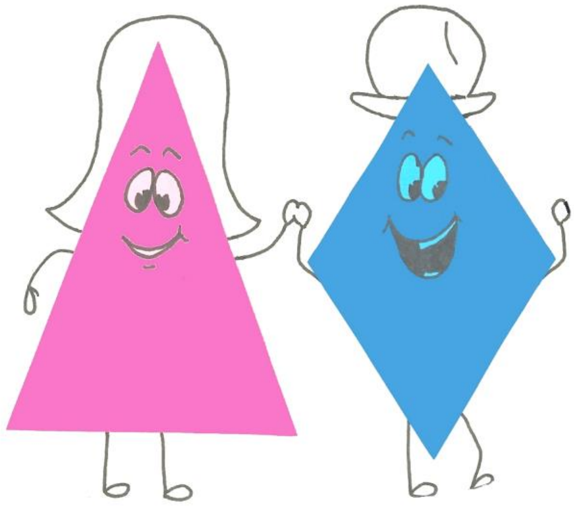
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler, die Freude an Mathematik haben.



Mit Frau Dreieck und Herrn Raute rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise: Für eine vollständige Lösung genügt es nicht, nur das Ergebnis anzugeben. Schreibe einen Antwortsatz, führe wenn möglich eine Probe und erkläre wie du die Lösung gefunden hast oder zeichne zur Begründung deine Lösung.

Du kannst auch einsenden, wenn du nicht alle Aufgaben gelöst hast.

Schicke deine Lösungen an folgende Adresse:

MATHE LOGO
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Du darfst auch eher einsenden!

Nach Einsendeschluss erhältst du im November eine Teilnahmeurkunde für diese Runde und die Aufgaben der nächsten Runde.

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir das LOGO-Team.

Teil A: Im Schwimmbad

Was war das für ein heißer Juli in diesem Jahr! Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute und ihre Kinder Quadrato und Kreisa – verbrachten viel Zeit im Schwimmbad. Ein Wochenende am Samstag und Sonntag waren sie alle zusammen dort. Die darauffolgende Woche von Montag bis Freitag gingen nur Quadrato und Kreisa ins Schwimmbad.

Aufgabe 1) Als sie das erste Mal an der Kasse standen, lasen sie die Liste der Eintrittspreise. Nun überlegten sie, welche Karten sie kaufen sollten, um insgesamt möglichst wenig Geld bezahlen zu müssen.

Tageskarte Erwachsene	4 €
Tageskarte Kinder	2 €
Tageskarte Familie (2 Erw./2 Kinder)	11 €
3-Tages-Karte Kinder	5 €
7-Tages-Karte Kinder	12 €

Hilfst du ihnen? Welche Karten sollten sie kaufen? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Wenn Familie Geometrie eine Familienkarte, vier 3-Tages-Karten für Kinder und zwei Tageskarten für Erwachsene kaufen, ist der Gesamtpreis am kleinsten und beträgt insgesamt 39 €.

Hinweis: Um mögliche Kaufvarianten aufzuschreiben, verwenden wir Abkürzungen: Tageskarte Erwachsene TE, Tageskarte Kinder TK, Familienkarte TF, 3-Tages-Karte T3 und 7-Tages-Karte T7.

Begründung: Wir untersuchen Varianten, welche Karten Familie Geometrie kaufen könnten, so dass an zwei Tagen (Samstag und Sonntag) zwei Erwachsene und an 7 Tagen (von Samstag bis Freitag) zwei Kinder ins Schwimmbad gehen können. Wir tragen dazu die Kosten für den Eintritt übersichtlich in Tabellen ein und rechnen die Beträge zusammen.

Variante 1: Jeder könnte an jedem Tag eine Tageskarte kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TE/4€	TE/4€						8€
Frau Dreieck	TE/4€	TE/4€						8€
Quadrato	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	14€
Kreisa	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	14€

Insgesamt kostet diese Variante (8 + 8 + 14 + 14 =) 44 €.

Variante 2: Herr Raute könnte um Kosten zu sparen, an den beiden Tagen des Wochenendes Familienkarten kaufen. An den fünf Tagen von Montag bis Freitag müssen Kreisa und Quadrato zusätzlich Eintritt bezahlen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TF/11€	TF11€						22€
Frau Dreieck								0€
Quadrato			TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	10€
Kreisa			TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	10€

Diese Variante kostet insgesamt (22 + 0 + 10 + 10 =) 42 €.

Variante 3: Es wird sicherlich günstiger, wenn zu den Familienkarten am Wochenende Quadrato und Kreisa 3-Tages-Karten kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TF/11€	TF11€						22€
Frau Dreieck								0€
Quadrato			T3/5€			TK/2€	TK/2€	9€
Kreisa			T3/5€			TK/2€	TK/2€	9€

Diese Variante kostet insgesamt (22 + 0 + 9 + 9 =) 40 €.

Variante 4: Wir müssen prüfen, ob der Kauf von 7-Tages-Karten einen Vorteil bringt. Allerdings müssen Frau Dreieck und Herr Raute in diesem Fall am Wochenende Tageskarten für Erwachsene kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TE/4€	TE/4€						8€
Frau Dreieck	TE/4€	TE/4€						8€
Quadrato	T7/12€							12€
Kreisa	T7/12€							12€

Diese Variante kostet insgesamt ebenfalls (8 + 8 + 12 + 12 =) 40 €.

Variante 5: Wir finden jedoch noch eine weitere Möglichkeit. Wenn Herr Raute am Samstag eine Familienkarte kauft, benötigen Quadrato und Kreisa für die 3 Tage von Sonntag bis Dienstag und für die 3 Tage von Mittwoch bis Freitag jeweils 3-Tages-Karten für Kinder. Allerdings müssen Frau Dreieck und Herr Raute am Sonntag Tageskarten kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TE/11€	TE/4€						15€
Frau Dreieck		TE/4€						4€
Quadrato		T3/5€			T3/5€			10€
Kreisa		T3/5€			T3/5€			10€

Diese Variante kostet insgesamt nur (15 + 4 + 10 + 10 =) 39 €.

****

Aufgabe 2a) Im Schwimmbad gab es ein Sprungbecken mit einem 1-Meter-Brett, einem 3-Meter-Brett und einem 5-Meter-Sprungturm. Schon am ersten Tag sprang Quadrato vier Mal hintereinander. Dabei wagte er sich von jeder Höhe mindestens ein Mal.

Wie viele Möglichkeiten hatte Quadrato, die Reihenfolge der Sprunghöhen auszuwählen? Schreibe alle Möglichkeiten auf oder beschreibe, wie du die Anzahl ermittelt hast!

Aufgabe 2b) Bei wie vielen dieser möglichen Reihenfolgen waren Sprünge von gleicher Höhe nicht direkt hintereinander? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a – Antwortsatz: Quadrato hatte 36 Möglichkeiten, die Reihenfolge der Sprunghöhen auszuwählen.

Begründung: Wenn Quadrato vier Sprunghöhen auswählen will, aber dabei jede der drei Sprunghöhen mindestens einmal vorkommt, tritt nur eine Sprunghöhe zweimal auf. Diese

Sprunghöhe nennen wir X und finden heraus, an welchen Stellen in der Reihenfolge der vier Sprunghöhen X auftreten kann:

Variante	1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle
a	X	X	?	?
b	X	?	X	?
c	X	?	?	X
d	?	X	X	?
e	?	X	?	X
f	?	?	X	X

Die Fragezeichen müssen wir durch die beiden einzeln vorkommenden Sprunghöhen ersetzen. In jeder Variante gibt es dafür 2 Möglichkeiten: die kleinere vor der größeren oder die größere vor der kleineren.

Also gibt es in der Tabelle (6 · 2 =) 12 Möglichkeiten.

Nun können wir aber für X die Sprunghöhen 1 m, 3 m und 5 m einsetzen. Deshalb gibt es insgesamt (3 · 12 =) 36 Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Wir schreiben alle möglichen Reihenfolgen auf und verwenden für die Sprunghöhen nur die Meterangaben 1, 3 und 5. Damit bilden wir alle vierstelligen Zahlen, in denen die Ziffern 1, 3 und 5 vorkommen.

1135 1153 1315 1335 1351 1353 1355 1513 1531 1533 1535 1553
3113 3115 3135 3151 3153 3155 3315 3351 3511 3515 3513 3551
5113 5131 5133 5135 5153 5311 5313 5315 5331 5351 5513 5531

Wir können aber auch die Tabelle von oben nutzen und für X jeweils 1, 3 oder 5 einsetzen.

	Zeile a	Zeile b	Zeile c	Zeile d	Zeile e	Zeile f
X = 1	1135 1153	1315 1513	1351 1531	3115 5113	3151 5131	3511 5311
X = 3	3315 3351	3135 3531	3153 3513	1335 5331	1353 5313	1533 5133
X = 5	5513 5531	5153 5351	5135 5315	1553 3551	1535 3515	1355 3155

Wir finden jeweils 36 Möglichkeiten, die Reihenfolgen der Sprunghöhen anzuordnen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b – Antwortsatz: Bei 18 Reihenfolgen waren Sprünge von gleicher Höhe nicht direkt hintereinander.

Begründung: Wir streichen in der Liste aller Möglichkeiten diejenigen Varianten, in denen gleiche Sprunghöhen nebeneinander stehen.

~~1135~~ ~~1153~~ 1315 ~~1335~~ 1351 1353 ~~1355~~ 1513 1531 ~~1533~~ 1535 ~~1553~~
~~3113~~ ~~3115~~ 3135 3151 3153 ~~3155~~ ~~3315~~ ~~3351~~ ~~3511~~ 3515 3513 ~~3551~~
~~5113~~ 5131 ~~5133~~ 5135 5153 ~~5311~~ 5313 5315 ~~5331~~ 5351 5513 ~~5531~~

oder mit Hilfe der Tabelle

	Zeile a	Zeile b	Zeile c	Zeile d	Zeile e	Zeile f
X = 1	~~1135~~ ~~1153~~	1315 1513	1351 1531	~~3115~~ ~~5113~~	3151 5131	~~3511~~ ~~5311~~
X = 3	~~3315~~ ~~3351~~	3135 3531	3153 3513	~~1335~~ ~~5331~~	1353 5313	~~1533~~ ~~5133~~
X = 5	~~5513~~ ~~5531~~	5153 5351	5135 5315	~~1553~~ ~~3551~~	1535 3515	~~1355~~ ~~3155~~

Es bleiben jeweils 18 Möglichkeiten übrig.

****

Aufgabe 3) Am Sonntag fanden Schwimmwettkämpfe statt. Quadrato startete mit drei anderen Jungen seiner Altersklasse. Nach Zieleinlauf konnten die Platzierungen eindeutig ermittelt werden, jeder der vier Starter schlug mit einer anderen Zeit am Ziel an.

Frau Dreieck, Herr Raute und Kreisa beobachteten den Wettkampf vom Beckenrand aus. Sie konnten aber den Zieleinlauf nicht genau erkennen.

Frau Dreieck: „Ich denke, Quadrato hat leider nicht gewonnen."
Kreisa: „Ich glaube, Quadrato wurde Zweiter."
Herr Raute: „Ich vermute, Quadrato wurde Dritter."

Als Quadrato zu íhnen kam, stellte sich heraus, dass von diesen Aussagen nur eine richtig und zwei falsch waren. Weißt du nun, welchen Platz Quadrato erreicht hat? Gib seine Platzierung an und beschreibe, wie du es herausgefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Quadrato erreichte den 4. Platz.

Begründung: Wir prüfen, bei welcher Platzierung von Quadrato nur eine der drei Aussagen wahr ist.

Platzierung von Quadrato	Aussage von Frau Dreieck	Aussage von Kreisa	Aussage von Herrn Raute
1.	falsch	falsch	falsch
2.	wahr	wahr	falsch
3.	wahr	falsch	wahr
4.	**wahr**	**falsch**	**falsch**

Nur wenn Quadrato den 4. Platz erreichte, sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösungsvariante: Wir untersuchen die anderen beiden Aussagen, wenn wir von einer Aussage annehmen, dass sie wahr sei.

Angenommen, die Aussage von Frau Dreieck ist wahr. Dann wurde Quadrato Zweiter, Dritter oder Vierter. Da aber die Aussage von Kreisa falsch sein muss, wurde Quadrato nicht Zweiter. Da aber auch die Aussage von Herrn Raute falsch sein muss, wurde Quadrato nicht Dritter. Also wurde Quadrato Vierter.

Angenommen, die Aussage von Kreisa ist wahr. Dann wurde Quadrato Zweiter – aber damit ist auch die Aussage von Frau Dreieck wahr.

Angenommen, die Aussage von Herrn Raute ist wahr. Dann wurde Quadrato Dritter – aber damit ist auch die Aussage von Frau Dreieck wahr.

Somit ist bei diesen Bedingungen nur die Variante möglich, dass die Aussage von Frau Dreieck wahr ist und Qu#adrato Vierter wurde.

****

Aufgabe 4) Kreisa und Quadrato spielten jeden Tag von Montag bis Freitag Federball. Sie zählten die Anzahl der Schläge, die sie hintereinander schafften, ohne dass der Ball auf den Boden fiel. Wenn beispielsweise Quadrato begann, Kreisa zurückschlug, Quadrato ebenfalls zurückschlug und Kreisa nun jedoch den Federball verpasste, so dass er auf den Boden fiel, waren es genau 3 Schläge, die sie hintereinander schafften.

Am Montag gelangen ihnen mehr Schläge als in diesem Beispiel. Am Dienstag waren es 7 Schläge mehr als am Montag. Am Mittwoch zählten sie 9 Schläge mehr als am Dienstag. Am Donnerstag war es so windig, dass ihnen nur 8 Schläge gelangen. Dafür erreichten sie am Freitag doppelt so viele Schläge wie am Dienstag.

Quadrato hatte die Tagesergebnisse aufgeschrieben und stellte fest, dass die Summe der Tagesergebnisse 80 ergab. Wie viele Schläge schafften Quadrato und Kreisa am Montag? Erkläre, wie du dein Ergebnis gefunden hast und prüfe es mit einer Probe!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Kreisa und Quadrato schafften am Montag 7 Schläge.

Begründung: So eine Aufgabenstellung können wir durch systematisches Probieren lösen. Wir schreiben in einer Tabelle auf, was wir über die Schläge jeden Tages und über die Gesamtzahl der Schläge einer Woche wissen, wenn wir für Montag eine Anzahl festlegen.

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Summe	Vergleich
4	4 + 7 = 11	11 + 9 = 20	8	11 · 2 = 22	65	65 < 80
5	5 + 7 = 12	12 + 9 = 21	8	12 · 2 = 24	70	70 < 80
6	6 + 7 = 13	13 + 9 = 22	8	13 · 2 = 26	75	75 < 80
7	**7 + 7 = 14**	**14 + 9 = 23**	**8**	**14 · 2 = 28**	**80**	**80 = 80**
8	8 + 7 = 15	15 + 9 = 24	8	15 · 2 = 30	85	85 > 80

Nur wenn sie am Montag 7 Schläge schafften, beträgt die Gesamtzahl der Wochen 80 Schläge. In der Tabelle ist die Probe angegeben.

Lösungsvariante: Wir können die Aufgabe auch mit Hilfe einer Gleichung lösen. Wir nehmen an, die Anzahl der Schläge betrug am Montag S. Dann wissen wir über die Anzahl der anderen Tage

- am Montag Mo = S Schläge
- am Dienstag Di = (Mo + 7) Schläge,
- am Mittwoch Mi = (Di + 9) Schläge,
- am Donnerstag Do = 8 Schläge und
- am Freitag Fr = 2 · Di Schläge

waren. Insgesamt waren es in der Woche also

$$\begin{aligned}&Mo + Di + Mi + Do + Fr = \\ &S + (S + 7) + ((S + 7) + 9) + 8 + 2 \cdot (S + 7) = 5 \cdot S + 45 = 80.\end{aligned}$$

Da die Gesamtzahl in der Woche 80 Schläge war, finden wir aus $5 \cdot S + 45 = 80$ wegen $5 \cdot S = 80 - 45 = 35$ die Lösung $S = 7$. Um zu prüfen, dass uns kein Rechenfehler unterlaufen ist, führen wir die Probe durch:

Anzahl Schläge am Dienstag	7 + 7 = 14,
Anzahl Schläge am Mittwoch	14 + 9 = 23,
Anzahl Schläge am Donnerstag	8,
Anzahl Schläge am Freitag	2 · 14 = 28,
Gesamtzahl	7 + 14 + 23 + 8 + 28 = 80.

Die Angaben aus der Aufgabenstellung sind alle erfüllt.

****

Teil B: Türme-Wanderung

Aufgabe 1a) Quadrato beginnt ein Spiel mit der Startaufstellung 1-3-1-2. Nach dem 4. Zug sieht er die Verteilung 3-2-1-1. Schreibe den Spielverlauf vollständig auf und prüfe, ob Quadrato seine Spielzüge korrekt ausgeführt hat.

Aufgabe 1b) Quadrato beginnt nun mit der Startaufstellung 1-2-3-4. Schreibe den Spielverlauf bis zum 6. Zug auf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a: Wenn Du den Spielverlauf vollständig aufschreibst, erkennst du, dass Quadrato seine Spielzüge korrekt ausgeführt hat.

Start	1	3	1	2						
1. Zug		4	1	2						
2. Zug			2	3	1	1				
3. Zug				4	2	1				
4. Zug					3	2	1	1		

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b. Quadrato beginnt mit der Startaufstellung 1-2-3-4 und erreicht nach dem 6. Zug 4-3-2-1.

Start	1	2	3	4								
1. Zug		3	3	4								
2. Zug			4	5	1							
3. Zug				6	2	1	1					
4. Zug					3	2	2	1	1	1		
5. Zug						3	3	2	1	1		
6. Zug							4	3	2	1		

****

Aufgabe 2) Bei einem neuen Spiel erhält er nach dem 3. Zug die Aufstellung 2-2-2. Wie könnte seine Startaufstellung ausgesehen haben? Begründe! Untersuche, ob die Aufgabe eindeutig lösbar ist. Wenn es mehrere Möglichkeiten geben kann, schreibe zwei verschiedene Startaufstellungen auf, die jeweils nach dem 3. Zug die Aufteilung 2-2-2 erzeugen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Du musst versuchen, die Züge rückwärts zu erkennen. Eine Möglichkeit besteht darin, dass die oberen Steine aller Türme im vorangegangenen Zug aufgelegt wurden.

Weil nach Zug 3 drei Türme stehen, war im Zug davor der linke Turm 3 Steine hoch.
Weil nach Zug 2 vier Türme stehen, war im Zug davor der linke Turm 4 Steine hoch.
Weil nach Zug 1 zwei Türme stehen, war am Start der linke Turm 2 Steine hoch.

Zur Probe beginnen wir mit der Startaufstellung 2-3-1 und überzeugen uns, dass nach dem 3. Zug 2-2-2 stehen bleibt.

3. Zug					2	2	2					
2. Zug				3	1	1	1					
1. Zug			4	2								
Start		2	3	1								

Die Startaufstellung kann aber auch 1-3-2 gewesen sein. Also finden wir zwei verschiedene Startaufstellungen, die nach dem 3. Zug auf 2-2-2 führen.

3. Zug					2	2	2					
2. Zug				3	1	1	1					
1. Zug			4	2								
Start		1	3	2								

****

Aufgabe 3a) Quadrato behauptet, eine Startaufstellung mit 3 Spiel-Steinen gefunden zu haben, bei der nach dem 5. Zug nur ein einzelner Turm mit 3 Spiel-Steinen zu sehen ist. Kreisa widerspricht: „Das kann gar nicht sein!“. Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 3b) Quadrato beginnt mit der Startaufstellung 3-1-3. Nach einigen Zügen sind die Spielsteine wie 2-1-2-1 verteilt. Wieder stellt Kreisa fest: „Da muss dir ein Fehler passiert sein!“. Was ist Kreisa aufgefallen? Wie konnte Kreisa feststellen, dass bei dieser Startaufstellung die Aufteilung 2-1-2-1 nicht möglich ist? Erkläre es.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – Antwortsatz: Eine solche Startaufstellung gibt es nicht. Kreisa hat also recht.

Begründung: Es gibt nur 4 Möglichkeiten, 3 Steine in der Startaufstellung zu setzen, ohne dass Lücken entstehen. Du kannst alle Möglichkeiten ausprobieren – immer steht nach dem 5. Zug 2-1.

	Möglichkeit 1							Möglichkeit 2							Möglichkeit 3							Möglichkeit 4						
Start	3							2	1						1	2						1	1	1				
1. Zug		1	1	1					2	1						3							2	1				
2. Zug			2	1						2	1						1	1	1					2	1			
3. Zug				2	1						2	1						2	1						2	1		
4. Zug					2	1						2	1						2	1						2	1	
5. Zug						2	1						2	1						2	1						2	1

Hinweis: Kreisa hat nur recht, wenn die Bedingung der Aufgabenstellung *„Wichtig: In einer Startaufstellung sind benachbarte Felder besetzt, es gibt keine Lücken zwischen den Türmen.“* Eingehalten wird. Lassen wir Lücken zu, ist ein einzelner Turm nach dem 5. Zug möglich.

Start	1			1		1			
1. Zug		1		1		1			
2. Zug			1	1		1			
3. Zug				2		1			
4. Zug					1	2			
5. Zug						3			

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b – Antwortsatz: Kreisa probierte es aus und stellte fest, dass die Aufstellung 2-1-2-1 nicht auftritt.

Begründung: Beim Spiel stellt Kreisa fest, dass die Aufstellung nach dem 5. Zug sich nach dem 8. Zug wiederholt. Dann kennt sie auch die späteren Aufstellungen, weil diese sich auch wiederholen.

Start	3	1	3										
1. Zug		2	4	1									
2. Zug			5	2									
3. Zug				3	1	1	1	1					
4. Zug					2	2	2	1					
5. Zug						**3**	**3**	**1**					
6, Zug							4	2	1				
7. Zug								3	2	1	1		
8. Zug									3	2	2		
9. Zug										**3**	**3**	**1**	
10. Zug											4	2	1

Lösungsvariante: Kreisa zählt die Spielsteine. In der Startaufstellung sind es (3 + 1 + 3 =) 7 Spielsteine. Bei 2-1-2-1 sind es aber nur (2 + 1 + 2 + 1 =) 6 Steine. Da aber bei jedem Zug die Anzahl der Steine unverändert bleibt, kann die Aufstellung 2-1-2-1 nicht auftreten.

****

Aufgabe 4) Kann es Startaufstellungen mit einigen Türmen und insgesamt 10 Spiel-Steinen geben, die nach rechts wandern, dabei aber die Aufteilung der Spiel-Steine nicht verändern? Falls es solche Startaufstellungen gibt, schreibe eine auf und zeige den Spielverlauf für die ersten Züge.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: In der Startaufstellung mit vier Türmen und insgesamt 10 Spiel-Steinen ändert sich die Aufteilung der Spiel-Steine nicht.

Begründung: Wir spielen das Spiel mit der Startaufstellung 4-3-2-1 und stellen im Spielverlauf als unsere Probe fest, dass tatsächlich nach jedem Zug wieder die Aufstellung 4-3-2-1 erscheint.

Start	4	3	2	1						
1. Zug		4	3	2	1					
2. Zug			4	3	2	1				

Für die Aufgabenstellung genügt es, eine Lösung ohne Begründung (aber mit aufgeschriebenen Spielverlauf) anzugeben. Wir finden diese Lösung durch geduldiges Probieren – es gibt schließlich sehr viele Möglichkeiten, 10 Spielsteine in einer Startaufstellung mit vier Türmen aufzuteilen. Allerdings fällt uns auf:

Da der Turm ganz links auf Platz (1) beim ersten Zug vollkommen aufgeteilt wird, muss ganz rechts auf Platz (5) ein neuer Turm entstehen, damit die Anzahl der Türme erhalten bleibt. Dieser neue Turm kann wegen der Spielregeln nur aus einem Spielstein bestehen.

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	?	?		
1. Zug		?	?	?	1	

Also muss in der Startaufstellung der ganz rechts auf Platz (4) stehende Turm auch nur aus einem Stein bestehen, damit sich die Aufstellung wiederholt

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	?	1		
1. Zug		?	?	?	1	

Da die Aufteilung des linken Turmes auf Platz (1) der Startaufteilung bis zum Platz (5) reicht, wird beim 1. Zug auch ein Stein auf Platz (4) abgelegt. Da sich in der Startaufstellung dort ein Stein befand, sind es nach dem 1. Zug 2 Steine.

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	?	1		
1. Zug		?	?	2	1	

Also muss in der Startaufstellung der auf Platz (3) stehende Turm auch nur aus zwei Spielsteinen bestehen, damit sich die Aufstellung wiederholt

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	2	1		
1. Zug		?	?	2	1	

Diese Überlegung können wir fortsetzen: Da die Aufteilung des linken Turmes auf Platz (1) der Startaufteilung bis zum Platz (5) reicht, wird beim 1. Zug auch ein Stein auf Platz (3) abgelegt. Da sich in dort zwei Spielsteine befanden, sind es nach dem 1. Zug 3 Steine.

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	2	1		
1. Zug		?	3	2	1	

Also muss in der Startaufstellung der auf Platz (2) stehende Turm auch nur aus drei Spielsteinen bestehen, damit sich die Aufstellung wiederholt

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	3	2	1		
1. Zug		?	3	2	1	

Da wir bereits (3 + 2 + 1 =) 6 Spielsteine in der Startaufstellung vergeben haben, müssen in der Startaufstellung auf Platz (1) (10 – 6 =) 4 Spielsteine liegen. Ein Spiel mit der Startaufstellung 4-3-2-1 bestätigt uns, dass sich die Aufteilung der Spielsteine bei der Türme-Wanderung erhalten bleibt.

Lösungshinweise zu Teil A: Quadrato hat Geburtstag

Quadrato hat Geburtstag. Frau Dreieck, Herr Raute und seine Schwester Kreisa freuen sich auf diesen Tag.

Aufgabe 1) Quadrato stellt an seinem Geburtstag fest, dass nun Frau Dreieck vier Mal so alt ist wie er. Da bemerkte seine um drei Jahre ältere Schwester Kreisa, dass Frau Dreieck an diesem Tag drei Mal so alt ist wie sie.

Wie alt ist nun Quadrato? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1) – Antwortsatz: Quadrato ist 9 Jahre alt.

Herleitung: Wir können eine solche Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Laut Aufgabenstellung wissen wir, dass

(1) Frau Dreieck viermal so alt wie Quadrato ist.
(2) Kreise drei Jahre älter als Quadrato ist.
(3) Frau Dreieck dreimal so alt wie Kreisa ist.

Wir probieren, was aus den Aussagen (1) bis (3) folgt, wenn wir das Alter von Quadrato kennen würden. Wir tragen die Erkenntnisse in eine Tabelle ein:

Alter von Quadrato	Alter von Frau Dreieck aus (1)	Alter von Kreisa aus (2)	Alter von Frau Dreieck aus (3)	Vergleich
5	$4 \cdot 5 = 20$	$5 + 3 = 8$	$3 \cdot 8 = 24$	$20 < 24$
6	$4 \cdot 6 = 24$	$6 + 3 = 9$	$3 \cdot 9 = 27$	$24 < 27$
7	$4 \cdot 7 = 28$	$7 + 3 = 10$	$3 \cdot 10 = 30$	$28 < 30$
8	$4 \cdot 8 = 32$	$8 + 3 = 11$	$3 \cdot 11 = 33$	$32 < 33$
9	$\mathbf{4 \cdot 9 = 36}$	$\mathbf{9 + 3 = 12}$	$\mathbf{3 \cdot 12 = 36}$	$\mathbf{36 = 36}$
10	$4 \cdot 10 = 40$	$10 + 3 = 13$	$3 \cdot 13 = 39$	$40 > 39$

Nur wenn Quadrato 9 Jahre alt ist, stimmt das Alter von Frau Dreieck sowohl nach Aussage (1) als auch nach Aussage (3) überein. In der Tabelle ist die Probe enthalten: alle drei Aussagen sind richtig.

Lösungsvariante: Wir berechnen das Alter von Quadrato mit Verwendung von Gleichungen. Bezeichnen wir mit Q das Alter von Quadrato, mit K das Alter von Kreisa und mit D das Alter von Frau Dreieck, so können wir die drei Aussagen wie folgt schreiben:

(1) $D = 4 \cdot Q$ (2) $K = Q + 3$ (3) $D = 3 \cdot K$

Aus (1) und (3) finden wir die Gleichung

$$4 \cdot Q = 3 \cdot K$$

Ersetzen wir in dieser neuen Gleichung nach (2) K durch (Q + 3), so erhalten wir

$$4 \cdot Q = 3 \cdot (Q + 3) = 3 \cdot Q + 3 \cdot 3 = 3 \cdot Q + 9$$

Wir erkennen $Q = 9$. Wegen (1) finden wir $D = 4 \cdot 9 = 36$. Aus (2) folgt $K = 9 + 3 = 12$.

Wir müssen noch eine Probe durchführen: Mit diesen Werten stimmt auch das Alter von Frau Dreieck nach (3) mit dem Alter von Frau Dreieck nach (1) überein:

D = 3 · 12 = 36.

****

Aufgabe 2a) Kreisa hat für Quadrato ein Geschenk eingepackt. Ihr standen vier verschiedene einfarbige Geschenkpapiere (blau, gelb, grün und rot) zur Verfügung. Außerdem gab es gelbes, grünes und rotes Geschenkband. Zusätzlich konnte sie einen Aufkleber auswählen – ein rotes Herz, eine gelbe Sonne oder ein grünes Kleeblatt.

Wie viele Möglichkeiten hatte Kreisa bei der Zusammenstellung der Verpackung, wenn sie eine Farbe des Papiers, eine Farbe des Bandes und einen Aufkleber auswählen konnte? Schreibe alle Möglichkeiten auf oder erkläre, wie du die Anzahl ermittelt hast.

Aufgabe 2b) Beim Einpacken des Geschenkes gefiel es Kreisa besonders, wenn es richtig bunt wirkte. Wie viele Möglichkeiten hatte Kreisa bei der Zusammenstellung der Verpackung, wenn das Papier, das Band und der Aufkleber drei verschiedene Farben haben sollen? Erkläre, wie du die Anzahl ermittelt hast.

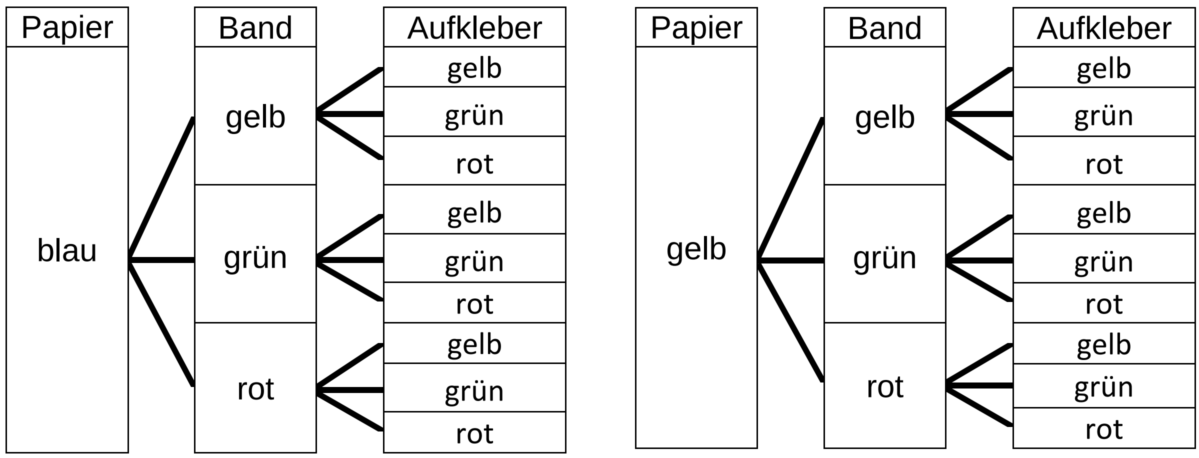
Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antortsatz: Es gibt 36 Möglichkeiten.

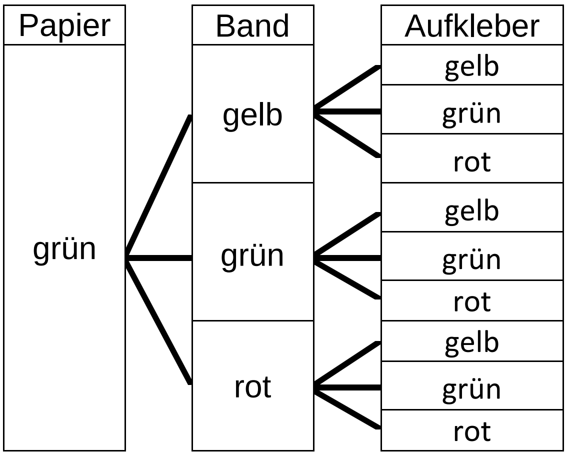
Begründung: Beginnen wir die Auswahl mit blauem Geschenkpapier, so können wir dazu 3 Farben des Bandes und für jede Bandfarbe jeweils 3 Farben des Aufklebers wählen. Es gibt also

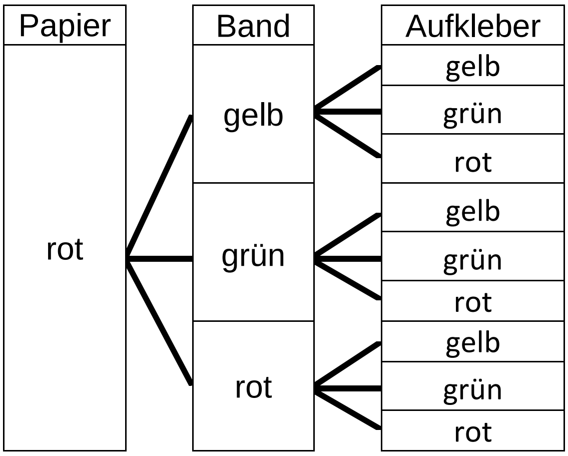
(3 Bandfarben · 3 Aufkleberfarben =) 9 verschiedene Kombinationen

mit blauem Papier. Aber auch wenn wir eine andere Farbe des Papiers auswählen, gibt es ebenfalls jeweils 9 Kombinationen. Weil es 4 Farben Papier gibt, sind es insgesamt also 4 · 9 = 36 Möglichkeiten.

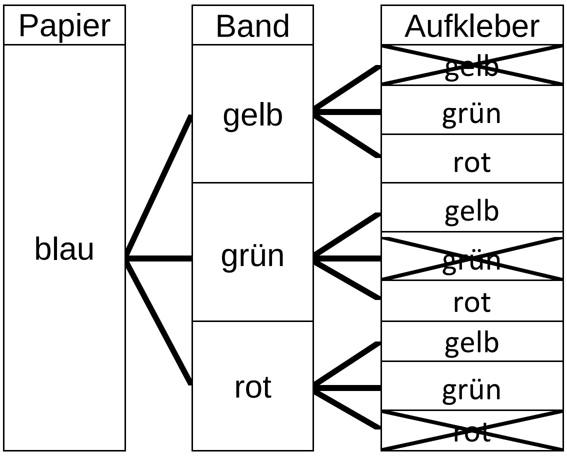
Lösungvariante: Wir können alle Möglichkeiten in einer Übersicht zeigen:

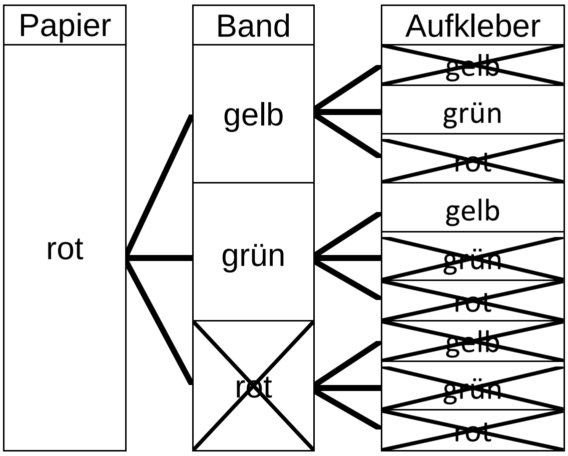


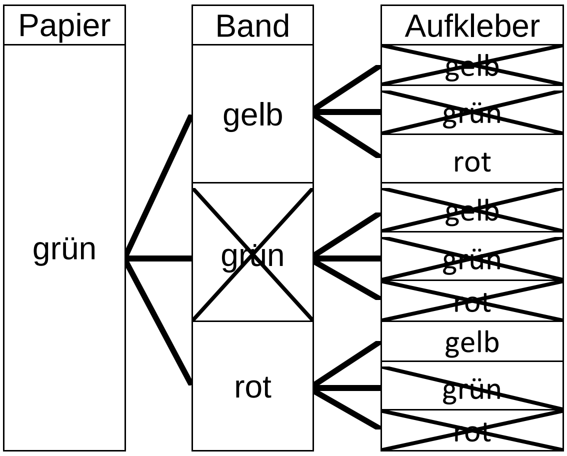


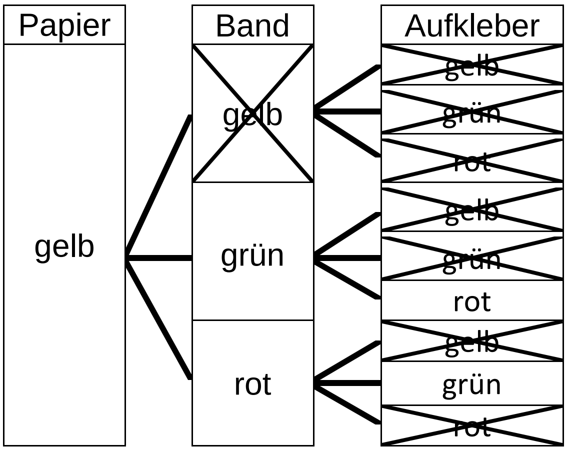


Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) Wir streichen aus den Tabellen zu Aufgabe 2a) alle Kombinationen, bei denen eine Farbe mehrfach auftritt. Es bleiben 12 Möglichkeiten übrig.









Lösungsvariante: Verwenden wir blaues Papier, können wir jede der 3 Bandfarben verwenden. Für jede Bandfarbe sind aber nur noch 2 Aufkleber möglich (weil die Farbe des Bandes nicht mehr genutzt werden kann), damit es richtig bunt wird. Für blaues Papier gibt es also (3 · 2 =) 6 Möglichkeiten.

Verwenden wir dagegen gelbes Papier, können wir nur noch 2 Bandfarben verwenden (weil nur noch grün und rot möglich ist). Für jede Bandfarbe ist dann nur noch 1 Aufkleber möglich, damit es richtig bunt wird. Für gelbes Papier gibt es also (2 · 1 =) 2 Möglichkeiten. Dies ist auch bei grünem und rotem Papier so. Also gibt es insgesamt (6 + 2 + 2 + 2 =) 12 Möglichkeiten.

****

Aufgabe 3) Als Familie Geometrie den Kaffeetisch decken wollten, stellten sie fest, dass jemand von der Torte genascht hat. Doch wer war es?

Kreisa meinte: „Quadrato war es!"
Frau Dreieck sagte: „Herr Raute war es!"
Herr Raute widersprach: „Ich war es nicht!"
Quadrato bestätigte: „Herr Raute sagt die Wahrheit!"

Nach kurzer Zeit bemerkte Kreisa, dass nicht alle die Wahrheit gesagt haben. Was war ihr aufgefallen? Erkläre es!

Kannst du aus den vier Aussagen ermitteln, wer von der Torte genascht hat, wenn nur eine der vier Aussagen falsch ist und die anderen drei Aussagen richtig sind? Wer war es? Begründe dein Ergebnis!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3) – Antwortsatz: Quadrato hat von der Torte genascht.

Begründung: Es können nicht alle Aussagen wahr sein, denn die Aussagen von Frau Dreieck und Herrn Raute widersprechen sich. Aber auch die Aussagen von Kreisa und Frau Dreieck widersprechen sich.

Wir untersuchen nun, welche Aussagen wahr und welche Aussagen falsch sind, wenn bekannt ist, wer genascht hat.

	Wer hat genascht?			
Aussagen von …	**Quadrato**	Kreisa	Frau Dreieck	Herr Raute
Kreisa	**wahr**	falsch	falsch	falsch
Frau Dreieck	**falsch**	falsch	falsch	wahr
Herr Raute	**wahr**	wahr	wahr	falsch
Quadrato	**wahr**	wahr	wahr	falsch

Nur wenn Quadrato genascht hat, ist genau eine Aussage falsch, nämlich die von Frau Dreieck). Alle anderen drei Aussagen sind wahr. Also war Quadrato der Täter.

Lösungsvariante: Wir können auch untersuchen, wer genascht hat, wenn bekannt ist, wer nicht die Wahrheit sagte. Dabei beachten wir, dass die anderen drei Aussagen alle wahr sein müssen:

- Wenn Kreisa gelogen hat, dann hat Quadrato nicht genascht. Jedoch widersprechen sich dann Frau Dreieck („Herr Raute war es") und Herr Raute („Ich war es nicht") – das kann nicht sein.
- Wenn Frau Dreieck gelogen hat, dann war es Herr Raute nicht. Dies bestätigt sowohl Herr Raute selbst als auch Quadrato. Da aber in diesem Fall Kreisa die Wahrheit sagte, hat Quadrato genascht.

- Wenn Herr Raute gelogen hat, hat er genascht, so wie es Frau Dreieck behauptet. Aber da Kreisa in diesem Fall die Wahrheit sagt, hat auch Quadrato genascht – das kann nicht sein.
- Wenn Quadrato gelogen hat, hat Herr Raute genascht, so wie es Frau Dreieck behauptet. Aber da Kreisa in diesem Fall die Wahrheit sagt, hat auch Quadrato genascht – das kann nicht sein.

Nur wenn Frau Dreieck gelogen hat, sind alle anderen Aussagen ohne Widersprüche – somit hat Quadrato genascht.

Die Untersuchung können wir abkürzen: Wenn die Aussage von Kreisa nicht gelogen sein kann, sagt sie die Wahrheit – also hat Quadrato genascht. Wir müssen nun noch prüfen, dass alle anderen Aussagen wahr sind.

****

Aufgabe 4) Quadrato wollte gern den Kaffeetisch gestalten – natürlich mit vielen Quadraten. Dazu nahm er ein quadratisches Blatt und zerschnitt es in vier kleinere Quadrate. Von den nun verfügbaren Quadraten wählte er wieder eins aus und zerschnitt es in vier kleinere Quadrate. Das konnte er immer so fortsetzen. Nach jedem Zerschneiden zählte er die Quadrate. Dabei spielte die Größe der Quadrate keine Rolle – er wollte nur die Anzahl wissen.

a) Da 13 seine Lieblingszahl ist, wollte er gern auf diese Weise 13 Quadrate erreichen. Ist das möglich, wenn er am Anfang nur ein quadratisches Blatt hat? Erkläre, wie Quadrato schneiden muss.
b) Wenn Quadrato am Anfang drei quadratische Blätter hat, kann er sie dann so zerschneiden, dass insgesamt 26 Quadrate entstehen? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Quadrato kann 13 Quadrate erhalten.

Begründung: Zu Beginn hatte Quadrato 1 quadratisches Blatt. Nachdem er dieses Blatt zerschnitten hatte, waren es 4 quadratische Blätter. Um weiter zu zerschneiden, nimmt er ein Blatt auf (es bleiben 4 – 1 = 3 Blätter liegen) und erhält 4 neue quadratische Blätter. Insgesamt sind es danach (4 – 1 + 4 =) 7 quadratische Blätter.

Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (7 – 1) + 4 = 10 Blätter.
Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (10 – 1) + 4 = 13 Blätter.

Es ist also möglich, dass er 13 Quadrate erhält.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Es ist nicht möglich, auf diese Weise 26 quadratische Blätter zu erhalten.

Begründung: In Aufgabe 4a) haben wir gesehen, dass beim Zerschneiden irgendeines der Quadrate die Gesamtzahl der Quadrate um 3 erhöht wird. Zu Beginn hatte Quadrato 3 quadratische Blätter.

Nachdem er ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (3 – 1) + 4 = 6 Blätter.
Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (6 – 1) + 4 = 9 Blätter.

Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (9 – 1) + 4 = 12 Blätter.
Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (12 – 1) + 4 = 15 Blätter.
Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (15 – 1) + 4 = 18 Blätter.
Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (18 – 1) + 4 = 21 Blätter.
Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (21 – 1) + 4 = 24 Blätter.
Nachdem er noch ein Blatt zerschnitten hatte, waren es (24 – 1) + 4 = 27 Blätter.

Quadrato erhält also immer eine Anzahl, die durch 3 teilbar ist. Er kann deshalb durch vorschriftmäßiges Zerschneiden nicht auf 26 Quadrate kommen.

****

Teil B: Türme-Wanderung

Aufgabe 1a) Quadrato beginnt ein Spiel mit der Startaufstellung 1-3-1-2. Nach dem 4. Zug sieht er die Verteilung 1-1-2-3. Schreibe den Spielverlauf vollständig auf und prüfe, ob Quadrato seine Spielzüge korrekt ausgeführt hat.

Aufgabe 1b) Quadrato beginnt nun mit der Startaufstellung 2-2-2-2. Schreibe den Spielverlauf bis zum 7. Zug auf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Quadrato hat die Züge korrekt ausgeführt.

Begründung: Wir schreiben den Spielverlauf vollständig auf und erhalten nach dem 4. Zug die Aufstellung 1 – 1 – 2 – 3, so wie es in der Aufgabe behauptet wurde.

Start	1	3	1	2									
1. Zug		2	0	1	4								
2. Zug		1	0	0	3	3							
3. Zug					2	2	3						
4. Zug					**1**	**1**	**2**	**3**					

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) Bei dieser Aufgabe genügt es, den Spielverlauf bis zum 7. Zug aufzuschreiben.

Start	2	2	2	2									
1. Zug	1	1	1	1	4								
2. Zug					3	5							
3. Zug					2	4	2						
4. Zug					1	3	1	3					
5. Zug						2	0	2	4				
6. Zug						1	0	1	3	3			
7. Zug									**2**	**2**	**4**		

****

Aufgabe 2) Bei einem neuen Spiel erhält er im Spielverlauf die Aufstellung 2-0-2-3. Wie könnte seine Startaufstellung ausgesehen haben? Begründe! Untersuche, ob die Aufgabe eindeutig lösbar ist. Wenn es mehrere Möglichkeiten geben kann, schreibe möglichst viele verschiedene Startaufstellungen auf, die bei korrektem Spielverlauf auf 2-0-2-3 kommen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Die Suche nach einer Startaufstellung ist nicht eindeutig. Es können 3 – 1 – 3. 1 – 4 – 2, 2 – 5 und 1 – 1 – 1 – 1 – 3 Startaufstellungen sein.

Herleitung: Da im letzten Zug ganz rechts ein Turm mit 3 Steinen steht, müssen es im vorletzten Zug 3 Türme sein. Es könnte sein, dass diese 3 Türme nebeneinander stehen. Da bei jedem Zug die Anzahl der Steine eines Turmes um einen Stein verringert werden, ist der Stand nach dem vorletzten Zug eindeutig bestimmt. (3 – 1 – 1 – 3 könnte eine Startaufstellung sein.)

Vorletzter Zug						3	1	3					
Letzter Zug						2	0	2	3				

Da im vorletzten Zug ganz rechts wieder ein Turm mit 3 Steinen steht, müssen im Zug davor 3 Türme gestanden haben. Die zwei rechten Türme sind eindeutig bestimmt. Der 3. Turm könnte direkt daneben mit der Höhe 1 stehen. (1 – 4 – 2 könnte eine Startaufstellung sein.)

					1	4	2						
Vorletzter Zug						3	1	3					
Letzter Zug						2	0	2	3				

Da nun ganz rechts ein Turm mit 2 Steinen steht, müssen im Zug davor 2 Türme gestanden haben. Diese zwei Türme sind eindeutig bestimmt. (2 – 5 könnte eine Startaufstellung sein.)

					2	5							
					1	4	2						
Vorletzter Zug						3	1	3					
Letzter Zug						2	0	2	3				

Da nun ganz rechts ein Turm mit 5 Steinen steht, müssen im Zug davor 5 Türme gestanden haben. Der Türme ganz rechts ist eindeutig bestimmt. (1 – 1 – 1 – 1 – 3 könnte eine Startaufstellung sein.) Der Spielverlauf bestätigt das Ergebnis:

Start	1	1	1	1	3								
1. Zug					2	5							
2. Zug					1	4	2						
3. Zug						3	1	3					
4. Zug						2	0	2	3				

Weiter lässt sich der Spielverlauf in dieser Art nicht zurückverfolgen. Da nun ganz rechts ein Turm mit 3 Steinen steht, müssten in einem Zug davor 3 Türme gestanden haben. Das ist aber bei den besetzten 5 Feldern nicht möglich.

Es gibt aber auch noch andere mögliche Startaufstellungen, die aber für eine vollständige Lösungsdarstellung nicht erforderlich waren.

Im vorletzten Zug könnte auch 1 – 3 – 0 – 3 stehen. Weil hier eine Lücke zu sehen ist, ist dies keine zulässige Startaufstellung, aber als vorheriger Zug finden wir mit 2 – 4 – 1 eine Startaufstellung, wie der Spielverlauf zeigt:

Start	2	4	1										
1. Zug	1	3	0	3									
2. Zug		2	0	2	3								

Auch 1 – 1 – 1 – 3 – 1 ist eine zulässige Startaufstellung, wie der Spielverlauf bestätigt:

Start	1	1	1	3	1								
1. Zug				2	0	5							
2. Zug				1	0	4	2						
3. Zug						3	1	3					
4. Zug						2	0	2	3				

****

Aufgabe 3a) Quadrato hat eine Startaufstellung gefunden, bei der nach dem 3. Zug eine Lücke von drei nebeneinanderliegenden Feldern entsteht. Gib auch du eine solche Startaufstellung an und zeige im Spielverlauf, dass bei deiner Startaufstellung eine solche Lücke entsteht.

Aufgabe 3b) Als Kreisa die Startaufstellung von Quadrato sah, rief sie aus „Jetzt kann ich eine Startaufstellung angeben, bei der nach dem 7. Zug eine Lücke von sieben nebeneinanderliegenden Feldern entsteht. Kannst du es auch? Schreibe eine solche Startaufstellung auf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Eine mögliche Startaufstellung ist 4 – 3 – 3 – 3.

Begründung: Es genügt, eine Startaufstellung anzugeben und den Spielverlauf aufzuschreiben, um die Lücke mit 3 leeren Feldern zu bestätigen.

Start	4	3	3	3									
1. Zug	3	2	2	2	4								
2. Zug	2	1	1	1	3	5							
3. Zug	1	0	0	0	2	4	6						

Es gibt auch andere zulässige Startaufstellungen mit dieser Eigenschaft, zum Beispiel:

Start	4	1	2	3									
1. Zug	3	0	1	2	4								
2. Zug	2	0	0	1	3	4							
3. Zug	1	0	0	0	2	3	4						

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Eine mögliche Startaufstellung ist 8 – 7 – 7 – 7 – 7 – 7 – 7 – 7.

Begründung: Es genügt, eine Startaufstellung anzugeben und den Spielverlauf aufzuschreiben, um die Lücke mit 7 leeren Feldern zu bestätigen.

Start	8	7	7	7	7	7	7	7							
1. Zug	7	6	6	6	6	6	6	6	8						
2. Zug	6	5	5	5	5	5	5	5	7	9					
3. Zug	5	4	4	4	4	4	4	4	6	8	10				
4. Zug	4	3	3	3	3	3	3	3	5	7	9	11			
5. Zug	3	2	2	2	2	2	2	2	4	6	8	10	12		
6. Zug	2	1	1	1	1	1	1	1	3	5	7	9	11	13	
7. Zug	1	0	0	0	0	0	0	0	2	4	6	8	10	11	14

Oder

Start	8	1	2	3	4	5	6	7							
1. Zug	7	0	1	2	3	4	5	6	8						
2. Zug	6	0	0	1	2	3	4	5	7	8					
3. Zug	5	0	0	0	1	2	3	4	6	7	8				
4. Zug	4	0	0	0	0	1	2	3	5	6	7	8			
5. Zug	3	0	0	0	0	0	1	2	4	5	6	7	8		
6. Zug	2	0	0	0	0	0	0	1	3	4	5	6	7	8	
7. Zug	1	0	0	0	0	0	0	0	2	3	4	5	6	7	8

****

Aufgabe 4) Kann es Startaufstellungen mit 5 Türmen geben, die nach rechts wandern, dabei aber die Aufteilung der Spiel-Steine nicht verändern? Falls es solche Startaufstellungen gibt, schreibe eine auf und zeige den Spielverlauf für die ersten Züge.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4) – Antwortsatz: Die Aufstellung 1 – 2 – 3 – 4 – 5 ist eine solche Startaufstellung.

Begründung: Es genügt, eine Startaufstellung anzugeben und den Spielverlauf aufzuschreiben, um zu zeigen, dass die Aufstellung wandert, ohne aber die Turmanordnung zu verändern. Dabei muss nur der 1. Zug gezeigt werden, denn der Spielverlauf setzt sich dann genau so fort

Start	1	2	3	4	5								
1. Zug		1	2	3	4	5							

Herleitung: Es wurde nicht verlangt, diese Startaufstellung herzuleiten. Aber nehmen wir an, eine geeignete Startaufstellung mit 5 Türmen ohne Lücken gefunden zu haben.

Start	?	?	?	?	?								
1. Zug	?	?	?	?	?	5							

Nach dem ersten Zug muss ganz rechts ein Turm mit 5 Steinen stehen. Stimmen die Aufstellungen zum Start und nach dem 1. Zug überein, finden wir also:

Start	?	?	?	?	5								
1. Zug	?	?	?	?	?	5							

Jetzt ist ersichtlich: Unter der 5 in der Startaufstellung muss eine 4 nach dem 1. Zug stehen (Es wird ja ein Stein von der 5 weggenommen.). Stimmen die Aufstellungen zum Start und nach dem 1. Zug überein, muss links neben der 5 in der Startaufstellung ebenfalls eine 4 stehen und so weiter.

Teil A: Beim Kartenspiel

Aufgabe 1) Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und Quadrato – spielt ein Kartenspiel. Nach jeder Runde werden Punkte verteilt: Der Beste erhält 4 Punkte, der Zweitbeste 3 Punkte, der Drittbeste 2 Punkte und der Letzte 1 Punkt. Es werden nach jeder Runde immer 10 Punkte vergeben. Dabei werden aber keine halben Punkte vergeben. Nach drei Runden werden für jeden Spieler die Ergebnisse jeder Runde addiert. Jeder hat eine verschiedene Summe – eine Reihenfolge der Spieler kann also nach drei Runden eindeutig ermittelt werden. Sie stellen fest:

Kreisa hat 5 Punkte mehr als Quadrato,
Herr Raute hat halb so viele Punkte wie Kreisa.

Ermittle die Reihenfolge der Spieler und gib jeweils an, wie viele Punkte jeder erreicht hat.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – *Antwortsatz:* Kreisa wurde Erste und erreichte 12 Punkte, Quadrato wurde Zweiter und schaffte 7 Punkte, Herr Raute wurde mit 6 Punkten Dritter und Frau Dreieck wurde Letzte mit 5 Punkten.

Herleitung: Wir untersuchen zuerst, wie viele Punkte in drei Runden überhaupt erreicht werden können.

- Da in jeder Runde (1 + 2 + 3 + 4 =)10 Punkte vergeben werden, sind es in drei Runden insgesamt (3 · 10 =) 30 Punkte.
- Da der Erste in jeder Runde 4 Punkte erhält, kann jeder Mitspieler maximal (3 · 4 =) 12 Punkte erhalten.
- Da der Letzte in jeder Runde 1 Punkt erhält, muss jeder mindeste (3 · 1 =) 3 Punkte erhalten.

Wir können die Aufgabe nun durch systematisches Probieren lösen. Wir probieren zum Beispiel, wie viele Punkte Quadrato erreicht haben könnte, und ermitteln anhand der Aussagen aus dem Aufgabentext, wie viele Punkte dann die anderen Mitspieler erreichten. Anschließend prüfen wir, ob alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind. Wir tragen unsere Ergebnisse übersichtlich in einer Tabelle ein. Da jeder mindestens 3 Punkte erreichte, beginnen wir für Quadrato mit dieser Punktzahl.

Punkte für Quadrato	Punkte für Kreisa	Punkte für Herr Raute	Punkte für Frau Dreieck	Feststellung
3	3 + 5 = 8	8 : 2 = 4	30 – 3 – 8 – 4 = 15	15 > 12, nicht möglich
4	4 + 5 = 9	9 : 2 = 4½	x	keine halben Punkte
5	5 + 5 = 10	10 : 2 = 5	30 – 5 – 10 – 5 = 10	verschiedene Punktzahlen
6	6 + 5 = 11	11 : 2 = 5½	x	keine halben Punkte
7	**7 + 5 = 12**	**12 : 2 = 6**	**30 – 7 – 12 – 6 = 5**	
8	8 + 5 = 13	x	x	13 > 12, nicht möglich

Nur wenn Quadrato 7 Punkte erreichte, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In diesem Fall schaffte Kreisa 12 Punkte, Herr Raute 6 Punkte und Frau Dreieck wurde mit 5 Punkten Letzte.

Wir können aber auch schätzen, wie viele Punkte Herr Raute erhalten hat. Da jeder mindestens 3 Punkte erreichte, beginnen wir für Herrn Raute mit dieser Punktzahl.

Punkte für Herr Raute	Punkte für Kreisa	Punkte für Quadrato	Punkte für Frau Dreieck	Feststellung
3	$2 \cdot 3 = 6$	$6 - 5 = 1$	x	1 < 3, nicht möglich
4	$2 \cdot 4 = 8$	$8 - 5 = 3$	$30 - 4 - 8 - 3 = 15$	15 > 12, nicht möglich
5	$2 \cdot 5 = 10$	$10 - 5 = 5$	x	verschiedene Punktzahlen
6	$\mathbf{2 \cdot 6 = 12}$	$\mathbf{12 - 5 = 7}$	$\mathbf{30 - 6 - 12 - 7 = 5}$	
7	$2 \cdot 7 = 14$	x	x	14 > 12, nicht möglich

Nur wenn Herr Raute 6 Punkte erreichte, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Wie schon oben ermittelt schaffte Kreisa 12 Punkte, Quadrato 7 Punkte und Frau Dreieck wurde mit 5 Punkten Letzte.

Wir können aber auch schätzen, wie viele Punkte Kreisa erhalten hat. Wir erhalten das gleiche Ergebnis (probiere es!).

Lösungsvariante: Wir wollen die Aufgabe mit Hilfe von Gleichungen lösen. Dazu kürzen wir die erreichte Punktzahl von Kreisa mit K, die von Quadrato mit Q, die von Herrn Raute mit R und die von Frau Dreieck mit D ab. Damit können wir die Aussagen aus dem Aufgabentext wie folgt aufschreiben:

$$K = Q + 5 \quad ; \quad K = 2 \cdot R \quad ; \quad D = 30 - K - Q - R$$

Ersetzen wir in der rechten Gleichung K durch $2 \cdot R$ und Q durch $2 \cdot R - 5$, so erhalten wir

$$D = 30 - 2 \cdot R - (2 \cdot R - 5) - R = 30 - 5 \cdot R + 5 = 35 - 5 \cdot R.$$

Damit können wir D und R noch nicht berechnen. Wir erkennen aber, dass auf der rechten Seite der Gleichung sowohl 35 als auch $5 \cdot R$ durch 5 teilbar sind. Deshalb ist auch D durch 5 teilbar. Wegen der Einschränkung $3 \le D \le 12$ kann also nur $D = 5$ oder $D = 10$ gelten.

- Im Fall $D = 5$ erhalten wir aus $5 = 35 - 5 \cdot R$ die Punktzahl $R = 6$ und damit $K = 2 \cdot R = 12$ sowie $Q = 12 - 5 = 7$.
- Im Fall $D = 10$ erhalten wir aus $10 = 35 - 5 \cdot R$ die Punktzahl $R = 5$ und damit $K = 2 \cdot R = 10$. In diesem Fall hat Kreisa so viele Punkte wie Frau Dreieck. Dies war im Aufgabentext ausgeschlossen, d.h. mit $D = 10$ lassen sich die Bedingungen der Aufgabe nicht alle erfüllen.

Hinweis: Es genügt nicht, nur die Lösung anzugeben. Es wird eine Herleitung erwartet, um zu sehen, wie du die Lösung gefunden hast. Natürlich kannst du beim Probieren Glück haben und gleich beim ersten Mal das richtige Ergebnis finden – dann muss du aber zeigen, dass alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind.

Ergänzung: Es war in der Aufgabenstellung nicht verlangt, nachzuweisen, dass die berechneten Punkte auch wirklich am Ende des Kartenspiels möglich sein können.

- Kreisa gewann alle drei Runden ($3 \cdot 4 = 12$).
- Frau Dreieck verlor ein Spiel und wurde zweimal Dritte ($1 + 2 \cdot 2 = 5$),
- Quadrato wurde zweimal Zweiter und verlor ein Spiel ($2 \cdot 3 + 1 = 7$).
- Herr Raute verlor ein Spiel, wurde einmal Dritter und einmal Zweiter ($1 + 2 + 3 =$) 6 Punkte.

****

Aufgabe 2) Familie Geometrie spielt noch einmal das Kartenspiel über drei Runden. Die Spielregeln sind wie in Aufgabe 1. Auch dieses Mal kann die Reihenfolge nach drei Runden eindeutig ermittelt werden. Sie schätzen das Ergebnis.

> Kreisa sagt: „Ich habe mehr Punkte als Frau Dreieck und Herr Raute zusammen.“
> Herr Raute gibt an: „Ich habe mehr Punkte als Kreisa und Frau Dreieck zusammen.“
> Quadrato frohlockt: „Ich habe kein Spiel verloren – ich bin sicher der Beste.“
> Schließlich meint Frau Dreieck: „Ich bin besser als Herr Raute.“

Doch Kreisa bemerkt, dass nicht alle Aussagen wahr sein können. Was ist ihr aufgefallen? Erkläre es.

Wer hat dieses neue Spiel über drei Runden gewonnen, wenn nur eine Aussage falsch war und die anderen richtig geschätzt haben? Begründe.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – *Antwortsatz:* Quadrato hat das Spiel über drei Runden gewonnen.

Begründung: Kreisa hat bemerkt, dass sich die Aussagen von Herrn Raute und Frau Dreieck widersprechen. Wenn Herr Raute mehr Punkte als Kreisa und Frau Dreieck zusammen hat, hat er natürlich auch mehr Punkte als Frau Dreieck. Dann kann aber Frau Dreieck nicht besser als Herr Raute sein. Deshalb muss eine dieser beiden Aussagen falsch sein.

Aber auch die Aussagen von Kreisa und Herrn Raute widersprechen sich. Wenn Herr Raute mehr Punkte als Kreisa und Frau Dreieck zusammen hat, hat er natürlich auch mehr Punkte als Kreisa. Wenn Kreisa mehr Punkte als Frau Dreieck und Herr Raute zusammen hat, hat sie natürlich auch mehr Punkte als Herr Raute. Beides kann nicht gleichzeitig gelten. Deshalb muss auch eine dieser beiden Aussagen falsch sein.

Da aber insgesamt nur eine Aussage falsch sein soll, muss es die von Herrn Raute sein, da sie bei beiden Widersprüchen auftritt. Dann sind alle anderen drei Aussagen wahr. Insbesondere ist die Aussage von Quadrato wahr – er wurde Bester und gewann somit das Kartenspiel über drei Runden.

Ergänzung: In der Aufgabenstellung wurde nicht verlangt, die Platzierung der anderen Mitspieler zu ermitteln. Dies ist aber möglich:

- Da die Aussage von Kreisa wahr ist und sie mehr Punkte als Frau Dreieck und Herr Raute zusammen erreichte, ist sie besser als Frau Dreieck und auch besser als Herr Raute – Kreisa wurde also Zweite.
- Da die Aussage von Frau Dreieck wahr ist, schaffte sie eine Platzierung vor Herrn Raute und wurde Dritte.
- Für Herrn Raute blieb nur der vierte Platz.

Die erreichten Punktzahlen können wir dagegen nicht eindeutig ermitteln:

- Hätte Quadrato als Bester 12 Punkte und Kreisa 11 Punkte, verbleiben für Frau Dreieck und Herrn Raute noch (30 – 12 – 11 =) 7 Punkte. Dafür wären aber 5 vierte Plätze und 1 dritter Platz nötig – dies ist unmöglich.
- Hätte Quadrato als Bester 12 Punkte und Kreisa 10 Punkte, verbleiben für Frau Dreieck und Herrn Raute noch (30 – 12 – 10 =) 8 Punkte. Dafür wären aber 4 vierte und 2 dritte Plätze nötig – dies ist unmöglich.
- Hätte Quadrato als Bester 12 Punkte und Kreisa 9 Punkte, verbleiben für Frau Dreieck und Herrn Raute noch (30 – 12 – 9 =) 9 Punkte. Dann hätte aber Kreisa nicht mehr Punkte als Frau Dreieck und Herr Raute zusammen.
- Hat Quadrato als Bester (4 + 4 + 3 =) 11 Punkte und Kreisa (4 + 3 + 3 =) 10 Punkte, verbleiben für Frau Dreieck und Herrn Raute noch (30 – 11 – 10 =) 9 Punkte. Dann hat Frau Dreieck (2 + 2 + 2 =) 6 Punkte und Herr Raute (1 + 1 + 1 =) 3 Punkte. Oder es hat Frau Dreieck (2 + 2 + 1 =) 5 Punkte und Herr Raute (1 + 1 + 2 =) 4 Punkte.
- Hätte Quadrato als Bester 11 Punkte und Kreisa 9 Punkte, verbleiben für Frau Dreieck und Herrn Raute noch (30 – 11 – 9 =) 10 Punkte. Dann hätte aber Kreisa nicht mehr Punkte als Frau Dreieck und Herr Raute zusammen. Dies wäre auch so, wenn Quadrato noch weniger Punkte hätte.

****

Aufgabe 3a) Quadrato spielt nun allein und legt auf den Tisch 9 Spielkarten mit den Zahlen von 1 bis 9. (Auf jeder Spielkarte steht genau eine Zahl und alle 9 Zahlen sind zu sehen.)

Wie viele Möglichkeiten hat Quadrato, sich 3 Karten zu nehmen, so dass die Summe dieser Karten genau 13 ergibt. (Die Reihenfolge der Karten spielt dabei keine Rolle. Nach jeder Möglichkeit legt er die 3 Karten wieder auf den Tisch und sucht die nächste Möglichkeit aus allen 9 Karten.)

Aufgabe 3b) Wie viele Möglichkeiten hat Quadrato, sich 5 Karten zu nehmen, so dass die Summe dieser Karten genau 21 ergibt. (Die Reihenfolge der Karten spielt keine Rolle. Nach jeder Möglichkeit legt er die Karten wieder auf den Tisch und sucht die nächste Möglichkeit aus allen 9 Karten.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – *Antwortsatz:* Quadrato hat 7 verschiedene Möglichkeiten, mit drei Karten genau die Summe 13 zu erhalten.

Begründung: Wir schreiben alle Möglichkeiten auf, wie Quadrato mit drei Karten die Summe 13 erreichen kann.

Hat Quadrato als kleinste Karte die „1“ genommen, muss er mit den beiden anderen Karten die Summe 12 erreichen. Dafür hat er 3 Möglichkeiten:

1 – 3 – 9, 1 – 4 – 8, 1 – 5 – 7,

Hat Quadrato als kleinste Karte die „2“ genommen, muss er mit den beiden anderen Karten die Summe 11 erreichen. Dafür hat er 3 Möglichkeiten:

2 – 3 – 8, 2 – 4 – 7, 2 – 5 – 6

Hat Quadrato als kleinste Karte die „3“ genommen, muss er mit den beiden anderen Karten die Summe 10 erreichen. Dafür hat er nur 1 Möglichkeiten:

3 – 4 – 6

Hat Quadrato als kleinste Karte die „4“ oder eine höhere Zahl genommen, so beträgt die Summe der drei Karten mindesten $4 + 5 + 6 = 15 > 13$. Es gibt also keine weiteren Möglichkeiten.

Insgesamt sind es (3 + 3 + 1 =) 7 verschiedene Möglichkeiten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b – *Anwortsatz:* Quadrato hat 8 verschiedene Möglichkeiten, mit 5 Karten genau die Summe 21 zu erreichen.

Begründung: Wir versuchen zunächst, 4 Karten mit möglichst kleinen Zahlen zu nehmen, um dann mit der 5. Karte die Summe zu 21 zu ergänzen.

1 – 2 – 3 – 6 – 9, 1 – 2 – 3 – 7 – 8,
1 – 2 – 4 – 5 – 9, 1 – 2 – 4 – 6 – 8
1 – 3 – 4 – 5 – 8, 1 – 3 – 4 – 6 – 7,
1 – 3 – 5 – 6 – 7
2 – 3 – 4 – 5 – 7,

****

Aufgabe 4a) Abschließend spielen Quadrato und Kreisa gegeneinander. Sie legen vier Karten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 offen auf den Tisch und ziehen abwechselnd eine Karte. Quadrato beginnt. Quadrato hat folgende Spielregel vorgeschlagen: Wenn die Summe der zwei Karten von Quadrato eine gerade Zahl ergibt, hat Quadrato gewonnen. Ist die Summe der beiden Karten von Quadrato ungeradzahlig, hat Kreisa gewonnen.

Nach einigen Spielrunden stellen sie fest, dass Kreisa immer geschickt spielte und jedesmal gewann. Wie kann es sein, dass Kreisa immer gewinnen konnte? Erkläre, wie Kreisa dafür spielen musste.

Aufgabe 4b) Quadrato schlägt vor, nun mit sechs Karten mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu spielen? Kann Kreisa wieder gewinnen, auch wenn Quadrato geschickt spielt? Begründe deine Antwort.

Tipp: Spiele dieses Spiel mit deinen Freunden, Geschwistern oder Eltern!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a – *Antwortsatz:* Kreisa kann das Spiel immer gewinnen.

Begründung:

- Zieht Quadrato zu Beginn die „1“, so nimmt Kreisa die „3“. Nun liegen nur noch gerade Zahlen auf dem Tisch („2“ und „4“). Egal, welche der beiden Karten Quadrato zieht, er hat nun eine ungerade und eine gerade Zahl gezogen – deren Summe ist aber ungerade und Quadrato hat verloren.
- Zieht Quadrato zu Beginn die „2“, so nimmt Kreisa die „4“. Nun liegen nur noch ungerade Zahlen auf dem Tisch („1“ und „3“). Egal, welche der beiden Karten Quadrato zieht, er hat nun eine ungerade und eine gerade Zahl gezogen – deren Summe ist aber ungerade und Quadrato hat verloren.
- Zieht Quadrato zu Beginn die „3“, so nimmt Kreisa die „1“. Nun liegen nur noch gerade Zahlen auf dem Tisch („2“ und „4“). Egal, welche der beiden Karten Quadrato zieht, er hat nun eine ungerade und eine gerade Zahl gezogen – deren Summe ist aber ungerade und Quadrato hat verloren.
- Zieht Quadrato zu Beginn die „4“, so nimmt Kreisa die „2“. Nun liegen nur noch ungerade Zahlen auf dem Tisch („1“ und „3“). Egal, welche der beiden Karten Quadrato zieht, er hat nun eine ungerade und eine gerade Zahl gezogen – deren Summe ist aber ungerade und Quadrato hat verloren.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b – *Antwortsatz:* Quadrato kann nun immer gewinnen, wenn er überlegt (geschickt) spielt.

Begründung: Endet das Spiel, wenn Quadrato und Kreisa jeweils zwei Karten gezogen haben, kann Quadrato immer gewinnen. Da drei ungerade Zahlen auf dem Tisch liegen, kann Kreisa nicht verhindern, dass Quadrato zwei ungerade Zahlen ziehen kann. Da aber auch drei gerade Zahlen auf dem Tisch liegen, kann Kreisa nicht verhindern, dass Quadrato zwei gerade Zahlen ziehen kann. Quadrato kann es sich also aussuchen, was er im ersten Zug zieht,

Spannender ist das Spiel, wenn alle sechs Karten zu ziehen sind: Quadrato beginnt und zieht die Karte „1“.

- Zieht Kreisa in ihrem ersten Zug eine gerade Zahl (zum Beispiel die „2“), so zieht Quadrato in seinem zweiten Zug die „3“. Nun liegen auf dem Tisch noch die „5“ und zwei gerade Zahlen. Egal, was Kreisa in ihrem zweiten Zug zieht, es bleibt eine gerade Zahl liegen, die Quadrato nun ziehen kann. Er hat also zwei ungerade Zahlen und eine gerade Zahl gezogen, deren Summe gerade ist. Quadrato hat gewonnen.
- Zieht Kreisa in ihrem ersten Zug eine ungerade Zahl (zum Beispiel die „3“), so zieht Quadrato in seinem zweiten Zug die letzte noch verbliebende ungerade Zahl Nun liegen auf dem Tisch nur gerade Zahlen. Egal, was Kreisa in ihrem zweiten Zug zieht, Quadrato kann in seinem dritten Zug noch eine gerade Zahl ziehen. Er hat also zwei ungerade Zahlen und eine gerade Zahl gezogen, deren Summe gerade ist. Quadrato hat gewonnen.

Quadrato kann auch gewinnen, wenn er im ersten Zug „3“ oder „5“ zieht.

Ergänzung: Quadrato muss überlegt (geschickt) spielen, um zu gewinnen. Er darf in seinem ersten Zug keine gerade Zahl ziehen. Zieht er zum Beispiel die „2“, kann Kreisa gewinnen, wenn sie in ihrem ersten Zug die „1“ zieht.

- Zieht Quadrato in seinem zweiten Zug noch eine gerade Zahl, so liegen auf dem Tisch zwei ungerade Zahlen und eine gerade Zahl. Zieht Kreisa in ihrem zweiten Zug die letzte verbliebene gerade Zahl, muss Quadrato im dritten Zug eine ungerade Zahl ziehen. Er hat nun zwei gerade und eine ungerade Zahl, deren Summe ungerade ist - er hat verloren.
- Zieht Quadrato in seinem zweiten Zug eine ungerade Zahl, so liegen auf dem Tisch eine ungerade Zahl und zwei gerade Zahlen. Zieht Kreisa in ihrem zweiten Zug die letzte verbliebene ungerade Zahl, muss Quadrato im dritten Zug eine gerade Zahl ziehen. Er hat nun zwei gerade und eine ungerade Zahl gezogen, deren Summe ungerade ist – er hat verloren.

Kreisa kann auch gewinnen, wenn Quadrato im ersten Zug „4“ oder „6“ zieht.

Übrigens: Kreisa verliert, wenn Quadrato gewonnen hat – egal, welche Karten sie gezogen hat.

****

Teil B: Türme-Wanderung

Aufgabe 1) Quadrato beginnt mit der Startaufstellung 2 – 3 – 3. Schreibe den vollständigen Spielverlauf auf, wenn er immer Minus-Züge anwendet.

Lösung zu Aufgabe 1: Es genügt, den vollständigen Spielverlauf aufzuschreiben. Zur Kontrolle notieren wir ganz rechts die Anzahl der verwendeten Spiel-Steine: Nach jedem Minus-Zug muss es ein Spiel-Stein weniger sein als nach dem vorangegangenen Zug.

Start	2	3	3								*8*
1. Minus-Zug		4	3								*7*
2. Minus-Zug			4	1	1						*6*
3. Minus-Zug				2	2	1					*5*
4. Minus-Zug					3	1					*4*
5. Minus-Zug						2	1				*3*
6. Minus-Zug							2				*2*
7. Minus-Zug								1			*1*

****

Aufgabe 2a) Er wählt wieder die Startaufstellung 2 – 3 – 3 und beginnt mit einem Minus-Zug. Schreibe den Spielverlauf bis zum 7. Zug auf.

Aufgabe 2b) Kreisa hat Quadratos Spiel beobachtet. Sie möchte nun das Ergebnis nach dem 25. Zug wissen, ohne dafür den weiteren Spielverlauf vollständig aufzuschreiben. Wie kann sie es ermitteln? Hilf ihr und erkläre deine Rechnung.

Lösung zur Aufgabe 2a: Es genügt, den Spielverlauf vollständig aufzuschreiben. Zur Kontrolle notieren wir wieder ganz rechts die Anzahl der verwendeten Spiel-Steine: Nach jedem Minus-Zug muss es ein Spiel-Stein weniger sein; nach jedem Plus-Zug muss es ein Spiel-Stein mehr sein.

Start	2	3	3											*8*
1. Minus-Zug		4	3											*7*
2. Plus-Zug			4	1	1	1	1							*8*
3. Minus-Zug				2	2	2	1							*7*
4. Plus-Zug					3	3	2							*8*
5. Minus-Zug						4	3							*7*
6. Plus-Zug							4	1	1	1	1			*8*
7. Minus-Zug								2	2	2	1			*7*

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b: Kreisa hat beobachtet, dass nach dem 5. Zug die gleiche Spielsituation wie nach dem 1. Zug (4 – 3) zu sehen ist, also nach 4 Zügen. Sie vermutet deshalb, dass diese Situation auch nach dem (5 + 4 =) 9. Zug wieder auftritt. Sie prüft ihre Vermutung:

5. Minus-Zug						4	3								*7*
6. Plus-Zug							4	1	1	1	1				*8*
7. Minus-Zug								2	2	2	1				*7*
8. Plus-Zug									3	3	2				*8*
9. Minus-Zug										4	3				*7*

Nun weiß Kreisa, dass diese Situation auch nach dem (9 + 4 =) 13. Zug, nach dem (13 + 4 =) 17. Zug, nach dem (17 + 4 =) 21. Zug und nach dem (21 + 4 =) 25. Zug auftreten wird.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a: Quadrato überlegt sich, wie viele Spiel-Steine nach jedem Zug verwendet werden. Dazu muss er den genauen Spielverlauf nicht kennen (wir schreiben ihn aber zur Kontrolle doch auf):

Start	2	1	2						*5*
1. Minus-Zug		2	2						*4*
2. Plus-Zug			3	1	1				*5*
3. Minus-Zug				2	2				*4*

Start	2	1	2							*5*
1. Plus-Zug		2	3	1						*6*
2. Minus-Zug			4	1						*5*
3. Plus-Zug				2	1	1	1	1		*6*

4. Plus-Zug					3	1	1		*5*		4. Minus-Zug					2	1	1	1		*5*
5. Minus-Zug						2	2		*4*		5. Plus-Zug						2	2	2		*6*

Beginnt Quadrato mit einem Minus-Zug, werden nach dem 5. Zug vier Spiel-Steine zu sehen sein. Beginnt er mit einem Plus-Zug, werden nach dem 5. Zug sechs Spiel-Steine zu sehen sein. Die Ergebnisse stimmen nicht überein.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b: Aus der Aufgabe 3a) erkennen wir, dass nach dem 6. Zug die Anzahl der verwendeten Spiel-Steine gleich der Anzahl in der Startaufstellung sein wird, unabhängig davon, mit welchem Zug Quadrato beginnt. Wir schreiben deshalb die Spielverläufe vollständig auf.

Start	5	4	3	2	1									*15*
1. Minus-Zug		5	4	3	2									*14*
2. Plus-Zug			5	4	3	1	1	1						*15*
3. Minus-Zug				5	4	2	2	1						*14*
4. Plus-Zug					5	3	3	2	1	1				*15*
5. Minus-Zug						4	4	3	2	1				*14*
6. Plus-Zug							5	4	3	2	1			*15*

Start	5	4	3	2	1									*15*
1. Plus-Zug		5	4	3	2	1	1							*16*
2. Minus-Zug			5	4	3	2	1							*15*
3. Plus-Zug				5	4	3	2	1	1					*16*
4. Minus-Zug					5	4	3	2	1					*15*
5. Plus-Zug						5	4	3	2	1	1			*16*
6. Minus-Zug							5	4	3	2	1			*15*

Wir erkennen: Die Aufstellung der Spiel-Steine ist nach dem 6. Zug jeweils gleich 5 – 4 – 3 – 2 – 1, unabhängig davon, ob Quadrato mit einem Minus-Zug oder mit einem Plus-Zug beginnt.

Außerdem beobachten wir, dass die Aufstellung nach dem 6. Zug der Startaufstellung entspricht. Diese wird erst nach dem 6. Zug wieder erreicht, wenn Quadrato mit einem Minus-Zug beginnt, jedoch schon nach dem 2, Zug (und damit auch nach dem 4. Zug und nach dem 6. Zug), wenn er mit einem Plus-Zug beginnt. Damit wissen wir schon, dass auch nach dem 12. Zug, nach dem 18. Zug, … die Aufteilung der Spiel-Steine wieder übereinstimmen wird.