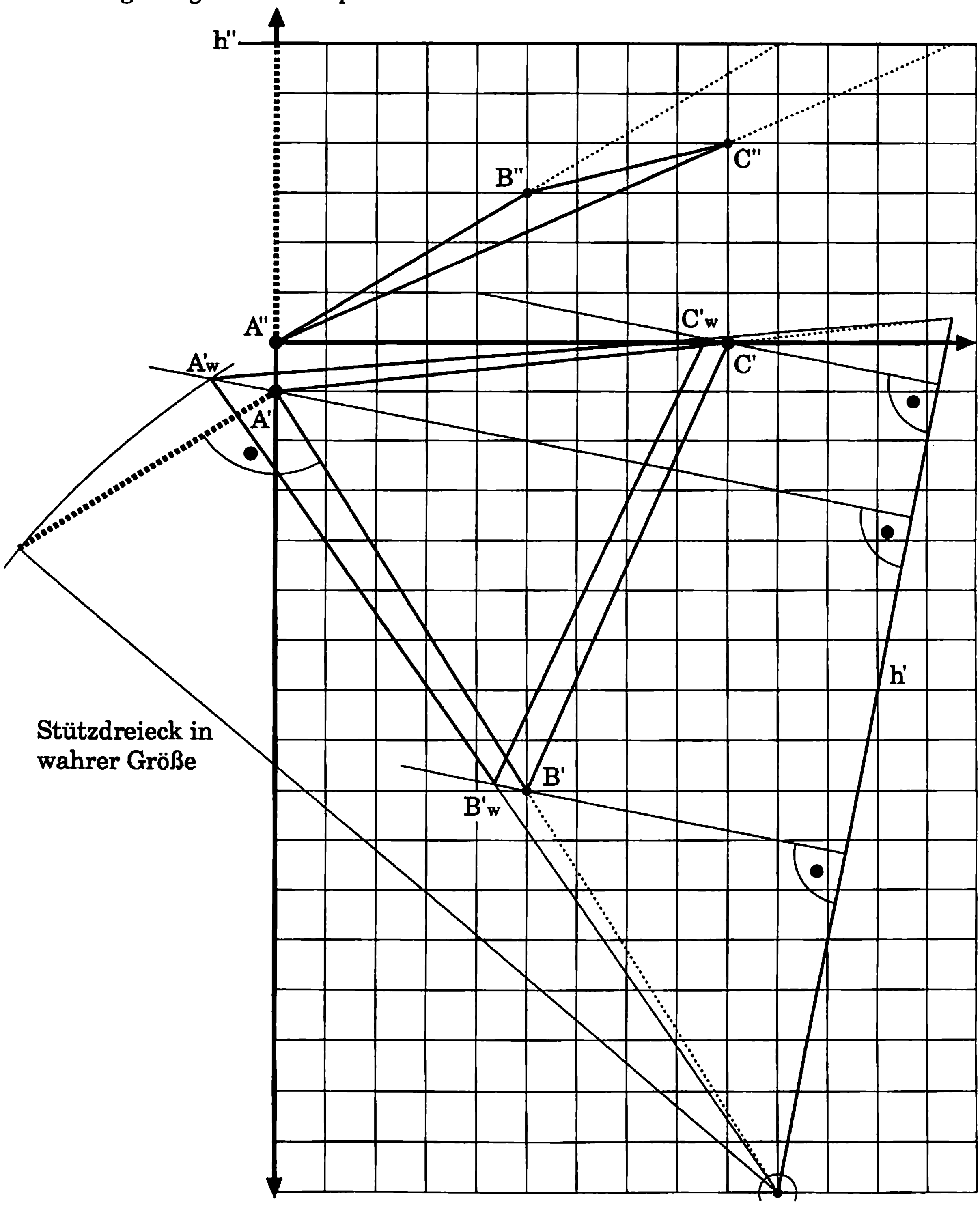
b) $a = 11$, $b = 15$, $c = 6$, $\alpha \approx 39^\circ$, $\beta \approx 121^\circ$, $\gamma \approx 20^\circ$



47/3.

c) $a = b = c = 7\sqrt{2} \approx 9{,}9$, $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

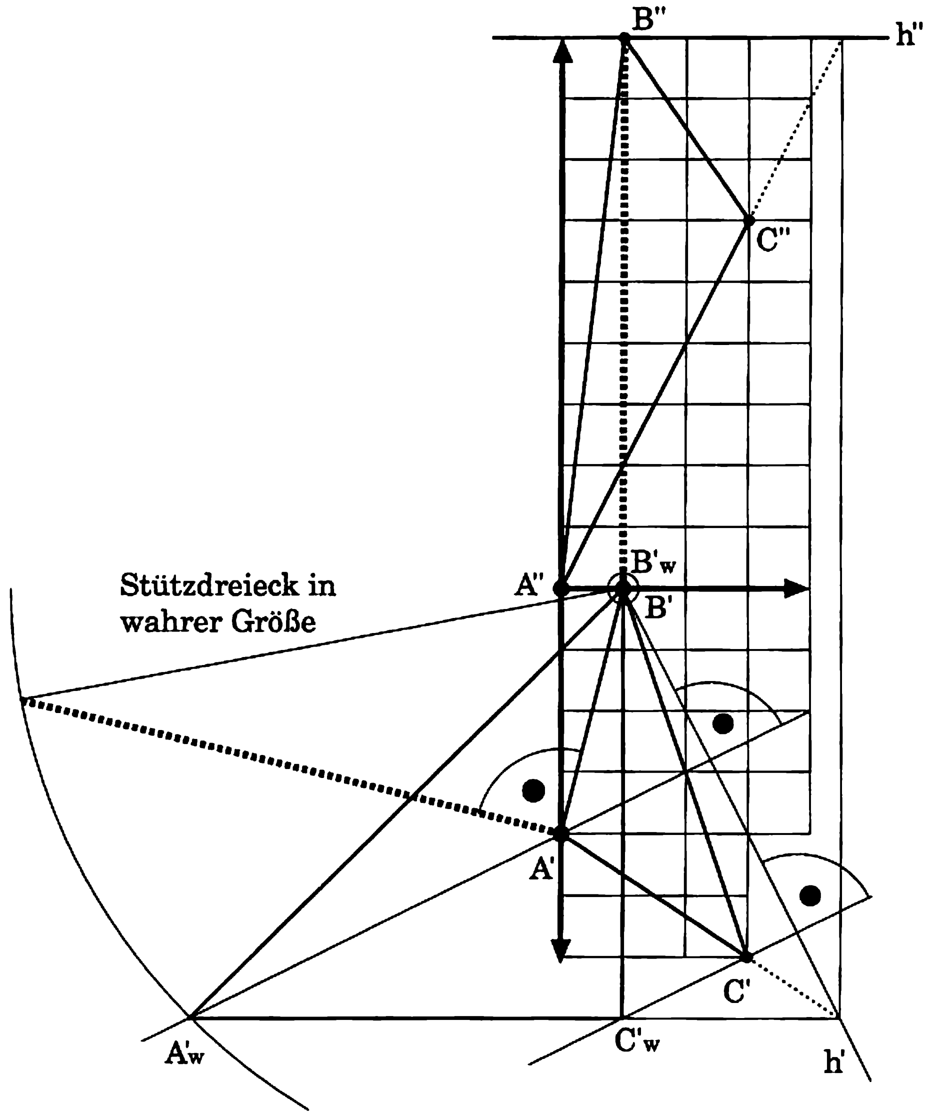
Konstruktion mit Schwenk von ABC um Höhenlinie h. Für h wählt man im Aufriss nach Möglichkeit eine Waagrechte, die Dreieckseiten oder deren Verlängerungen in Gitterpunkten schneidet.



47/3.

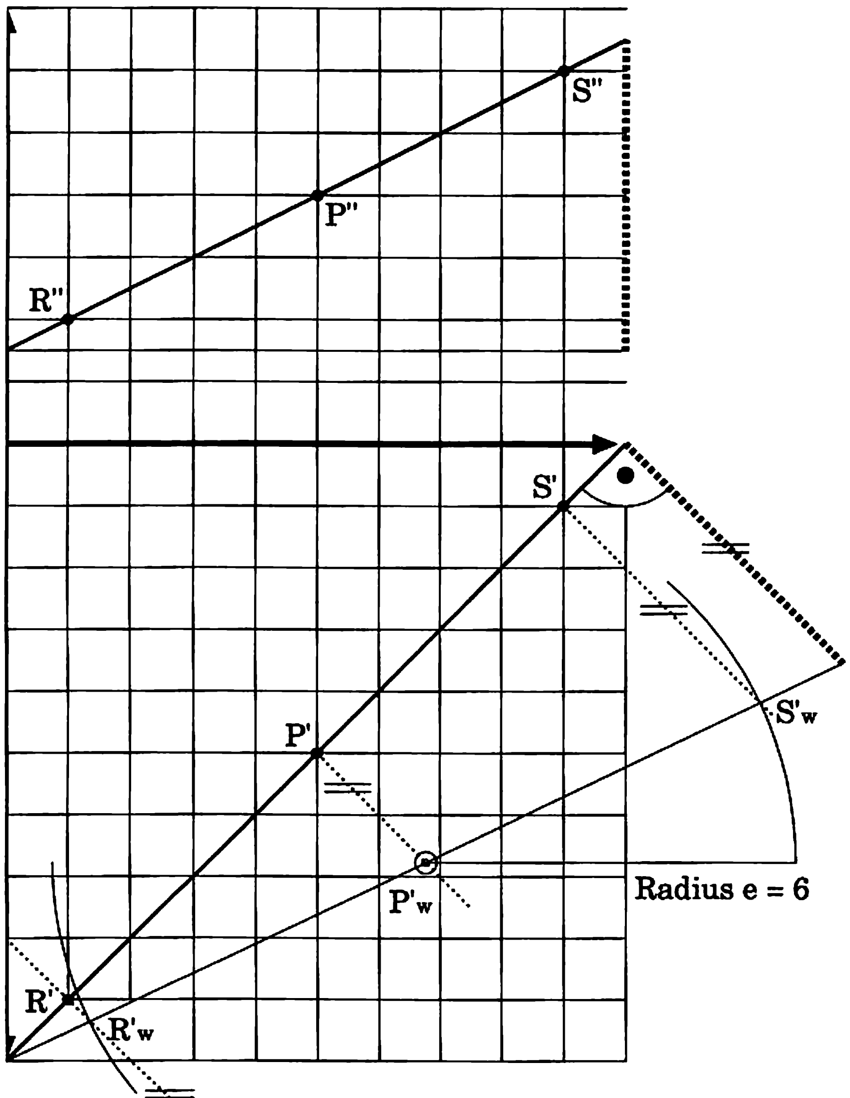
d) $a = b = 7,\ c = 7\sqrt{2} \approx 9{,}9\ ,\ \ \alpha = \beta = 45^\circ,\ \gamma\ = 90^\circ$

Konstruktion mit Schwenk von ABC um Höhenlinie h. Für h wählt man im Aufriss nach Möglichkeit eine Waagrechte, die Dreieckseiten oder deren Verlängerungen in Gitterpunkten schneidet.

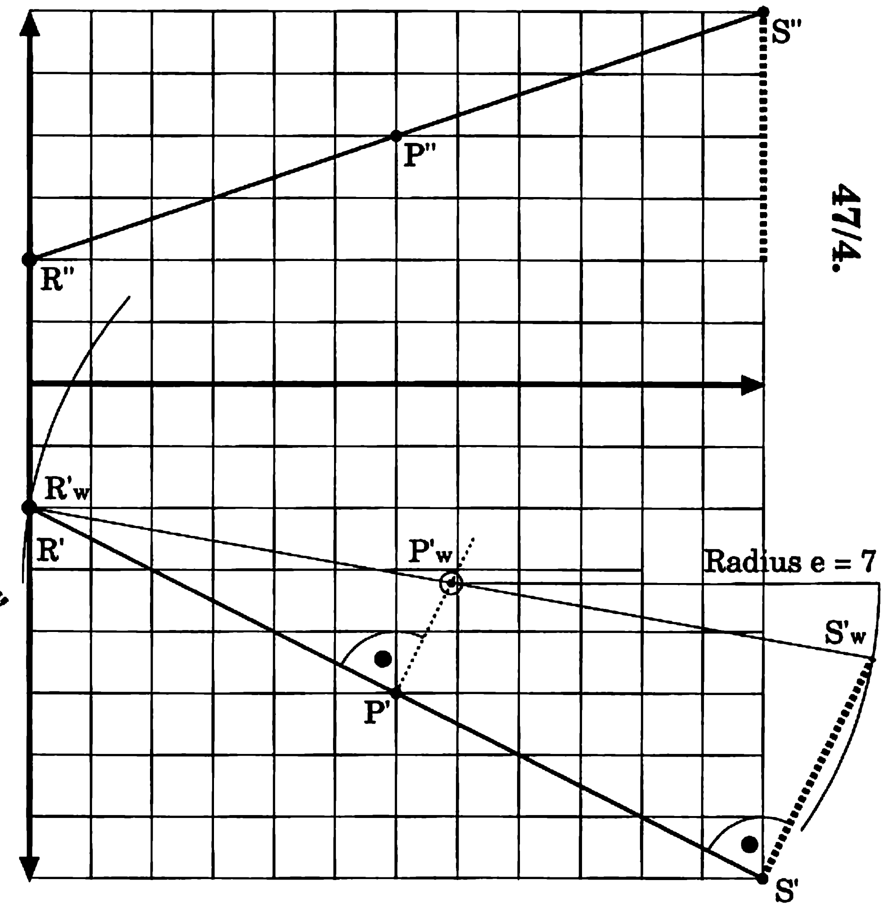


47/4.

a) R(9|1|2), S(1|9|6)

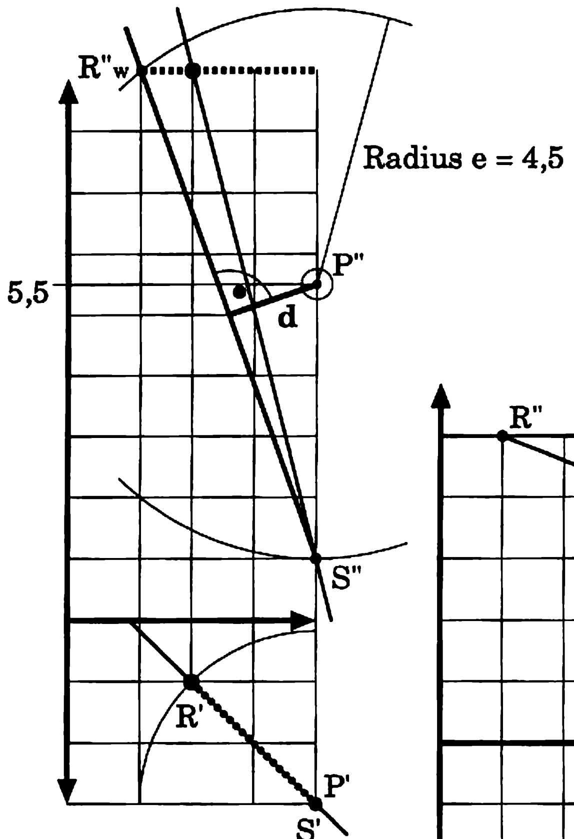


b) R(2|0|2), S(8|12|6)

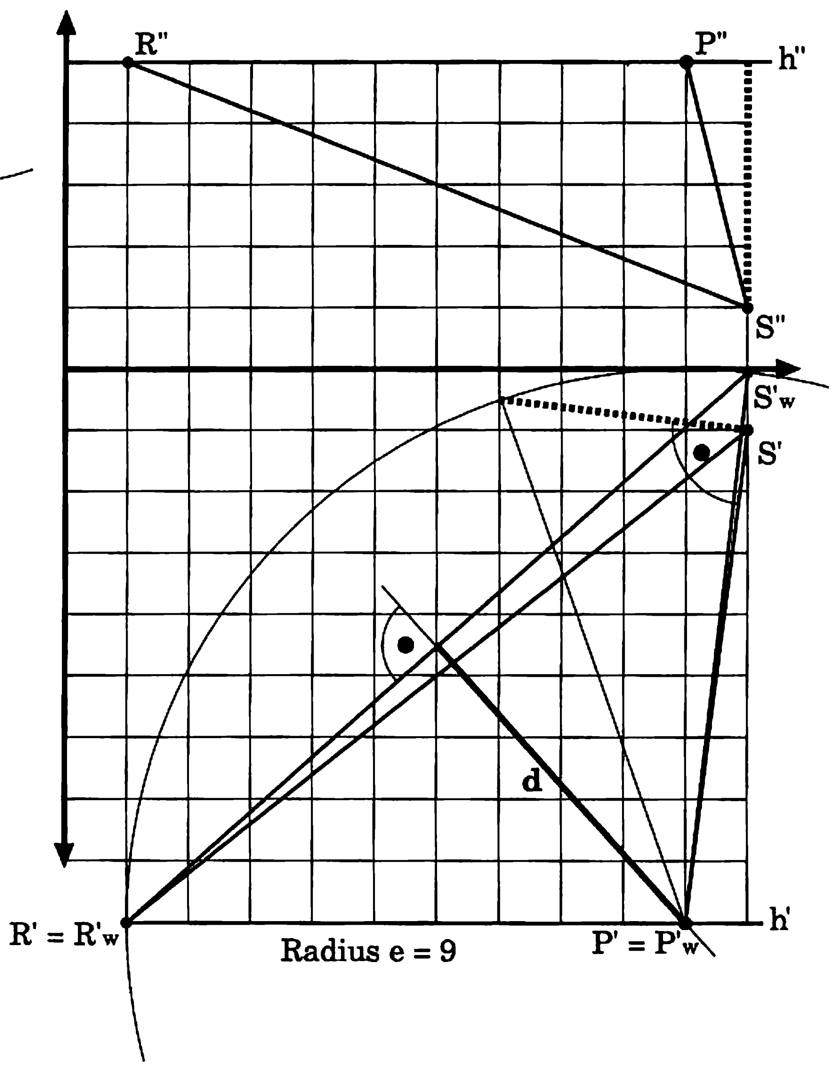


47/5.

a) R(1 | 2 | 9), S(3 | 4 | 1), d = 1,5

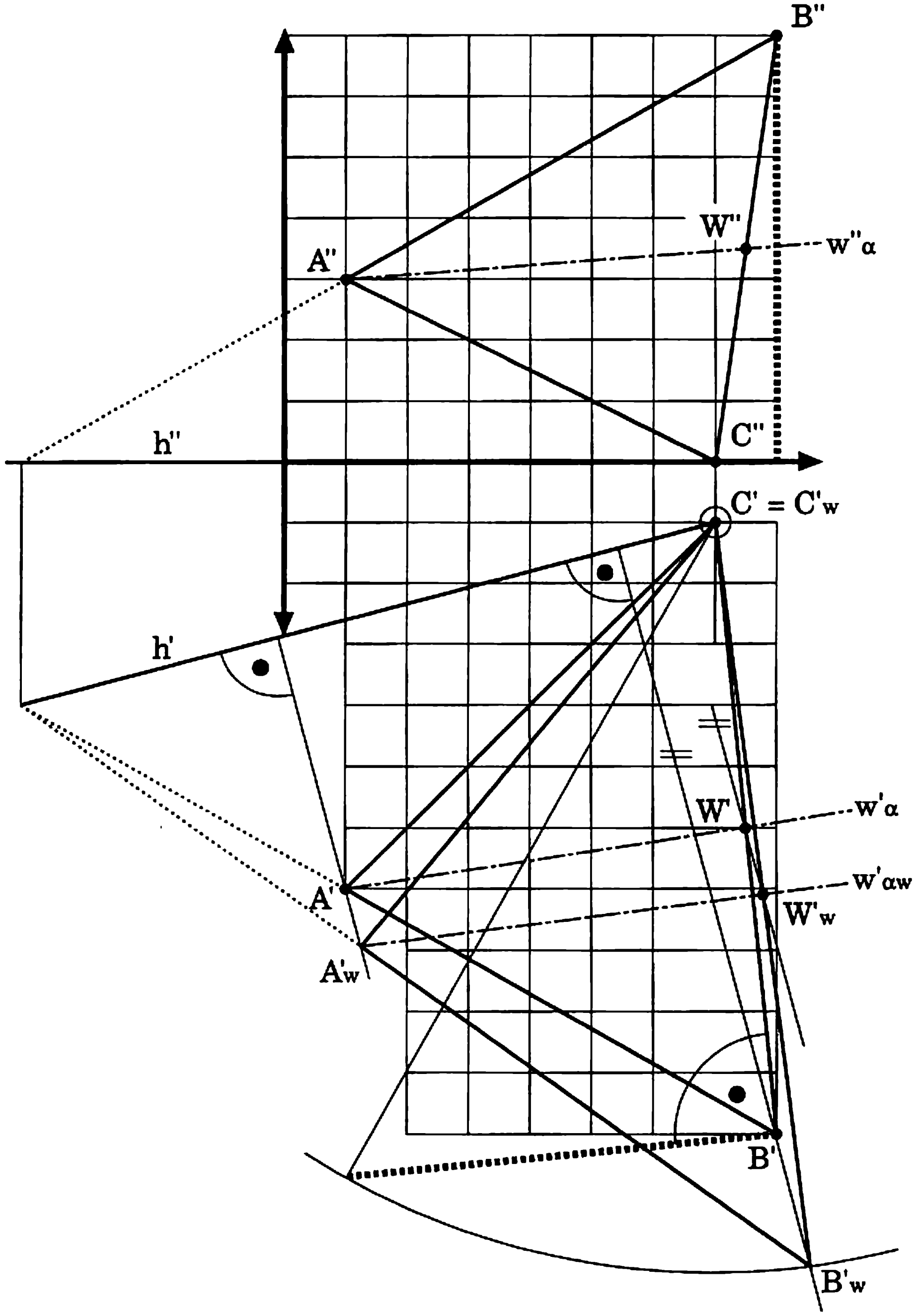


b) R(9 | 1 | 5), S(1 | 11 | 1), d = 6



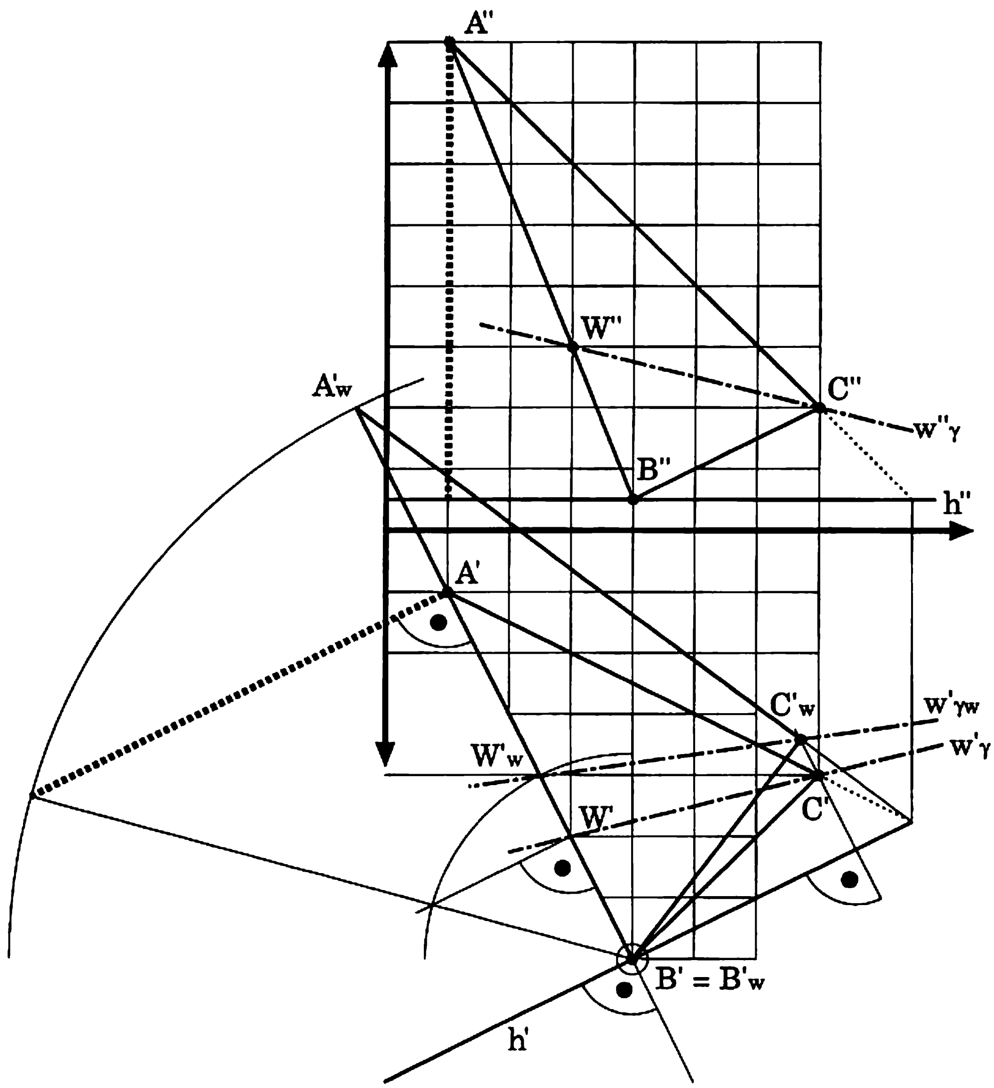
47/6.

a) Die Winkelhalbierende geht durch A und W(6 | 7,5 | 3,5),
ABC ist rechtwinklig gleichschenklig: b = c = 9

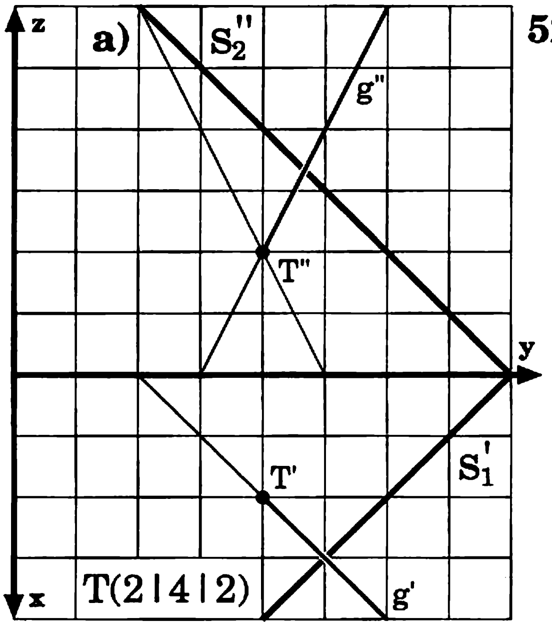


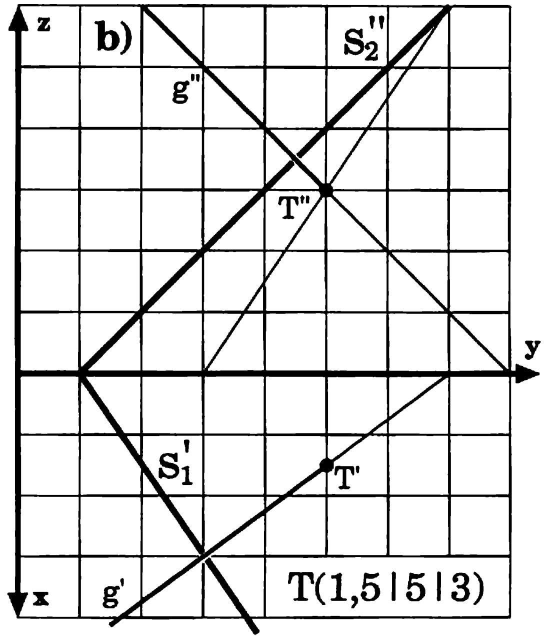
47/6.

b) w_γ halbiert $\gamma = 90°$, geht durch C und W(5|3|3)

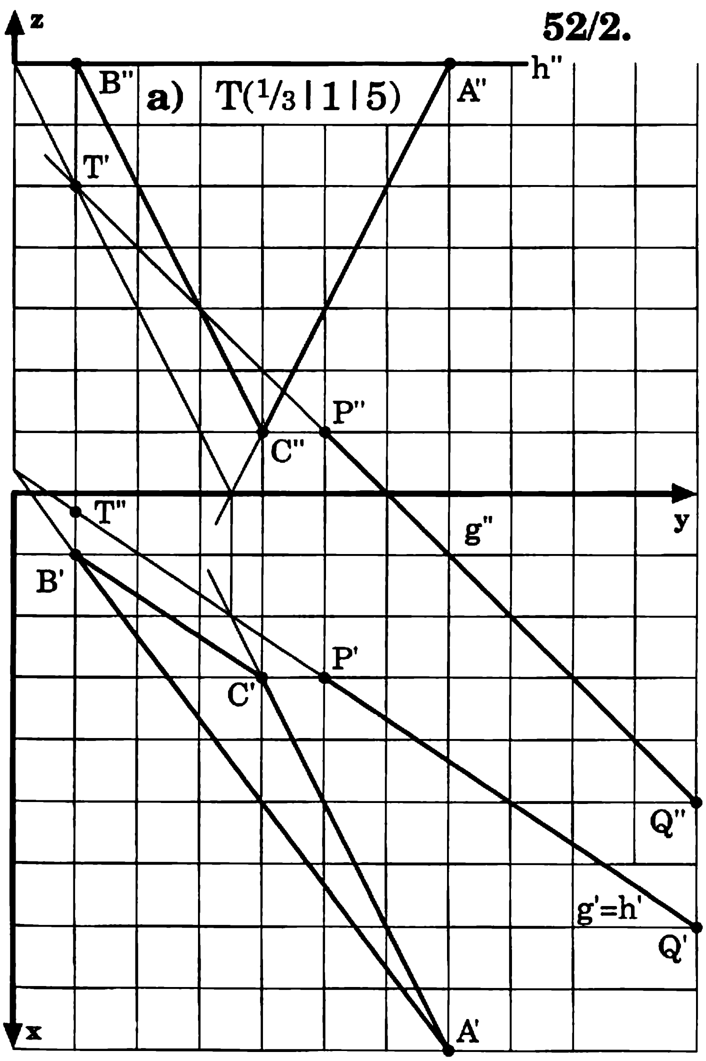


52/1.

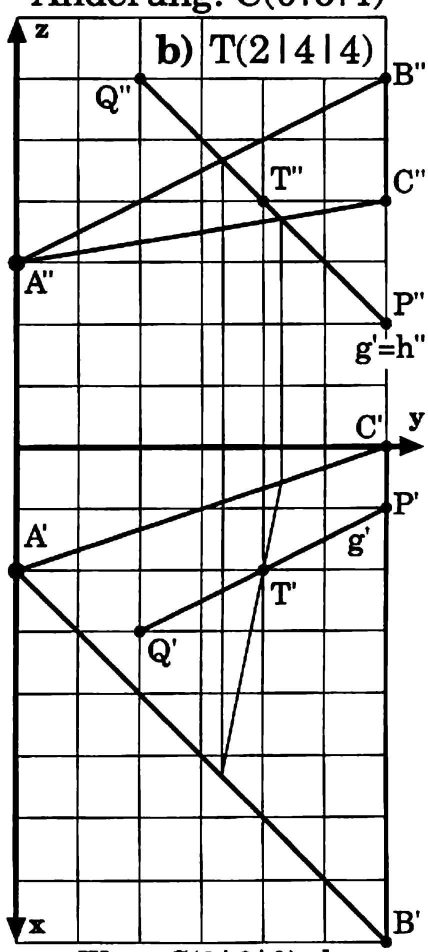




52/2.



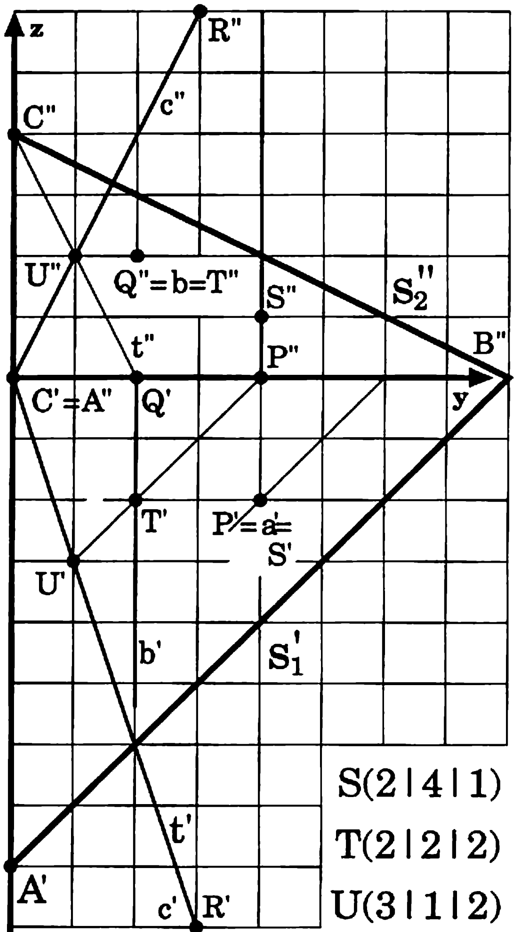
Änderung: C(0|6|4)



Wenn C(0 | 6 | 0), dann

$T(-2/3 \mid 28/3 \mid -4/3)$

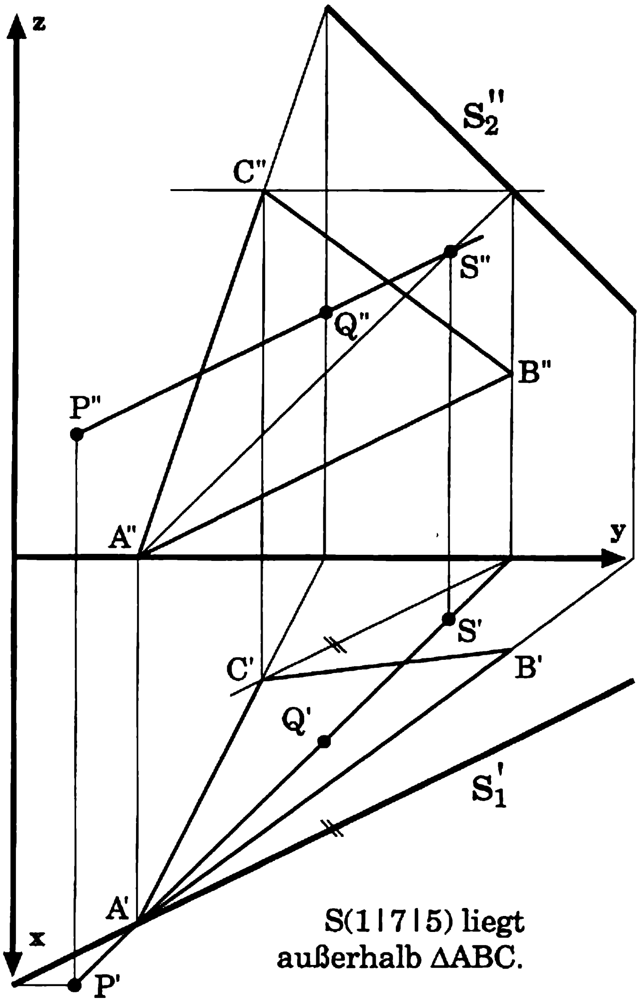
52/3.



S(2 | 4 | 1)
T(2 | 2 | 2)
U(3 | 1 | 2)

(6 | 2 | 0) und (0 | 0 | 4) sind Spurpunkte von t.

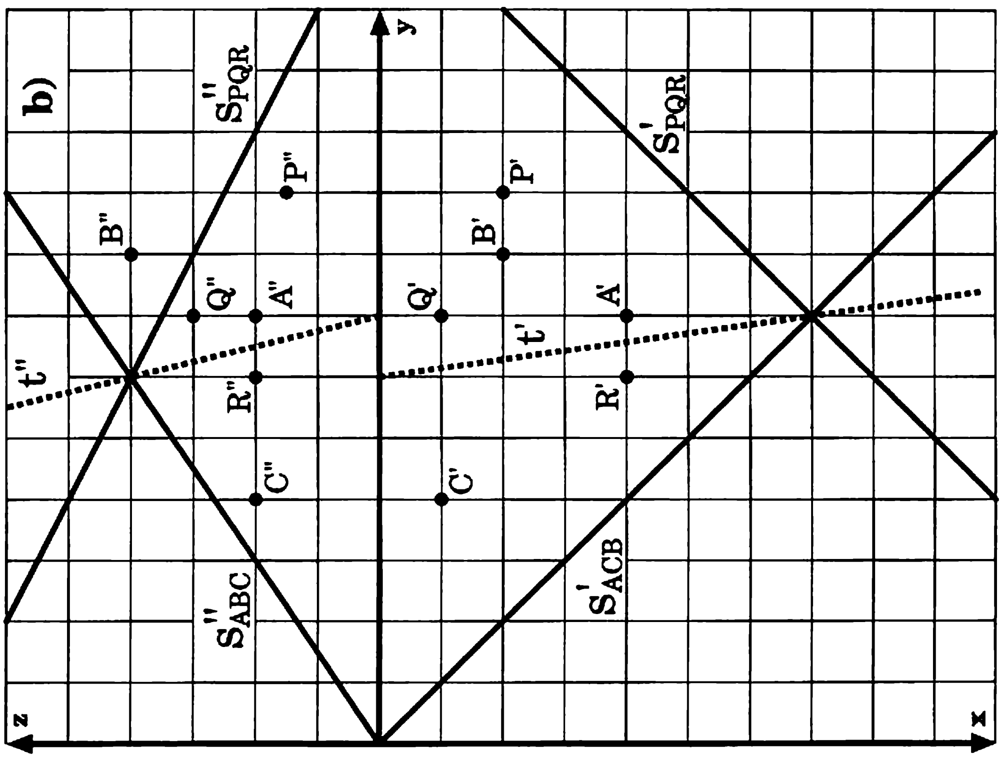
52/4.



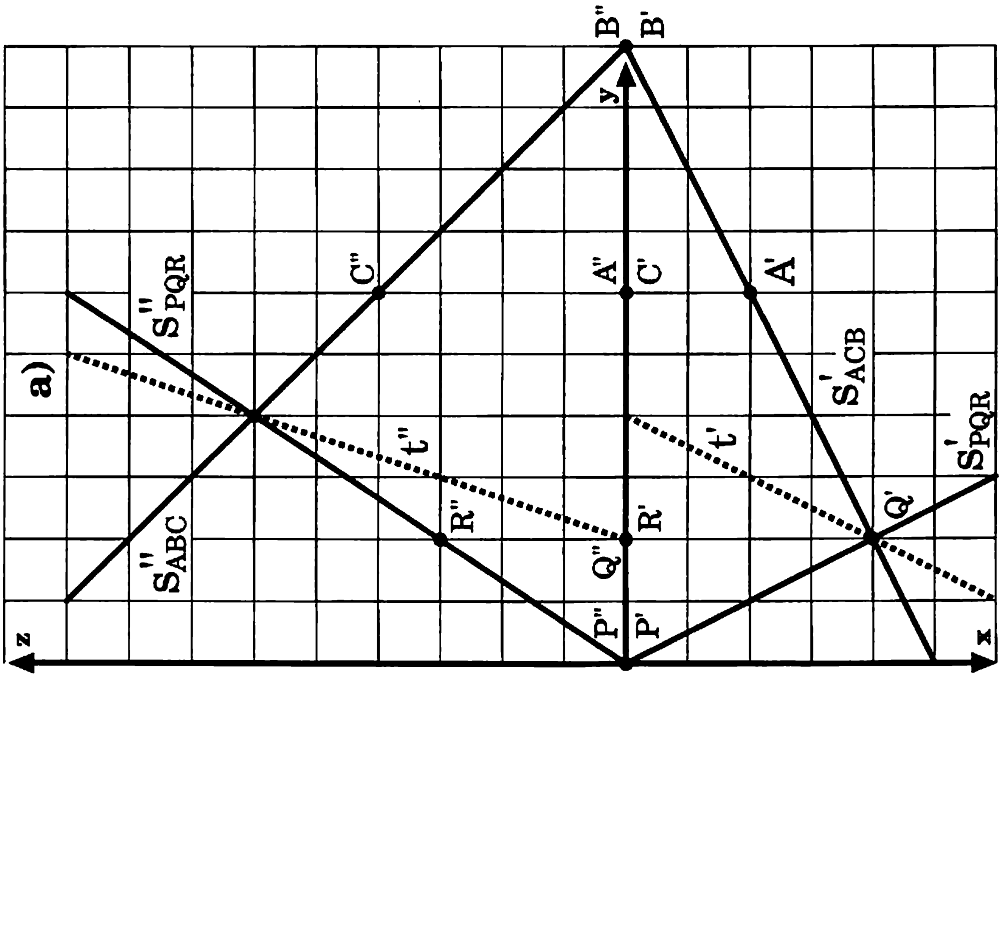
S(1 | 7 | 5) liegt außerhalb ΔABC.

52/5.

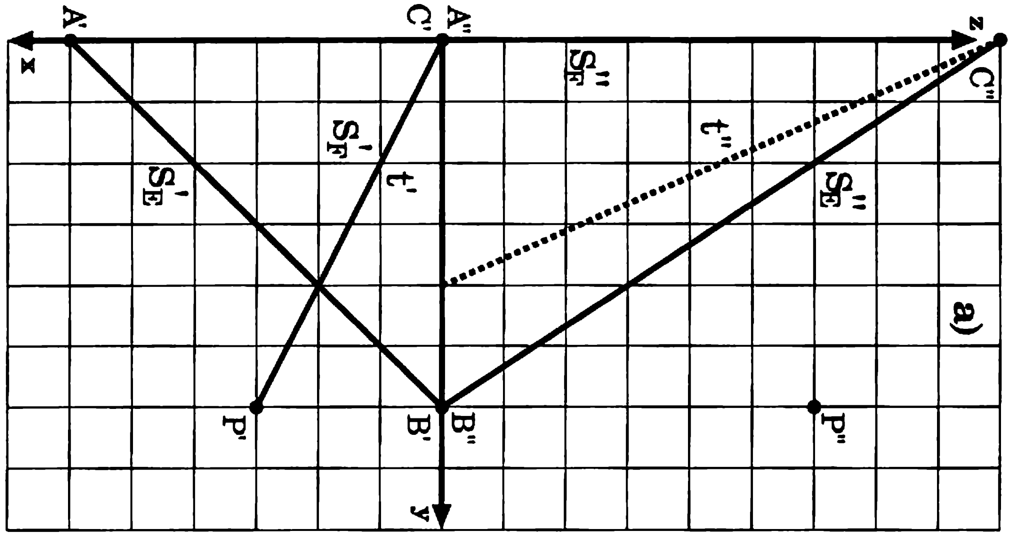
b)


b)
y
z
x
S"PQR
S'PQR
P"
P'
B"
B'
Q"
A"
Q'
A'
t"
t'
R"
R'
C"
C'
S"ABC
S'ACB

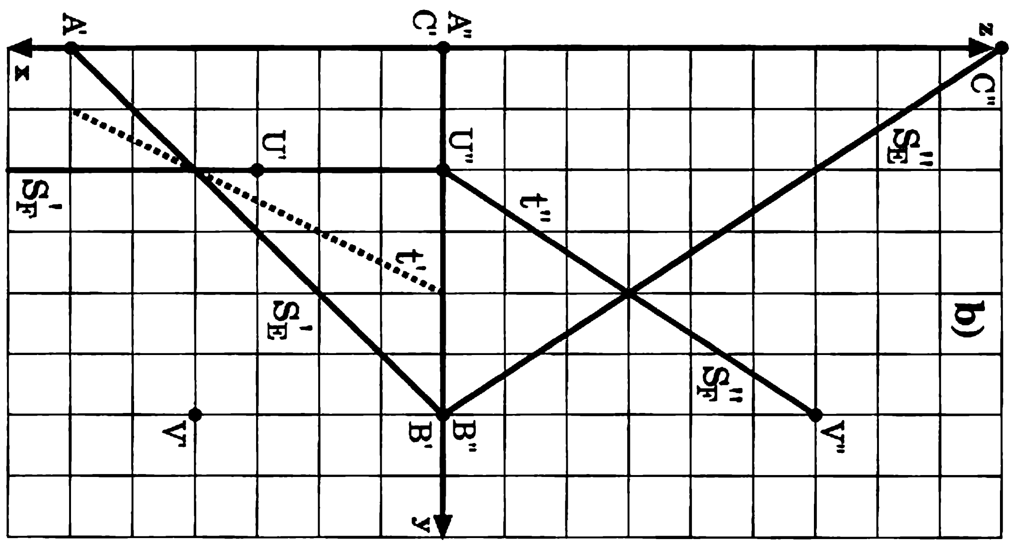
a)


B"
B'
y
a)
S"PQR
C"
A"
C'
A'
S'ACB
t"
t'
S'PQR
R"
R'
Q'
S"ABC
Q"
P"
P'
z
x

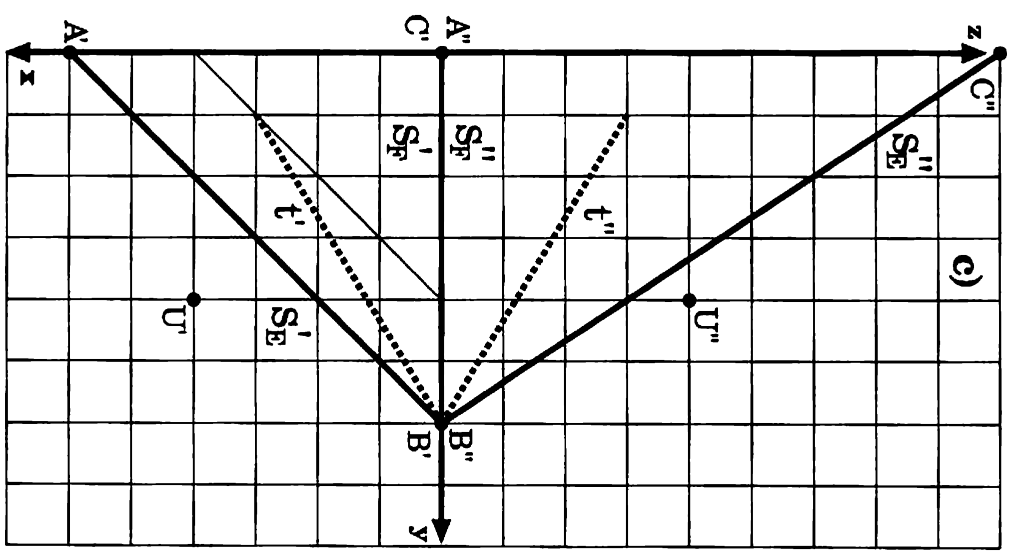
a)



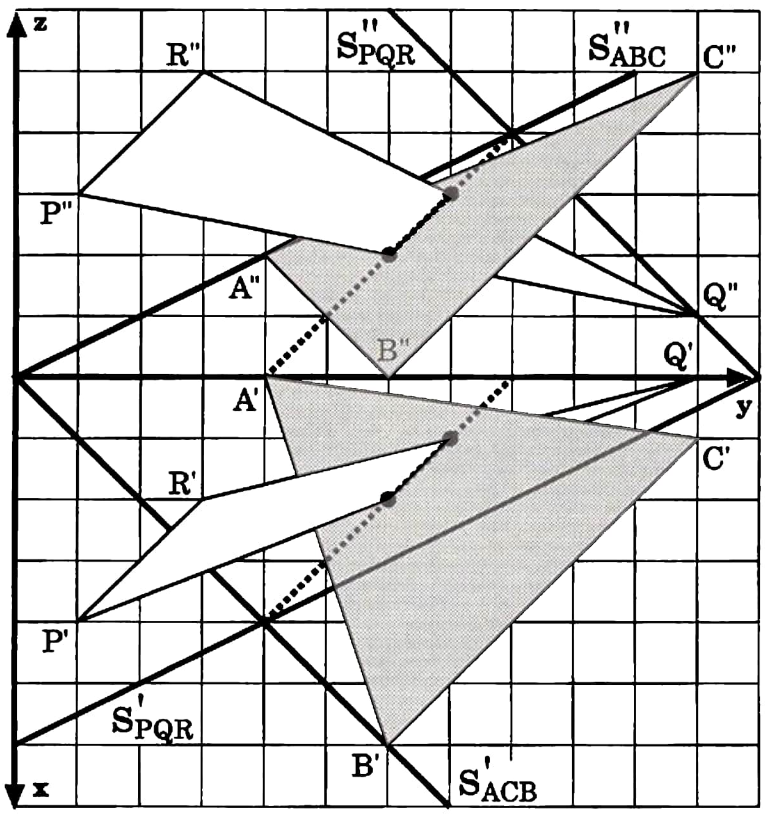
b)



c)



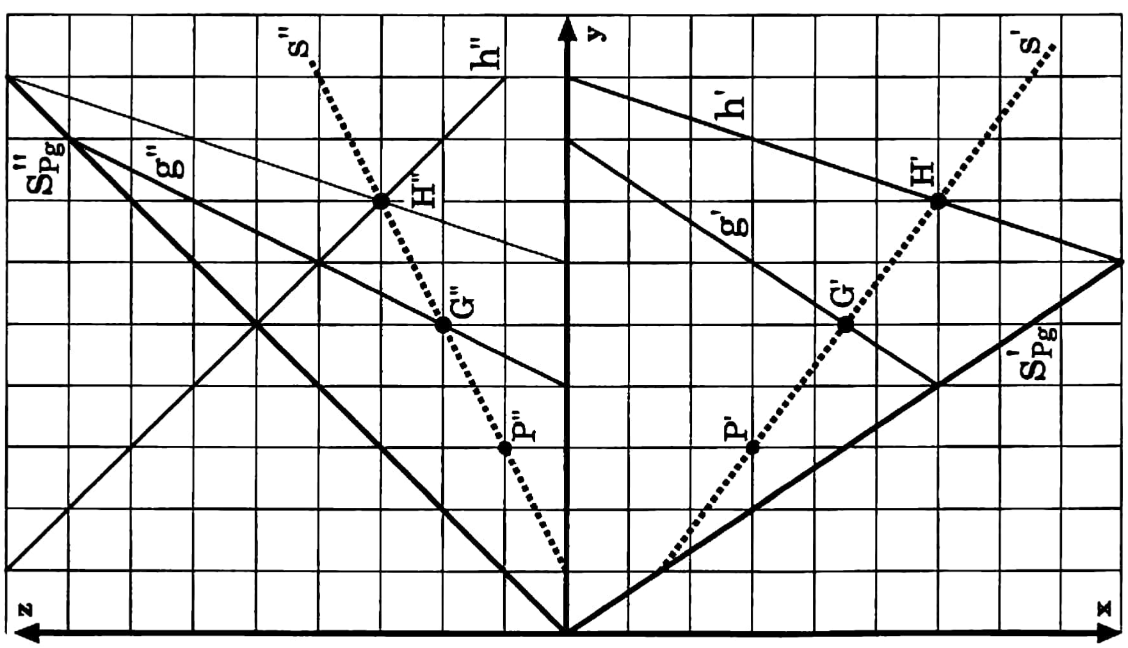
52/7.



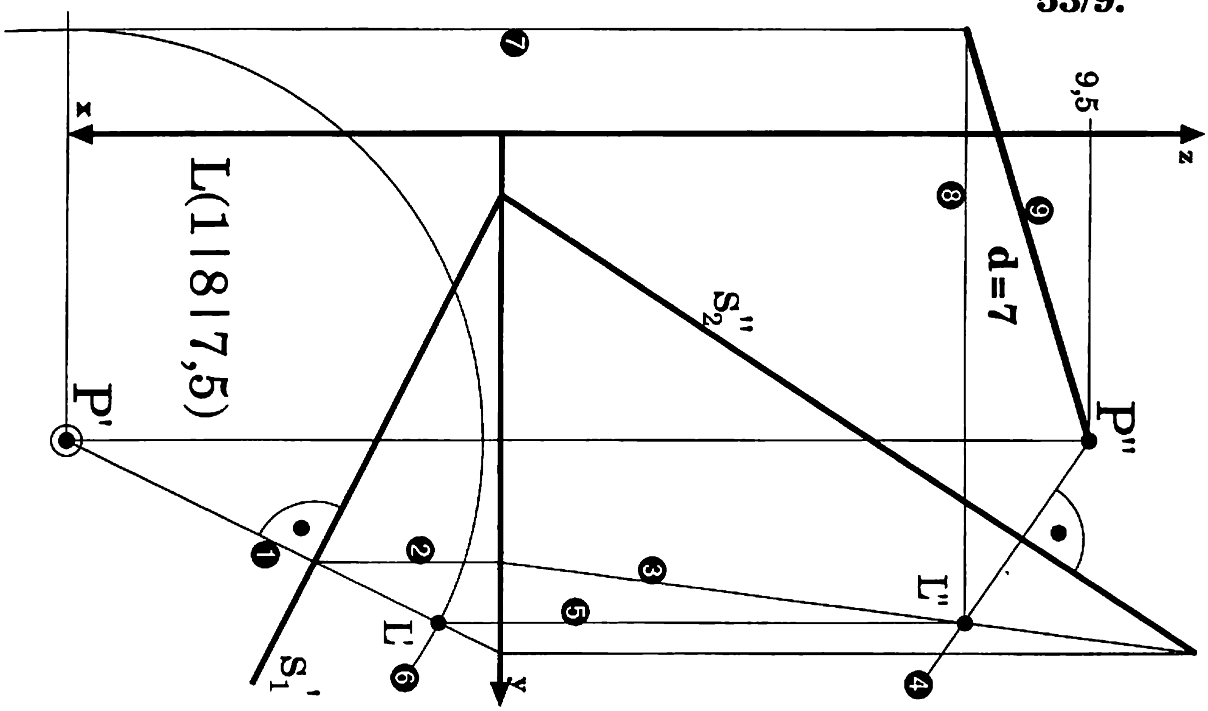
Schnittstrecke [(2|6|2) (1|7|3)]

52/8.

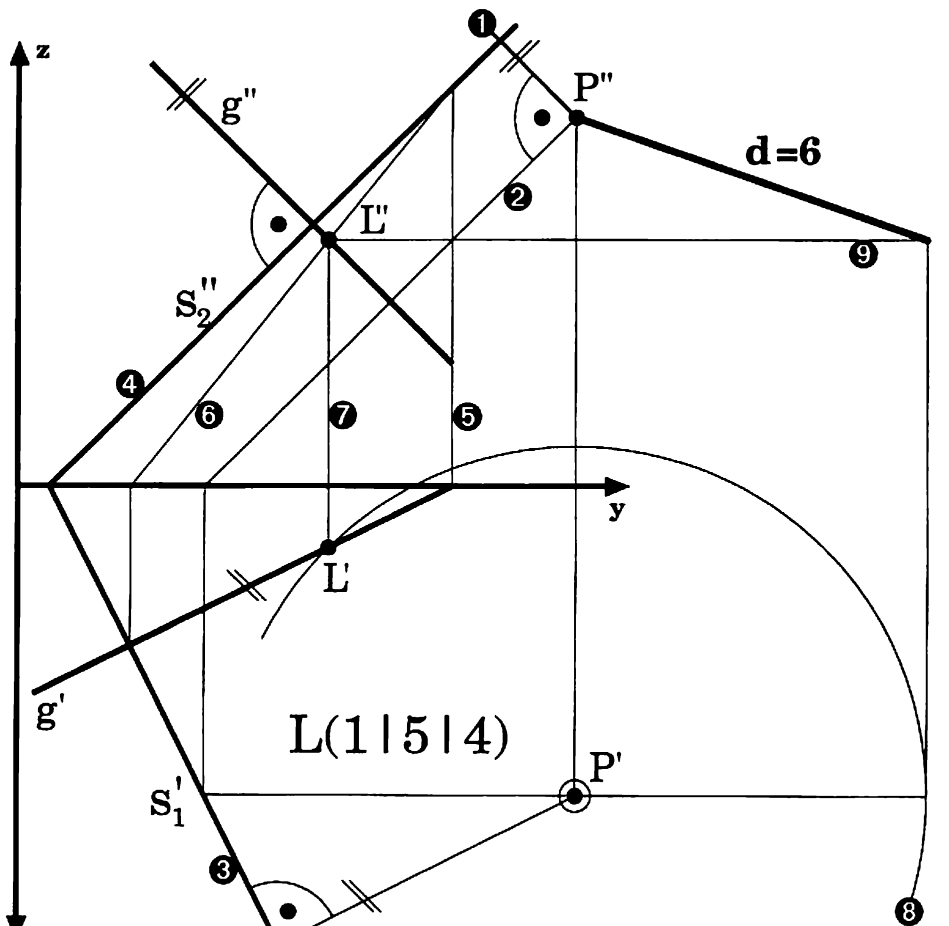
Schneide h mit der Ebene, die P und g enthält: H(6|7|3). PH=s schneidet g in G(4,5|5|2).



53/9.

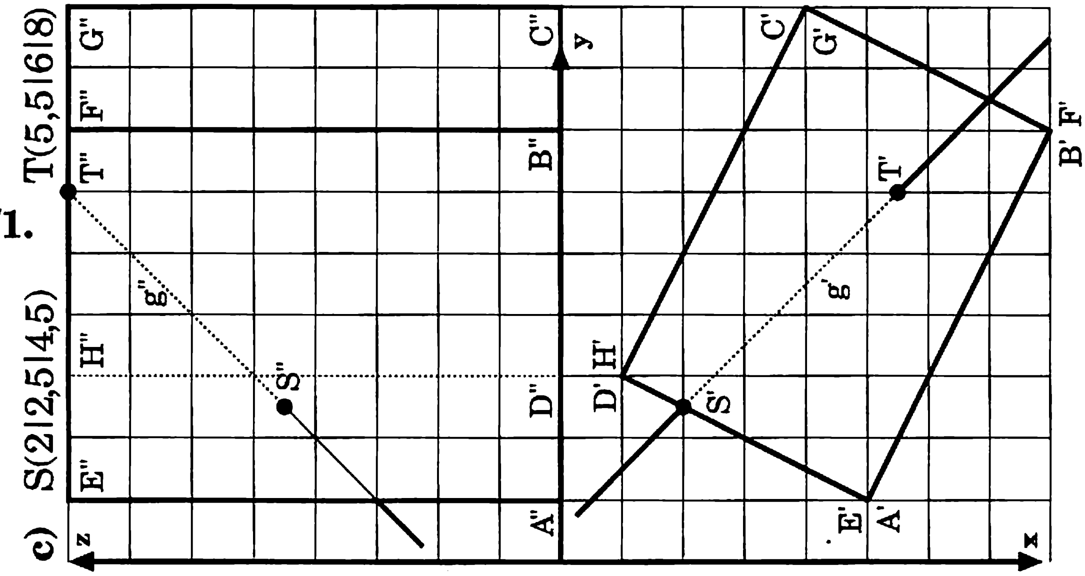


53/10.

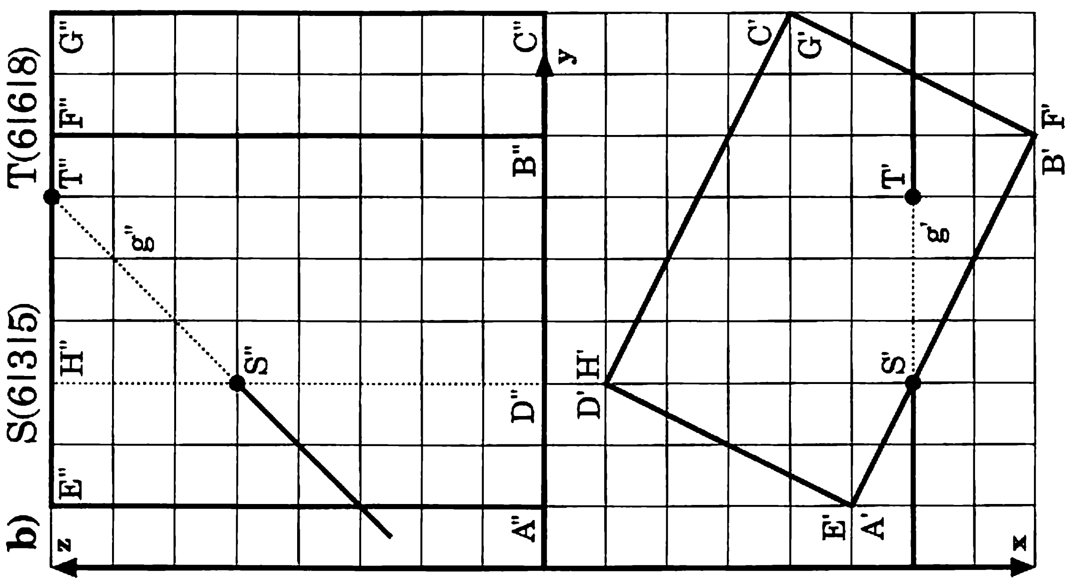


55/1.

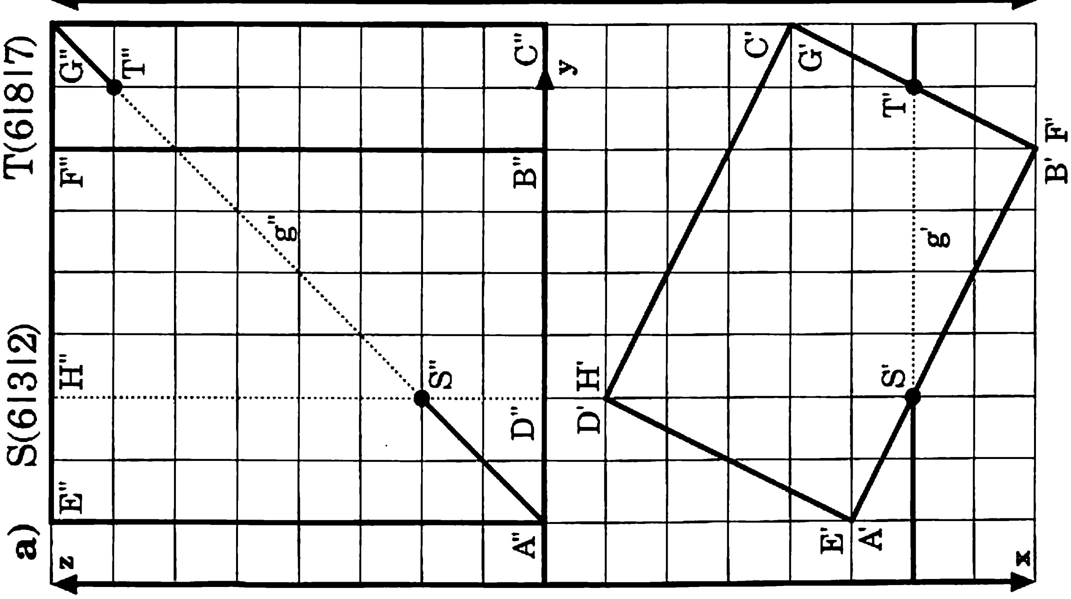
c)


c)
S(2|2,5|4,5)
T(5,5|6|8)
g''
g'
S''
S'
T''
T'
z
y
x

b)

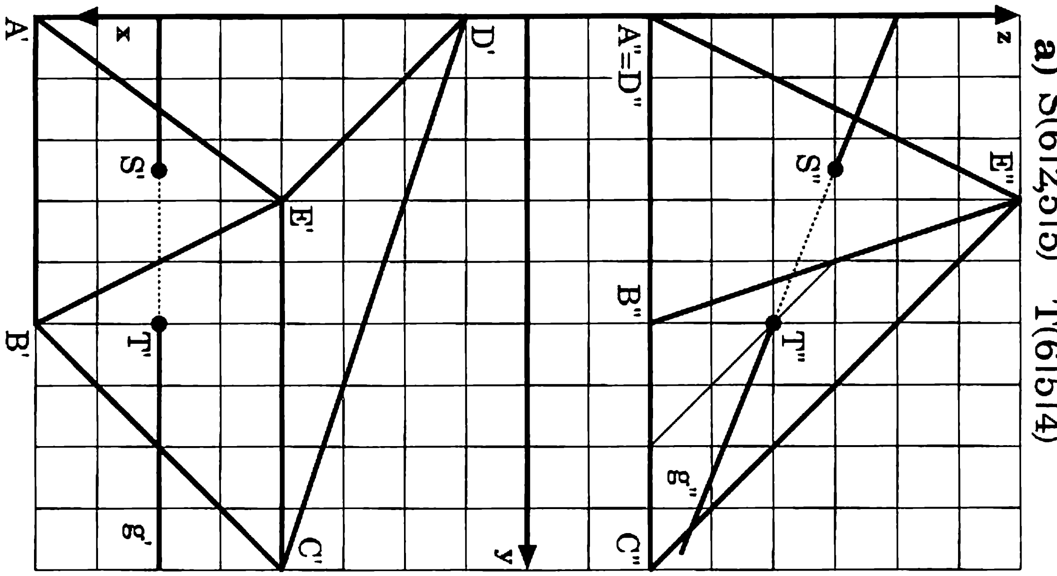

b)
S(6|3|5)
T(6|6|8)
g''
g'
S''
S'
T''
T'
z
y
x

a)

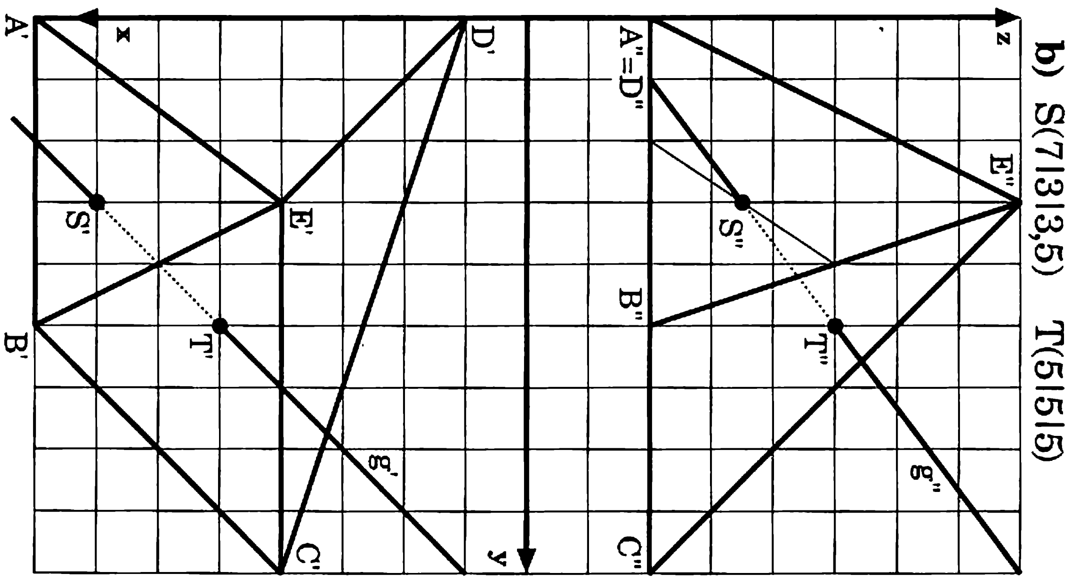

a)
S(6|3|2)
T(6|8|7)
g''
g'
S''
S'
T''
T'
z
y
x

56/2.

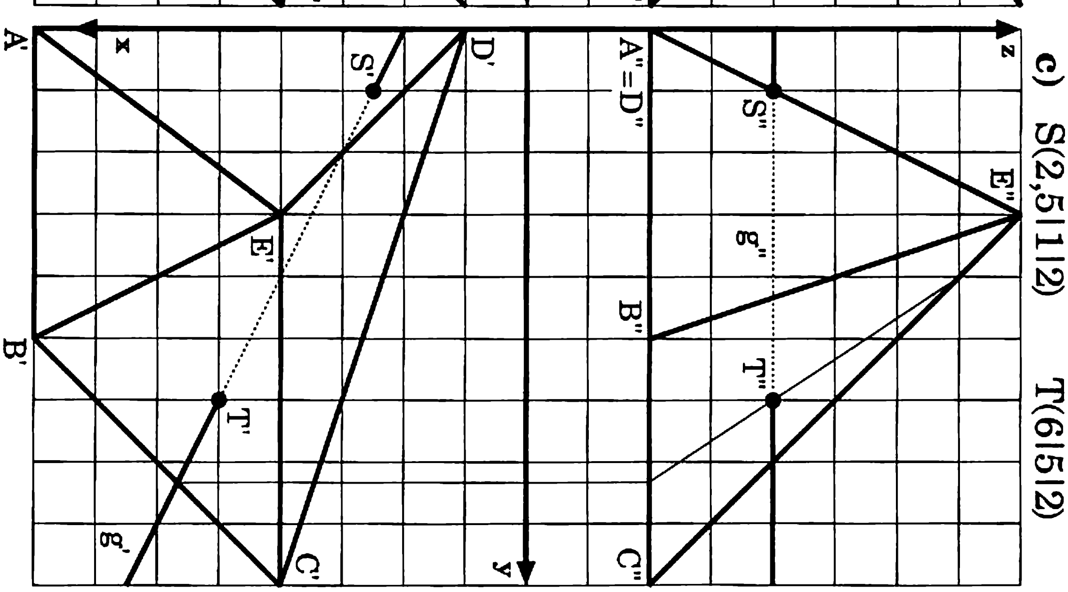
a)


a) S(6|2,5|5) T(6|5|4)
z
E''
S''
B''
T''
g''
A''=D''
C''
x
y
A'
S'
E'
B'
T'
g'
D'
C'

b)

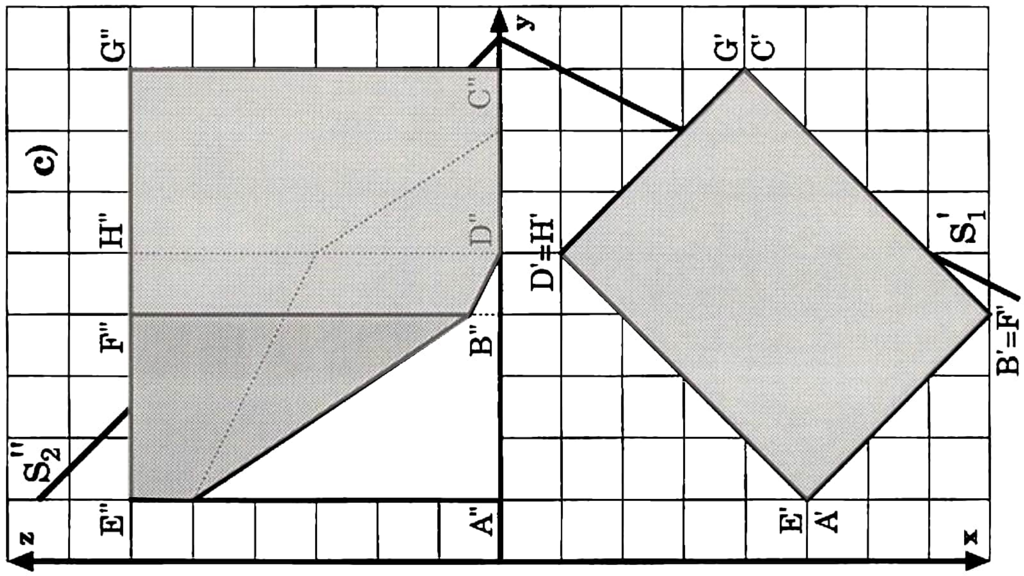

b) S(7|3|3,5) T(5|5|5)
z
E''
S''
B''
T''
g''
A''=D''
C''
x
y
A'
S'
E'
B'
T'
g'
D'
C'

c)


c) S(2,5|1|2) T(6|5|2)
z
E''
S''
g''
B''
T''
A''=D''
C''
x
y
A'
S'
E'
B'
T'
g'
D'
C'

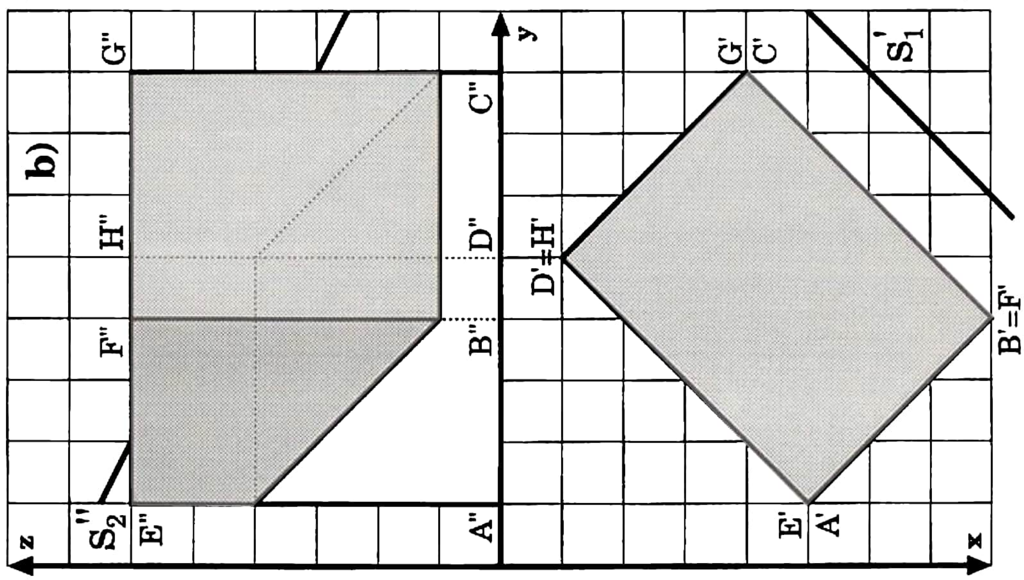
56/3.

c)



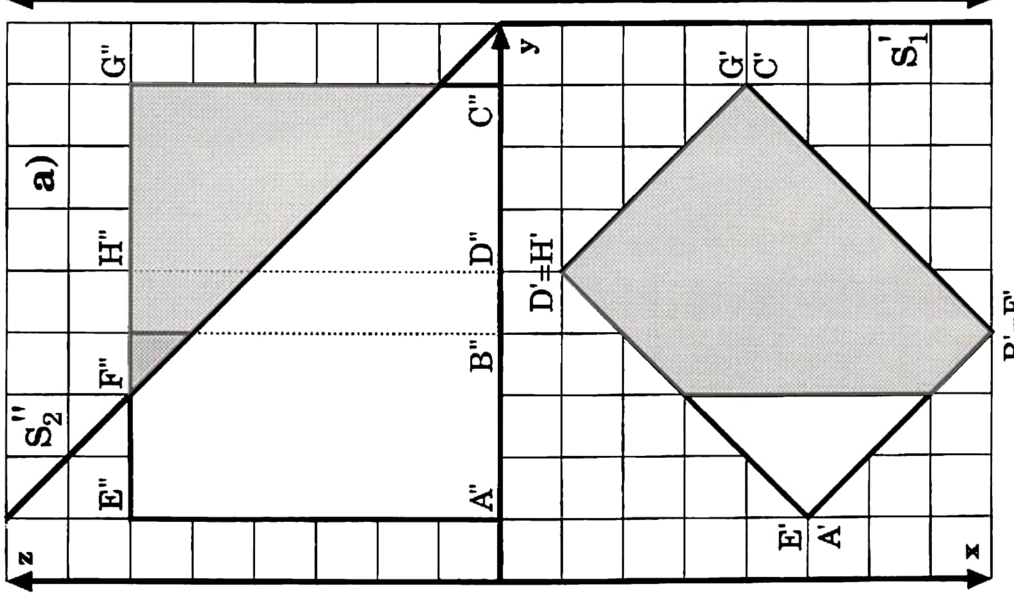
c)
z
y
x
E''
F''
H''
G''
A''
B''
D''
C''
S''₂
D'≡H'
G'
C'
E'
A'
B'=F'
S'₁

b)



b)
z
y
x
E''
F''
H''
G''
A''
B''
D''
C''
S''₂
D'≡H'
G'
C'
E'
A'
B'=F'
S'₁

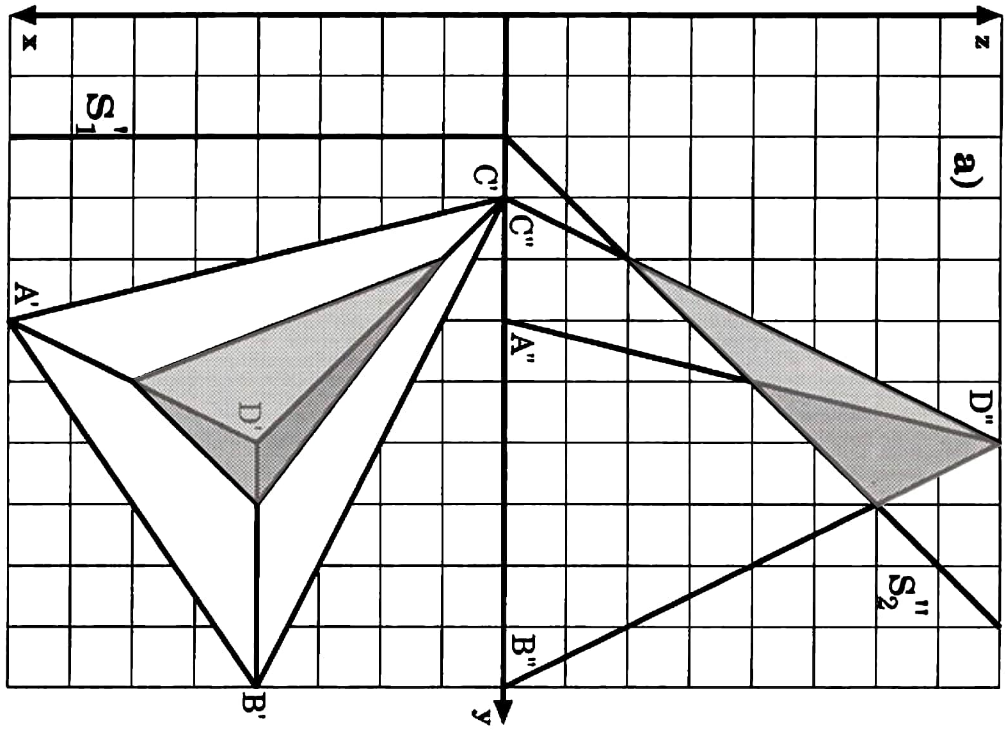
a)



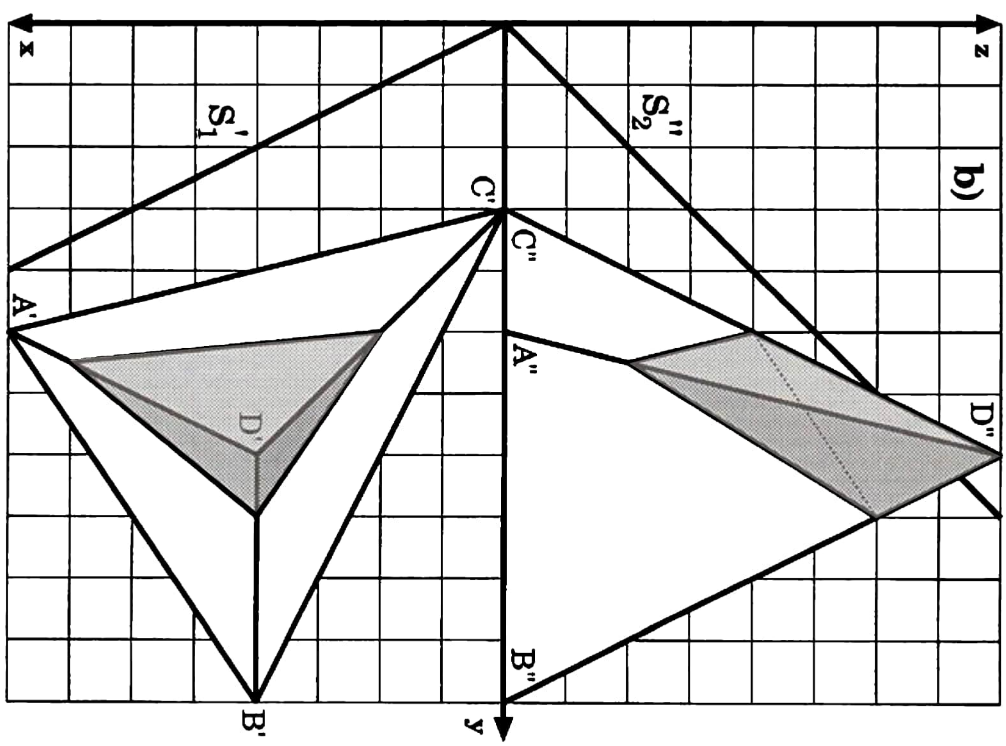
a)
z
y
x
E''
F''
H''
G''
A''
B''
D''
C''
S''₂
D'≡H'
G'
C'
E'
A'
B'=F'
S'₁

56/4.

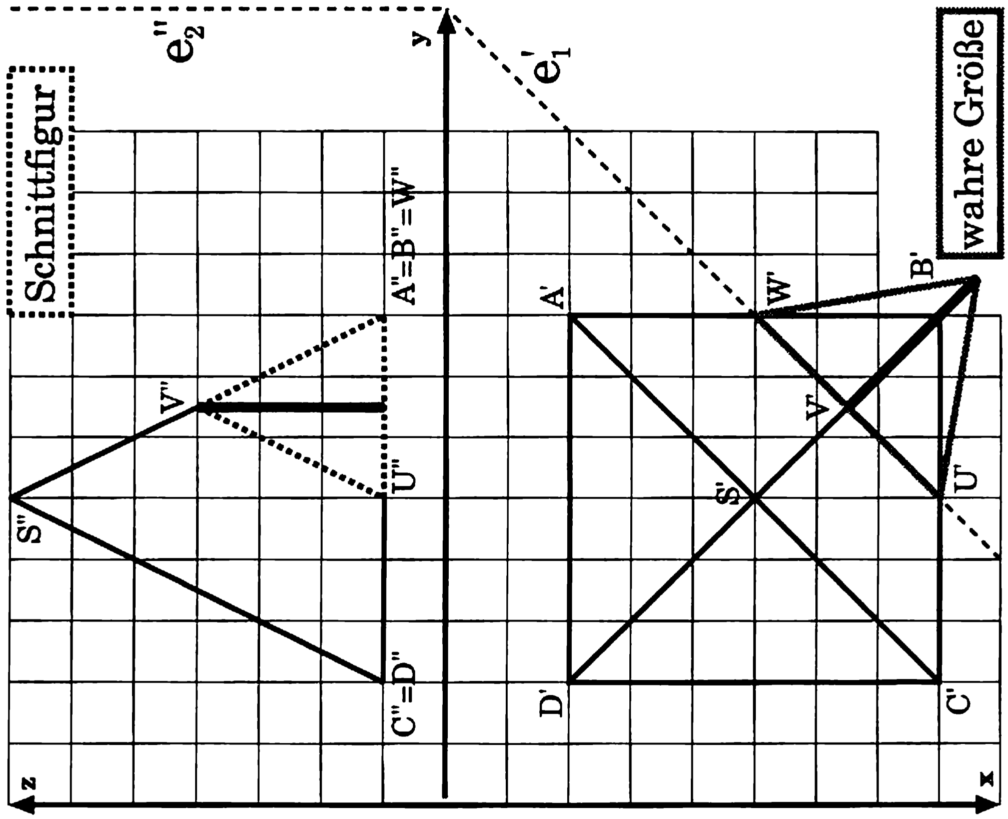
a)



b)

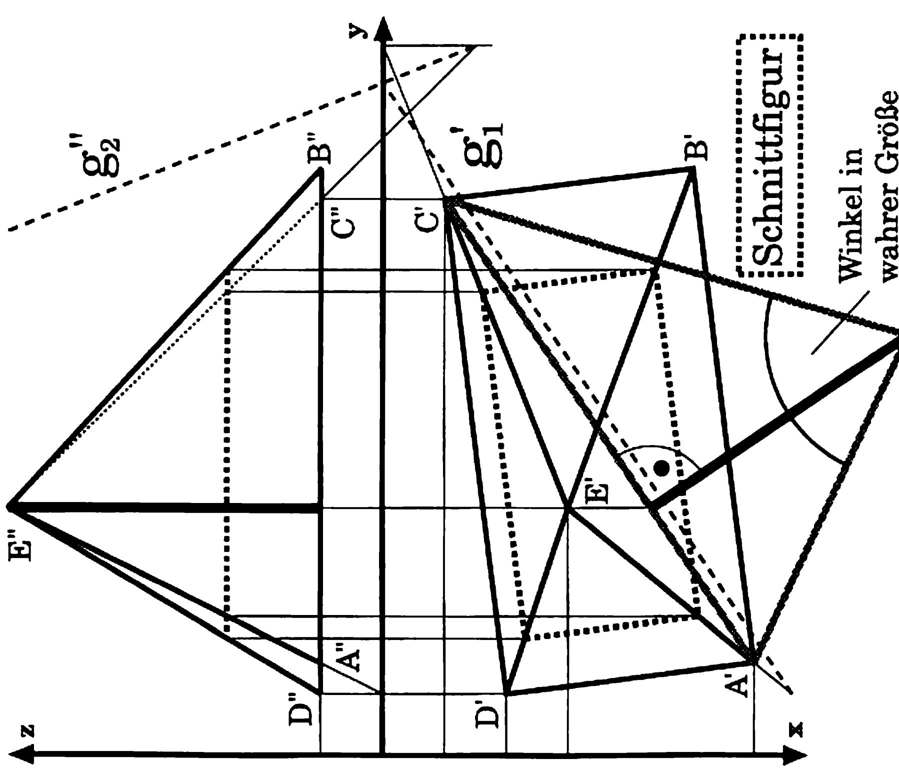


56/5.



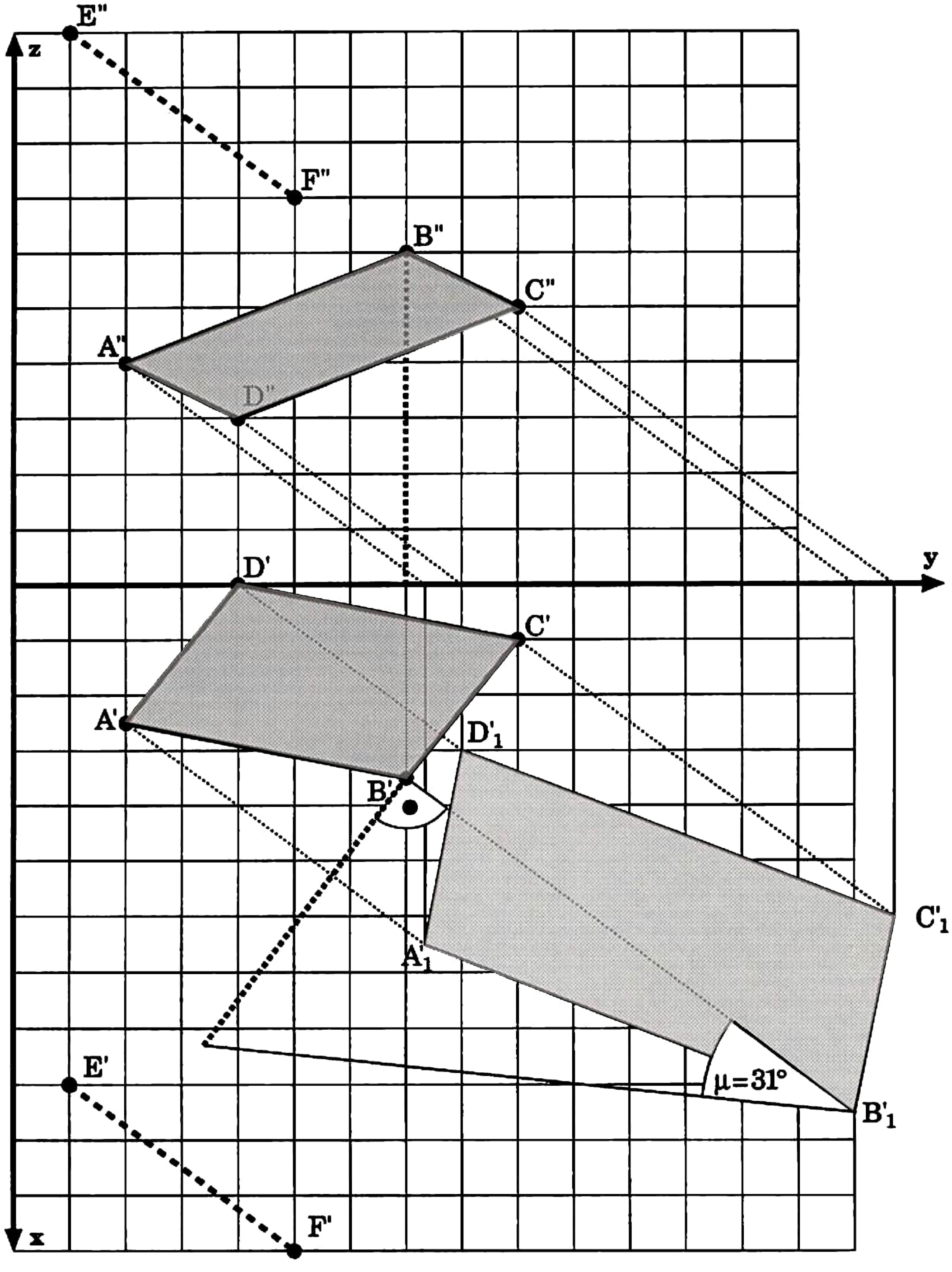
Schnittfigur
e''₂
y
e'₁
A''=B''=W''
V''
U''
S''
C''=D''
z
x
A'
W'
B'
V'
S'
U'
D'
C'
wahre Größe

57/6.

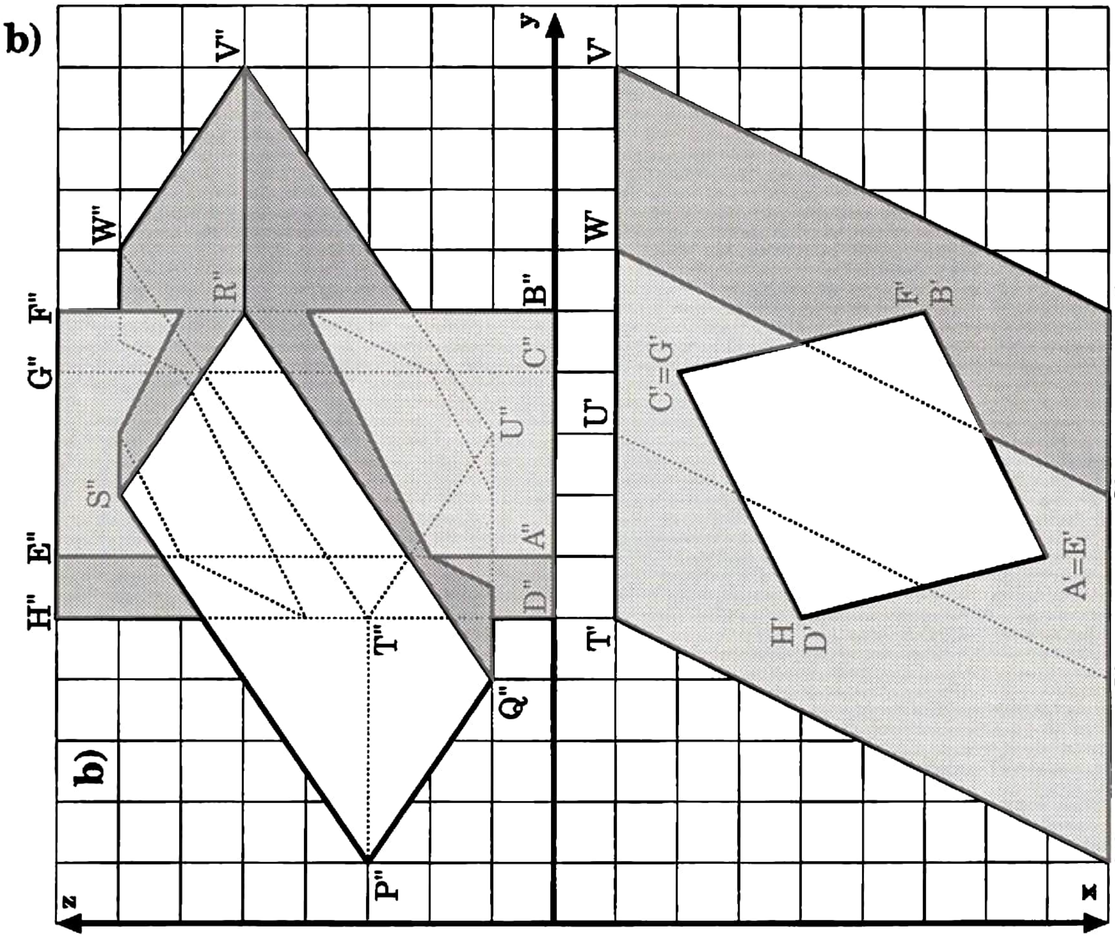


y
g''₂
g'₁
B''
C''
C'
B'
Schnittfigur
Winkel in
wahrer Größe
E''
E'
A''
D''
D'
A'
z
x

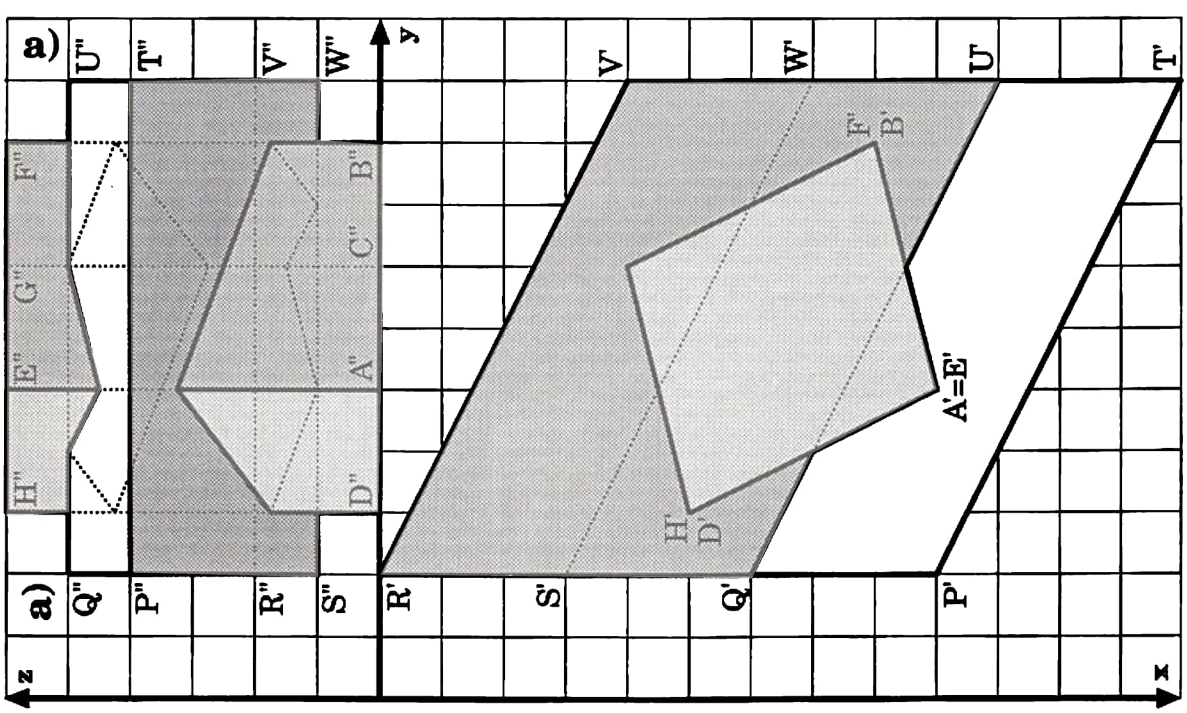
57/7.



61/1.

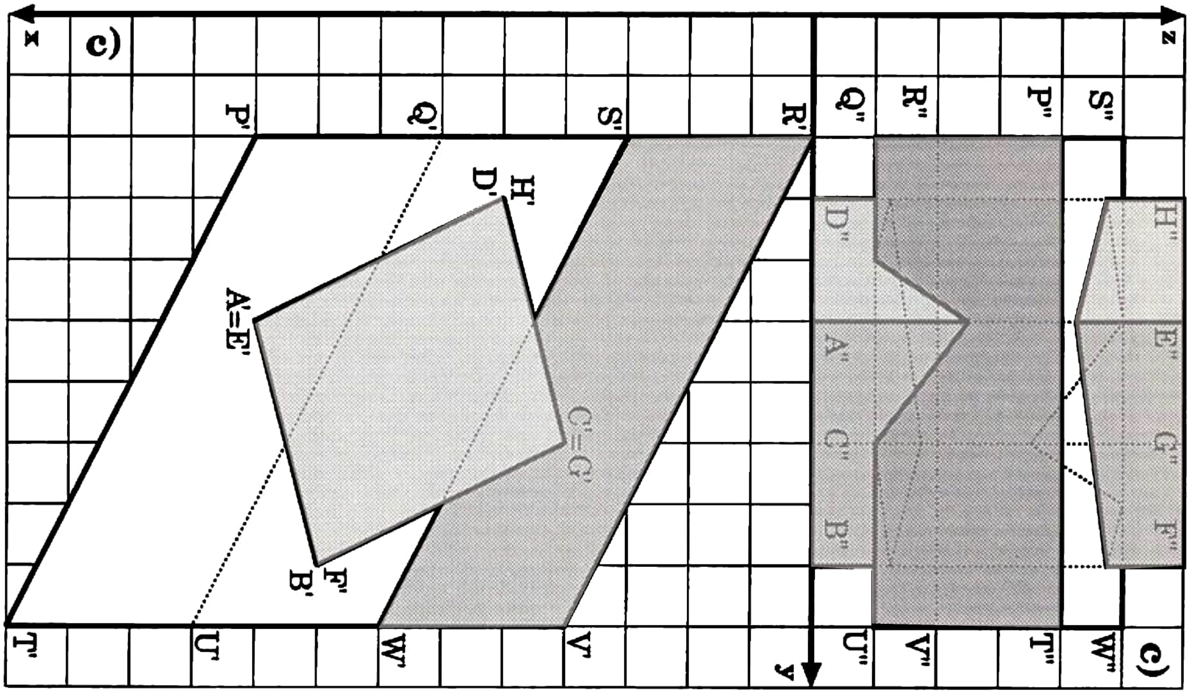


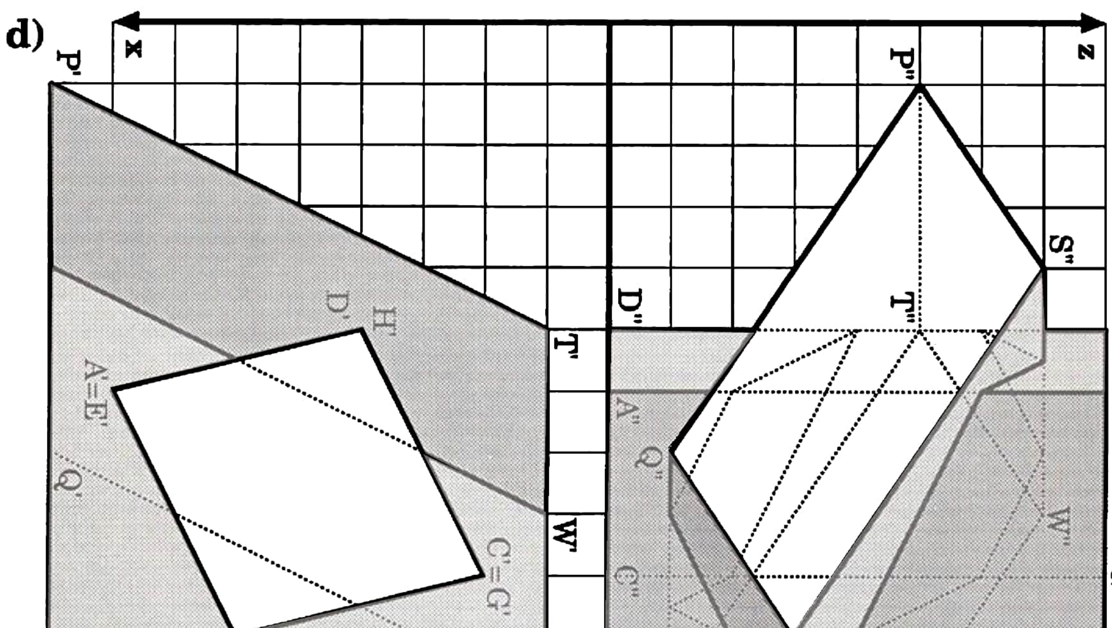
b)
V''
W''
F''
G''
R''
B''
C''
U''
S''
E''
A''
H''
D''
T''
Q''
P''
z
y
x
V'
W'
F'
B'
C'=G'
U'
R'
S'
A'=E'
T'
H'
D'
Q'
P'



a)
U''
T''
V''
W''
F''
G''
E''
H''
B''
C''
A''
D''
Q''
P''
R''
S''
R'
S'
Q'
P'
V'
W'
U'
T'
F'
B'
A'=E'
H'
D'
z
y
x

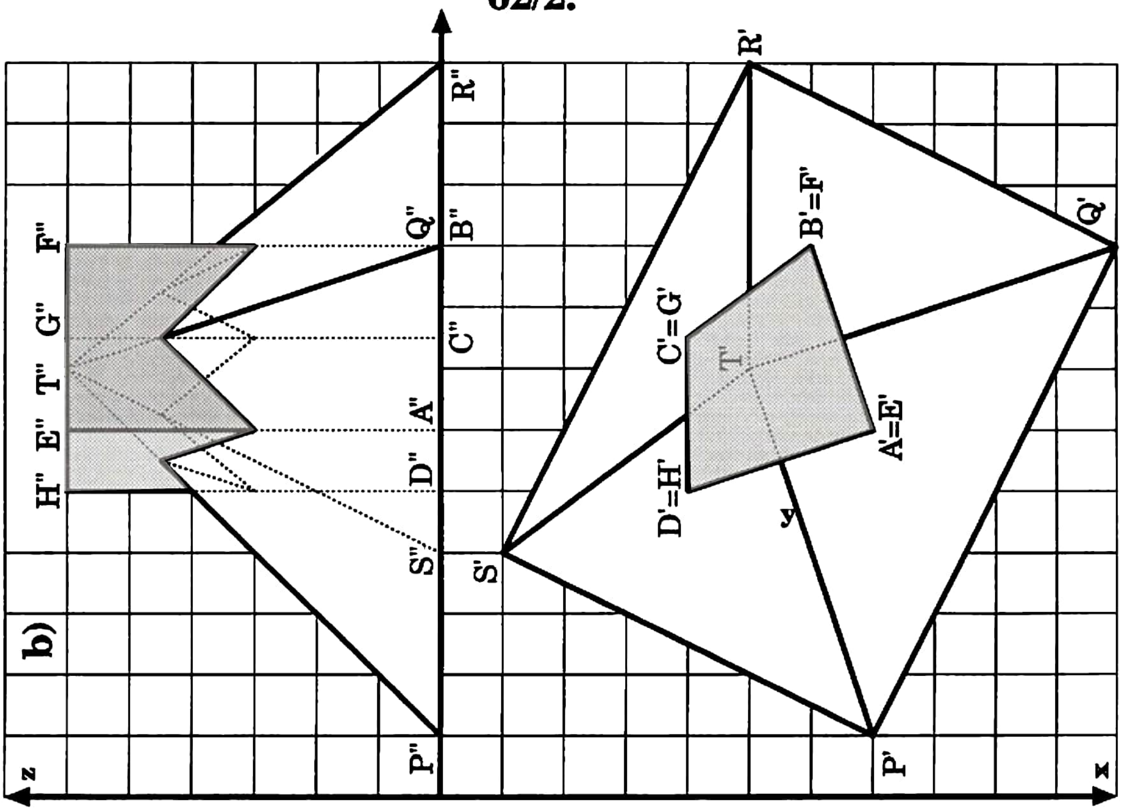
61/1.





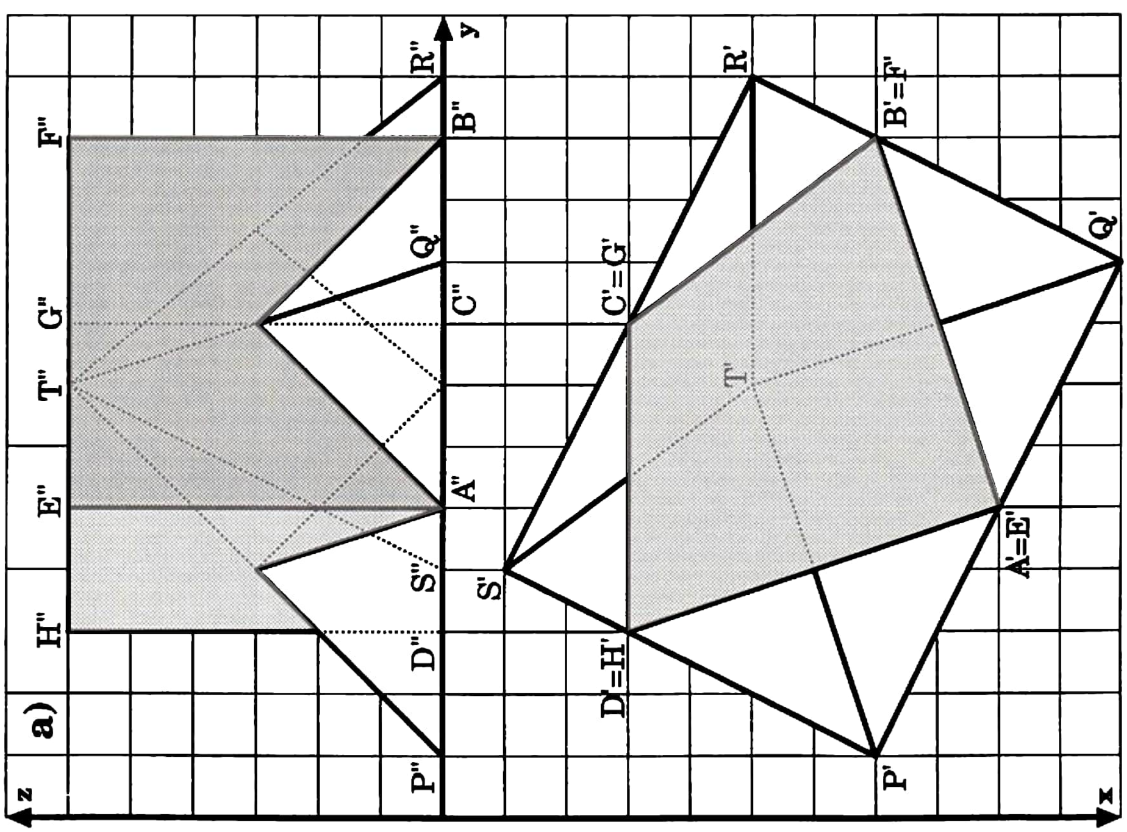
62/2.

b)



b)
z
x
P"
S"
D"
A"
C"
B"
Q"
R"
H"
E"
T"
G"
F"
P'
S'
Q'
R'
D'=H'
C'=G'
A'=E'
B'=F'
T'
y

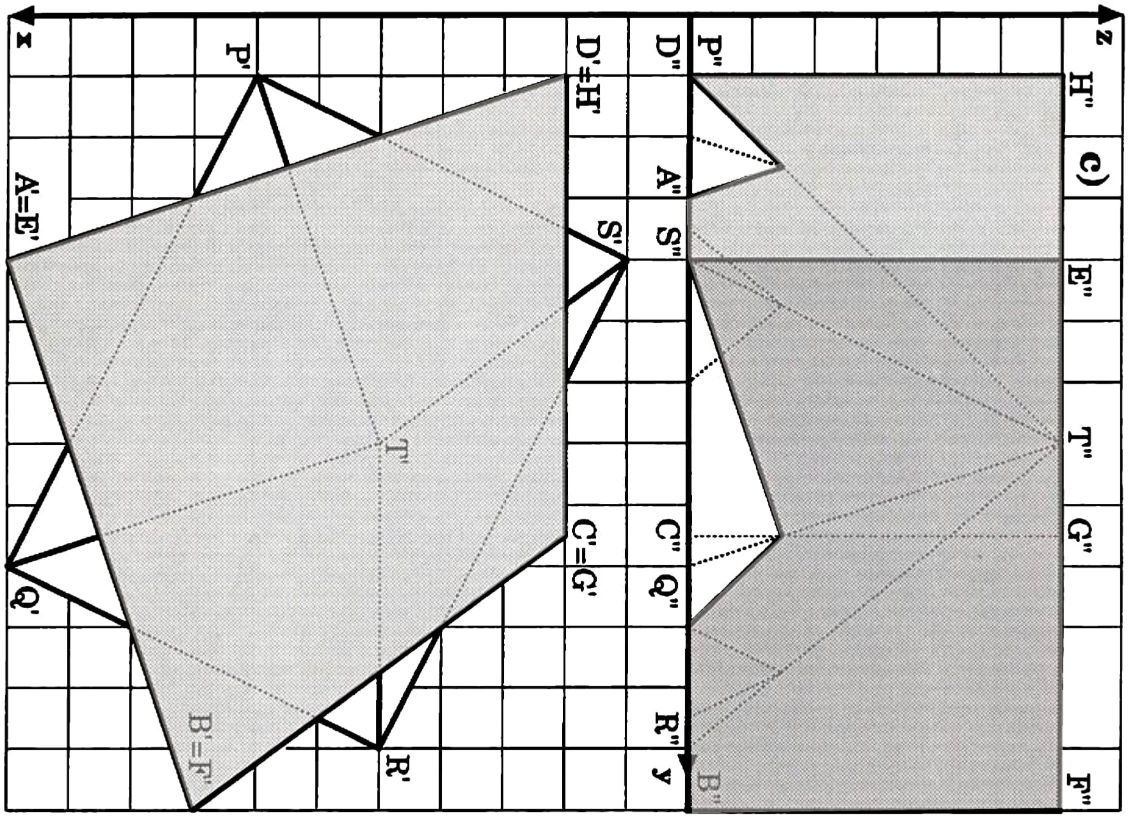
a)



a)
z
y
x
P"
D"
S"
A"
C"
Q"
B"
R"
H"
E"
T"
G"
F"
P'
S'
D'=H'
C'=G'
R'
B'=F'
Q'
A'=E'
T'

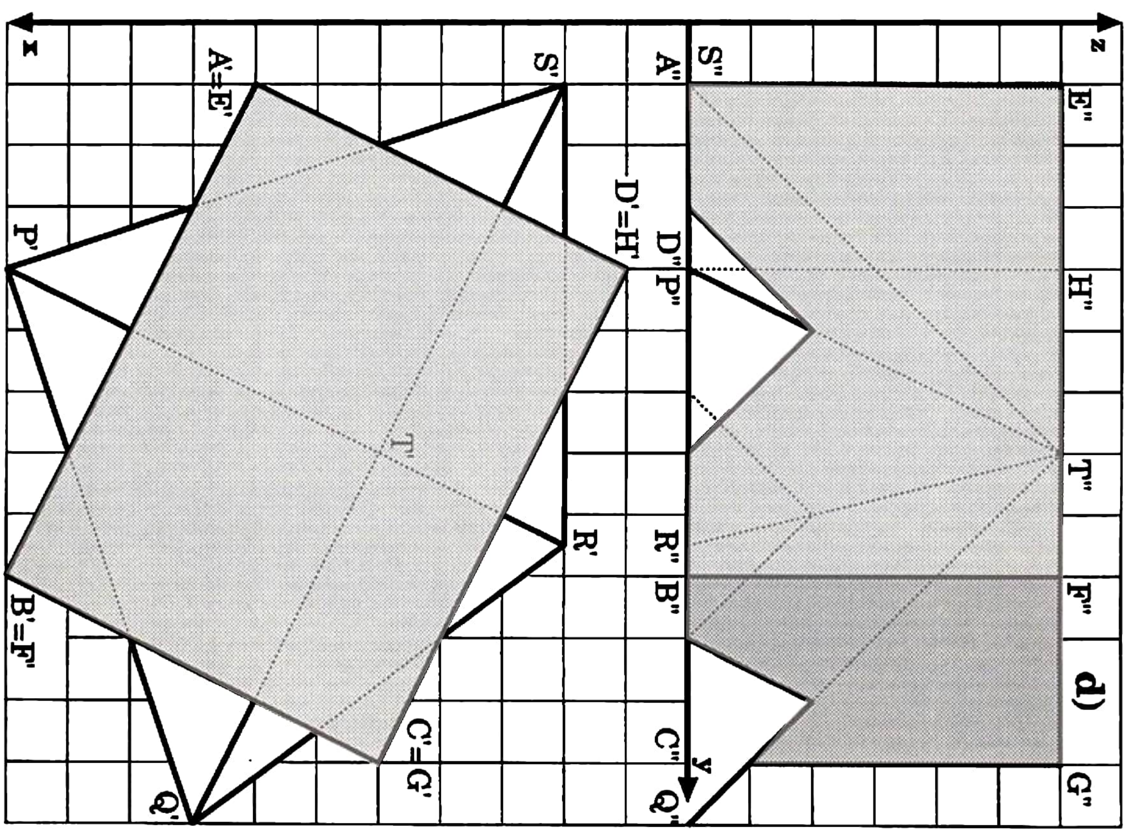
62/2.

c)



x
z
y
P'
D'=H'
A'=E'
S'
T'
C'=G'
Q'
B'=F'
R'
D"
P"
H"
c)
A"
S"
E"
T"
C"
G"
Q"
R"
B"
F"

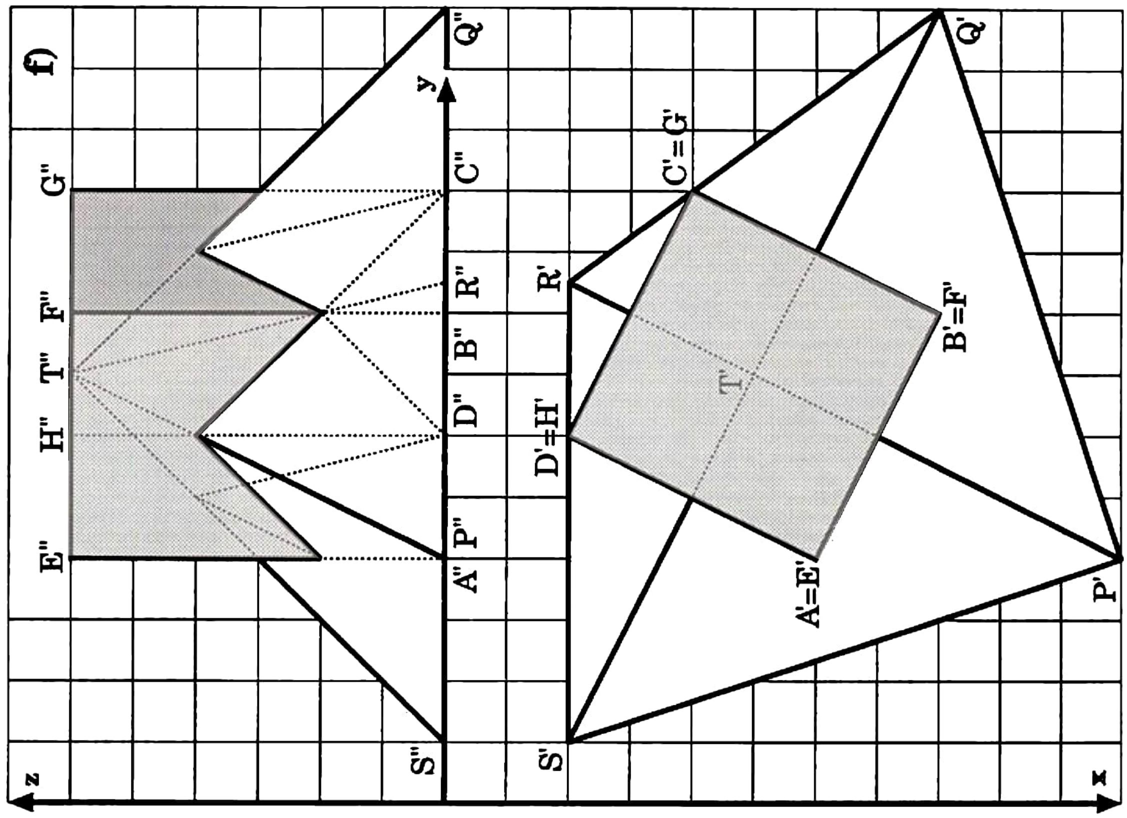
d)



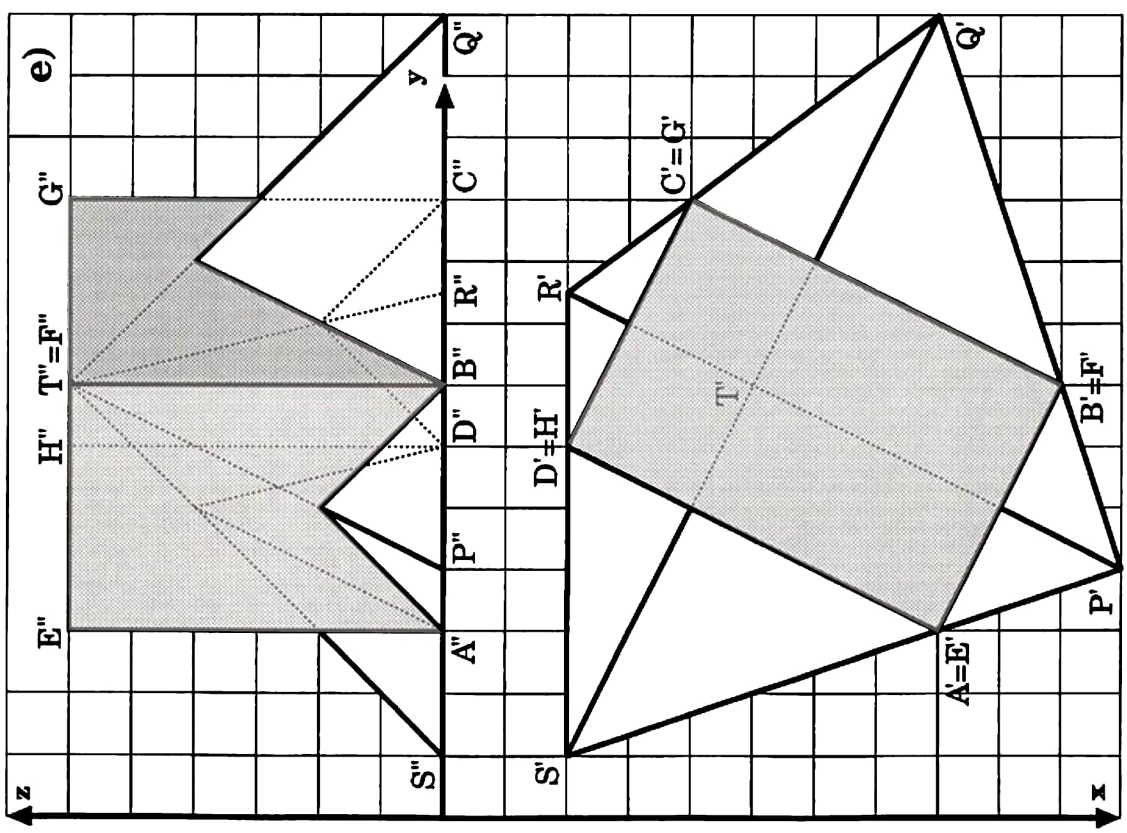
x
z
y
A'=E'
S'
D'=H'
P'
T'
R'
B'=F'
C'=G'
Q'
A"
S"
E"
D"
P"
H"
T"
R"
B"
F"
d)
C"
Q"
G"

62/2.

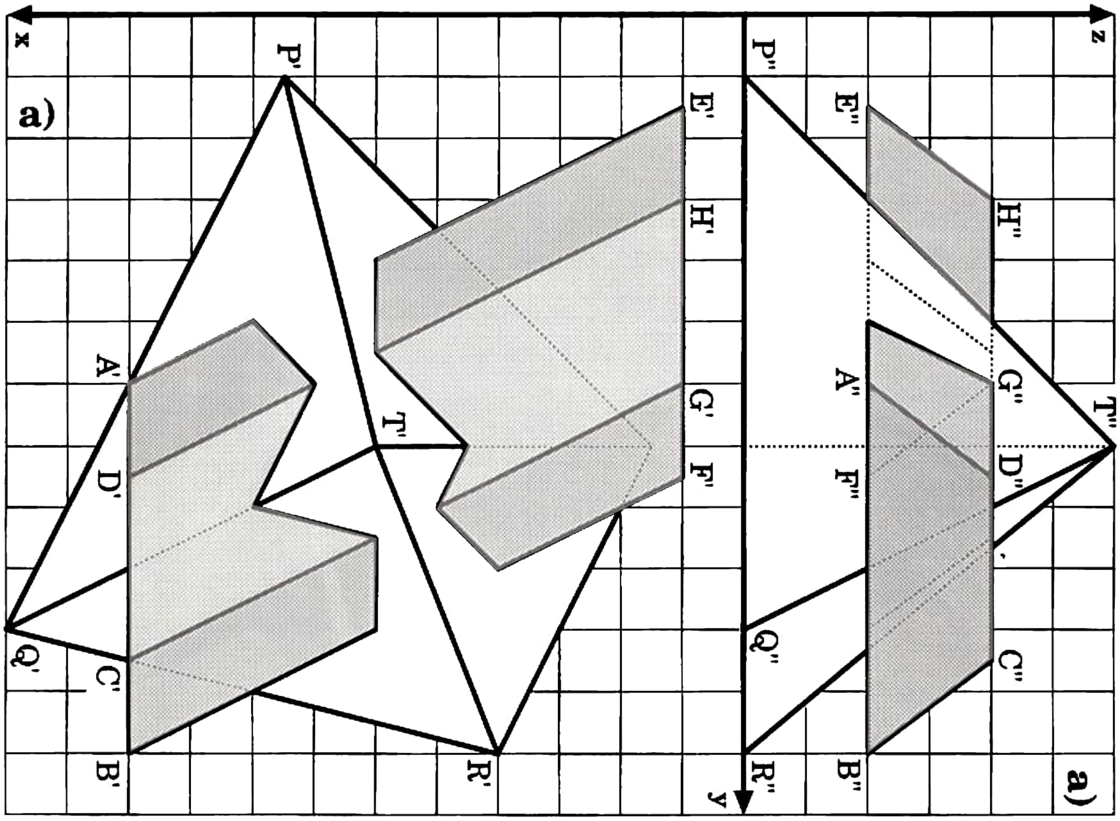
f)

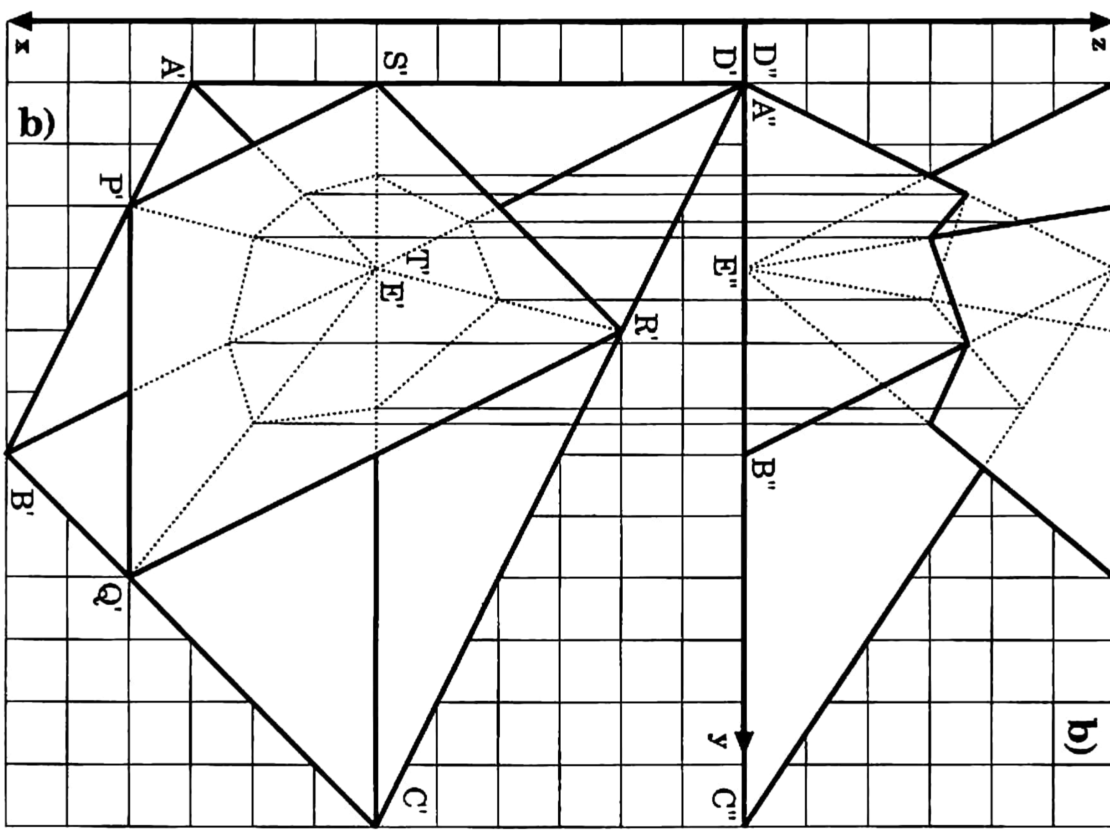

f)
z
y
x
S"
A"
P"
D"
B"
R"
C"
Q"
E"
H"
T"
F"
G"
S'
R'
D'=H'
C'=G'
Q'
T'
B'=F'
A'=E'
P'

e)

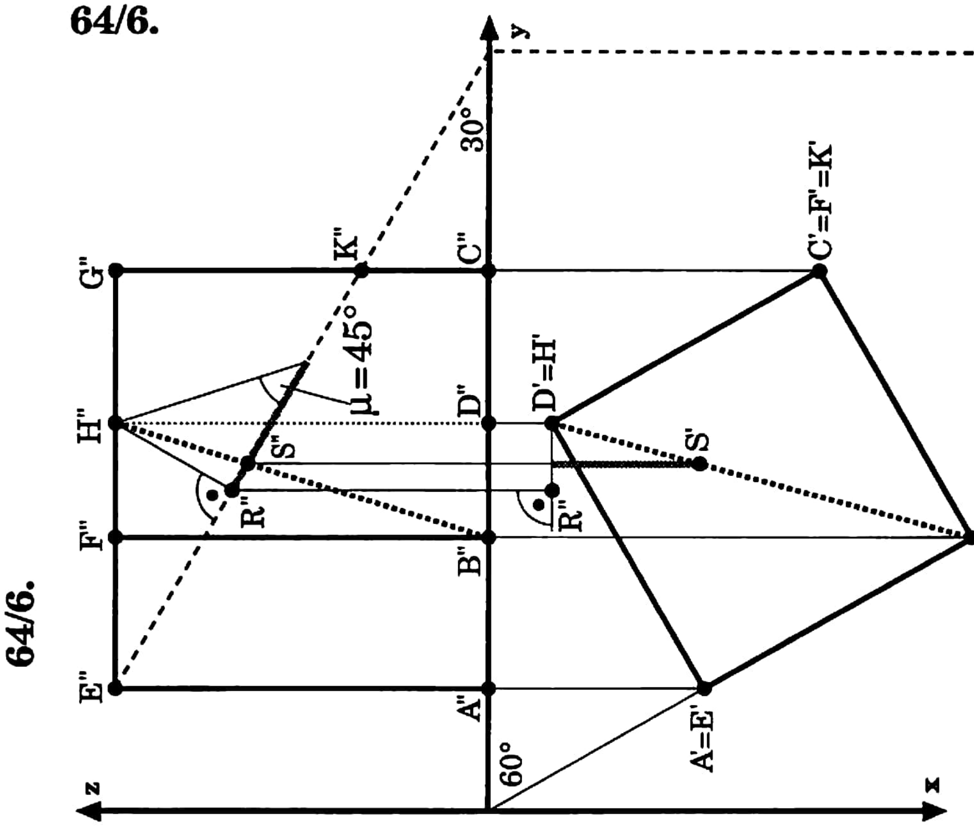

e)
z
y
x
S"
A"
P"
D"
B"
R"
C"
Q"
E"
H"
T"=F"
G"
S'
D'=H'
R'
C'=G'
Q'
T'
B'=F'
A'=E'
P'

63/3.


x
y
z
a)
P'
E'
H'
A'
T'
G'
D'
F'
Q'
C'
B'
R'
P''
E''
H''
A''
G''
T''
F''
D''
Q''
C''
R''
B''
a)

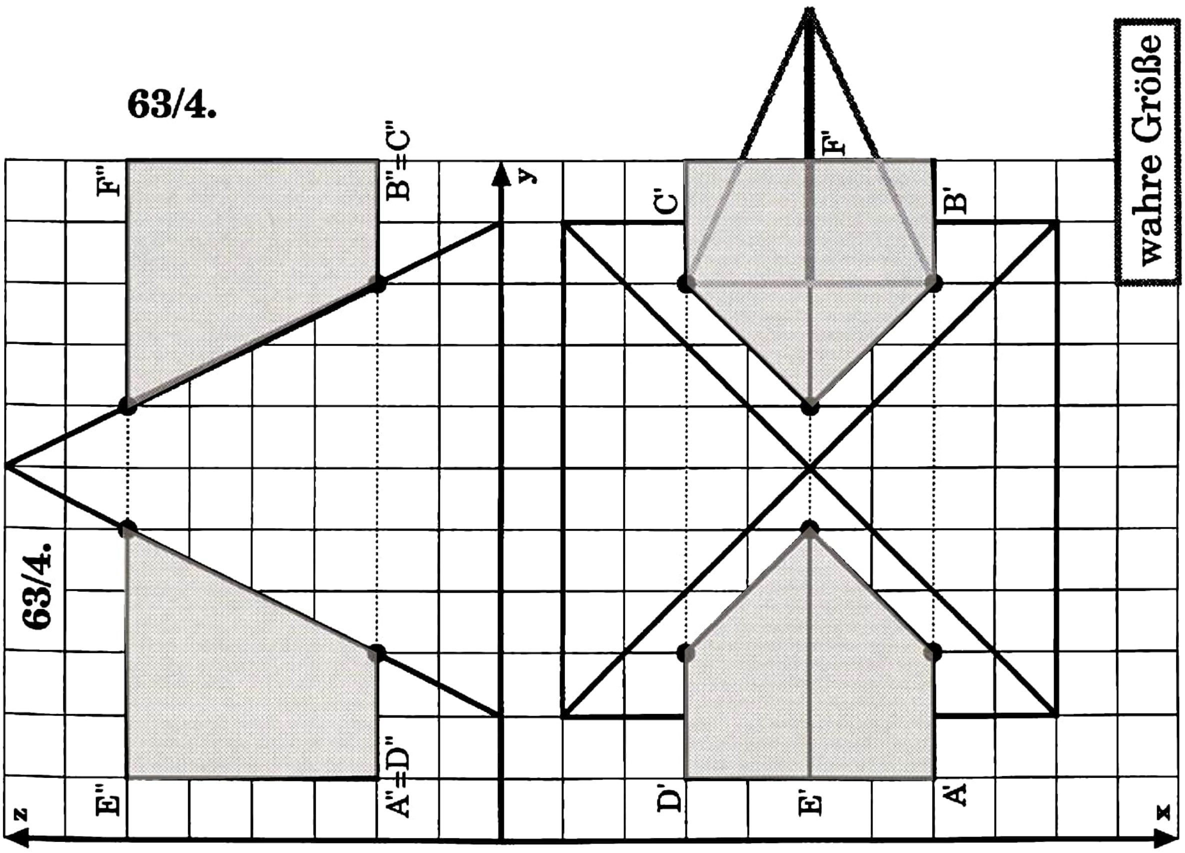

x
y
z
b)
A'
S'
D'
P'
T'
E'
R'
B'
Q'
C'
D''
A''
S''
P''
T''
E''
R''
B''
Q''
C''
b)

64/6.



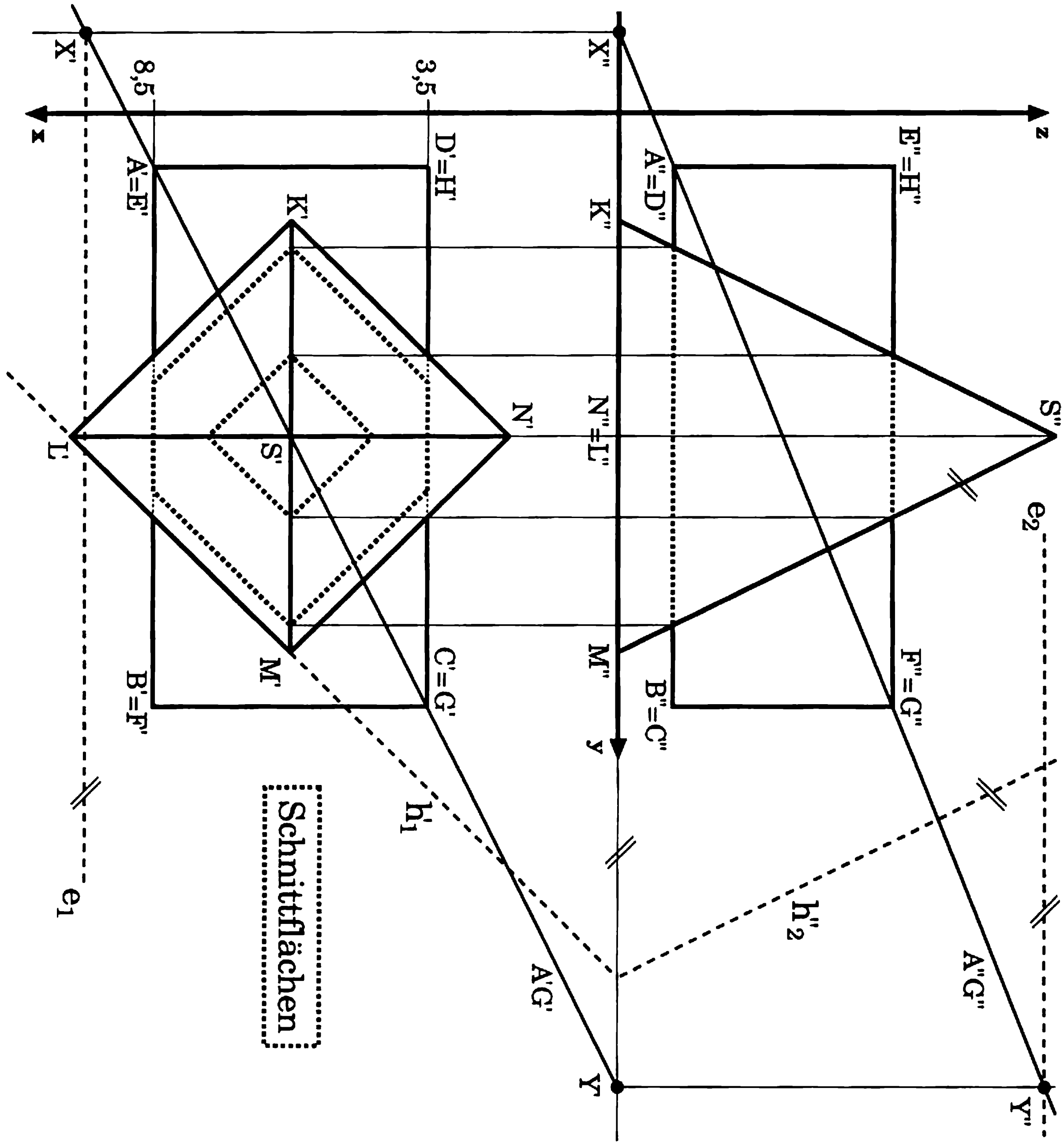
64/6.
E"
F"
H"
G"
K"
C"
B"
D"
A"
R"
S"
μ=45°
30°
60°
D'=H'
C'=F'=K'
S'
R"
B'=F'
A'=E'
x
y
z

63/4.

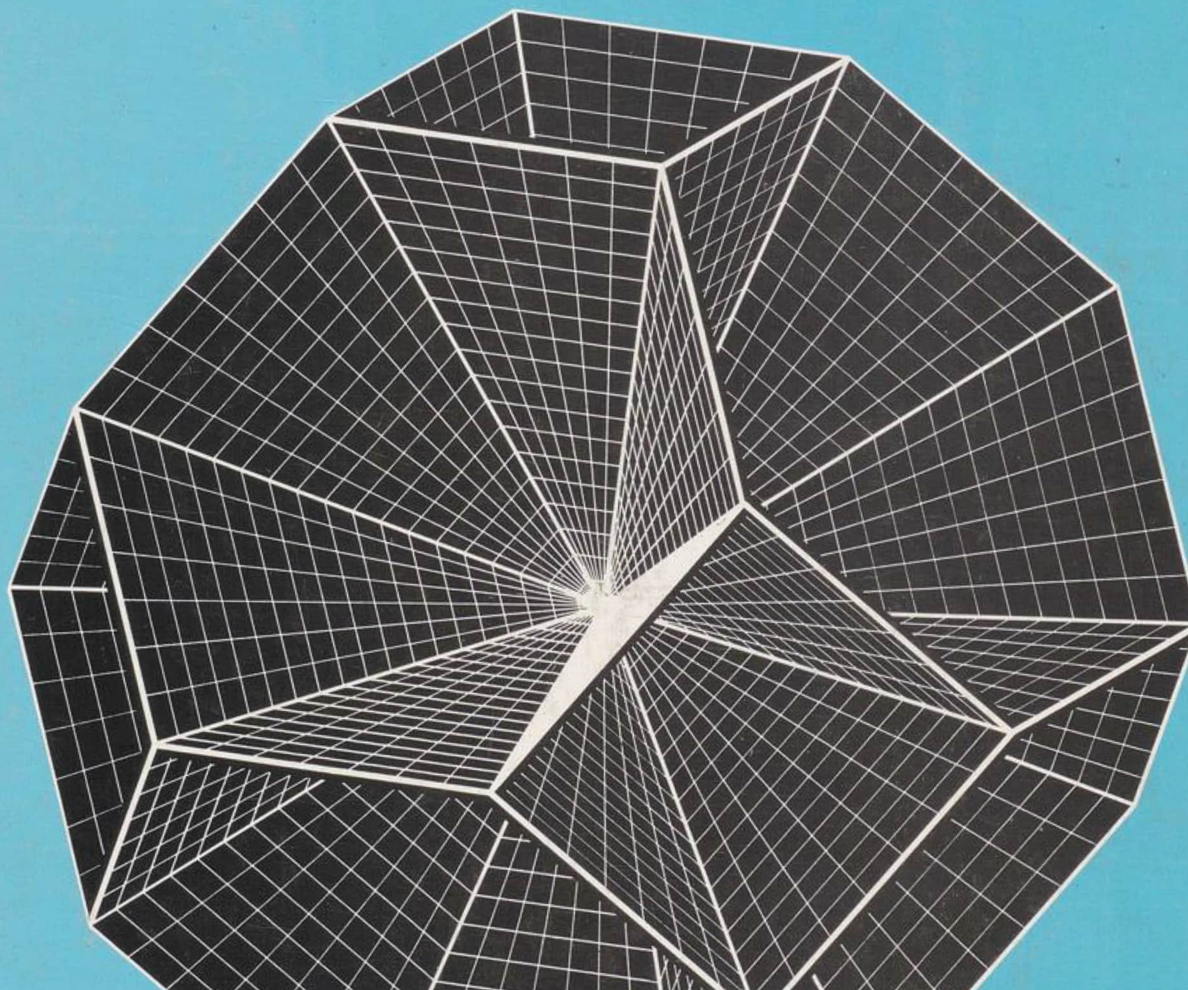


63/4.
F"
B"=C"
E"
A"=D"
C'
F'
B'
D'
E'
A'
wahre Größe
x
y
z

63/5.



X'
8,5
3,5
x
A'=E'
D'=H'
K'
L'
S'
N'
M'
B'=F'
C'=G'
h'1
e1
Schnittflächen
A'G'
X"
K"
A"=D"
E"=H"
z
N"=L"
S"
e2
M"
B"=C"
F"=G"
y
h"2
A"G"
Y'
Y"



ISBN 3-486-03297-6
9 783486 032970 Bestell-Nr. **03297**-6