Rüdiger Thiele

Leonhard Euler

Biografien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner Band 56
1982 BSB B. G. Teubner Leipzig
Abschrift und LaTex-Satz: 2024 https://mathematikalpha.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Leonhard Euler (15. 4. 1707-18. 9. 1783)

Das linke Bild wurde unter Verwendung eines Porträts von J. Darbes gestaltet. Dieses Bildnis soll nach Aussagen von Zeitgenossen Euler am ähnlichsten sein. Das Reliefporträt in Medaillenform (Abb. 1) ist Teil der von R. Bratterle für die Gemeinde Riehen geschaffenen Bronzetafel, die im Mai 1960 an der Kirchstraße 8 enthüllt wurde.

Euler ist der größte Mathematiker aller Zeiten; er war aber nur Mathematiker, d.h. kein Zauberer, kein Prophet, kein Heilender. Mathematik trieb er in der Überzeugung, dass diese Welt nach den bestmöglichen Naturgesetzen beherrscht wird.
Er glaubte, dass es eine besondere, dem Menschen gestellte Aufgabe sei, durch Verstehen dieser Gesetze die dem Menschen prinzipiell verfügbaren Möglichkeiten zur Verbesserung zu entdecken und zu entwickeln.

Das große Buch der Natur liegt vor uns offen, es ist aber in einer Sprache geschrieben, die wir nur durch eigenen Fleiß, durch Liebe und Leid lesen lernen müssen. Diese Sprache ist die Mathematik.
Der erste Schritt des eine Sprache Lernenden ist das Lesen, erst nach tieferem Studium kann er fließend sprechen und Fragen beantworten.

Dann folgt der schwierigere Teil der Wissenschaft, die mathematisch formulierten Aufgaben zu lösen. Bei der Klärung und Beantwortung dieser Fragen ringt der Mensch letzten Endes um die besten Möglichkeiten, welche aus der festgelegten Ordnung der Welt folgen können.

Clifford Ambrose Truesdell
[107, S. 252, gekürzt]

2 Euler und seine Zeit - die Aufklärung

Leonhard Euler gehört dem 18. Jahrhundert an. Dieses Jahrhundert, das sich selbst das „Aufgeklärte“ nannte, ist nicht nur durch das Sich-Orientieren-im-Denken, sondern auch durch die enge Verflechtung von Naturwissenschaften und Philosophie sowie durch die Verbindung von Naturwissenschaften und industrieller Produktion und die sich hieraus ergebenden technischen Umwälzungen geprägt.
Mit den besonders im letzten Drittel des 18. Jahrhunderts schnell voranstürmenden Fortschritten der industriellen Entwicklung, die zunehmend Handarbeit durch Maschinenarbeit ersetzte, ging eine explosive Erweiterung wissenschaftlicher Betätigung einher, Immanuel Kant, der große Philosoph dieser Zeit, schrieb:

Indes in der Wissenschaft und insbesondere in der Naturwissenschaft erhob sich auch wirklich damals eine merkwürdige und neue Zeit. Wenn ich in diesen Beziehungen die ungeheuren Fortschritte nur der letzten drei Dezennien betrachte, so darf ich kühnlich sagen, dass drei vorhergegangene Jahrhunderte gegen sie nur Geringes geleistet haben.

Wie richtig Kant die wissenschaftlichen Bemühungen eingeschätzt hat, soll eine Tatsache belegen: Seit Ausgang des 18. Jahrhunderts verdoppelte sich etwa alle 15 Jahre die Anzahl der Naturwissenschaftler. Das 17. Jahrhundert begann experimentelle Methoden zur Abgrenzung der Gültigkeit von Theorien einzuführen und auf die menschliche Erfahrung auszuweiten. Darauf fußend formte das 18. Jahrhundert die Gestalt der heutigen Welt.

Ermöglichte es bis zum 17. Jahrhundert noch das Genie eines einzelnen, etwa L.da Vincis oder G.W. Leibniz, universal alles erworbene Wissen in sich zu vereinen, so erscheinen vom 18. Jahrhundert an auf Grund der Wissensfülle mehr und mehr Fachgelehrte, die ursprünglich freilich in verschiedenen Disziplinen bewandert waren. In diesem Sinn lässt sich mit H. Hankel sagen, dass L. Euler das wissenschaftliche Bewusstsein in der Mitte des 18. Jahrhunderts am besten verkörperte.

Eulers Leben, dessen Spanne beinahe das ganze 18. Jahrhundert ausfüllt, umfasste 60 Jahre schöpferischer Tätigkeit, die mit einer erstaunlichen Fruchtbarkeit verbunden waren: Euler schrieb für Zeitschriften etwa 760 Artikel, verfasste 40 Bücher und 15 Preisschriften, füllte zahlreiche Notizbücher und verschickte in Europa einige Tausend Briefe. Seine Produktivität nahm im Laufe seines Lebens stetig zu.
In den ersten 14 Jahren wissenschaftlicher Tätigkeit brachte es Euler auf 80 Arbeiten mit etwa 4000 Druckseiten, während er trotz Erblindung in den letzten 14 Jahren seines Schaffens über 350 Arbeiten mit etwa 8000 Seiten vorlegen konnte. Im Leningrader Akademie-Archiv sind noch Tausende Seiten unveröffentlichter Manuskripte vorhanden. Statistisch gesehen muss Euler jede Woche eine Entdeckung gemacht haben.

Eulers erstaunliche Vielseitigkeit hat die Mathematik seiner Zeit maßgeblich gefördert und mitbestimmt. Es gibt kaum ein wichtiges Problem der Folgezeit, von dem man nicht bereits Spuren in Eulers Werk findet. Die Mathematiker der nächsten Generation haben alle von ihm gelernt. „Lest Euler, er ist unser aller Meister“, pflegte der französische Mathematiker P. S. Laplace zu sagen.

Geschichtlich gesehen ist Leonhard Euler in eine Zeit gestellt, die besonders am Anfang des 18. Jahrhunderts wesentlich durch England, Frankreich und die Niederlande mit ihrer hochentwickelten Wirtschaft bestimmt war. Wegbereiter der Industrialisierung war das Bürgertum, das in einigen Staaten wie in England oder in den Niederlanden bereits eine wichtige Rolle

spielte.
Deutschland, ein zurückgebliebenes Agrarland, war kein einheitlicher Nationalstaat, sondern in etwa 300 absolutistische Partikulargewalten zersplittert; seine Kräfte waren durch den 30jährigen Krieg untergraben. Mit dem 18. Jahrhundert begann neben Österreich der brandenburgisch-preußische Staat sich zu entwickeln, ab 1701 war Preußen Königreich und strebte die Vorherrschaft in Deutschland an.

Im Osten Europas wurde Russland unter dem Zaren Peter I. (dem Großen) (Regierungszeit 1689-1725) eine europäische Großmacht. Vorbild aller absoluten Monarchen jener Zeit war der Prunk und Luxus des französischen Königs Ludwig XIV. (Regierungszeit 1643-1715) und dessen absolutistisches Selbstverständnis: „L'Etat c'est moi“ [Der Staat bin ich].
Sowohl Friedrich II. (der Große) von Preußen (Regierungszeit 1740-1786) als auch Peter I. ahmten den französischen Hof und seine Kultur nach.
Ihr Versailles waren Potsdam und Petrodworez, die Hofsprache war bei beiden französisch.

1783, im Todesjahr Eulers, wurde die Unabhängigkeit der Vereinigten Staaten von Nordamerika vom Königreich England anerkannt, ein deutliches Zeichen für das wirtschaftliche Erstarken des Bürgertums.

Die geistige Bewegung jener Zeit - von England sich über alle europäischen Staaten ausbreitend - beruhte auf den politischen und ökonomischen Bestrebungen des 3. Standes. Für sie ist seit der Mitte des 18. Jahrhunderts die Bezeichnung „Aufklärung“ üblich, in Frankreich spricht man vom „siecle philosophique“ [philosophisches Jahrhundert].
Der Wahlspruch der Aufklärung ist die Maxime „Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!“, wie 1784 einer der wichtigsten Vertreter der deutschen Aufklärung, I. Kant, in seiner Abhandlung „Was ist Aufklärung?“ ausführte.

Das vernunftmäßige Denken in Verbindung mit Naturwissenschaft und Philosophie befähigte die Träger der Aufklärung zu richtungweisenden Erkenntnissen in allen Bereichen, führte zur Befreiung von Fesseln religiöser Dogmen (Freidenker), versetzte sie in die Lage, Schwächen des feudalen Gesellschaftssystems zu erkennen, und flößte ihnen unbegrenztes Selbstvertrauen in sich und die Kraft des Denkens ein. Die Aufforderung, „sich im Denken zu orientieren“ (I. Kant), um hieraus die rationale Gestaltung von Natur und Gesellschaft zu ermöglichen, wird besonders augenfällig an der monumentalen „Encyclopedie“ in 17 Bänden, die in Frankreich unter der Leitung Diderots und d'Alemberts mit einer Anzahl von Schriftstellern, aber auch führenden Mathematikern in den Jahren von 1751 bis 1765 herausgegeben wurde und alle die Aufklärung interessierenden Wissensgebiete enthält.

Ein entscheidender Beitrag zur Fundierung der Aufklärungsphilosophie ging von den Naturwissenschaften aus, genauer von Newtons „Philosophiae naturalis principia mathematica“ [Mathematische Prinzipien der Natur]. In diesem Buch von 1687 gipfeln die naturwissenschaftlichen Erkenntnisse des 17. Jahrhunderts; es vollzieht die Wende vom statischen Naturbild zur dynamischen Naturauffassung.
Zwar wiesen Kopernikus, Galilei und Kepler den Weg zum Begreifen des Kosmos als physikalische Einheit, aber es bedurfte doch des Genius Newton, um sowohl den theoretischen Ansatz für die überall gleichen Bewegungsprinzipien zu liefern als auch die tatsächliche Anwendbarkeit der Prinzipien zu demonstrieren. Die Unterscheidung zwischen irdischen und überirdischen Welten wurde mit einem Schlag hinfällig, und es erfolgte ein radikaler Bruch mit der mittelalterlichen Vorstellung, die noch auf der griechischen Kosmologie beruhte.

Der Bruch mit seinen Folgen lässt sich in den Naturwissenschaften bestenfalls noch mit der

Resonanz auf Darwins Buch „On the origin of species by means of natural selection“ [Über die Entstehung der Arten durch natürliche Zuchtwahl] aus dem Jahre 1859 vergleichen. Newtons System blieb, von der Korpuskulartheorie des Lichtes abgesehen, über 200 Jahre, also bis zum Beginn unseres Jahrhunderts, unangefochten. Einer der Männer, der es revidierte, Albert Einstein, schrieb gegen Ende seines Lebens über die Newtonsche Physik:

Am Anfang (wenn es einen solchen gab) schuf Gott Newtons Bewegungsgesetze samt den notwendigen Massen und Kräften. Dies ist alles; das weitere gibt die Ausbildung geeigneter mathematischer Methoden durch Deduktion.

Er fährt fort, dass,

was auf dieser Basis geleistet wurde, insbesondere durch die Anwendung partieller Differentialgleichungen, die Bewunderung jedes empfänglichen Menschen erwecken muss.

Diese Zeilen würdigen, ohne dass der Name genannt wird, auch Euler. Die Brüder Jakob und Johann Bernoulli meisterten als erste die Schwierigkeiten der neuen mathematischen Hilfsmittel (Differential- und Integralrechnung). Euler erkundete das Neuland vollständig.
Großen Kreisen wurde die neue Mathematik gegen Ende des 18. Jahrhunderts zugänglich, als die Französische Revolution von 1789 neue gesellschaftliche Verhältnisse schuf und dadurch beispielsweise militärischen Anwendungen mehr Raum gab (Ecole polytechnique). Selbst Persönlichkeiten wie Friedrich II. oder J. W. Goethe, die wenig Verständnis für mathematisches Denken aufbringen konnten, waren immer wieder genötigt, die Bedeutung der Mathematik anzuerkennen.

Obwohl mathematische Gebiete wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und im letzten Drittel des 18. Jahrhunderts auch Algebra und Kombinatorik bedeutende Fortschritte machten, beschränkte sich die mathematische Produktivität in diesem Jahrhundert vornehmlich auf den Ausbau der Differential- und Integralrechnung und deren Anwendungen, was insbesondere jenes staunenswerte Gebäude der theoretischen Physik erstehen ließ.
Es ist kein Wunder, dass die Mathematik eine führende Wissenschaft der Aufklärung wurde. Allerdings war mit der Führungsrolle der Mathematik auch gelegentlich die Gefährdung einer Überschätzung verbunden, die sich z.B. in dem etwas abwegigen Bemühen zeigte, im Gerichtswesen die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Fällung gerechterer Urteile einzusetzen.

Wissenschaft wurde zur Zeit der Aufklärung vornehmlich an königlichen Akademien oder in gelehrten Gesellschaften getrieben; Universitäten spielten im allgemeinen eine geringere Rolle, und entsprechend schlecht war auch die soziale Lage der dort tätigen Mathematiker. Die Mitglieder von Akademien waren frei von Lehrverpflichtungen und konnten sich, wenn sie der Monarch nicht für praktische oder anderweitige Aufgaben, wie etwa Gutachten, benötigte, unbehindert ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit widmen, sofern sie ausreichend besoldet waren. Mathematik war noch keine Fachdisziplin im heutigen Sinn, sondern besaß eine universelle Rolle, insbesondere waren enge Beziehungen zur Philosophie und Theologie vorhanden (eine mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät hatten die Universitäten damals noch nicht).

Bedeutende wissenschaftliche Zentren in Europa waren die Royal Society in London (seit 1660), die Academie des Sciences (seit 1665) oder die geisteswissenschaftliche Academie Francaise in Paris (seit 1635). Die regierenden Monarchen, die sich als aufgeklärt verstanden, hatten das Bedürfnis, berühmte Wissenschaftler an ihren Höfen zu versammeln und sie vor ihren Triumphwagen zu spannen: zum einen, um politische und ökonomische Macht zu zeigen, zum anderen, um praktische Aufgaben im Staatsinteresse lösen zu lassen.

„Nichts gibt einem Reich mehr Glanz, als wenn die Künste unter seinem Schutz gedeihen", schrieb Friedrich II. im „Antimachiavell". So gründete der spätere Friedrich I., König in Preußen, 1700 eine Akademie, die Königliche Societät, die Friedrich II. neu belebte, und Peter I. von Russland veranlasste die Stiftung der Petersburger Akademie 1725 -beides auf Leibnizens Bestreben hin, Europa mit einem Netz gelehrter Akademien zu überziehen.Das Wirken Eulers brachte die beiden letztgenannten Akademien in die erste Reihe der europäischen Akademien.

In diesem philosophischen Jahrhundert gab es natürlich eine ganze Reihe berühmter Philosophen, die Zeitgenossen Eulers waren: Berkeley, Hume, Voltaire, Diderot, Rousseau, Wolff, Kant.
Die Mathematiker Leibniz und Newton starben noch zu Eulers Lebenszeit, Gauß und Bolzano wurden in Eulers letzten Lebensjahren geboren, Cauchy kurz nach dessen Tod. Zeitgenossen Eulers sind ebenfalls die Wissenschaftler Linné, Volta, d'Alembert, die Dichter Beaumarchais, Fielding, Gottsched, Lessing, Goethe, Schiller oder die Musiker Bach, Händel, Gluck, Haydn und Mozart.

Der Archäologe und Kunstwissenschaftler Winckelmann, der dem das Rokoko ablösenden Klassizismus mit zum Durchbruch verhalf, wirkte zur Zeit Eulers. Aber auch der Freiherr von Knigge oder Casanova waren Zeitgenossen Eulers.

3 Basel 1707-1727

Die Mathematik kennt neben der konkurrenzlosen Epoche der Griechen keine glücklichere Konstellation als diejenige, unter der Leonhard Euler geboren wurde. Es ist ihm vorbehalten gewesen, der Mathematik eine völlig veränderte Gestalt zu geben und sie zu dem mächtigen Gebäude auszugestalten, welches sie heute ist.

A. Speiser

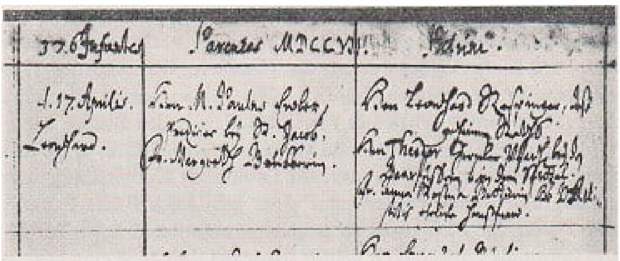
3.1 Herkunft und Kindheit

Das Geschlecht der Euler (Ewler, Öwler) wird bei Lindau am Bodensee erstmals um 1287 erwähnt und ist ab 1458 gesichert nachweisbar. Der Name hat nichts mit dem Vogel zu tun, er ist in Westdeutschland, Hessen und dem Rheinland - ehemals von den Römern besetzten Gebieten, in denen Töpferei betrieben wurde - verbreitet und leitet sich aus dem mittelhochdeutschen Wort aul [Töpfererde, Lehm] her.
Da jedoch bei Lindau kein Ton gefunden wird, ist die Deutung von Öwler als Besitzer einer Ouwe [Au, wasserreiches Wiesenland] wahrscheinlicher.

Lindau hatte zu Basel vielseitige wirtschaftliche und politische Beziehungen. So erwarb 1594, vermutlich aus wirtschaftlichen Schwierigkeiten, der Enkel Hans Georg des alemannischen Lindauer Stammvaters Hans Euler, genannt Schölpin [der kleine Schielende], Bürgerrecht in Basel und ließ sich als Strälmacher [Kammacher] dort nieder.
Bis zur dritten Generation übten seine männlichen Nachkommen das Gewerbe eines Strälmachers aus, dann aber erschienen sowohl mit Leonhards Vater Paul Euler als auch in Seitenzweigen der Familie evangelisch-reformierte Pfarrer in der Nachkommenschaft.

Paul Euler immatrikulierte sich 1685 mit 15 Jahren an der Universität Basel, 1693 beschloss er das Theologiestudium. Aber erst 1701 - vielleicht eine Folge des Theologenüberschusses jener Zeit - übernahm er ein kirchliches Amt in Basel als Pfarrer am Waisenhaus und später bis 1708 in St. Jakob an der Birs, unmittelbar vor Basels Stadtmauern. Beide Ämter waren nicht gut dotiert, da sie lediglich als Durchgangsstufen in der Laufbahn angesehen wurden.
Das dürfte der Grund für die späte Heirat Paul Eulers am 19. April 1706 mit Margaretha Brucker, einer Tochter des Basler Spitalpfarrers J. H. Brucker, gewesen sein.

Ein Jahr später, am 15. April 1707, wurde dem jung vermählten Paar das erste Kind geboren und am 17. 4. auf den Namen Leonhard in der Basler Kirche St. Martin getauft, wo bereits der Vater getauft worden war. Die Taufpaten wurden nicht aus der Verwandtschaft, sondern aus der Basler Oberschicht gewählt.
Einem der Paten, dem Geheimen Rat Leonhard Respinger, in dessen Familie der Name Leonhard traditionell vererbt wurde, verdankt der Sohn Paul Eulers seinen Vornamen, der außerdem in Basel infolge der beliebten Kirche St. Leonhard sehr häufig war.



2 Taufregister St. Martin 1663-1762, Eintragung der Taufe Leonhard Eulers am 17. April 1707 auf Seite 376.

Die erste Spalte gibt das Datum der Taufe sowie den Namen des Kindes an, die zweite nennt die Eltern und die dritte zählt die drei Paten auf.

Eulers Geburtshaus ist unbekannt. In St. Jakob ist er mit ziemlicher Sicherheit nicht geboren, da diese Pfarrstelle ohne eigentliche Gemeinde kein Pfarrhaus besaß und deshalb der Pfarrer in Basel wohnte. Damit kommt nur noch Basel in Frage, und zwar müsste Eulers Geburtshaus dann in der Nähe der Taufkirche St. Martin gelegen haben, zwischen Marktplatz und Schifflände (was Raith und Speiser vermuten).
In diesem Viertel ist heute fast kein Gebäude aus dem 18. Jahrhundert mehr vorhanden, so dass es unwahrscheinlich wäre, wenn Leonhard Eulers Geburtshaus noch stände.

Im Juni 1708 nach dem Tode Bonifacius Burckhardts (eines direkten Ahnen des Philosophen Jakob Burckhardt), der - wie der Epitaph der Riehener Dorfkirche bezeugt - „auf der Cantzell von einem Schlagfluss überfallen“ wurde, wählte der Kirchenrat von drei Bewerbern für die etwa 1000 Seelen zählende Gemeinde Riehen Paul Euler als Pfarrer aus, und im November des gleichen Jahres wurde er in sein neues Amt als 11. Pfarrer von Riehen eingeführt.
Riehen ist ein rechtsrheinisches, anmutig gelegenes Dorf auf halbem Weg von Basel nach Lörrach, etwa eine knappe Stunde zu Fuß von Basel in nordöstlicher Richtung.

Die dem Familienoberhaupt bald nachfolgende Familie (vermutlich 1708) fand im Pfarrhaus bescheidene Verhältnisse vor. Das geht aus einem Gesuch Paul Eulers aus dem Jahre 1712 hervor, der damit die Wohnverhältnisse für seine vierköpfige Familie und seine bei ihm lebende Mutter, die alle in einem Wohn- sowie Studierzimmer untergebracht waren, verbessern wollte. In der ländlichen Umgebung des Pfarrhauses verlebte der Knabe Leonhard mit zwei Schwestern die Kindheit. Während der 1719 geborene Bruder Johann Heinrich 1756 früh verschied, überlebte die 1711 geborene Schwester Maria Magdalena den Bruder Leonhard, die andere Schwester Anna Maria lebte von 1708 bis 1778.

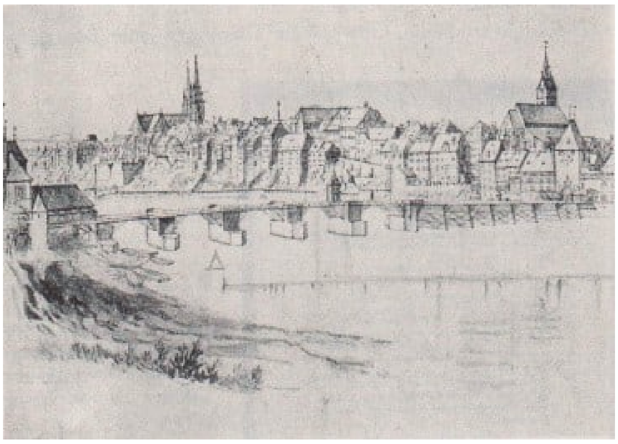
Das geistige Klima im Pfarrhaus war für Leonhards Entwicklung sehr günstig. Die Mutter stammte aus einer gebildeten Basler Familie.
Der Vater war mathematisch begabt gewesen und hatte bei Jakob Bernoulli Vorlesungen gehört sowie bei ihm 1688 eine Dissertation über Verhältnisse und Proportionen verfasst. So hatten sich Bekanntschaften u.a. mit den Mathematikern Jakob Bernoulli (gest. 1705) und Jacob Hermann ergeben. Die ländliche Abgeschiedenheit täuscht darüber hinweg, dass Leonhard in der Umgebung von hochgebildeten Männern aufwuchs. Aus jener Zeit überliefern die Euler-Biographen eine hübsche Begebenheit: Angeblich fand man eines Tages den Knaben geduldig auf einem Nest von Eiern hockend, um diese auszubrüten.

Der Vater erteilte dem Sohn den ersten Unterricht. Leonhards erstes Mathematiklehrbuch war die „Coß“, die Algebra von Rudolff (in Stifels Ausgabe von 1553), ein für Knaben seines Alters außerordentlich schwieriges Buch.
In seiner kurzen Autobiographie von 1767 erinnerte sich Euler daran, dass er das Buch fleißig und vollständig studiert hatte. Als sich die Begabung des Knaben zu zeigen begann, wurde er in die Lateinschule nach Basel geschickt (vermutlich 1713). Die verwitwete Großmutter M.Brucker nahm ihn auf. Von Basel nach Riehen sind es etwa 5 km, so dass der junge Leonhard Euler den Weg zu den Eltern nicht gescheut haben wird und Nikolaus Fuß, der ihn gut kannte, wohl mit Recht in seiner „Lobrede“ auf Euler darauf hinwies, dass das Beispiel der Eltern sowie der ländliche Aufenthalt die Einfachheit und Unbefangenheit bewirkten, die Leonhard Euler sein Leben lang auszeichneten.

Gelernt wurde in der Lateinschule nicht viel. Mathematik war auf Antrag der Bürgerschaft als

Lehrfach gestrichen worden.
Leonhards Vater besorgte deshalb, wie viele andere Eltern, denen an der Weiterbildung ihrer Kinder lag, einen Privatlehrer, den Theologen Johann Burckhardt, der gleichfalls leidenschaftliches Interesse an der Mathematik besaß und durch Schützenhilfe für Johann Bernoulli im Streit mit Brook Taylor bekannt geworden ist. Burckhardts sicher bedeutende Rolle für Eulers Entwicklung ist noch nicht aufgeklärt.

Eulers Freund Daniel Bernoulli spricht von ihm als „magni Euleri praeceptor in mathemacis“ [Lehrer des großen Euler in der Mathematik]. Obwohl sich 1715 der berühmte Mathematiker Johann Bernoulli selbst um die Verbesserung des Schulwesens in Basel bemüht hatte, waren seine Vorschläge - wie üblich - lange unerledigt in irgendwelchen Akten verschwunden gewesen, und erst 1725 besserten sich die Verhältnisse.



3 Ansicht Basels aus dem Jahre 1759. „Prospect der Rhein Bruck auß der Stattschreiberey der minderen Statt Basel“, lavierte Federzeichnung von E. Büchel.
St. Martin ist die rechte Kirche, links am Rheinufer anschließend die Universität, die Schifflände beginnt am rechten Bildrand.

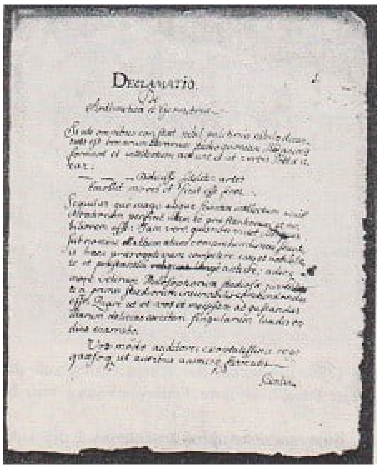
Bis dahin geschah es nicht selten, dass die Schüler von den groben und ungebildeten Lehrern geprügelt und getreten wurden, jedoch auch entrüstete Väter erschienen ab und an vor der Klasse und zahlten es dem Lehrer mit gleicher Münze heim. Die Bemühungen der Aufklärung, etwa des Pädagogen Pestalozzi, hatten erst später Erfolge, u. a. die Einführung der allgemeinen Schulpflicht im größten Teil von Europa seit dem 19. Jahrhundert.

3.2 Die Lehrjahre

Am 20. Oktober des Jahres 1720 bezog Leonhard Euler die Universität Basel im Alter von 13 Jahren, was damals gang und gäbe war. Er konnte dies übrigens tun, da er Basler Bürgerrecht hatte, denn bis 1798 war der Landbevölkerung der Schweiz ein Hochschulstudium verwehrt. Entsprechend dem Wunsch des Vaters sollte er Theologie studieren.
Obwohl die Theologen jener Zeit wahre Frömmigkeit und tiefe Religiosität beseelte, waren sie in Basel von Amts wegen Vertreter einer Staatsreligion.

Die reformierte Kirche, wie auch die Schule, war vor allem ein Instrument des Staates, das den gehorsamen und treuen Untertanen schaffen sollte. Religiöse Gebote und Sittlichkeit, deren Nichterfüllung Gemeindemitglieder dem Pfarrer anzeigten, waren Pflicht. Verfehlungen wurden bestraft und sogar der Bann verhängt.
Euler ist in diesem Geist aufgewachsen, und er vertrat ihn, in der Berliner Gemeinde bis in organisatorische Einzelheiten. Diese Verbindung von echter Frömmigkeit mit Zucht und Ord-

nung ist entscheidend für das Verständnis der Stellung Leonhard Eulers zwischen Calvinismus, Pietismus und Aufklärung und insbesondere für seine unerbittlich geführten Kämpfe gegen die Freigeister und Gottlosen, „die Rotte der Ungläubigen“.



4 Die erste Seite eines Vortrages des vierzehnjährigen Euler über Arithmetik und Geometrie, der vor seinen Kommilitonen gehalten wurde (Autograph).
„Je mehr eine Wissenschaft den Verstand schärft und die Vernunft vollendet, desto vortrefflicher und vorzüglicher ist diese.“

Euler immatrikulierte sich wie üblich an der philosophischen Fakultät, die nach heutigen Verhältnissen etwa die „Abiturstufe“ vermitteln würde. Er erwarb am 9. Mai 1722 erste Lorbeeren für einen Vortrag „De temperantia“ [Über die Mäßigkeit], nämlich den niedrigsten akademischen Grad prima laurea.
Euler muss erstaunliche Fortschritte gemacht haben, denn im Januar 1722 hatte er sich bereits um eine Logikprofessur beworben und im Dezember des gleichen Jahres um eine Jurisprudenzprofessur (Geschichte des römischen Rechts), allerdings erfolglos. Im Herbst 1723 beendete er die philosophische Fakultät mit einem Examen, das dem Sechzehnjährigen die philosophische Magisterwürde einbrachte.

Im Juni 1724 wurde dies angekündigt, und Euler hielt auf lateinisch seine erste öffentliche Rede, die sich einem damals hochaktuellen Thema, nämlich dem Vergleich der Philosophien von Descartes und Newton, widmete. Zu dieser Zeit, also fast 40 Jahre nach ihrer Entstehung, begann sich am Kontinent die Newtonsche Gravitationstheorie gegen die Descartsche Wirbeltheorie durchzusetzen. Voltaire, dessen eigentlicher Name Francois Marie Arouet war, charakterisierte diesen Gegensatz in einem Brief:

Ein Franzose, der nach London kommt, findet die Dinge in der Philosophie sehr stark verändert. In Paris sah er das Universum aus lauter Wirbeln einer feinen Materie zusammengesetzt, in London ist davon nichts zu merken. Bei uns ist es der Druck des Mondes, der die Meeresflut verursacht, bei den Engländern strebt das Meer selbst zum Monde hin ... Bei uns Cartesianern geschieht alles durch eine Impulsion, die man kaum versteht; bei Newton wirkt statt dessen eine Attraktion, deren Ursache man auch nicht besser kennt. In Paris bildet man sich ein, dass die Erde aussehe wie eine Melone, in London ist sie auf zwei Seiten abgeplattet.

Die 1460 gegründete Universität Basel war um 1720 klein. Auf 19 Professoren kamen etwa 100 Studenten. Aber trotzdem nahm die Basler Universität in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Welt eine einzigartige Stellung ein, denn sie konnte da Leibniz 1716 gestorben und Newton alt war - nun den bedeutendsten lebenden Mathematiker, Johannn Bernoulli; zu den Ihren zählen.

Auf Wunsch des Vaters schrieb sich Euler am 29. 10. 1723 an der theologischen Fakultät ein. Neben dem Theologiestudium (u. a. bei J. J. Wettstein und wie sein Vater bei S. Werenfels), das auch Altgriechisch und Hebräisch umfasste, worin er nicht besonders erfolgreich war, hörte Euler bei Bernoulli eifrig wochentags um 2 Uhr am Nachmittag die Pflichtvorlesungen für Anfänger:

1720/21 Geometrie,
1721/22 Theoretische und praktische Arithmetik,
1722/24 Ausgewählte Kapitel der Geometrie nebst Anwendungen,
1724/25 Astronomie.

Über diese Vorlesungen besitzen wir einen Bericht aus dem Jahre 1733 von einem Kommilitonen des Mathematikers Samuel Koenig, letzterer wird später folgenreich Eulers Weg kreuzen. Nachdem jener Kommilitone bemerkt, dass man eigentlich die Algebra schon beherrschen müsse, weil sich Bernoulli mit elementaren Sachen nur ungern abgegeben habe, fährt er fort:

> Weshalb er dann auch in dessen letzten Jahren die geometrischen und algebraischen Vorlesungen mit größtem Unwillen lase; es mussten bey ihm lauter Transcendentalia seyn, als worinnen er ganz lebte und sich solange aufhielte, bis dass seine Auditores einen deutlichen Begriff davon hatten. [32, S. 42]

Euler bemühte sich um private Vorlesungen, die Johann Bernoulli über Mathematik und Physik für ausgewählte Studenten zu halten pflegte, darunter die später berühmtesten Mathematiker der Zeit: Koenig, l'Hospital, Maupertuis, Clairaut oder Cramer. Der jüngste Sohn Bernoullis, Johann II, war mit Euler gemeinsam zum Magister ernannt worden, und so fand sich für Euler bald eine Gelegenheit, dem berühmten Bernoulli vorgestellt zu werden.

5 Johann Bernoulli. Stich von J. Huber nach dem Bild von F. Schmidt.
Bernoulli weist mit der Hand auf eine Brachystochrone (Zykloide) hin.

Sein Wunsch wurde aber zunächst abgeschlagen, da Bernoulli zeitlich sehr in Anspruch genommen war, auch durch die 1725 entsprechend seiner Anregung doch noch erfolgte Schulreform in Basel. Immerhin empfahl Bernoulli Euler mathematische Werke zum Studium, und Euler durfte ihm sonnabends Fragen stellen, auf die er beim Lesen gekommen war.
Euler bemühte sich, so wenig wie möglich zu fragen, und war hierauf noch im Alter stolz. (Wir wissen z.B. von C. F. Gauß, einem der größten Mathematiker, dass er sich seiner jugendlichen Leistungen noch im Alter gern erinnerte, während eine Reihe großer Entdeckungen später von

ihm nur beiläufig oder gar nicht erwähnt worden sind.) In seiner „Lobrede auf Euler“ berichtet N. Fuß hierüber:

Er bot . . . alle seine Kräfte auf, der Zweifel so wenige als möglich zu machen. [EO 1/1, S. LII]

Euler selbst äußerte später, dass dieses Vorgehen Bernoullis die beste Methode sei, um in der Mathematik voranzukommen.
Johann II Bernoulli machte seinen Studiengefährten Euler mit seiner Familie bekannt, insbesondere mit seinen älteren Brüdern Nikolaus und Daniel. Bald wurden Euler Aufgaben gestellt, die er gemeinsam mit den drei hochbegabten Söhnen Bernoullis bearbeitete. Der streitbare Johann I Bernoulli, der eifersüchtig auf die gebührende Würdigung seiner Verdienste achtete, duldete keine Herabsetzung seines Anteils an wissenschaftlichen Leistungen oder gar vermeintlichen Diebstahl.

Er, der sich nicht gescheut hatte, sich mit seinem älteren Bruder und Lehrmeister Jakob anzulegen, hat sich später sogar mit einem seiner Söhne, nämlich mit Daniel, überworfen, als der Sohn, nicht aber der Vater, bei einem mathematischen Wettbewerb Erfolg gehabt hatte. Bernoullis prophetische Bemerkungen im zweiten Band seiner „Opera omnia“ [Gesammelte Werke] über den 20 jährigen Euler sind deshalb keine barocken Schwülstigkeiten und nicht zu unterschätzen, denn sie zeigen, dass der 60jährige Meister das Genie seines jungen Schülers erkannt hatte:

... von dessen Scharfsinn wir uns das Höchste versprechen, nachdem wir gesehen haben, mit welcher Leichtigkeit und Erfindungsgabe er in das Aller- heiligste der höheren Geometrie[1] unter unseren Auspizien [Obhut] eingedrungen ist. [32, 5. 47]

Noch deutlicher spiegelt sich das in den (lateinischen) Briefanreden Bernoullis wider:

1728 Dem hochgelehrten und ingeniosen jungen Mann.
1729 Dem hochberühmten und gelehrten Mann,
1737 Dem hochberühmten und weitaus scharfsinnigsten Mathematiker.
Endlich 1745 Dem unvergleichlichen L. Euler, dem Fürsten unter den Mathematikern.

Die Anrede von 1737 erscheint nach der Lösung eines Problems (Summe der reziproken Quadratzahlen) durch Euler, an dem sich die Bernoullis die Zähne ausgebissen hatten.
Durch den Einfluss von Bernoulli gab der Vater den Gedanken an das Theologiestudium seines Sohnes auf, mit dem es ohnehin nicht recht vorwärts gegangen war, und der geniale Euler hatte nun die unvergleichbare Gelegenheit und das außergewöhnliche Glück, den bedeutendsten lebenden Mathematiker als Lehrer zu haben.
Aber auch der streitsüchtige Bernoulli erwies sich des Umstandes würdig, das Zepter der Mathematik in die berufenen Hände eines Schülers legen zu können. Er, der keinen Überlegenen neben sich dulden wollte, förderte den Schüler, ertrug - und unglaublich! - huldigte Euler als den Größeren.

Es wäre falsch, auf Grund des Fakultätswechsels Euler als gescheiterten Theologen zu sehen. Er blieb zeitlebens ein tiefgläubiger Mann, für den, wie es damals nicht ungewöhnlich war (man denke nur an Leibniz, Newton, die Bernoullis), enge Beziehungen zwischen Theologie und Mathematik, die auch Weltanschauung vermitteln konnte, bestanden.

[1] Damals war Geometrie noch ein Synonym für Mathematik schlechthin.

3.3 Die ersten Schritte in der Wissenschaft

Wir werden aber alle zu der Leidenschaft geführt und geleitet, zu erkennen und zu wissen, wodurch wir uns als vortrefflich ausgezeichnet betrachten.
Eulers Motto für die „Meditationes super problemate nautico" von 1727

Mit 18 Jahren schrieb Euler seine erste Abhandlung „Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente" [Konstruktion zeitgleicher Kurven im widerstehenden Mittel], die sofort 1726 in den Leipziger „Acta eruditorum" [Berichte der Gelehrten] erschienen ist. Sie schließt an eine Aufgabe an, die Johann Bernoulli 1696 gestellt und „die scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises" zur Lösung aufgefordert hatte. Das Problem lautete:

Auf welcher Bahn bewegt sich in einer vertikalen Ebene ein Massenpunkt von einem gegebenen Punkt A zu einem gegebenen Punkt B vermöge der Schwerkraft in kürzester Zeit? Seine Lösungen sind Zykloiden.
Das Brachystochronen-Problem [Brachystochrone= kürzeste Zeit, griech.] gab kräftigen Anstoß zur Entwicklung einer neuen mathematischen Disziplin, der Variationstechnung (der Name ist von Euler).
„Wie der Apfel die Eva, so hat mich dieses Problem durch seine Schönheit verlockt", bekannte Leibniz in einem Brief an Johann Bernoulli. Dass es sich hier um eine völlig neue Aufgabenstellung handelte, bemerkte zuerst Jakob Bernoulli; Euler und später Lagrange bauten dessen Methode zur klassischen Variationsrechnung aus.

Die erste Eulersche Arbeit befasste sich mit dem allgemeineren Brachystchronen-Problem bei widerstehendem Mittel (z. B. Luftwiderstand). 1780 kam Euler in zwei weiteren Arbeiten, die erst 1822 veröffentlicht wurden, auf diese Frage zurück. Die Fragestellung wurde gleich in vielen Varianten behandelt: z. B. suchte Euler bei gegebener Weglänge die Bahn, oder er bestimmte aus der Bahn die Krafteinwirkungen (inverses Problem der Variationsrechnung).

Die Pariser Akademie hatte die Preisfrage gestellt, die beste Stelle im Schiffskörper für das Einsetzen der Masten zu finden und deren günstigste Höhe zu ermitteln. Euler, der natürlich in Fragen des Schiffsbaues keinerlei Erfahrungen aufweisen konnte (man denke nur an die vielen Witze über die Schweizer Gebirgsmarine), reichte 1726 seine Abhandlung „Meditationes super problemate nautico ..." [Abhandlungen über das Seefahrtsproblem ...] ein, die die Preisfrage als Problem der Statik und Dynamik schwimmender Körper bearbeitete.
Der zwanzigjährige Euler erhielt zwar nicht den begehrten Preis, jedoch ein Accessit [lobende Anerkennung]. Pierre Bouguer, dem späteren Teilnehmer der großen peruanischen Gradmessung von 1736-1742, wurde der Preis verliehen. Später wurde Euler noch zwölfmal (davon fünfmal über Fragen des Schiffsbaues und der Navigation unter seinem Namen und ein weiteres Mal „unter dem Namen" seines Sohnes Johann Albrecht) der Preis zuerkannt, was die Summe von insgesamt 30000 Livres, etwa 300000 Mark heutiger Kaufkraft, einbrachte.
In den Meditationes legte Euler seine Auffassungen in 100 Artikeln dar. Die Arbeit schließt mit den selbstbewussten Worten:

Ich habe es nicht für nötig gehalten, diese meine Theorie durch das Experiment zu bestätigen; denn sie ist ganz aus den sichersten Prinzipien der Mechanik abgeleitet, weshalb der Zweifel, ob sie wahr sei und in der Praxis statthabe, in keiner Weise aufgeworfen werden kann. [34, S. 258]

In einem kürzlich in Leningrad aufgefundenen Entwurf liest sich die Behauptung allerdings etwas anders:

Ich bin daran gegangen, diese meine Theorie, obwohl sie auf sicheren Fundamenten baut und von diesen Prinzipien her, die ich als richtig abgeleitete erkennen konnte, keineswegs angezweifelt werden kann, auch noch durch das Experiment zu bekräftigen, durch das, falls jemand hinsichtlich der Zuverlässigkeit der Prinzipien oder der rechtmäßigen Ableitung meiner Theorie Zweifel hegen will, die Wahrheit durch die Tatsache selbst bekräftigt gesehen werden könnte, und so bliebe keinerlei Platz für irgendwelche Zweifel oder Unentschlossenheit. [34, S. 259]

Euler hat also doch die Resultate empirisch überprüft! Auch in seiner Abhandlung über die Entstehung und Fortpflanzung des Schalls („Dissertatio physica de sono ...") von 1727 beschreibt Euler durchgeführte Experimente. Über seine aufgestellte Musiktheorie schrieb Euler 1740 an D.Bernoulli:

Durch die Experientz kann man allso leicht determinieren welche Theorie mit der Wahrheit übereinkommt. [11]

Im Laufe der Zeit wächst allerdings Eulers Vertrauen in die Unanfechtbarkeit mathematischer Prinzipien; Experimente ließ er jedoch bei Brückenbauprojekten in Petersburg noch im hohen Alter ausführen. Die Abhandlung über den Schall war von Euler angefertigt worden, da er sie für seine Bewerbung um die durch den Tod von J. R. Beck im September 1726 vakante Physikprofessur benötigte, die infolge Eulers Jugend trotz Bernoullis Empfehlungen fehlschlug. Inhaltlich sind drei Dinge in der Arbeit bemerkenswert.

Schon mit 20 Jahren erteilte Euler der Leibnizschen Lehre von den prästabilierten Harmonien eine klare Absage, was für einen Schüler Bernoullis eine erstaunliche Haltung ist, da der streitbare Johann Bernoulli Anhänger und vor allem Verteidiger Leibnizens war. Dies ist jedoch eine Folge der religiösen Einstellung Eulers.
Für Euler besteht das Wesen der Geister in ihrer Freiheit, die auch Gott ihnen nicht mehr nehmen kann, während bei Leibniz durch den Plan des Schöpfers alles vorherbestimmt - prästabiliert - ist, so dass, wie Euler es später im 84. Brief an eine deutsche Prinzessin ausdrückte, „die Freiheit der Menschen dadurch aufgehoben werde". Diese philosophische Haltung hat Euler während seines Lebens nicht mehr geändert.

In der Frage nach der Größe der lebendigen Kraft (kinetischen Energie), die in jener Zeit heftig umstritten war und selbst noch Kant mit einer zweifelhaften Abhandlung auf das bereits geräumte Schlachtfeld rief (die er Euler zur Prüfung vorlegte, worauf er aber merkwürdigerweise (oder bezeichnenderweise?) vom schreibfreudigen Euler keine Antwort erhielt), pflichtete Euler Leibniz und seinem Lehrer bei: sie ist gleich Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit ($= mv^2$).

Der letzte Punkt ist ein spaßhaftes Kuriosum. Euler behandelt die Frage, wie sich ein fallender Stein in einem durch den Erdmittelpunkt gebohrt gedachten Schacht verhalten würde. Taucht er auf der anderen Seite des Schachtes wieder auf, oder verharrt er im Mittelpunkt der Erde? Eulers ebenso verblüffende wie falsche Antwort lautet: Er kehrt im Mittelpunkt um und an seinen Ausgangspunkt zurück!

Ein Notizbuch Eulers aus der Basler Zeit enthält Pläne über schwierigste Aufgaben aus der Punktmechanik und Hydrodynamik, die der angehende Meister noch nicht vollständig bewältigen konnte. Einige Probleme, die beispielsweise das Ausfließen von Wasser aus Gefäßen betreffen, sind bis heute ungelöst.
Dennoch gebührt Euler neben Johann I und Daniel Bernoulli das Verdienst, die Hydrodynamik mit begründet zu haben. Daniel Bernoulli hebt brieflich ausdrücklich den Anteil des Freundes hervor, wenn er von „unserer Theorie" spricht - während in seinen Veröffentlichungen Euler nicht mehr erwähnt wird!

4 Petersburg 1727-1741

Sie reisen jetzt in das Paradies der Gelehrten, und ich wünsche nichts mehr, als dass Sie der Höchste auf Ihrer Reise gesund erhalten und Sie lange Jahre in Petersburg Ihr Vergnügen wolle finden lassen.
Ch. Wolff an L. Euler (20. 4. 1727)

4.1 Die Akademie der Wissenschaften in Petersburg

Im Jahre 1727 starb 84jährig der führende Naturwissenschaftler jener Zeit, Isaac Newton. Seine neue physikalische Methode wirkte nachhaltig auf die exakten Wissenschaften, in England selbst aber hemmte über ein Jahrhundert die Autorität des vergötterten Präsidenten der Royal Society die Entwicklung, da die Briten den schwerfälligen Newtonschen Formalismus nicht preisgeben wollten.

Leibniz war 1727 bereits 11 Jahre tot. Deutschland brachte bis zur Geburt des princeps mathematicorum [Fürst der Mathematiker], C. F. Gauß, keinen Mathematiker von europäischem Rang hervor, und für die Opposition des Ancien regime [alte Ordnung] im bourbonischen Frankreich besaß die Mathematik zwar eine hervorragende Bedeutung, aber beachtenswerte Aktivitäten entwickelten sich erst in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts.
So wäre beinahe der erstaunliche Fall eingetreten, dass für einige Jahrzehnte die Mathematikgeschichte Bernoullische Familiengeschichte oder ein Teil der Stadtgeschichte Basels hätte sein können. Aber es kam anders.

Und das lag auch an den Folgen, die die Leibnizsche Tätigkeit zu zeigen begonnen hatte. Leibniz selbst war zwar 1716 fast wie ein Wegelagerer zu Grabe getragen worden, aber eine seiner Lieblingsideen, Europa mit einem Netz gelehrter Akademien zu überziehen, begann sich auf Grund der wirtschaftlichen Gegebenheiten in den aufstrebenden Ländern Europas zu verwirklichen.
Der Gründer des russischen Staates, Peter I., hatte sich durch den Nordischen Krieg (1700-1721) Zugang zur Ostsee verschafft, „dem Fenster nach Europa“. 1703 baute er im Newadelta die Peter-Pauls-Festung zum Schutze des Ostseezugangs, was in Verbindung mit der 1704 errichteten Admiralität schließlich eine großzügig, überwiegend von italienischen Architekten angelegte Stadt St. Petersburg entstehen ließ. Einlaufende Schiffe waren verpflichtet, Steine für den Häuserbau geladen zu haben.
Schon 1712 wurde Petersburg Hauptstadt und Residenz, um 1750 zählte es etwa 150000 Einwohner. Zum Vergleich: 1700 London 674000, 1786 Berlin 150000.

In dieser aufblühenden Stadt des Nordens wollte Zar Peter I. seine Akademie sehen, die infolge Peters Tod dessen Witwe, die neue Zarin Katharina I., gründete. Man hielt nach Wissenschaftlern für die Akademie Ausschau.
Der berühmte deutsche Gelehrte Christian Wolff war nicht zu bewegen, als Präsident der Akademie nach Petersburg zu kommen. Er hatte mit seiner Lehre von der Unfreiheit des Willens den Soldatenkönig Friedrich Wilhelm I. von Preußen verunsichert, denn, so schreibt Euler, wenn einige Soldaten, die nach Wolffs vielbeachteter Lehre nichts als Maschinen seien,

desertierten, so wäre dieses, nach Wolffens Gedanken eine notwendige Folge ihrer mechanischen Einrichtung, und man täte ebenso unrecht sie zu bestrafen, als wenn man eine Maschine strafen wollte ... Der König erzürnte sich über diesen Bericht so sehr, dass er Befehl gab, Wolffen aus Halle zu jagen, und ihn mit dem Strange bedrohte, wenn er sich dort nach 24 Stunden noch würde finden lassen. [10, 84. Brief]

Aber Wolff gab wenigstens Ratschläge für die Wahl der Mitglieder. Präsident wurde daraufhin der ehemalige Leibarzt Peters I. Blumentrost, und unter seinem Vorsitz fand sich eine Gesellschaft zum Teil wahrhaft genialer (J. Hermann, D. Bernoulli), zumeist aber unbedeutender Mitglieder mit übersteigertem Geltungsbewusstsein aus aller Herren Länder zusammen. E. Winter bemerkt hierzu in seinem Buch „Frühaufklärung“:

Die Petersburger Akademie war ... der Schauplatz scharfer geistiger Auseinandersetzungen, die 1729 einen derartigen Grad von Schärfe erreichten, dass die Protokolle aus diesem Jahr gelöscht werden sollten. Es wurde um Glaubensfragen, die Gegensätze der Newtonschen und Leibniz-Wolffschen Auffassung sowie Wolff-Franckes gerungen. Das ganze gelehrte Europa nahm daran teil. Fast alle Petersburger Akademiker waren in alle drei Streitgespräche verwickelt.

Die unentwegt geführten Scharmützel und gesponnenen Intrigen sowie gehässigen Eifersüchteleien wurden durch die unverständlichen Verwaltungsmaßnahmen des Bürokraten Schumacher nur noch weiter angeheizt. Die Briefe, die später M. W. Lomonossow an Euler geschrieben hat, dokumentieren die Despotie des Kanzleichefs auf erschütternde Weise. Unter anderem zahlte Schumacher zeitweilig kein Gehalt, weil er es für andere Dinge benötigte, oder las ständig die Auslandspost der Akademiker.
Es verwundert also nicht, wenn der russische Historiker Kljuschewskij von den Akademikern als „von diesem hergelaufenen Gesindel“ spricht.

4.2 Als Akademiker in Petersburg

Das war etwa - im Todesjahr Newtons - die Situation, in der Euler in Petersburg eintraf. Von diesem Tage an bis zu seinem Tode blieb Eulers Leben und Wirken auf das engste mit der Petersburger Akademie verbunden. Wieso war Euler nach Petersburg gekommen?

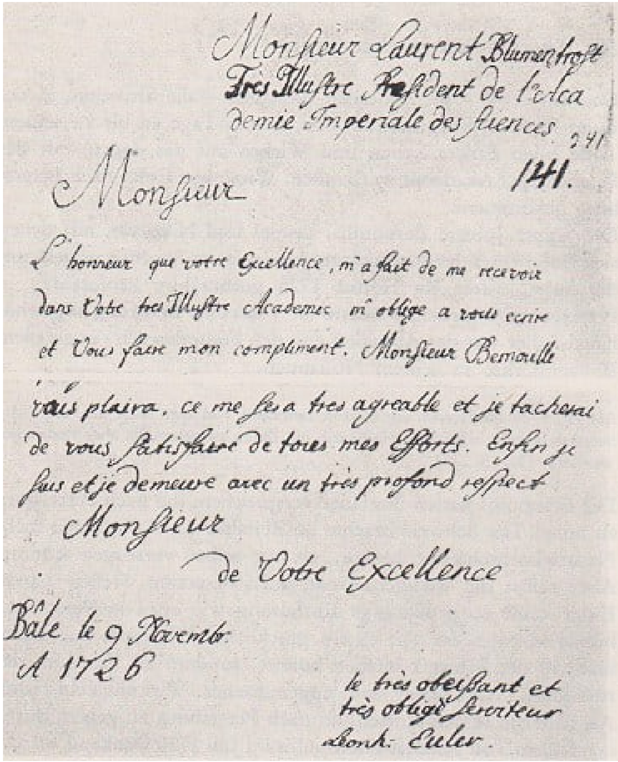
Die Söhne Johann Bernoullis, Daniel und Nikolaus, mit denen sich Euler trotz des Altersunterschiedes beim Studium angefreundet hatte, waren im Herbst 1725 gutbezahlte Professoren in Petersburg geworden, während ihr Vater eine Berufung abgelehnt hatte. Euler war der Abschied von den Freunden schwer gefallen. Er vermerkte in seinem Notizbuch:

Als A° 1725 im Herbst die Herren Bernoulli von hier nach St. Petersburg verreisten, hatte ich schon Hoffnung mit ihnen zu gehen, ist aber verhindert worden. [34, S. 275]

Die Bernoullis hatten ihm aber versprochen, ihn nach Petersburg zu holen. Die Schweiz brachte im Zeitalter der Aufklärung mehr Naturwissenschaftler hervor, als sie selbst versorgen konnte. Aber selbst die wenigen, wenn auch besetzten Stellen hätten Euler keine so großzügige Entfaltung wie etwa in Petersburg bieten können. So war es ein glücklicher Umstand, dass Euler nicht in der Schweiz bleiben konnte, sondern im Zentrum der russischen Aufklärung ein angemessenes Wirkungsfeld fand.
Als Euler in seinem Entschluss, nach Petersburg zu gehen, durch den frühen Tod Nikolaus Bernoullis im Juli 1726 wankend wurde, schrieb ihm sein Vater, der das Vorhaben unterstützte, es sei besser, in unbekannte Weiten zu ziehen, um aus dem vollen wirken zu können, als daheim in aussichtsloser Enge zu vegetieren.

Er hat damit Recht gehabt, denn als Johann Bernoulli 1740 den Ruf nach Berlin aus Altersgründen ablehnte, ließ er nicht unerwähnt, dass ihn die Enge des Vaterlandes anekle.
Bei der Berufung der Bernoullis hatte ein phantasievoller Außenseiter und Weltenbummler,

Christian Goldbach, mitgewirkt, der uneingeladen zur Akademiegründung angereist war und dann den Posten des ständigen Sekretärs übernommen hatte. In Verbindung mit Goldbach setzten sich die Bernoullis für den stellungssuchenden Euler ein und besorgten ihm im Herbst 1726 eine Adjunktenstelle in der Physiologie, die Euler verpflichtet hätte, sich in diesem Fach weiterzubilden und gegebenenfalls Gymnasiasten zu unterrichten, Eulers Gehalt sollte 300 Rubel jährlich betragen, hinzu kamen einmalig 130 Rubel Reisegeld.



Monsieur Laurent Blumentrost
Tres Illustre President de l'Aca
demie Imperiale des siences 241

141.

Monsieur

L'honneur que votre Excellence, m'a fait de me recevoir
dans Votre tres Illustre Academie m'oblige a vous ecrire
et Vous faire mon compliment. Monsieur Bernoulli
vous plaira, ce me sera tres agreable et je tacherai
de vous satisfaire de tous mes Efforts. Enfin je
suis et je demeure avec un tres profond respect

Monsieur

de Votre Excellence

Bâle le 9 Novemb.
A 1726

le tres obeissant et
tres obligé serviteur
Leonh: Euler.

6 Bewerbungsschreiben Eulers an den Präsidenten Blumentrost der Petersburger Akademie vom 9. November 1726.

Euler bewarb sich formell im November 1726. Er trieb zwar Medizinstudien, schob aber die Abreise so lange hinaus, bis seine Bewerbung um eine Basler Physikprofessur und damit ein weiteres Wirken in seiner Heimat fehlgeschlagen war. Er verließ schließlich am 5. April 1727 gegen 9 Uhr früh Basel, um es nie wieder zu sehen. Trotzdem behielt Euler bis zu seinem Tode Basler Bürgerrecht. Während der Reise sprach die zurückgebliebene Familie täglich ein besonderes, vom Vater verfasstes Gebet für Leonhard Euler.

Zunächst fuhr Euler den Rhein abwärts bis Mainz, dann über Frankfurt nach Lübeck, von wo er auf dem Seeweg am 24. Mai in Petersburg eintraf.[2] Über die Reisestationen sind wir durch Eulers Eintragungen in ein Notizbuch gut informiert, z. B.:

April 11. Reisten wir von Frankfort um 8 Uhr weg, auf Friedberg, ... von dar nahmen wir die Post auf Buzbach, ... von dar weiter auf Wetzlar, ... da wir zur Nacht assen und übernachteten.
den 30. [April] Begunte der Sud-Wind zu wehen. Alle wurden krank. [34, S. 276, 277]

Auf der Reise unterließ er es nicht, den 1723 nach Marburg geflohenen Aufklärungsphilosophen Wolff zu besuchen, der gemeinsam mit Goldbach die Bernoullis für Petersburg gewonnen hatte. Nach siebenwöchiger Reise kam Euler in Petersburg an. Unglücklicherweise starb zu diesem

[2] In Russland war noch der Julianische Kalender gültig, der im 18. Jahrhundert 11 Tage gegenüber dem Gregorianischen Kalender zurück war. Wir benutzen durchweg den Gregorianischen Kalender (neuen Stil) zur Datierung.

Zeitpunkt die Zarin Katharina I., und die folgenden Regierungswechsel wirkten sich auf die Entwicklung der Akademie ungünstig aus, so dass sich Euler zeitweilig mit dem Gedanken trug, in der Kriegsmarine Dienst zu tun.
Er erhielt dann doch noch eine Adjunktenstelle in der mathematischen Klasse. An der Akademie waren u. a. sieben Tübinger und vier Basler Gelehrte, denn es lag nahe zu versuchen, die berühmten Schulen nach Petersburg zu verpflanzen. Unter den Akademikern waren z.B. der Philosoph Bilfinger, der sowohl die Theologie als auch den Festungsbau beherrschte (mithin Abhandlungen über das Böse und Befestigungsanlagen schrieb), der Mathematiker Hermann, der ein entfernter Verwandter Eulers und mit 2000 Rubeln am höchsten besoldet war, der 60 jährige Pfarrer Leutmann, der die praktische Mechanik vertrat und ein geschickter Mechaniker war, sowie der Philosoph Martini, der zeitweilig glaubte, das perpetuum mobile erfunden zu haben.

Einen interessanten Einblick in die damaligen Lebensverhältnisse in Petersburg gewährt D. Bernoullis Bitte an Euler, kein Geld, sondern dafür u. a. 15 Pfund Kaffee, 1 Pfund vom besten grünen Tee sowie „1/2 dutzend bouteilles [Flaschen] gutes dantziger brantweins“, „12 dutzend feine tabacpfeifen‘“ und „etliche dotzend cartenspiele“ mitzubringen, was Bernoulli ihm an Ort und Stelle ersetzen wolle.

Die lebhaft bewegte Gesellschaft hatte gerade das neue Akademiegebäude bezogen, aber die heimischen Hörer fehlten in der Akademie und dem angeschlossenen Gymnasium, denn der Adel war nicht gewillt, möglicherweise mit Bürgerlichen die Bänke zu teilen. Die eigenartige Forderung, dass jeder Professor möglichst zwei Studenten mitbringen sollte, war also nicht ganz grundlos gewesen. So setzten sich die Akademiker gezwungenermaßen zueinander ins Kolleg und gerieten sich in den Kolloquien in die Haare.
Das Verhältnis zwischen Daniel Bernoulli und Bilfinger spitzte sich so zu, dass sie beide Klageschriften an den Präsidenten schickten. Bernoulli äußerte in jenen Tagen: „Ich kann mein Unglück nur beweinen.“
Man versuchte, auch Euler, der gemeinsam mit D. Bernoulli dem Empirismus Newtons zugetan war, in diesen Streit hineinzuziehen, aber obwohl dieser recht impulsiv war, hielt er sich heraus. Es gibt ein Protokoll vom 2. August 1729 mit Eulers Aussage:

> Dass auch H. Prof. Bernoulli das geringste, was Er bisher in den Conferentzen vorgelesen, sollte von mir genommen haben, das sage ich nicht und werde es auch niemahlen sagen mit einigem Grund der Wahrheit. [34, 5. 263]

Eulers philosophische Auffassungen aus der Basler Zeit, etwa die klare Trennung von Physik und Metaphysik, die er seinem Vater und dem Theologen Werenfels verdankte, vertieften sich durch die weltanschaulichen Auseinandersetzungen. Er wurde hier zum entschiedenen Gegner der durch Bilfinger vertretenen Wolfffschen Lehre, was Wolff nicht verborgen geblieben sein dürfte und was den Keim für die großen Kämpfe in Berlin gelegt hat.
Diese Zänkereien und die reaktionäre Haltung der neuen Regierung, d. h. der Hintermänner des 12jährigen Zaren Peter II., bewogen viele Akademiker, Petersburg zu verlassen. So konnte Euler als Nachfolger Bilfingers 1731 Professor der Physik und damit Akademiemitglied und 1733 anstelle D.Bernoullis endlich Professor für Mathematik werden.

1730 starb Peter II. an den Blattern, und Anna, die Tochter eines Bruders von Peter I., wurde Zarin; der wirkliche Herrscher war ihr Günstling deutscher Herkunft Biron (E. J. Bühren) mit seiner Clique, der Bironowtschina.

Sein Professorengehalt von 600 Rubeln ermöglichte Euler am 7. Januar 1734 (bzw. am 27.

Dezember 1733 alten Stils) die Heirat mit Katharina Gsell, einer Tochter aus zweiter Ehe des seit 1717 in Petersburg lebenden Schweizer Malers Georg Gsell.
Gsell war in dritter Ehe mit einer Tochter der Malerin Sybilla Merian verheiratet und unterrichtete mit seiner Frau an der Zeichenschule der Akademie, Er ist Schöpfer dekorativer Barockwandgemälde.[3]
Aus Eulers Ehe gingen insgesamt 13 Kinder hervor, von denen lediglich 3 Söhne und 2. Töchter am Leben blieben.

Obwohl Euler im Verhältnis zu späteren Jahren noch wenig publizierte, so arbeitete er doch sehr intensiv. Sein Schaffen setzte mit einem Schlag ein und steigerte sich von Jahr zu Jahr in unvorstellbarer Weise. Der Oberste Geheime Rat der Akademie erwähnte bereits wenige Monate nach Eulers Ankunft in seinem Forschungsprogramm eine Reihe von Hydraulikproblemen, die von Euler gestellt worden sind. An den Präsidenten Blumentrost konnte 1730 Euler berechtigterweise schreiben:

... dass in der Mathematik und Physik sehr wenige seien, welche darinnen weiter [als er] gekommen sein sich rühmen können. [13, S. 29]

Sein fleißiges Arbeiten dürfte allgemein bekannt gewesen sein, denn das klingt in den Versen eines Hochzeitsliedes an [32, S. 71]:

Wer hätt es ewig ausgedacht,
Daß unser Euler lieben sollte?
Er sann ja Tag und Nacht,
Wie er die Ziffern mehren wollte.
Sein tief gelehrter Sinn war frey,
Itzt denckt er auf Bund und Küssen;
Daß zwey mahl zwey nicht viere sey,
Das hätt man eher glauben müssen.

Bis zu seiner Heirat hatte Euler bei Daniel Bernoulli gewohnt. Jetzt kaufte er sich „wohl conditioniert“ auf Wassili-Ostrow [Wassili-Insel] ein Holzhaus und schrieb hierüber 1734 an einen Freund, dieses sei

so in der zehenden Linie nicht weit von des Herrn Generalfeldmarschall Palais gelegen.

Er fährt fort,

endlich ist auch meine Liebste den 16. November mit einem jungen Sohn niedergekommen, welchen der Herr Kammerherr Korff aus der Taufe zu heben, und ihm den Namen Johann Albrecht zu geben die Gnade gehabt. [111, S. 10, 11]

Neben dem bei Hofe angesehenen Korff war Goldbach Taufpate, was auf das hohe Ansehen Eulers hinweist, das dieser bereits genoss. Euler wiederum war 1736 Taufpate bei einem Kind seiner Schwester Maria Magdalena, mit welcher übrigens die Familie Euler in Basel ausstarb. Obwohl Euler natürlich nicht zur Taufe erscheinen konnte, sondern sich vertreten ließ, hat sein Vater - vermutlich voller Stolz - „He M. [Herr Magister] Leonhard Ewler, Prof. Math. Sublimioris [Professor der höheren Mathematik] auf der Academie zu St. Petersbourg“ ins Register eingetragen.

In dem Maße, wie Eulers Fachkollegen aus Petersburg infolge der unerträglichen Verhältnisse weggingen, wurde Euler für eine Reihe zusätzlicher Tätigkeiten benötigt. Er übernahm 1735

[3] Es ist überraschend, dass bei dieser Verwandtschaft kein Bildnis von Eulers Frau erhalten ist. Dr. Fellmann wies mich auf den Brief D. Bernoullis an Euler vom 29.3.1738 hin, in dem ein Ehebildnis erwähnt wird.

die Aufsicht über das Geographische Department, wurde Mitarbeiter in der Kommission für Maß und Gewicht, nahm Prüfungen am Gymnasium und der Kadettenanstalt ab und hielt dort Vorlesungen. Die Vorlesungen am Cadeten Corps verschafften ihm jährlich 400 Rubel zusätzlich.


7 Ältestes bekanntes Bild von Euler aus dem Jahre 1737. Schabeblatt von B. Sokolow nach dem verlorenen Gemälde von J.Brucker. Das Bild war für die Eltern in Riehen bestimmt. Über seinen Verbleib ist zur Zeit nichts bekannt. Das Schabeblatt wurde vor einigen Jahren in Leningrad entdeckt.
8 Daniel Bernoulli, zeitgenössisches Gemälde.

Über die Ergebnisse seiner Tätigkeit im Geographischen Department, die er gemeinsam mit einem Mitarbeiter verrichtet hatte, bemerkte Euler, dass durch die Generalkarte des russischen Reiches die russische Geographie in einen besseren Zustand als die deutsche gebracht worden sei.
Auf den russischen Karten war übrigens bis 1920 der Nullmeridian durch den Turm der Petersburger Peter-Pauls-Festung bestimmt. Euler war ebenfalls an den Vorbereitungen der großen Kamtschatka-Expedition (1733-1743) beteiligt. Er widmete sich auch historischen Fragen Russlands und war seinem Freund G. F. Müller bei dessen wegweisenden Studien zur Geschichte Sibiriens behilflich. In allem zeigt sich ein typischer Zug Eulers: er ließ sich durch die anfänglich schwierigen Verhältnisse nicht entmutigen, sondern widmete sich ganz der wissenschaftlichen Arbeit.
1734 äußerte er gegenüber D. Bernoulli, der Professor der Medizin war, sogar den Wunsch, in der Medizin zu promovieren.

Es gibt einen Bericht von N. Fuß, einem Schüler des alten Euler, der besagt, dass Euler als Folge der Überanstrengung bei einer astronomischen Rechnung für die sogenannten Mittagstafeln, für die andere Akademiker drei Monate Zeit verlangt hätten und die Euler in drei Tagen erstellte, 1735 sein rechtes Auge verloren habe.
Hier ist bereits das Datum falsch. Der Verlust des Augenlichts durch einen Abszess ergab sich 1738 als Begleiterscheinung einer lebensgefährlichen Infektion. Euler selbst gab die Schuld der anstrengenden Arbeit mit geographischen Karten.

Ebenso ist die folgende viel erzählte Geschichte falsch, nach der man den am Petersburger Hof weilenden atheistischen Philosophen Diderot auf einen algebraischen Gottesbeweis Eulers neugierig gemacht und Euler dann zu dessen Vorführung überredet haben soll. Euler dozierte angeblich: „Monsieur, es ist

$$\frac{a+b^n}{n} = x$$

Also existiert Gott. Antworten Sie!“ Diderot habe daraufhin ratlos in großer Eile den Raum verlassen. Nun war einerseits Euler zu religiös, um sich für derartige Scharlatanerien herzugeben, andererseits verstand Diderot genügend Mathematik, um so nicht verblüfft werden zu können.

Struik bemerkt hierzu, dass dies ein gutes Beispiel für eine schlechte Anekdote sei, da sowohl Diderots als auch Eulers Charakter verdunkelt werde, und er gibt den englischen Mathematiker des 19. Jahrhunderts de Morgan als vermutlichen Urheber der Geschichte an. Aber bereits Voltaire hat vielleicht in einem Schreiben vom Juni 1753 über Maupertuis' Gottesbeweis an Koenig den Keim dazu gelegt: „Es erscheint mir indessen absurd, Gottes Existenz von a plus b geteilt durch z abhängig zu machen."

4.3 Auf dem Wege zum Ruhm

Eulers Arbeiten bewegten sich zunächst im Gedankenkreis seines Lehrers, aber bald erschienen neben der Mechanik auch andere Gebiete: Schiffsbau, Optik, Kartographie, Astronomie, Reihenlehre und Zahlentheorie. Die Notizbücher und Briefe sind vor allem für die ersten Petersburger Jahre die Belege, wie tief Euler in die mathematischen und physikalischen Probleme eingedrungen war, und zeigen, dass er etwa seit der Zeit der Heirat seine wissenschaftlichen Fähigkeiten voll entfaltet hatte. Seine Abhandlungen wurden von da ab in Europa beachtet.

1730 schloss er mit zwei bedeutenden Arbeiten über geodätische Linien an seine erste Veröffentlichung an. Diese Arbeiten und eine Abhandlung über das isoperimetrische Problem der Variationsrechnung sind Marksteine auf dem Weg zu seiner Variationsrechnung von 1744.
Johann Bernoulli, mit dem er über diese Fragen korrespondierte, bestätigte ihm, dass seinem überaus scharfen Spürsinn nichts entgangen sein könne, und ein vorzüglicher Kenner der Variationsrechnung unserer Tage, Constantin Caratheodory, hebt Eulers „staunenswerte Geschicklichkeit" hervor.
1735 verfasste Euler eine Abhandlung über ein Verfahren, aus drei Beobachtungen eines Planeten dessen Bahn zu bestimmen. In dem 1736 erschienenen Akademieband sind von den 13 mathematischen Arbeiten 11 Abhandlungen von Euler, der Rest ist von D. Bernoulli.

1738 behandelte Euler erfolgreich die Preisfrage der Pariser Akademie über die Gezeitentheorie, in der er z.B. das Zurückbleiben der Flutwelle gegenüber der Kulmination des Mondes - eine bei Newton offene Frage - durch Berücksichtigung zusätzlicher Umstände klären konnte.

In der Zahlentheorie führt eine direkte Linie von P. de Fermat, der einer der bedeutendsten Mathematiker des 17. Jahrhunderts war, zu Euler. Vereinfacht gesagt, lässt sich das Verhältnis beider etwa so beschreiben: Fermat hatte vermutet und formuliert, Euler bewies und widerlegte.
Ein Beipiel hierfür: Fermat hatte ohne Beweis den heute als „kleinen Fermat" bezeichneten Satz hinterlassen, dass für eine beliebige Primzahl p und jede natürliche Zahl a, die zu p teilerfremd ist, die Zahl $a^p - a$ durch p teilbar sei, und Euler bewies das. Fermat hat übrigens mehr fehlerhafte Vermutungen ausgesprochen, als allgemein bekannt ist.

Angeregt zu seinen zahlentheoretischen Forschungen, die um 1730 einsetzten, wurde Euler durch Christian Goldbach. Goldbachs Begabung war zwar nicht mit Eulers zu vergleichen, seine Fähigkeiten sollten aber auch nicht unterschätzt werden.
Goldbach besaß ungewöhnlich weite Interessen, kannte die Prominenz seiner Zeit und erwies sich in bewundernswerter Weise als gesuchter und kongenialer Brief- und Gesprächspartner. Euler bescheinigte das indirekt Goldbach in einem Brief durch die Bemerkung über zahlentheoretische Probleme, dass nämlich „der Goût [Neigung] für dergleichen Sachen bei den meisten

erloschen ist“.
Der Briefwechsel mit Goldbach, der in den Dreißigerjahren zeitweilig in Moskau lebte, sonst aber in Petersburg, gehört aus wissenschaftsgeschichtlicher Sicht zu den inhaltsreichsten und packendsten Korrespondenzen des 18. Jahrhunderts. Euler und Goldbach verband eine über dreieinhalb Jahrzehnte währende Gelehrtenfreundschaft.

Bereits im Antwortschreiben Goldbachs vom Dezember 1729 auf den von Euler eröffneten Briefwechsel setzte Goldbach durch ein Postskriptum die Diskussion über den von Fermat um 1640 behaupteten Primzahlcharakter der Zahlen

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad \text{für} \quad n = 0{,}1{,}2{,}...$$

in Gang, die sofort allgemeiner auf die möglichen Teiler von Zahlen der Form a^2+1 ausgeweitet wurde. Das „zufällig“ gefundene Ergebnis

$$2^{2^5} = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

ist in einer Arbeit enthalten, die Euler 1732 der Akademie vorlegte (1738 veröffentlicht), und widerlegt erstmals Fermats Behauptung.
Es war für Euler eine Folgerung aus allgemeinen Betrachtungen über Teiler von Zahlen der Form $a^n \pm b^n$. Spätestens von dieser für Johann Bernoulli fremden Thematik her ist klar, dass Euler sich von seinem Lehrer gelöst hatte.

Erst 1877 bewiesen I. M. Perwuschin sowie E. Lucas die Zerlegbarkeit einer weiteren Fermatschen Zahl, nämlich F_{12}. F. Landry konnte 1880 zeigen, dass auch F_6 teilbar ist. Bis F_{16} liegen keine Primzahlen vor, F_{13} wurde 1960 von G. A, Paxson auf einem Computer (IBM 7090) nach sechsstündiger Rechnung zerlegt.

Psychologisch interessant ist die Tatsache, dass in unseren Tagen einem jugendlichen Rechenkünstler die Frage nach der Teilbarkeit von F_5 vorgelegt wurde. Er fand nach kurzer Zeit den Faktor 641, ohne allerdings sagen zu können, was ihn auf das Ergebnis geführt hatte. Wenn auch Euler ein gewandter Kopfrechner war und deshalb aufmerksam die Meldungen über den Rechenkünstler Quin Mackenzie Quin verfolgte, so war seine Entdeckung der Teilbarkeit von F_5 nicht durch sporadisches oder unsystematisches Probieren zustande gekommen.
Wie Euler allerdings genau vorgegangen ist, wissen wir nicht. In einer 1747 geschriebenen Arbeit beweist er, dass die ungeraden Primteiler von

$s^2 + b^2$ die Form $4k + 1$,
$a^4 + b^4$ die Form $8k + 1$, $(a, b) = 1$
$a^8 + b^8$ die Form $16k + 1$, ...
$a^{2n} + b^{2n}$ die Form $2^{n+1} \cdot k + 1$

haben. Bereits 1743 hatte er an Goldbach geschrieben, dass er hierfür einen Beweis habe. Ob Euler zu der fraglichen Zeit, also um 1732, diesen Sachverhalt empirisch ermittelt hatte, ist nicht bekannt. Zumindest war ihm die Vermutung Fermats vertraut, dass die ungeraden Primteiler einer Summe teilerfremder Quadrate die Form $4k + 1$ haben.

Wir dürfen daher für unsere Rekonstruktion annehmen, dass Euler die Teilbarkeit der Fermatschen Zahlen auf dieser Grundlage ermittelte, also speziell für F_5 waren wenigstens 5 und höchstens 160 mögliche Teiler zu überprüfen.
Die vorbereitenden Überlegungen tragen Keime der Gruppentheorie in sich, und modern gesprochen würde man sagen, dass für einen Primteiler p einer Fermatschen Zahl F_n die Restklasse

2 in der primen Restklassengruppe modulo p die Ordnung 2^{n+1} hat, welche ein Teiler der Gruppenordnung $p-1$ sein muss bzw. $p = 2^{n+1} \cdot k + 1$.

Der heute in Lehrbüchern der Zahlentheorie üblicherweise mitgeteilte Beweis mittels Kongruenzen nützt eine andere von Euler bewiesene Behauptung Fermats aus, dass nämlich jede Primzahl der Form $4k+1$ die Summe zweier teilerfremder Quadrate sei.

C. F. Gauß hatte als 19jähriger die sensationelle Entdeckung gemacht, dass das regelmäßige Siebzehneck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Allgemeiner zeigte er:
Die n-Teilung des Kreises (regelmäßiges n-Eck) mit Zirkel und Lineal gelingt für ungerades n nur, wenn n ein quadratfreies Produkt Fermatscher Zahlen ist. Heute sind übrigens nicht mehr Primzahlen der Form F_n bekannt als seinerzeit Fermat, nämlich 3, 5, 17, 257 und 65537.

Der zaristischen Regierung, die um die Ausbildung russischer Wissenschaftler und die Behebung des ökonomischen und technischen Rückstandes im Lande bemüht war, lag daran, dass bereits elementare Schulbücher nicht von Lehrern, sondern von hervorragenden Wissenschaftlern geschrieben wurden. 1738 und 1740 verfasste Euler in deutscher Sprache je einen Band eines elementaren Rechenbuches (russische Übersetzungen 1740 und 1760) von großer Klarheit. (Auch Lobatschewski ist später Autor solcher Schulbücher gewesen.)

Ebenfalls standen technische und praktische Fragen auf der Tagesordnung der Akademie. Euler gehörte mehreren Kommissionen zur Lösung solcher technischer Fragen an. Er beschäftigte sich u. a. mit Feuerspritzen und Sägen und erstellte ein Gutachten, wie die Riesenglocke in Moskau auf den Kremlturm gehoben werden könne. Außerdem lieferte er Beiträge für eine populärwissenschaftliche Zeitschrift der Akademie.

Eulers erste Arbeit über unendliche Reihen datiert aus dem Jahre 1729 (erschienen 1738). Er knüpft hier nicht an Jakob Bernoullis bedeutende Arbeiten an, sondern an Petersburger Anregungen, die ihn - modern gesprochen - durch die Frage nach einer stetigen und „möglichst einfachen“ Funktion $y = f(x)$, die für $x = 1{,}2{,}3$ usw. die Werte $y = 1!, 2!, 3!$ usw. liefert (also die Folge der Fakultäten interpoliert), auf die - in heutiger Terminologie - Beta- und Gammafunktion geführt haben.
Diese Funktionen gehören zu den wichtigsten nicht elementaren Funktionen der mathematischen Physik. Euler gab für sie Darstellungen sowohl als unendliche Produkte wie auch als uneigentliche Integrale. In der Folgezeit fand er noch zahlreiche Eigenschaften dieser Funktionen.

Die Frage, was es bedeute, in Gedanken die Summierung von reellen Zahlen unbegrenzt oft auszuführen, setzt für eine exakte Antwort Kenntnisse über die zugrunde liegenden Zahlkörper voraus, die damals nicht vorhanden waren. Noch Cauchy, der erste strenge Erklärungen gab, führte 1821 in der „Analyse algebrique” [Algebraische Analysis] anfänglich seine Definition der Summe einer unendlichen Reihe (Konvergenz) zögernd ein.
Euler leitete unendliche Reihen aus analytischen Ausdrücken her, und er verband damit die etwas vage Ansicht, dass die hergeleitete Reihe konvergiere, wenn nur der zugehörige Ausdruck einen vernünftigen Wert liefere. So hätte beispielsweise Euler wegen

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

(was allerdings nur für $|x] < 1$ gültig ist) die Konvergenz von

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... = \frac{1}{2} \qquad \text{für } x = -1) \tag{1}$$

oder

$$1 - 2 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - ... = \frac{1}{3} \qquad \text{für } x = -2)$$

für erwiesen gehalten. Das ist eine problematische Auffassung, denn die Reihenentwicklung

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + ...$$

ergibt für $x = 1$ zwar die gleiche Reihe wie in (1), aber der Wert des analytischen Ausdrucks beträgt jetzt $\frac{2}{3}$. Feinfühligkeit und sicherer Instinkt bewahrten Euler im allgemeinen, nicht aber alle seine Zeitgenossen, vor Fehlern bei derartigen Schlüssen. Trotzdem finden wir auch bei Euler „Reihen“ wie

$$1 - 3 + 5 - 7 + ... = 0$$

die wir nicht akzeptieren können.
Um Euler gerecht zu werden, muss erwähnt werden, dass alle Mathematiker dieser Zeit, vom neuen Erkenntnisstrom berauscht, prinzipielle Gesichtspunkte wie Existenz oder Konvergenz außer acht ließen. Man operierte mit unendlichen Reihen so, wie man es mit endlichen Polynomen gewöhnt war. Erst als die Schwierigkeiten zunahmen, etwa seit dem 19. Jahrhundert, widmeten sich die Mathematiker derartigen Grundlagenfragen intensiv.

Ein bekanntes Beispiel für den sorglosen Umgang mit dem Unendlichen: Der Camaldulensermönch G. Grandi hatte versucht, das mathematisch paradoxe Ergebnis

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + ... &= (1-1) + (1-1) + ... = 0 \\ &= 1 + (1-1) + (1-1) + ... = 1 \end{aligned}$$

wenigstens juristisch und philosophisch zu rechtfertigen, wobei er letzten Endes in $0 = 1$ einen exakten Beweis für die Erschaffung der Welt $(= 1)$ aus dem Nichts $(= 0)$ zu sehen glaubte. Der besorgte Philosoph Ch. Wolff, der mathematisch auf der Höhe seiner Zeit war, fragte daraufhin G. W: Leibniz, was er davon hielte. Leibniz äußerte zwar sein Unbehagen an der unmathematischen Argumentation, gab aber Grandi prinzipiell recht.

Um 1740 formulierte Euler klar eine hinreichende Bedingung für die Divergenz einer unendlichen Reihe, in heutiger Symbolik

$$\lim_{n\to\infty} |s_{2n} - s_n| > 0$$

wenn s_m eine Partialsumme der unendlichen Reihe bezeichnet, während er die nur notwendige Konvergenzbedingung

$$\lim_{n\to\infty} |s_{kn} - s_n| = 0$$

auch für hinreichend gehalten hat. Gewisse divergente Reihen, heute als asymptotische Reihen bekannt, benutzte Euler bereits, um - mit einer im Charakter der Reihen begründeten Genauigkeit (die häufig praktisch ausreichend ist) - näherungsweise bestimmte interessante Zahlenwerte zu berechnen. Eulers Umgang mit divergenten Reihen ist dabei keineswegs so sorglos, wie es gelegentlich hingestellt wird, denn er rät stets zur Vorsicht.
Die Eulersche Konstante

$$C = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right)$$

von der nicht bekannt ist, ob sie rational, irrational oder transzendent ist, erschien 1734 bei Untersuchungen über die harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

und wurde von ihm auf 17 Stellen (15 davon richtig) nach dem Komma berechnet: $C = 0{,}57721566490153252$. Adams gab 1873 C auf 263 Stellen an.
Ein bemerkenswertes Ergebnis ist die geschlossene Summierbarkeit der allgemeinen Reihe

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = a_{2k} \cdot \pi^{2^k} = \zeta(2k) \qquad (k = 1{,}2{,}3{,}...) \tag{2}$$

wobei die Koeffizienten a_{2k} sich aus einer Eulerschen Summenformel ergeben. Ausgangspunkt dieser Untersuchung von 1736 war das von Mengoli 1650 gestellte Problem, die Summe der reziproken Quadratzahlen (also $k = 1$) zu finden, über das Jakob Bernoulli geschrieben hatte:

Wenn jemand herausbrächte und uns mitteilte, was unserer Anstrengung bisher gespottet hat, so wird er uns zu großem Dank verpflichten.

Johann Bernoulli, dem Euler $s_2 = \pi^2/6$ und $s_4 = \pi^4/90$ mitgeteilt hatte, erriet eine Beweisvariante und nahm die Lösung in seine gesammelten Werke auf, ohne Euler zu erwähnen.
J. Bernoullis Beweis, der auf Betrachtungen der Nullstellen der Funktion $\frac{\sin x}{x}$ beruhte, veranlasste Euler wiederum, unabhängig von R.Cotes die Identität $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ zu finden.
1737 entdeckte Euler die berühmte Identität

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen zu erstrecken ist. Die linke Seite der Gleichung bezeichnete Riemann, der auch komplexe Werte von s zuließ, als Zetafunktion $\zeta(s)$. Nach (2) ist $\zeta(2s)$ eine transzendente Zahl, welchen Charakter die Zahlen $\zeta(2s + 1)$ haben, das ist heute noch ein offenes Problem.
Euler vermutete eine Abhängigkeit von $\log 2$ oder π. 1979 zeigte R. Apery: $\zeta(3)$ ist irrational.
Euler gab bereits 1744 eine Funktionalgleichung für $\zeta(s)$ an, die Riemann wieder entdeckte.
Euler verwendete bestimmte Integrale in der Reihenlehre und baute in unvergleichlicher Weise unendliche Reihen in die Überlegungen der Analysis ein.

In der 1739 vorgelegten Abhandlung "De fractionibus continuis" [Über sich fortsetzende Brüche; Kettenbrüche] gab Euler eine erste zusammenhängende Theorie der Kettenbrüche (der Name ist wiederum von ihm), die auch für die Theorie der transzendenten Funktionen von bahnbrechender Bedeutung war. Kürzen wir als typisches Beispiel den aus $\frac{225}{157}$ entwickelten Kettenbruch

$$1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = ... = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + ...}}}$$

durch $[1{,}2{,}3{,}4{,}...]$ ab, so zeigte Euler u. a.

$$e = [2{,}1{,}2{,}1{,}1{,}4{,}1{,}1{,}6, 1{,}1{,}8{,}1{,}1{,}10{,}...]$$
$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1{,}3, 1{,}14, ...]$$

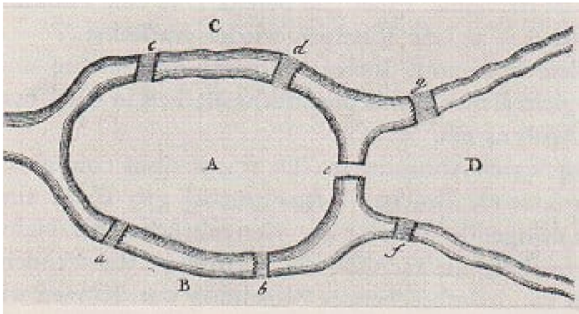
Hierauf gründet sich Lamberts Irrationalitätsbeweis für e und π von 1768.
Euler befasste sich ebenfalls mit gewöhnlichen Differentialgleichungen, insbesondere mit der von Riccati 1722 vorgelegten

$$y'(x) + y^2(x) = a \cdot x^m \qquad (a \text{ reell}, z \text{ ganzzahlig})$$

und er reduzierte durch kunstvolle Substitutionen den Grad von Differentialgleichungen.

Bekannt ist die Behandlung einer topologischen Aufgabe, des Königsberger Brückenproblems und seiner Verallgemeinerungen, aus dem Jahre 1735, wo u.a. gezeigt wird, dass es unmöglich ist, die sieben Brücken der Stadt (Abb. 9) hintereinander, aber jede genau einmal zu passieren. Euler bemerkte hierzu:

Neben jenem Teil der Geometrie, der von Größen handelt und zu allen Zeiten eifrig studiert wurde, gibt es noch einen anderen, bis jetzt beinahe unbekannten, den Leibniz studiert hat und Geometrie der Lage genannt hat. Dieser Teil beschäftigt sich mit dem, was allein durch die Lage bestimmt werden kann, und mit der Ergründung der Eigenschaften der Lage.



9 Zum Königsberger Brückenproblem

Zu Königsberg in Preußen ist eine Insel A, genannt ‚der Kneiphof', und der Fluss, der sie umfließt, teilt sich in zwei Arme, wie das aus Figur 1 [9] ersichtlich ist. Über die Arme dieses Flusses führen sieben Brücken a, b, c, d, e, f und g.
Nun wurde gefragt, ob jemand seinen Spaziergang so einrichten könne, dass er jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überschreitet ... Hieraus bildete ich mir folgendes höchst allgemeines Problem:
Wie auch die Gestalt des Flusses und seine Verteilung der Arme sowie die Anzahl der Brücken ist, zu finden, ob es möglich sei, jede Brücke genau einmal zu überschreiten oder nicht."

Euler gibt u. a. folgende Regel: „Wenn es mehr als zwei Gebiete gäbe, für welche die Zahl der Zugangsbrücken ungerade ist, so gibt es keinen Weg von der verlangten Art."

Euler bezog sich dabei auf einen Brief von Leibniz an Huygens vom 8. September 1679, in dem Leibniz den Gedanken der Topologie (analysis situs) angeregt hatte, die „uns unmittelbar den situs [Lage] ausdrückt, wie die Algebra die magnitudo [Größe]". Huygens setzte aber keine Hoffnung auf diese Disziplin, und der vielbeschäftigte Leibniz ließ den Gedanken fallen, den Euler erst wieder aufgriff.

Auch Eulers Polyedersatz von 1758 (1750 bereits Goldbach mitgeteilt), der Descartes vergessenen Ansatz unabhängig und tiefer wiederholt, gehört zur Topologie. Der bekannte Satz, den Euler (nicht ganz präzise) formulierte, besagt, dass für konvexe Polyeder (z. B. Quader) mit e Ecken, f Flächen und k Kanten

$$e + f - k = 2$$

gilt. Eulers ursprüngliches Problem war die Klassifizierung von Polyedern. Während Polygone mit Hilfe ihrer Seiten charakterisiert werden können, reichen bei Polyedern die Seitenflächen nicht aus, und Euler nahm Ecken und Kanten hinzu, wobei er auf obigen Zusammenhang stieß. Zunächst noch ohne Beweis:
Später schloss er das Polyeder in eine Kugel ein und projizierte das Kantennetz auf die Kugel, wo die Relation bewiesen wird.

Obwohl neben C. F. Gauß noch andere Mathematiker des 18. Jahrhunderts von der Bedeutung

einer künftigen Topologie überzeugt waren („ ... in die nur ein Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts“), wurde die algebraische Topologie im heutigen Sinn erst von Henri Poincare begründet.
An nicht mathematischen Arbeiten Eulers ist eine Abhandlung aus dem Jahr 1727 hervorhebenswert, in der Wärme als Bewegung begriffen wird.

4.4 Erste Meisterwerke

Das Hauptwerk jener Zeit ist jedoch sein zweibändiges Lehrbuch der Mechanik „Mechanica sive motus scientia analytice exposita“ von 1736, des auf Kosten der Akademie gedruckt wurde.
Die Übersetzung des programmatischen Titels lautet: Mechanik oder die Wissenschaft von der Bewegung, analytisch dargestellt. In Eulers Mechanik werden insbesondere die freie Bewegung eines Massenpunktes im Vakuum und im widerstehenden Mittel sowie die Bewegung von Massenpunkten unter dem Einfluss einer Zentralkraft (Planetensystem) und die erzwungenen Bewegungen (auf Flächen) behandelt. Die Mechanik war zu Eulers Zeiten die am besten entwickelte Wissenschaft, noch heute ist sie „das Rückgrat der mathematischen Physik“ (A. Sommerfeld). 1848 wurde Eulers Mechanik übrigens noch ins Deutsche übersetzt.

Euler begann mit dem Mechanikbuch etwas völlig Neues in der Wissenschaft: nämlich das Schreiben von Lehrbüchern.
Er arbeitete die bruchstückweise vorhandenen und in vielen Arbeiten verstreuten Einzelergebnisse zu einer zusammenfassenden, einheitlichen Theorie auf, wobei er die Lücken durch eigene Forschung füllte. Das war eine gigantische Arbeit, die Euler großen Einfluss auf die mathematische Entwicklung gesichert hat. Dabei schuf er oft, wie in der Trigonometrie, der Lehre von den Kegelschnitten, der Annuitätsrechnung oder bei bestimmten Bezeichnungsweisen, Endgültiges.
Die in der Geometrie seit Descartes übliche Gegenüberstellung von synthetischer und analytischer Methode eignet sich auch zum Vergleich mit anderen älteren Darstellungen der Mechanik, insbesondere der Newtons, aber auch der verbreiteten seines ehemaligen Petersburger Kollegen Hermann. Neuartig ist in der Mechanik, wie später in der Optik, die systematische und erfolgreiche Behandlung des Gegenstandes anhand der neuen Analysis durch Euler, nicht die physikalische Grundlage.

Die synthetische Methode bedient sich der klassischen traditionellen Mathematik, ihre Konstruktionen sind stets dem Einzelfall verhaftet, und deshalb erfordert jedes neue Problem grundsätzlich wieder neue Überlegungen, wobei sich Schwerfälligkeit oft nicht vermeiden lässt.
Die analytische Methode streift andererseits das konkrete mathematische Gewand des Einzelfalls ab und hantiert letztendlich formal mit Symbolen, also mit den gleichen Regeln für jedes einzelne Problem.

Bei Descartes hatte, 90 Jahre vor Eulers Mechanik, das Koordinatensystem den Angelpunkt zur Übersetzung geometrischer Sachverhalte in algebraische geliefert, mit Leibnizens Differential- und Integralrechnung (zu. Eulers Zeit 50 Jahre alt) wurde das Denken der Vorgänger auf diesem Gebiet in den „mechanischen Regeln“ des Calculs konzentriert.
Newtons Mechanik, die Dynamik des Massenpunktes, die zu Eulers Zeit 50 Jahre alt war und synthetisch aufgebaut worden war, wurde von Euler mit Hilfe der neuen Analysis (der Differentialgleichungen) vereinfacht und durchsichtig gemacht.

Newtons Hauptwerk, die Principia, hätte (auch nach Newtons Ansicht) grundsätzlich in der den Griechen bekannten Mathematik dargestellt sein können, Eulers Mechanik. nicht mehr.

Insbesondere bei krummlinigen Bahnen oder Zwangsbewegungen zeigen sich die Vorteile der analytischen Methode.
Bei krummlinigen Bewegungen zerlegt Euler die Kraft in zwei Komponenten längs der Bahnrichtung $(= mdv/dt)$ und senkrecht dazu $(= mv/r^2)$. Im Raum ergeben sich drei Bewegungsgleichungen durch Projektion der Kräfte auf die Achsen eines begleitenden Dreibeins.

Im Vorwort umreißt Euler, was auf mechanischem Gebiet noch zu leisten sei: neben der abgehandelten Punktmechanik die Systeme von Massenpunkten, den starren Körper sowie die Mechanik von Flüssigkeiten und deformierbaren Körpern. Das Vorwort schließt mit dem Satz:

Wer in der Analysis genügend Übung hat, wird mit wunderbarer Leichtigkeit alles einsehen und ohne Hilfe das ganze Werk durchlesen können.

Eine Rezension in den „Nova acta eruditorum“, vermutlich von Johann Bernoulli, bekräftigt 1738 diese Worte:

Bis jetzt ist noch nie ein Buch erschienen, das mit einem solchen Reichtum hoher und verborgener Dinge, dem innersten Herzen der Mathematik entnommen, ausgestaltet war ... Das ganze Buch ist analytisch, so dass kein synthetischer Ballast den Leser mehr anödet. [32, S. 78]

Ein weiterer Höhepunkt im mechanischen Schaffen war die zweibändige „Scientia navalis“ [Wissenschaft vom Schiffswesen] (um 1740, 1749 gedruckt), die von der russischen Admiralität in Auftrag gegeben worden war. Hinter der Thematik stand ein immenses praktisches Interesse: die Seeherrschaft. Somit ist klar, mit welcher Spannung dieses Werk aufgenommen wurde und deshalb mit am häufigsten im Briefwechsel Eulers erwähnt wird.
Der erste Band behandelt erstmals allgemein die Gleichgewichtstheorie schwimmender Körper nebst Stabilitätsproblemen in unübertrefflicher Art. Euler prägte dabei den Begriff der idealen Flüssigkeit. Der zweite Band wendet die allgemeine Theorie auf Schiffe an, wobei viele Vorschriften infolge falscher Annahmen über den Wasserwiderstand korrekturbedürftig sind. Während der Niederschrift des Werkes führte Euler zahlreiche Experimente mit Schiffsmodellen aus.

Im Zusammenhang mit diesem Problemkreis studierte Euler Fragen des Schiffsantriebs ohne Windkraft ausführlich. Das Prinzip des Schaufelradantriebs oder der Schiffsschraube wurde von Euler mathematisch ausgearbeitet, selbst Strahlenantriebe am Heck betrachtete er, sah aber ein, dass die dazu benötigten Leistungen zu seiner Zeit noch nicht verfügbar waren.

4.5 Interludium: Die Musiktheorie des Tentamen

Euler hatte ausgeprägte Beziehungen zur Musik. „Der außerordentlich arbeitsame Mann erholte sich am Klavier“, sagte N. Fuß über ihn.
Bereits mit 24 Jahren hatte Euler das umfangreiche Werk über Musik „Tentamen novae theoriae musicae“ [Versuch einer neuen Musiktheorie] verfasst, das 1739 gedruckt wurde und dem noch drei weitere Abhandlungen (1760, 1764, 1777), vornehmlich über die Naturseptime, folgten. Um 1750 trug sich Euler mit Plänen über ein weiteres umfassendes Werk, das auch die musikalische Großform behandeln sollte, aber nicht ausgeführt wurde.

Das Ziel des Mathematikers Euler im Tentamen ist es, wie auf dem Titelblatt vermerkt wurde, die Musik aus den sichersten Grundlagen der Harmonie abzuleiten, oder, wie er 1731 an seinen Lehrer Johann Bernoulli schrieb, es sei sein Endzweck, „die Musik als Teil der Mathematik auszuführen“. Dieser antwortete: „... im übrigen gefällt mir sein dessin [Entwurf] ganz wohl.“

Sein Sohn Daniel, der ähnliche Auffassungen wie Euler entwickelt hatte, schrieb im physikalischen Geist an Euler, dass er seinen Flügel auf „Dero vorgeschriebene Manier stimmen“ habe lassen, um die Rechnung mit der Realität zu konfrontieren.

Die Musik, so führt Euler aus, beruht auf der Höhe und der Dauer der Töne; ein Choral hat nur Töne gleicher Länge, eine Trommel gibt nur den Rhythmus. Aber die reine Aufnahme von Takt und Harmonie ist nicht ausreichend, um das musikalische Vergnügen zu erklären - der Komponist verfolgt einen Plan, den der Kenner errät, was ihm Genugtuung verschafft. Die Auffassung Eulers, dass jedes Kunstwerk ein lösbares Rätsel sei, gefiel z. B. Goethe sehr gut.

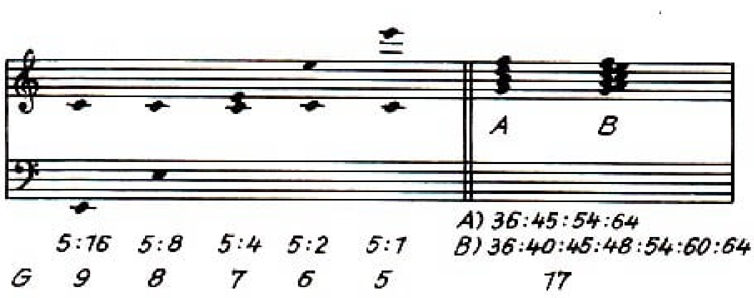
Eine allgemeine Hörtheorie gibt es noch nicht, aber es ist gewiss, dass Eulers Ansätze in ihr nicht unberücksichtigt bleiben können. Eulers Theorie des musikalischen Wohlklangs fußt auf der pythagoreischen Vorstellung, dass der Zusammenklang zweier Töne um so angenehmer empfunden wird, je einfacher das Verhältnis der Schwingungszahlen jener Töne ist. Das Grenzverhältnis für eine Konsonanz liegt nach Euler bei 5:6 (kleine Terz).
Das Schwingungsverhältnis zweier Töne machte sich Euler auch geometrisch deutlich, z. B. das Verhältnis 2 : 1 (Oktave)

....
. . . . . .

Bei seiner quantitativen Beschreibung des Wohlklangs im Konsonanzgrad, dem gradus suavitatis [anmutiger Schritt], entwickelte er Auffassungen von Descartes und Mersenne weiter.
Auf Instrumenten wird neben dem Grundton durch die Schwingungen der Saiten, Luftsäulen usw. in ihrer Gesamtheit zusätzlich eine Reihe von Obertönen erzeugt, die dadurch entstehen, dass die Saiten, Luftsäulen usw. auch in ihren Hälften, Dritteln, Vierteln usw. schwingen (Mersenne 1635). Die Schwingungsverhältnisse der Obertöne zum Grundton sind 2 :1,3:1,4:1 usw.

Euler quantifiziert nun das Zusammenklingen zweier Töne, also die zugehörigen Intervalle, durch den Konsonanzgrad wie folgt. Der Einklang (1 : 1) erhält den 1. Grad, die Oktave (2 : 1) den 2. Grad, die doppelte Oktave (4 : 1) den 3. Grad usw. Beim Erweitern eines Intervalles um eine Oktave nimmt der Grad um eins zu oder ab, je nachdem sich das Schwingungsverhältnis kompliziert oder vereinfacht.
Der Grad für ein Primzahlverhältnis $p : 1$ ist gleich der Primzahl p. Helmholtz hat in seiner Lehre von den Tonempfindungen Euler bestätigt, dass dessen Konsonanzgradberechnung sich „in der Tat gut bewährt“, d.h. mit den tonpsychologischen Befunden in guter Übereinstimmung ist.

Der Konsonanzgrad von Drei- und Mehrklängen wird aus dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Verhältniszahlen berechnet. Für den Dur-Akkord mit dem Schwingungsverhältnis 4:5:6 ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache gleich 60, und damit lässt sich der Konsonanzgrad des Verhältnisses 60 : 1 nach den genannten Regeln als 9 berechnen. Problematisch wird dieses Vorgehen allerdings beim Dominantseptakkord, zu dem das Schwingungsverhältnis 36 : 45 : 54 : 64 mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen 8640 und dem Konsonanzgrad 17 gehört.
Hier lassen sich nämlich in das Verhältnis Zahlen einfügen, ohne dadurch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache bzw. den Konsonanzgrad zu verändern, etwa 36 : 40 : 45 : 48 : 54 : 60 : 64.



10 Oktaverweiterungen der großen Terz und Dominantseptakkord mit zugehörigem gradus suavitatis.

Wählt man als Dominantseptakkord g-h-d-f (vgl. Abb. 10), so läuft das erweiterte Verhältnis auf das Hinzukommen der Töne a, c und e hinaus, bzw. man erhält alle Töne der C-Dur Tonleiter. Dieses Dilemma ist natürlich Euler nicht entgangen.

Eine interessante Auffassung entwickelte Euler am Dominantseptakkord, der trotz seines hohen Konsonanzgrades 17 einen angenehmen Wohlklang hat. Er räumt dem Bewusstsein einen Spielraum ein, der es auch Strukturen wahrnehmen lässt, die physikalisch objektiv nicht vorliegen, die aber von ihm bevorzugt werden. So substituiert z.B. ein weniger vollkommenes Gehör beim Dominantseptakkord im Schwingungsverhältnis 64 durch 63, wodurch (Kürzen durch 9) ein konsonanterer Akkord mit dem Schwingungsverhältnis 4:5:6:7 „gehört“ wird.
Diese Substitutionstheorie trägt der musikalischen Praxis Rechnung, denn jedes Instrument ist mehr oder weniger verstimmt, und das Ohr passt sich an.

Die Tonleitern, also die Aufteilung der Oktave in Intervalle, ergeben sich für Euler aus der Zusammenfassung aller Tonverhältnisse, die sich aus einer fest vorgegebenen (ungeraden) natürlichen Zahl bilden lassen (Potenzen von 2 bleiben wegen der Oktavverschiebung unberücksichtigt). Z.B. folgen aus 2-3-5 die auf einen Grundton bezogenen Verhältnisse

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^0 \cdot 5^1, 3^1 \cdot 5^1, 3^2 \cdot 5^1, 3^3 \cdot 5^1$$

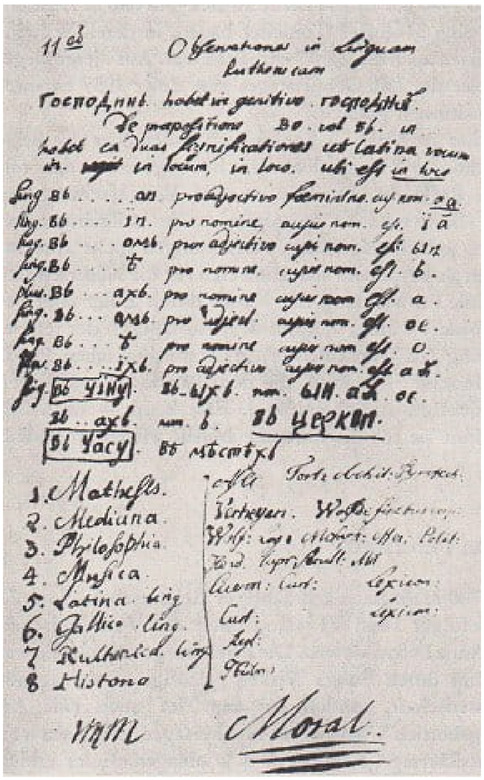
was bei geeignetem Transponieren einer D-Dur Tonleiter mit zusätzlicher kleiner Septime entspricht und von Euler Genus diatonicum genannt wurde. Der holländische Physiker A.D. Fokker kam um 1940 auf Eulers Lehre zurück und ließ in Haarlem eine Orgel für eine 31stufige Tonleiter bauen, in deren Schwingungsverhältnissen auch die Zahl 7 enthalten war. Auf dieser Orgel wurden zur Feier des 250. Geburtstages von Euler 1957 entsprechende Kompositionen gespielt.

Als musikalischer Außenseiter konnte sich Euler über das herrschende Rameausche Harmoniesystem hinwegsetzen, das mit der führenden Rolle des Dreiklanges eine Vereinfachung des musikalischen Sachverhaltes vornimmt. Die stilgebundenen Musiker kamen jedoch mit Eulers Auffassungen nicht zurecht, ja sie schmähten insbesondere sein Eintreten für die Naturseptime (7 : 4), so dass die Entwicklung der Musik durch Euler eher behindert als gefördert wurde, und mit dem Auftauchen der temperierten Stimmung (A. Werckmeister) in der musikalischen Praxis wurde die Eulersche Stimmung, die den Bau des menschlichen Ohres berücksichtigt, zurückgedrängt. Erst heute - nach 200 Jahren - gewinnt sie für die moderne Musik wiederum Bedeutung.

4.6 Abschied von Petersburg

Im Oktober 1740 starb nach zehnjähriger Regentschaft Anna I., und der Thronfolger Iwan VI. stand unter der Vormundschaft seiner Mutter Anna Leopoldowna. Die Petersburger Akademie war nicht nur die uns durch Eulers Wirken geläufige hervorragende Stätte der Wissenschaft, sondern für den Hof auch eine Art „Dienstleistungsbetrieb“, dem Wettervorhersagen, Abfassen von Oden für Staatsfeiertage, Feuerwerk u. ä. oblagen.

Euler erhielt beispielsweise den heiklen Auftrag, für Iwan (der nach einem Jahr in Kerkern verschwand) ein Horoskop zu erstellen, was er geschickt an seinen astronomischen Kollegen weitergeben konnte. Die Stellung der Akademie, der Euler zu Weltruf verholfen hatte, litt in den Wirren der politischen Machtkämpfe. Euler war verunsichert, gewiss auch an die ähnlichen schweren Stunden des Anfangs in Petersburg erinnert, und verließ mit dem Ziel Berlin nach 14 Jahren am 19. Juni 1741 den Ort seines ersten erfolgreichen Wirkens.


1. Mathesis.
2. Medicina
3. Philosophia
4. Musica
5. Latina ling.
6. Gallica ling.
7 Ruthenica ling.
8 Historia

Moral.

11 Seite aus Eulers Notizbuch aus dem Jahre 1727 mit Bemerkungen über russische Grammatik

In seiner 1767 seinem Sohn Johann Albrecht diktierten Selbstbiographie heißt es, dass es „bei der darauffolgenden Regentschaft ziemlich misslich auszusehen anfing“. Euler wurde in Berlin von der Königinmutter angeblich gefragt, warum er bei Hofe so schweigsam sei. Er soll geantwortet haben, dass er aus einem Land käme, wo man gehängt würde, wenn man spräche. Wenn das auch nicht sicher verbürgt ist, so ist diese Äußerung doch ein Hinweis auf die schlechten politischen Bedingungen jener Jahre in Russland.
Aber auch die berechtigte Angst vor Bränden - stets war im Eulerschen Haushalt das Fluchtgepäck gepackt - hat insbesondere Eulers Frau bewogen, auf dem Weggang zu bestehen. Im Grunde genommen war Euler gar nicht darauf aus, Petersburg zu verlassen:

Sein Bruder Heinrich arbeitete in Petersburg als Maler, und 1740 war der zweite Sohn Karl geboren worden. An seinen Freund G. F. Müller schrieb er wenige Tage nach der Zusage Friedrichs II.: „Ich hatte nichts weniger vermuthet, als dass ich mich noch anderwerts etablieren sollte.“
Da er aber einmal, im Februar 1740, diesen Entschluss gefasst hatte, betrieb er seine Entlassung, die ihm schwer gemacht wurde, mit der ihm eigenen Hartnäckigkeit über alle Wege,

bis dem vor Aufregung schon kranken Euler im Juni 1741 mit großem Bedauern der Abschied erteilt wurde.

Die Akademie kaufte sein Haus, wobei ihn Schumacher um 100 Rubel prellte. Bis zur Abreise aus Petersburg hatte Euler etwa 80 bis 90 Arbeiten geschrieben, von denen 55 veröffentlicht worden waren.
Den Staatsstreich von Elisabeth im Dezember 1741 erlebte Euler nicht mehr in St. Petersburg. Er war bereits dabei, einer neuen Akademie zum Leben zu verhelfen.

5 Berlin 1741-1766

5.1 Berufung an die preußische Akademie

Am 25. Juli 1741 traf Euler mit seiner Familie in Berlin ein. Eulers Sohn Johann Albrecht notierte die Äußerung seines Vaters über das Berliner Angebot, dass dieser

> ohne einiges Bedenken annahm, und nach erhaltenem Abschied 1741 mich mit meiner gantzen famille zu Wasser nach Berlin verfügte, wo Se. Königl. Maj. mir eine Besoldung von 1600 Thlirn als ein aequivalens der hier genoßenen Gage festzusetzen geruhte. [99]

Gleiche Angebote wie Euler hatten auch Johann und Daniel Bernoulli sowie d'Alembert erhalten, aber abgelehnt. Sie wurden später auswärtige Mitglieder. Verglichen mit den russischen Verhältnissen, wo Euler zahlreiche kräfteraubende Nebenbeschäftigungen wie etwa die Mitgliedschaft in zahlreichen Kommissionen und die Leitung des geographischen Departments oblagen, war das preußische Angebot verlockend, und Euler hat vermutlich richtig gehandelt, wenn auch später J. J. Winckelmann aus Rom distanzierend artikulierte, er verlasse nicht das Eismeer, sondern die schönste Stadt.

Friedrich II. war ein philosophisch gebildeter, künstlerisch interessierter und der französischen Kultur zugeneigter Geist, der zunächst vom militärischen Wesen seines Vaters (des „Soldatenkönigs") und der Nüchternheit der Verwaltungsbürokratie so angewidert war, dass er eine erfolglose Flucht aus Preußen versucht hatte.
Als er am 31. Mai 1740 den Thron bestieg und sofort daran ging, seinen schon lange wohlüberlegten Plan zu verwirklichen, die alte Königliche Societät neu zu beleben, glaubte nicht nur Euler, sondern alle Anhänger der Aufklärung, einiges erhoffen zu können. „Die Wissenschaft und die Künste sind auf den Thron gestiegen", hatte das geistige Haupt der Aufklärung Voltaire gejubelt.
Politisches Ziel Friedrichs war es jedoch, Preußen zu einer Großmacht zu erheben, was er mit allen Mitteln der Innen- und Außenpolitik betrieb.

1700 war unter dem Einfluss von Leibniz eine königliche Akademie der Wissenschaften in Berlin ins Leben gerufen worden, deren Ziel es laut Stiftungsbrief vom 11. Juli 1700 war, sich des verstreuten Schatzes der menschlichen Erkenntnisse anzunehmen und ihn anzuwenden, zu vermehren „zur Ehre und Zierde der Teutschen Nation".
Bis 1711 hatte Leibniz selbst präsidiert, danach sank die im Obergeschoss des königlichen Marstalles untergebrachte Akademie unter Friedrich Wilhelm I. zur Bedeutungslosigkeit herab, da dieser König für Gelehrte nur insofern Interesse hatte, als sie einen praktischen Nutzen erbrachten.
Die anderen wurden von ihm, selbst in offiziellen Schriftstücken, als seine königlichen Narren verspottet, und in der Tat amtierte einer seiner Hofnarren viele Jahre als Vizepräsident der Akademie.

Friedrich Wilhelm I. hatte sich insbesondere der Streitkräfte angenommen, die er im Laufe seiner Regentschaft von 40000 auf 80000 Soldaten erhöhte, und damit die Basis schuf, von der aus die politischen Aktivitäten Friedrichs II. Europa in Atem halten konnten.
Es war noch kein Monat seit der Thronbesteigung Friedrichs II. vergangen, als dieser an Voltaire schreiben konnte, dass er als erste Amtshandlung die Armee vergrößert und das Fundament zu einer neuen Akademie gelegt habe. Tatsächlich hatte Friedrich I. bereits nach zwei Wochen seiner Regierungszeit Kontakte mit Euler angebahnt, um diesen nach Berlin zu ziehen.

Als dann freilich Euler in Berlin seine erste Wohnung (an der ehemaligen Potsdamschen Brücke, nahe der Straße Unter den Linden) bezogen hatte, war die neue Akademie noch nicht formiert und der König im Krieg. Im Dezember 1740 waren nämlich preußische Truppen in das österreichische Schlesien eingefallen.
Dieser erste Schlesische Krieg (1740-1742) vergrößerte das preußische Territorium um ein Drittel. Es ist bemerkenswert, dass Voltaire bereits 1741 prägnant urteilte:

Der Fürst wirft seinen Philosophenmantel ab und ergreift den Degen, sobald er eine Provinz erblickt, die ihm gefällt.

Euler, der nach dem bürokratischen Ringen um seine Petersburger Entlassung voller Pläne und Tatkraft war, wollte rasch die Akademie aufbauen und fühlte sich - zu Recht übrigens - der Aufgabe gewachsen. Für seinen Dienstherrn Friedrich II. war der Krieg jedoch noch nicht beendet und stand deshalb noch im Mittelpunkt von dessen Denken und Handeln. Bevor Friedrich die Akademie aufbauen wollte, musste er die Schlesischen Kriege hinter sich gebracht haben. So gibt es aus den Kriegsjahren 1744 bis 1745 nur eine handschriftliche Mitteilung Friedrichs über die Akademie:

Nein, der Eilers (Euler - R. T.) wirdt einen aus Russland verschreiben der Habil ist und Professor in Node (Naude - R. T.) Seiner Stelle werden kan. [33, S. 15]

Ein von Leibniz initiiertes Privileg der Akademie war die Kalenderherstellung. Euler erwartete nach dem Gewinn Schlesiens größere Absatzchancen für den Kalenderverkauf und wollte mit den zusätzlichen Mitteln die neue Akademie finanzieren, aber Friedrich II. wies ihn 1743 spöttisch ab, dass er, Friedrich, der er nicht in der abstrakten Algebra zu rechnen gewöhnt sei, doch sähe, dass Euler sich mit diesem Vorschlag gegen die elementarsten Regeln des Calculs versündige.
Die Tatsachen haben allerdings Euler bestätigt, da die Kalendereinnahmen von 10000 auf 13000 Taler stiegen. Euler antwortete jedoch ruhig auf die verletzenden Zeilen des Königs, dass er von dem Wunsch durchdrungen gewesen sei, dem König endlich die Dienste zu erweisen, derentwegen er nach Berlin gekommen sei. So kam es, dass er 1742 nach Petersburg schreiben konnte:

Inzwischen lebe ich hier völlig independent [unabhängig], bekomme meine Pension richtig und dependiere von Niemand als immediate [unmittelbar] von Ihro Maj. [111, S. 25]

Die Sternwarte, mit deren Zustand er unzufrieden war und die er verdienstvoll ausgebaut hat, schöpfte sein immenses Leistungsvermögen längst nicht aus, obwohl ihm bereits 1741 die Leitung anvertraut worden war.
So wurde die neue Akademie erst ab 1743 durch eine königliche Kommission vorbereitet und fand 1746 ihre erste Heimstatt im Saal des königlichen Schlosses. Ihr erster Präsident Pierre Louis Moreau de Maupertuis, der als Begleiter Friedrichs II. in dem 1. Schlesischen Krieg 1741 infolge eines durchgehenden Pferdes in österreichische Gefangenschaft geraten war, erschien erst wieder 1745 im 2, Schlesischen Krieg nach dem Sieg von Hohenfriedberg, der eine sichere Lage versprach.

Euler wurde in der neubegründeten Akademie Direktor der mathematischen Klasse, neben der es noch drei weitere Klassen gab. Die geplante, aber auch die realisierte Besetzung der Akademie muss als gut bezeichnet werden. Mitglieder wurden u. a. der Mediziner Eller, der Botaniker Gleditsch, die Chemiker Marggraf und Pott, der Philosph de Lamettrie und natürlich der König selbst, der zwar für die literarische Klasse tätig war, aber keine Sitzung der Akademie

besucht hat.
Aus der alten Societät übernahm man 84 auswärtige Mitglieder, darunter die Naturforscher Celsius und Réaumur, den Philosophen Wolff und den Dichter Gottsched. Als auswärtige Mitglieder sind vor allem Voltaire und d'Alembert zu nennen.

Euler und Maupertuis verstanden sich vortrefflich, obwohl Euler zunächst dem ihm vorgesetzten Präsidenten gegenüber etwas reserviert gewesen war. Über Maupertuis' Erscheinen am Kampfschauplatz des 1. Schlesischen Krieges und der folgenden Gefangennahme bemerkte er kühl: „Auch soll Mr. Maupertuis ... bei dieser Aktion verloren gegangen sein."
Die anfängliche Gegensätzlichkeit war nicht grundsätzlicher Art, sondern durch Eulers Absichten, selbst Präsident zu werden, hervorgebracht worden. Euler wandte sich entschieden gegen Goldbachs Aussage, dass er den Ausspruch getan habe, „man könne sich nichts' Gnädigeres denken" als Maupertuis' Ernennung zum Präsidenten.
Jedoch kamen sich Euler und Maupertuis weltanschaulich sehr nahe, während Eulers Verhältnis zur radikalen französischen Aufklärung stets distanziert war.

Maupertuis' Beziehungen führten zu geschickten Ernennungen auswärtiger und ordentlicher Mitglieder, und die Akademie gedieh vorzüglich. So konnte bereits 1748 Maupertuis an den König die berechtigten Zeilen schreiben:

> Unsere Chemiker übertreffen alle Chemiker Europas, unsere Mathematiker können es mit denen aller Akademien aufnehmen. [32, S. 89]

Allerdings hätte es ausgereicht, für „unsere Mathematiker" den Namen Eulers zu setzen.
Im Berliner „Adreß-Calender" von 1743 ist vermerkt, „L. Euler wohnt in der Bärenstraße in seinem eigenen Haus", ein „artiges Haus" (Euler) mit großem Garten, das er für 2000 Reichstaler 1742 erworben hatte und unweit der Akademie gelegen war. Es ist das heutige Haus Nr. 21 in der Behrenstraße, gegenüber der Komischen Oper. Euler wohnte dort bis zum Weggang 1766 mit dem Privileg versehen, von Einquartierungen verschont zu sein.
Später kam 1753 für 6000 Taler ein Landgut in Charlottenburg (damals vor den Toren Berlins) hinzu, das er zur Versorgung seiner vielköpfigen Familie nutzte. So konnte er die Haushaltskosten um die Hälfte reduzieren.

Bis zur Eröffnung der neuen Societät hatte Euler in den „Miscellanea Berolinensia" [Vermischte Berliner Schriften] der alten Societät bereits fünf Artikel publiziert (zwei weitere fanden aus Platzmangel keine Aufnahme) und eine Preisaufgabe der Pariser Akademie über die beste Art, die Inklination einer Magnetnadel zu beobachten, erfolgreich behandelt.
Diese Miscellanea aus dem Jahre 1743 enthalten wichtige Arbeiten aus der Feder Eulers. Euler zeigte, dass die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y''(x) + c \cdot y'''(x) + ... = 0$$

durch die Substitution $y(x) = e^{ax}$ mit einer einzigen Operation gelöst werden kann, wobei seine Erkenntnisse über die Zerlegbarkeit von Polynomen Anwendung finden. Nach der von Johann Bernoulli angegebenen Methode waren n Operationen erforderlich.
Weiterhin finden sich die bekannten Formeln

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{b}\right)^b, \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

Aus ihnen lässt sich leicht der Zusammenhang zur Moivreschen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ und der Reihenentwicklung für $\sin x$ und $\cos x$ herstellen sowie für $x = \pi$ die

Euler bekannte Gleichung
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$
ableiten, die in bemerkenswert einfacher Weise wichtige elementare Größen verbindet und von F. Klein eine der merkwürdigsten Gleichungen der Mathematik genannt wurde. (Die Reihe $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + ...$ kannten bereits Leibniz und Newton.)

Euler schrieb beispielsweise die Moivresche Formel wie folgt
$$(\cos .z + \sqrt{} - 1. \sin .z)^n = \cos .nz + \sqrt{} - 1. \sin .nz.$$

Der Punkt hinter dem Funktionszeichen diente noch als Abkürzung. Entsprechend der Gepflogenheit Th. Harriots in seiner "Artis analyticae praxis" [Verfahren der analytischen Wissenschaft] von 1631 begann sich der Kursivsatz für Formeln und einzelne Buchstaben durchzusetzen, später wurden allerdings Funktionen und feste Zahlenwerte wieder steil gesetzt.
Die moderne übersichtliche Anordnung der Formeln fehlt noch. Wenn wir allerdings bedenken, dass um 1600 noch keine formelmäßigen Schreibweisen üblich waren, sondern erst durch Viete eingebürgert wurden, so ist der Unterschied von Eulers Schreibweise zu unserer Notation recht geringfügig.

Eulers Leben verlief während des 25jährigen Berlinaufenthaltes ruhig, so dass der Gelehrte sich seiner wissenschaftlichen Arbeit hingeben konnte, etwa 380 Arbeiten schrieb sowie einige Bücher verfasste. Bis zum Weggang konnten davon rund 275 dieser Arbeiten veröffentlicht werden. Unterbrochen wurde die Arbeitsruhe lediglich durch zwei Besetzungen im Siebenjährigen Krieg, als auch Euler die „Hand des Krieges“ (Goethe) zu spüren bekam und als sogar einmal sächsische Soldaten, die unter russischem Befehl standen, sein Landgut plünderten.

Der kommandierende General, später auch mit 4000 Talern die Zarin, entschädigten allerdings Euler reichlich, als sie von dem Übergriff erfuhren, z. B. erhielt er für jede entwendete Kuh 100 Taler.

Euler unterhielt Kontakte nach Petersburg und bezog auch von dort eine Pension von 200 Rubel (etwa 270 Taler), welche beim ersten Mal in Büchern ausgezahlt wurde, die in Petersburg entbehrlich schienen. Das jährliche Einkommen Eulers belief sich damit auf etwa 1900 Taler ohne die Einnahmen durch die Preisaufgaben. (Der Akademiepräsident Maupertuis erhielt 3000 Taler, die Universität Halle hatte bis 1785 einen Etat von 7000 Taler, d'Alembert bot der König 12000 Taler und Voltaire sogar 20000 Taler).
Bemerkenswert und für einen Mathematiker etwas überraschend ist, dass Euler in der Lotterie spielte, was ein Brief an Goldbach aus dem Jahre 1749 zeigt:

... als dass ich dieser Tage in einer Lotterie 600 Rthlr. gewonnen, welches ebenso gut ist, als wenn ich dieses Jahr einen Pariser Preis gewonnen hätte, [15, S. 311]

In einem späteren Brief an Goldbach bekennt Euler auf eine Anfrage des Freundes, dass er die genaue Zahl der errungenen Akademiepreise nicht mehr wisse.
Der spätere Präsident bzw. Vizepräsident der Petersburger Akademie Graf Rasumowki bzw. S. J. Rumowski weilten 1743/44 bzw. 1754/56, wie auch andere russische Wissenschaftler, bei Euler in Berlin. Ein Begleiter Rasumowskis schrieb nach Petersburg:

Euler macht unseren Aufenthalt in Berlin außerordentlich angenehm und nützlich. [99]

Euler sandte während seiner Berliner Jahre regelmäßig Arbeiten zur Veröffentlichung nach Petersburg, die insbesondere die reine Mathematik wie Zahlentheorie betrafen, denn der Aka-

demiepräsident Maupertuis schätzte - dem Landesherren Friedrich II. nicht unähnlich - in den Wissenschaften das Nützliche und hielt nicht viel von „schwierigen Bagatellen“.
Rasumowski versuchte aus Petersburg, Euler wieder ganz für die dortige Akademie zu gewinnen, wobei sich sogar D. Bernoulli anbot, Euler zeitweilig in Berlin zu vertreten. Euler hatte sich jedoch inzwischen gut eingelebt und lehnte mit den Worten, weil ich „mich hier so wohl befinde“, 1746 ab.

Dem Ruf, 1748 Nachfolger Johann Bernoullis in Basel zu werden, folgte Euler ebenfalls nicht. Euler empfahl Wissenschaftler an die Petersburger Akademie; er hat sich um so bedeutende Persönlichkeiten wie den Astronomen Mayer oder die Mathematiker Lambert und Lagrange, wenn auch vergeblich, bemüht. Russische Gelehrte brachte er in Berlin unter oder förderte ihre Ausbildung.
Berlin war eine Station, die nach Russland gehende oder von dort kommende Wissenschaftler für so wichtig ansahen, dass sie auf einen Besuch bei Euler nicht verzichten wollten. Abhandlungen der Petersburger Akademie wurden in Berlin vorgelegt, und umgekehrt.

Insgesamt war das wissenschaftliche Leben beider Akademien dank Eulers Tätigkeit auf das engste verbunden, und E. Winter charakterisiert dieses Wirken Eulers auf wissenschaftsorganisatorischem Gebiet sehr treffend als „goldene Brücke“.
Euler erstattete auch Gutachten für die Petersburger Akademie, u. a. über Arbeiten des jungen Lomonossow. Zu der 1748 gestellten chemischen Preisfrage der Petersburger Akademie bemerkte Euler in einem Brief an die dortige Akademie:

Ich zweifle, ob jemand wird darüber etwas besseres aufsetzen können als der H. Lomonossow, welchen ich zur Unternehmung dieser Arbeit zu persuadieren [überreden] bitte.

Der sich ergebende Briefwechsel beider Gelehrter enthält auch Lomonossows Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Masse, aber ebenfalls die erschütternden Klagen Lomonossows über die Despotie Schumachers.

Eulers Vater, den der Sohn seit der Abreise aus Basel nicht mehr gesehen hatte, starb 1745. Die Mutter siedelte deshalb nach dem Tode ihres Sohnes Heinrich im Jahre 1750 nach Berlin über, wo sie mit ihren Enkeln bis zu ihrem Tode 1761 auf dem Landgut in Charlottenburg lebte. Euler war ihr 1750 bis nach Frankfurt/M. entgegengereist, aber merkwürdigerweise nicht bis Basel, wo immerhin sein Freund D. Bernoulli zu treffen gewesen wäre.

5.2 Die Tragweite der Mechanik

Es gibt keine Wissenschaft, die sich nicht aus der Kenntnis der Phänomene entwickelte, aber um Gewinn aus den Kenntnissen ziehen zu können, ist es unerlässlich, Mathematiker zu sein.
D. Bernoulli

Eine besonders aktuelle Wissenschaft war im 18. Jahrhundert die Astronomie, und Euler hat eine Reihe wesentlicher Beiträge zur Himmelsmechanik geliefert. Im Jahr 1744 erschien Eulers Lehrbuch „Theoria motuum planetarum et cometarum" [Theorie der Bewegung von Planeten und Kometen], das bis in das 19. Jahrhundert grundlegend für die Berechnung von Planeten- und Kometenbahnen gewesen ist.

In ihm wird nach der Mechanik von 1736 eine neue Darstellung der Punktmechanik gegeben. Unter anderem wird die bereits 1737 gewonnene Einsicht hervorgehoben, dass jede Bewegung sich aus Verschiebungen (Translationen) und Drehungen (Rotationen) zusammensetzen lässt, sowie der Begriff der Hauptträgheitsachsen eines rotierenden Körpers erörtert.

Im gleichen Jahr folgt die populäre Schrift „Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würckung der Cometen“, die auch die Frage erörtert, „was vom Schweif der Cometen zu halten sey“ und deren Erfolg beachtlich gewesen sein muss, da noch eine Fortsetzung dazu erschien.
Bald nach Newtons Tod beobachtete man, dass die mittels seiner Gravitationstheorie berechneten Bahnen von Jupiter, Saturn und Mond erheblich von den tatsächlichen abwichen. Damit war Newtons Theorie eine Zeitlang als Ganzes fraglich geworden, und nicht nur Euler glaubte, dass eine Korrektur des Gravitationsgesetzes notwendig sei.

Der französische Mathematiker A. Clairaut bemerkte jedoch, dass man von den aus den Wechselwirkungen der Himmelskörper herrührenden Störgliedern auch die von höherer Ordnung berücksichtigen müsse, um die Diskrepanzen zu beseitigen.
Euler war skeptisch, regte aber dann doch ein Preisausschreiben der Petersburger Akademie darüber an und sah schließlich ein, dass Clairaut Recht hatte, empfahl ihn also vorbehaltlos für den Preis, den dieser auch 1752 erhielt.

Aber Euler war noch nicht völlig befriedigt, und so gab er 1753 selbst eine Mondtheorie heraus („Theoria motus lunae“ [Theorie der Mondbewegung]), und die dabei entwickelte Methode zur näherungsweisen Lösung des Dreikörperproblems ist wichtig.
Bereits 1747 hatte Euler, nachdem er nur Spezialfälle des Dreikörperproblems explizit lösen konnte, diese Problematik als allgemeines Störungsproblem als erster behandelt. Die Studien über die gegenseitigen Störungen der Planeten setzte er in vielen Arbeiten fast bis zu seinem Tode fort.

Die Mondtheorie hatte eine bemerkenswerte Folge. Die Navigationstechnik war wichtig für die Seeherrschaft, was man in England sehr genau wusste. Der Astronom T. Mayer in Göttingen stellte mit Hilfe der Eulerschen Theorie Mondtafeln auf, die es gestatteten, mit vorzüglicher Genauigkeit die geographische Länge einer Schiffsposition zu bestimmen.
Das britische Parlament hatte 1714 eine beträchtliche Summe auf die genaue Längenbestimmung ausgesetzt, von der 1765 Euler 300 Pfund und die Witwe Mayers 3000 Pfund erhielten. Gleichzeitig wurde noch J. Harrison für den Bau eines fast präzisen Chronometers bedacht. Mehr als 100 Jahre wurde so zur See gefahren!

1739 hatte Johann Bernoulli auf Eulers Bitte hin diesem den grundsätzlichen Teil seiner „Hydraulica“ [Hydromechanik] zugeschickt.
Aus der darin enthaltenen Strudeltheorie gewann Euler (nach C. E. Truesdells Vermutung) eine bahnbrechende Erkenntnis für die Mechanik, die seine triumphalen Erfolge auf dem Gebiet der starren und elastischen Körper sowie Fluide maßgeblich begründete. In etwas verschwommener Art, vielleicht nach Leibnizens Rat, „damit sie uns nicht hinter die Schliche kommen“, erklärte Bernoulli die Entstehung eines Strudels durch Anwendung des Gesetzes

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung} \qquad \text{(Impulsänderungssatz)}$$

auf ein Flüssigkeitselement. Hierauf bezieht sich Euler in einem Brief an Bernoulli:

Ich glaube, dass Sie ... das Problem in einer Weise gelöst haben, die ich nicht nur gewünscht habe, sondern in der auch selbst ich mich vergeblich bemüht habe. Nun haben Sie mir auf diesem Gebiet die größte Erleuchtung gebracht, denn bisher erschien mir das alles sehr undurchsichtig. [102, S. 171]

In Verbindung mit seinem genialen Schnittprinzip, das ein Körperelement in Gedanken im

Körper freischneidet, um die am Körperelement auftretenden Kräfte zu ermitteln, erhielt Euler zuerst in der Arbeit von 1750 „Decouverte d'un nouveau principe de mecanique'" [Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik] veröffentlicht - die fälschlich Newton zugeschriebene Gleichung des Impulssatzes (in heutiger Symbolik)

$$d\mathbf{K} = dm\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \qquad (\mathbf{K}\ \text{Kraft}, m\ \text{Masse}, \mathbf{x}\ \text{Ortsvektor})$$

komponentenweise. Newton hingegen hatte in der Lex II seiner Principia lediglich geschrieben:

Die Änderung der Bewegungsgröße [$= m\mathbf{v}$] ist der Einwirkung der Kraft proportional und erfolgt in der Richtung, in der die Kraft wirkt.

Euler hebt seine fundamentale Gleichung mit den Worten

Und dies allein ist diejenige Formel, welche alle Prinzipien der Mechanik enthält [102, S. 22]

hervor. Diese Behauptung wird Euler 25 Jahre später durch Hinzunehmen des Drehimpulssatzes korrigieren, denn nur translatorische Bewegungen lassen sich vollständig durch Energie und Impuls charakterisieren. Euler ging jedoch bereits in dieser fundamentalen Arbeit über Translationen hinaus und betrachtete Rotationen eines starren Körpers (genau genommen ist es noch die Mechanik des Punkthaufens) um Achsen, die selbst bei variablen Achsen analytisch beschrieben wurden.
Auch das inverse Problem, bei dem die Kräfte gegeben sind und die Rotationsachse zu bestimmen ist, wurde abgehandelt. Angeregt wurden diese Untersuchungen vermutlich durch die Nutation der Erdachse, der 1749 eine Arbeit gewidmet worden war.

Die Aufstellung der allgemeinen Bewegungsgleichungen für einen starren Körper versuchte Euler 1758 in der Arbeit "Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable" [Über Rotationsbewegungen von Festkörpern um eine variable Achse]. Indem er die momentane Rotationsachse eines Körpers auf die für den Körper feststehenden Hauptträgheitsachsen bezog, erhielt er die nach ihm benannten berühmten Kreiselgleichungen.
Die „Theoria motus corporum solidorum" [Theorie der Bewegung von Festkörpern] von 1765 wendet die neuen Erkenntnisse umfassend in der Mechanik an. 1775 schloss Euler mit dem allgemeinen Prinzip vom Drehimpuls (Spezialfälle waren bereits früher behandelt) in der Arbeit „Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi" [Neue Methode, um die Bewegung starrer Körper zu bestimmen] diese Bemühungen um eine Fundierung der Festkörpermechanik ab.

Wenn Euler auch vom starren Körper spricht, so meint er doch beliebige Materialien, wenn zusätzlich die dieses Material beschreibenden Materialgesetze bekannt sind (wie für Elastika das Hooksche Gesetz usw.). Damit konnten alle Aufgaben der klassischen Mechanik im Prinzip gelöst werden.
In die Fünfziger- und Sechzigerjahre fallen die klassischen Arbeiten über Flüssigkeitsmechanik, die sich aus der konsequenten Anwendung der mechanischen Grundgesetze auf Flüssigkeitselemente ergeben. Vom Ausgangspunkt der eindimensionalen Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Rohr, die Johann und Daniel Bernoulli untersucht hatten, gelangte Euler bis zur allgemeinen Formulierung der Theorie idealer inkompressibler Flüssigkeiten, beispielsweise zur Kontinuitätsgleichung für Flüssigkeiten konstanter Dichte oder zur Gleichung für das Geschwindigkeitspotential, die gewöhnlich Laplace zugeschrieben wird und auf eine Feldtheorie führt.
Eulers Arbeiten gaben kräftigen Anstoß zur Entwicklung der partiellen Differentialgleichungen.

Truesdell, der in der Geschichte der Mechanik neue Akzente setzte, schreibt über Eulers Leistungen:

Die Eulersche Theorie der Flüssigkeiten besitzt eine kaum zu überschätzende Wichtigkeit, Ihre Grundgesetze wurden von Euler in Form einiger einfacher und schöner Gleichungen formuliert, die mit einer knappen Erklärung auf eine Postkarte geschrieben werden könnten. Es ist eine der tiefsinnigsten Seiten des Buches der, Natur. [102, S. 257]

Wir wissen von Euler selbst, dass er auf seine Leistungen stolz war. Es ist aber charakteristisch für Euler, dass er neben den grandiosen theoretischen Entwürfen auch praktische Fragen nicht aus dem Auge verloren hat. Durch das Segnersche Wasserrad, das noch heute als Rasensprenger in Gärten dient, wurde Euler zu Abhandlungen über den Turbinenbau angeregt.
Darunter befindet sich eine Arbeit, die die Grundlage der modernen Lehre der Turbinen bildet. 1944 wurde von Schweizer Ingenieuren die von Euler theoretisch beschriebene Turbine gebaut (Abb. 12), die alle Erwartungen erfüllte und bei einer Leistung von 0,15 PS einen Wirkungsgrad von 0,71 aufwies. (Zum Vergleich: eine moderne Francis-Turbine hat einen maximalen Wirkungsgrad von 0,80.)

12 Eine von Ackeret 1944 nach Angaben von Euler gebaute Turbine

Euler hatte in seinen Rechnungen selbst die Drücke beim Anlauf und das Abreißen der Strömung durch verschwindenden Druck berücksichtigt, was im Turbinenbau ein schwieriges Problem bildet. Über die damit verbundenen materialzerstörenden Begleiterscheinungen sind sich erst die modernen Turbinenkonstrukteure klar geworden.

5.3 Akademische Kämpfe

5.3.1 Der Monadenstreit

Kein Mensch fügt uns jemals Schaden zu, selbst wenn er im Unrecht wäre.
L. Euler

Schaffenspausen gab es in der Berliner Akademie nicht, und in den Jahren der Kriegswirren fanden mit und um Euler nicht minder heftige weltanschauliche Auseinandersetzungen statt, in die die geistigen Spitzen Europas verwickelt waren und die die Gegensätze der Aufklärung deutlich werden ließen, namentlich in Fragen der Religion.
Euler war der Offenbarungsglaube heilig („Wenn es um den lieben Gott ging, verstand Euler keinen Spaß“, urteilte J. O., Fleckenstein), und er bekämpfte und verabscheute die Lehren von Leibniz und Wolff, die die Offenbarung vernünftig erklärten wollten, was aus Eulers Sicht zu

höchst gefährlichen Folgerungen hätte führen können, nämlich zu den prästabilierten Harmonien anstelle der Theologie des freien Willens.

Ein Beispiel hierfür ist der Monadenstreit. Leibniz, der Urheber der Monadenlehre, sah in den Monaden in sich abgeschlossene, letzte und beseelte Einheiten, deren Gesamtheit die geordnete Welt ausmacht. Der Philosoph Ch. Wolff, dessen Philosophie Friedrich II. nach dem Zusammenbruch seines Glaubens eine Stütze gewesen war, wurde von Friedrich II. rehabilitiert und popularisierte in vereinfachter Form von der Universität Halle aus die Monadenlehre mit ungeheuerem Erfolg.
Euler widersprach diesen Auffassungen entschieden, die das philosophische Klima jener Zeit bestimmten, aber er kannte sie vermutlich nur aus zweiter Hand bzw. in der Wolffschen Prägung.

Neben den erwähnten theologischen Komplikationen widersprachen der Monadenlehre die unendliche Teilbarkeit der Materie, der passiven Trägheit der Materie die mit der Beseeltheit verbundene Spontaneität, und letztlich ließen sich die Bewegungsgesetze der Materie nicht daraus herleiten. Nach Eulers Auffassung führte die Bewegungskraft der Monaden direkt in den Atheismus.
Noch radikalere Auffassungen hatten einige französische Aufklärer, für die Geister entweder nicht existierten oder Körper waren, wie sich für de Lamettrie der Mensch als eine Maschine darstellte.

1745 stellte nun die Akademie, nicht ohne Eulers Einfluss, die Preisaufgabe „L'examen de l'hypothese des monades" [Prüfung der Monadenlehre].
Die Berliner Akademie besaß, neuartig für alle Akademien jener Zeit, eine Klasse für Spekulative Philosophie, in der sich die Trennung von aufklärerischer Philosophie und Glauben ausdrückte. Durch die bedeutende Stellung der Akademie in philosophischen Fragen kam Euler in gewisser Weise dazu (insbesondere über die alle vier Jahre gestellten philosophischen Preisfragen, die in der gesamten wissenschaftlichen Welt stärkste Beachtung fanden), eine Art „offizieller Führer" der Philosophie in Deutschland zu sein.

Sein Einfluss auf die sich bildende klassische deutsche Philosophie, die in der Mitte des 18. Jahrhunderts aus dem Berkeley-Humeschen Sensualismus (die Werke beider Philosophen wurden um 1750 ins Deutsche übersetzt), der Leibniz-Wolffschen Monadenlehre und der Naturphilosophie erwuchs, ist nicht zu unterschätzen.
Die Preisaufgaben stellten „einen Hebel dar, mit dem Jahr für Jahr die Wissenschaft um eine Stufe angehoben wurde" (F. Dannemann). Spätere Preisaufgaben fragten: „Welche ist die beste aller Welten?", „Ist Metaphysik so evident wie Physik?", „Sind Naturgesetze notwendig oder psychologische Phänomene?" oder forderten die Wolffianer auf, aus ihrer Philosophie die Prinzipien der Mechanik abzuleiten.

Es ist hieraus deutlich zu ersehen, wie Euler auf die Philosophie einwirkte und das Arbeitsfeld Erkenntnistheorie scharf abgrenzte, zu dem er selbst bedeutende Beiträge und Anregungen lieferte. Insbesondere der hier kritische Kant bezog sich immer wieder auf Euler und widmete sich in der „Kritik der reinen Vernunft" (1781) der Frage, ob Philosophie wie Mathematik oder Physik als Wissenschaft möglich sei.
Wiewohl Euler auch die Existenz der theoretischen Physik nicht bezweifelte, so wusste er doch, dass unmittelbare Naturbetrachtung nicht zugrunde gelegt werden könne, da Kritik auf Schritt und Tritt möglich wäre. Da aber die Sätze der Physik wohl begründet sind und durch die Erfahrung bestätigt werden, müsse sich das die Philosophie zunutze machen und imstande

sein, die Lehre von den Körpern zu begründen.
Der Einfluss auf Kant, der später auch fragte, wie reine Physik möglich sei, wird offenbar, und Kant hob seinerseits hervor, dass sich andere Philosophen außer Euler mit verworrenen und abstrakten Dingen abgäben.

Voltaire hat durch seinen satirischen Roman „Candide“ (1758) indirekt eine negative Antwort auf die Frage nach der besten aller möglichen Welten gegeben, wobei er Leibnizens Auffassung heftig attackierte. Vorher allerdings sollte Voltaire Leibniz in einer mathematischen Frage, die durch Maupertuis in diesem philosophischen Umfeld angesiedelt wurde, entschieden beistehen. Euler griff 1746 etwas unfair in den Monadenstreit ein, als er zwar anonym, doch von allen an den Auseinandersetzungen Beteiligten erkannt, eine Schrift „Gedancken von den Elementen der Cörper, in welchen das Lehrgebäude von den einfachen Dingen und Monaden geprüfet, und das wahre Wesen der Cörper entdeckt wird“ veröffentlichen ließ.

Als offizieller Akademievertreter nahm er so vorweggreifend Partei, was ihm die Monadisten mit Recht verübelten. Der Preis wurde 1747, nicht ohne Eulers Einwirken, was dieser später eingestand, der mittelmäßigen Arbeit eines Sangerhausener Advokaten zuerkannt.
„Was haben sie für Schriften gekrönt!“ schrieb rückblickend J.G. Herder in sein Reisejournal im Jahre 1769, und Wolff ließ 1748 seinem Ärger in einem Brief nach Petersburg freien Lauf:

> Herr Euler, der seinen wohlverdienten Ruhm in der höheren Mathematik genießen könnte, will nun mit Macht in allen Wissenschaften dominieren, ..., wodurch er seinem eigenen Ruf sehr schadet, ... als auch die Akademie zu Berlin in viel Schaden bringt. [33, S. 10]

Die Wogen schlugen hoch, und der Streit wurde so populär, dass man, wie das Akademiemitglied Sulzer bemerkte, ein Jahr lang am Hofe von nichts anderem sprach. Eulers Philosophie wurde dabei häufig sehr gering geschätzt, womit man ihm damals - wie auch später noch - nicht gerecht wurde. Bemerkenswert bleibt aber der Wandel des geistigen Klimas der Akademie, da man wenige Jahre nach dem Tod des Begründers dessen philosophische Ansichten schärfster Kritik unterwarf.

5.3.2 Der Streit um das Prinzip der kleinsten Aktion

> Da nämlich der Plan des Universums der vollkommenste ist, ... kann kein Zweifel bestehen, dass alle Wirkungen in der Welt aus den Endursachen mit Hilfe der Methode der Maxima und Minima gleich gut bestimmt werden können wie aus den bewirkenden Ursachen.
> L. Euler

Noch berühmter ist die spektakuläre Auseinandersetzung um das Prinzip der kleinsten Aktion, die in einem Skandal endete. Der Akademiepräsident Maupertuis nahm in diesem Streit eine zentrale Stelle ein. Er war eine der bemerkenswerten wissenschaftlichen Größen seines Jahrhunderts, weniger durch seine wissenschaftlichen Leistungen als vielmehr durch seinen Sinn für die wissenschaftlichen Erfordernisse seiner Zeit und die Kraft seiner Darstellungs- und Organisationsgabe.

In der spekulativen, aber kritischen Philosophie Descartes' aufgewachsen, war Maupertuis nach England gegangen und kehrte als begeisterter Anhänger der rationalen Newtonschen Physik zurück, die auf Beobachtung und Experiment beruhte. Das, was die Engländer erst Jahrzehnte später getan haben, vollzog er bereits 1729 bei Johann Bernoulli:

Er studierte die Leibnizsche Analysis. Denn ohne die neue Analysis konnte man die Tragweite des Newtonschen Systems nicht ermessen, was in erster Linie Eulers Arbeiten belegten.

Maupertuis' geistige Beweglichkeit und Aufnahmefähigkeit weisen ihn als ein Kind des 18. Jahrhunderts aus.
Zunächst hatte aber Maupertuis mit seinen Landsleuten Schwierigkeiten, als er die Franzosen zur Newtonschen Physik bekehren wollte. Gegenüber allen glänzenden Erfolgen des Newtonschen Systems hatten die Anhänger der Descartesschen Philosophie einen schwerwiegenden Einwand: Wieso sollten sich die passiven und trägen Teile der Materie untereinander anziehen?

In der Fernwirkung der Gravitation durch den leeren Raum, die seit R. Cotes die Nachfolger Newtons als Eigenschaft der Körper betrachteten, sah man überwundene mystische Gedanken wieder aufleben. In der Descartesschen Physik war der Raum zwischen den Körpern mit einer feinen Substanz, dem Äther, ausgefüllt, und die mechanischen Kräfte ergaben sich aus Druck und Stoß der undurchdringlichen kleinsten Materieteilchen, also aus unmittelbaren Kontakten bzw. Nahwirkungen.
Dieses Bild, eine Konsequenz der Descartesschen Auffassung, was ein Körper sei, schien dem mechanischen Denken „anschaulicher" und einleuchtender sowie die mit der Undurchdringlichkeit (Impenetrabilität) herbeigezauberten Kräfte nicht scholastisch.

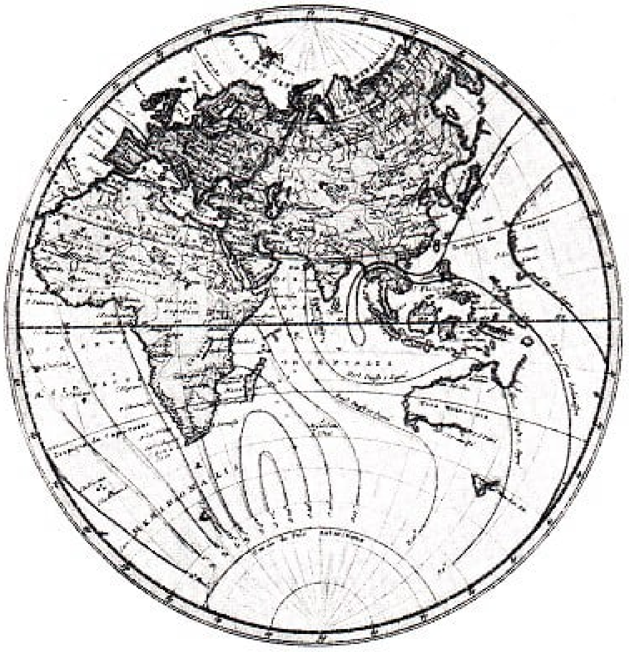
Euler teilte in vielen Punkten diese Ansichten, ohne sie sich jedoch völlig zu eigen zu machen. Es ist bei der ausgezeichneten Rolle von Druck und Stoß naheliegend, dass Euler neben der Descartesschen Auffassung eine eigene mathematisch fundierte Stoßtheorie entwickelt hat. Er veröffentlichte in den Jahren 1738 bis 1746 hierzu wesentliche Arbeiten, denen 1770 bis 1772 weitere folgten.
Euler war stets ein Anhänger der Nahwirkung.
Er akzeptierte zwar die Gültigkeit des sich glänzend bewährenden Gravitationsgesetzes von Newton, aber keinesfalls die mit Hilfe der Fernwirkung gegebene Begründung. Die Entwicklung war hier anders verlaufen, als man es sich erhofft hatte:

Die erste exakt beschreibbare Naturkraft (Gravitation) war nicht durch Druck und Stoß erklärbar, und Newton war sich dieser Tatsache wohl bewusst. Newton machte sich Gedanken über die „wahre" Natur der Gravitation, die er allerdings nicht veröffentlichte. Er hat dabei offenbar auch auf den mechanisch „anschaulichen" Äther zurückgegriffen und damit selbst physiologische Vorgänge zu begründen versucht. Seine Bemühungen fasste er in dem bekannten Satz zusammen:

Ich habe noch nicht dahin gelangen können, aus den Erscheinungen den Grund dieser Eigenschaften der Schwere abzuleiten, und Hypothesen erdenke ich nicht [hypotheses non fingo] ... Es genügt, dass diese Schwere existiere, dass sie nach den von uns dargelegten Gesetzen wirke und dass sie alle Bewegungen der Himmelskörper und des Meeres zu erklären imstande sei.
(Principia, 1726)

Newtons Gegner in Frankreich glaubten ein unwiderlegbares Argument gegen dessen Theorie zu besitzen. An seiner Stichhaltigkeit konnte kein Zweifel bestehen, da Newton mit eigenen Waffen geschlagen werden sollte, denn er hatte aus seiner Theorie gefolgert, dass die Erde an den Polen abgeplattet sei. Bereits im 17. Jahrhundert war entdeckt worden, dass die Erde keine exakte Kugelgestalt haben könne, und französische Messungen ließen auf eine Zuspitzung an den Polen schließen, also auf eine zitronenförmige Erdgestalt.

Allein, Newtons Anhänger konnten wiederum die Gültigkeit dieser Behauptung mit Recht in Frage stellen, da die gemessenen Entfernungen für genaue Aussagen zu gering gewesen waren.



13 „Geographischer Atlas bestehend in 44 Land = Charten, worauf alle Theile des Erd = Creyses vorgestellt werden", Berlin 1760.

Von Euler im Auftrage der Akademie herausgegebener Atlas. Unser Bild zeigt eine der Halbkugeln der Karte 2: „Declination der Magnet=Nadel ... auf das Jahr 1744." Euler kommentiert: „Diese Charte muss als gantz neu angesehen werden, indem sich dieselbe in keinem anderen Atlas befindet, und auch hier auf keinen teutschen Charten die Abweichung der Magnet = Nadel vorgestellt worden."

Maupertuis setzte durch, dass er zur Klärung dieser damals außerordentlich brennenden Frage, die nicht nur die Gestalt unseres Wohnplatzes klären sollte, sondern die auch zwangsläufig die wichtige Navigationstechnik mit betraf, im Jahre 1736 eine Expedition zur Meridianmessung nach Lappland, also in Polnähe, ausgerüstet erhielt.

Der Expedition gehörten u. a. der Mathematiker A. Clairaut und der Physiker A. Celsius an. Die lappländische Expedition, teilweise eine Odyssee, wurde ein voller Erfolg, und in Verbindung mit der großen peruanischen Gradmessung führte sie dazu, dass Frankreich 1738 einhellig die Lehrmeinung wechselte, und Newtons Physik drang bis in die Salons. Newton war bestätigt worden und Maupertuis wurde sein Prophet (genauer: Maupertuis hielt sich dafür).

Maupertuis propagierte geschickt die Reise (von der er als Souvenir zwei hübsche Lappinnen mitgebracht hatte) und brach die anfängliche Gleichgültigkeit gegenüber seinem Unternehmen, so dass er 1742 Direktor der Academie des Sciences in Paris wurde und 1743 unter die 40 Unsterblichen der Academie francaise aufgenommen wurde.

Voltaires Freundin, die gelehrte Marquise du Châtelet, übersetzte gemeinsam mit einem mathematischen Beistand, dem bald ins volle Rampenlicht tretenden S. Koenig, einem Schüler von Johann Bernoulli, Newtons Principia in die französische Sprache. Voltaire, der ebenfalls Newtonsche Ideen in Frankreich verbreitete, besang Maupertuis und verglich ihn mit Archimedes und Kolumbus.
Friedrich II. wurde auf den geistreichen Maupertuis im Zenit dessen Ruhmes aufmerksam und sah in ihm, der bereits der alten Berliner Societät angehörte, den geeigneten Präsidenten für seine Akademie. Das war in der Tat eine glückliche Entscheidung, denn Maupertuis verstand es, bedeutende Gelehrte für die Akademie zu gewinnen.

Außerdem repräsentierte der weltmännische Franzose das wissenschaftliche Unternehmen im friderizianischen Sinn. Allerdings währte das öffentliche Interesse an Maupertuis' Verdiensten nicht ewig, und Maupertuis, der „ständig vom Pol zurückkehrte“, sollte zwei Übeln erliegen, die er seiner Expedition verdankte: der Schwind- und der Ruhmsucht.

Da wir nun die Personen der Handlung vollständig vorgestellt haben, kann sich der Vorhang zum Vorspiel heben. Die Vierziger- und Fünfzigerjahre standen im Zeichen intensiver Grundlagenforschung auf mechanischem Gebiet, geführt von Euler, D. Bernoulli und d'Alembert, zu denen sich später Lagrange gesellte.
Man bemühte sich, die reichhaltigen Ergebnisse zu systematisieren, aber dabei stritt man auch über die Grundlagen. Trotz der großen praktischen Erfolge war kein Prinzip bekannt, aus dem man die Grundsätze der Mechanik sicher ableiten konnte.

Maupertuis suchte dabei, wie Platon im „Phaidon“ oder Leibniz mit seiner charakteristica generalis [allgemeine Charakteristik] vor ihm und Einstein nach ihm, die „Weltformel“, ein allgemeines Prinzip, das die Gesetze der Welt in sich vereinen sollte. Er hatte 1740 in den Memoires der Pariser Akademie eine Arbeit veröffentlicht, in der .er zeigte, dass ein gewisses System von Massenpunkten im Gleichgewicht ist, wenn die Summe bestimmter Produkte minimal (stabile Lage) oder maximal (!) (labile Lage) ist.
Durch dieses Extremalkriterium der Statik angeregt, versuchte Maupertuis eine Übertragung der teleologischen Sicht auf dynamische Probleme. Er ging 1744 von dem bekannten Fermatschen Prinzip des kürzesten Lichtweges bzw. der schnellsten Ankunft (1629) aus, fasste im Newtonschen Sinne Licht als Korpuskeln auf und errechnete für die Lichtausbreitung bei der Brechung oder Spiegelung, dass das Integral

$$\int mvds$$

(m Masse, v Geschwindigkeit, s Weg), das Leibniz die „Aktion“ genannt hatte, minimal sei. Er kam dabei für die Brechung von den falschen physikalischen Vorstellungen der Newtonschen Schule (über die Lichtgeschwindigkeit bezüglich der Dichte des Mediums) kraft des berühmten klügeren Bleistiftes sogar zum richtigen Resultat!

Maupertuis' Phantasie, die reichlich mit übersteigertem Selbstbewusstsein und maßlosem Ehrgeiz gepaart war, verleitete ihn nach den wenigen und unglücklichen Beispielen 1746 ein weiteres universales Prinzip der kleinsten Aktion zu formulieren:

Tritt in der Natur irgendeine Änderung ein, so ist die für diese Änderung notwendige Aktionsmenge die kleinstmögliche. [102, S. 93]

Maupertuis umgab sein Prinzip weit über den mathematischen Inhalt hinaus mit philosophischem Glanz („des Allerhöchsten würdig“), er wollte sowohl die Planetenbewegungen als auch das Wachsen der Pflanzen und Tiere damit erklärten (wie schlecht eine Pfauenfeder zu den Sparsamkeitsargumenten passte, blieb unbemerkt) und sah 1750 im „Essai de Cosmologie“ [Abhandlung über Kosmologie] sogar einen Beweis für das Dasein Gottes in dem Prinzip, ja alle anderen Gottesbeweise wären nun kraftlos und hinfällig!

Bevor wir uns einer Wertung des Prinzips der kleinsten Aktion (Principe de la moindre action) zuwenden, das mathematisch eine sehr schöne, aber allgemein falsche Aussage darstellt, geben wir als typische Leseprobe aus Maupertuis' Arbeit von 1746 für die Behandlung des geraden, zentralen Stoßes zweier uneleastischer Körper (Probleme I) das erste Textdrittel der Lösung:

Zwei unelastische Körper der Massen A und B mögen sich mit den Geschwindigkeiten a und b nach der selben Seite bewegen, aber A schneller als B, so dass B von A eingeholt und angestoßen wird.

Die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoß sei x, mit $x < a$ und $x > b$. Die im Universum eingetretene Änderung ist nun die, dass der Körper A, der sich mit der Geschwindigkeit a bewegte und in einer bestimmten Zeit einen Weg, der gleich a ist, durchlief, sich nur noch mit der Geschwindigkeit x bewegt und nur noch eine Strecke x durchläuft; der Körper B, der sich nur mit der Geschwindigkeit b bewegte und nur eine Strecke b durchlief, bewegt sich nun mit der Geschwindigkeit x und durchläuft eine Strecke x. [102, S. 93; auch EO 11/5]

Mit gleicher Weitschweifigkeit werden im nächsten Drittel des Textes die Geschwindigkeitsänderungen $a-x$ und $x-b$ einsichtig gemacht, im letzten Drittel der Lösung erscheint unvermittelt der Ausdruck $A(a-x)^2 + B(x-b)^2$, der als Aktion bezeichnet wird, woraus schließlich die Geschwindigkeit

$$x = \frac{Aa + Bb}{A + B}$$

ermittelt wird.

Maupertuis deutete an, dass er den Lösungen zu den entscheidenden und stets offen gelassenen Fragen beim Erkennen der Welt auf der Spur sei. Sein Grundanliegen ist gar nicht so falsch, wie es später oft hingestellt wurde, denn mit der Aktion (Wirkung ist eine schlechte Übersetzung) erfasste Maupertuis intuitiv einen der fruchtbarsten Begriffe der Physik, der es in Verbindung mit der Variationsrechnung gestattet, eine universale Methode für die mathematische Physik zu schaffen, schon deshalb war Euler außerordentlich interessiert. Max Planck hat so über das Prinzip geurteilt:

Unter den mehr oder weniger allgemeinen Gesetzen, welche die Errungenschaften der physikalischen Wissenschaft in der Entwicklung der letzten Jahrhunderte bezeichnen, ist gegenwärtig das Prinzip der kleinsten Wirkung (Aktion) wohl dasjenige, welches nach Form und Inhalt den Anspruch erheben darf, jenem idealen Endziel der theoretischen Forschung am nächsten zu kommen ...
Das Prinzip der Erhaltung der Energie lässt sich aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ableiten, es ist also in ihm mitenthalten, während das Umgekehrte nicht zutrifft. Daher ist das Energieprinzip das speziellere das Prinzip der kleinsten Wirkung das umfassendere Gesetz. [64]

Maupertuis hatte zwar, wie Helmholtz sich ausdrückte, „einen Teil der Wahrheit erraten“, aber seine Begründungen waren oberflächlich, hingeworfen und unzulänglich.
Neben Maupertuis' Arbeiten, die in der Aufklärung infolge der metaphysischen Ausdeutungen naturgemäß größtes Aufsehen erregen mussten, hat auch Euler sich der Problematik mit der Nüchternheit eines Mathematikers genähert und in eingeschränkter Form, aber mathematisch korrekt, für einen Massenpunkt das Prinzip für umfangreiche Problemklassen entwickelt, zuerst einige Monate nach Maupertuis' Veröffentlichung von 1744 im Additamentum II [Zusatz II] der „Variationsrechnung“. Er hat mit Blick auf die philosophischen Spekulationen dort vorsichtig geschrieben:

Aus diesen Fällen (Schwerefeld, Zentralkräfte, Potentialkräfte - R.T.) leuchtet die völlige Übereinstimmung des Prinzips ... mit der Wirklichkeit ein: aber es kann noch zweifelhaft sein, ob diese Übereinstimmung auch in komplizierteren Fällen weiter stattfindet. Deshalb muss man sorgfältig die Reichweite dieses Prinzips untersuchen, um ihm nicht mehr zuzuschreiben, als in seiner Natur liegt. [2 oder EO 1/24]

Euler war sich weiter zum einen darüber klar, dass das Maupertuissche Sparsamkeitsprinzip in der Natur nicht zutreffend ist (also auch Maxima der Aktion erscheinen), dass es aber zum anderen einen Doppelweg gibt, physikalisches Geschehen zu beschreiben, nämlich in direkter Weise kausal a posteriori mit Differentialgleichungen oder a priori in finaler Weise mit teleologischen Prinzipien; seine Haltung zu den Prinzipien ist dabei kritisch. Beides können wir diesen Zeilen aus dem zitierten Additamentum entnehmen:

Da ja alle Verrichtungen in der Natur irgendein Gesetz des Maximums oder Minimums befolgen, so besteht kein Zweifel, dass auch in den Bahnen geworfener Körper ... irgendeine Eigenschaft des Maximums oder Minimums vorhanden sein muss, Welches aber diese Eigenschaft sei, ist aus metaphysischen Prinzipien a priori nicht so leicht zu ersehen, weil aber diese Kurven selbst auch nach der direkten Methode ermittelt werden können, wird man bei gebührender Aufmerksamkeit das erschließen können, was in ihnen Maximum oder Minimum ist.[2 oder EO 1/24]

Es wird immer wieder mit Verwunderung hervorgehoben und als moralischer Mangel angesehen, dass Euler keinerlei Ansprüche auf die Entdeckung des Prinzips stellte, sondern sie bedenkenlos an seinen Dienstherrn Maupertuis abtrat, ja später ausdrücklich dessen Priorität betonte, anstatt doch wenigstens zu schweigen.
Man findet es erstaunlich, dass Euler die Anmaßungen in Maupertuis' Arbeit von 1746 schweigend hingenommen hat, seine Additamenta in der Variationsrechnung seien eine „schöne Anwendung" des Maupertuisschen Prinzips.

Das schärfste Urteil, von A. Kneser, einem in der Variationsrechnung erfahrenen Mathematiker, rügt die Subalternität Eulers (die auch D. Bernoulli - hier einmal der Sohn seines Vaters - gelegentlich zu sehen glaubte): „So geht es, wenn ein großer Gelehrter zugleich ein kleinlicher und ängstlicher Haus- und Familienvater ist."

Hiergegen spricht jedoch eine ganze Reihe von Gründen. Zunächst mag die pointierte Gegenfrage erlaubt sein, weshalb Euler andererseits beispielsweise die nahezu ausgebildete Variationsrechnung generös an Lagrange „verschenken" durfte, ohne moralische Vorbehalte auszulösen, um bereits die hintergründige Tendenz der Frage herauszustellen.
Selbst wenn Euler sich Maupertuis gegenüber, mit dem er sich zu dieser Zeit bestens verstand, verpflichtet gefühlt haben sollte, so wäre die Überlassung der Priorität in Eulers Augen wohl keine geeignete Erkenntlichkeit gewesen, da er solchen Fragen stets völlig gleichgültig gegenüber stand, und, wie Caratheodory hervorhob, dabei noch die Verdienste anderer bis zum Überfluss betonte.

Euler bewunderte sowohl den weltmännischen Präsidenten - das belegen die Briefe an den todkranken Maupertuis - als auch den physikalisch einfallsreichen Kollegen, und es kommt hinzu, dass es unzweifelhaft ein Verdienst Maupertuis' war, wie verworren dessen Vorstellungen auch immer gewesen sein mögen, Euler angeregt zu haben, sich mit dieser wichtigen Thematik generell zu befassen.
D. Bernoulli hat in einem Brief aus dem Jahre 1745 über andere, frühere Diskussionen mit Maupertuis geschrieben:

Mit mir hat er etliche Mal von seiner Methode de minimis crepusculis [von der kürzesten Dämmerung] disputiert und vermeinte eine radicem realem [wirkliche Lösung] gefunden zu haben, ... doch ich habe ihn niemals recht verstehen können. [12a, S. 66]

Euler bescheinigte aber Maupertuis, eine „ausgezeichnete Arbeit über das große Prinzip der Aktion" geschrieben zu haben, die er mehr schätze als die meisten Ergebnisse spezieller Probleme. Später wurde Euler hinsichtlich seiner Motive noch deutlicher, als er mitten in den Prioritätsstreitigkeiten das Prinzip Maupertuis aus zeitlichen Gründen zuerkannte und amüsiert feststellte, dass man erst Leibniz und nun ihn (!) als Urheber sehen wolle, aber nie Maupertuis. Euler vermerkt dann aber:

Außerdem habe ich diesen interessanten Zusammenhang nicht a priori entdeckt, sondern a posteriori, indem ich nach mehreren Versuchen endlich den Ausdruck für die Größe fand, die bei dieser

Bewegung ein Minimum wird. [102, S. 106]

Er fährt zwar fort, dass er aus einem speziellen Fall (und dies natürlich zu Recht) nicht auf ein allgemeines Prinzip zu schließen wage, aber beeindruckt war Euler doch vor allem von der metaphysischen Begründung a priori. D. Bernoulli äußerte stärkste Zweifel an solchen Möglichkeiten in einem Brief aus dem Jahre 1743. Diese und viele andere Warnungen aus Basel vor metaphysischem Engagement haben Euler in seinem Eifer nicht halten können. Auf diese Seite der Persönlichkeit Eulers werden wir zwangsläufig gleich zurückkommen.
Wesentlich konkretere Anregungen waren von D.Bernoulli aus Basel gekommen, etwa 1741:

Von Ew. [Euer] Wohledelgeboren möchte vernehmen, ob Sie nicht meinen, dass man die orbitas circa centra virium [Bahnen um Zentralkräfte] könne methodo isoperimetrica [als Variationsprobleme] herausbringen, [102, S, 104]

Oder 1742 der Vorschlag, elastostatische Probleme (Balkentheorie) mit der Variationsrechnung zu behandeln, in der Euler damals brillierte. Euler blieb dann bekanntlich auch die Antworten auf beide Fragen nicht schuldig, die den Inhalt der Additamenta der Variationsrechnung von 1744 ausmachen, aber von ihm bereits am Anfang des Jahres 1743 an D.Bernoulli geschickt werden konnten. Das Datum ist hinsichtlich der Publikationen von Maupertuis bemerkenswert. Unsere Zitate belegen, dass Euler die Schwächen der Maupertuisschen Beweisführungen durchschaute, aber nicht kritisierte. Diese Inkonsequenz sollte sich rächen, denn die Kritik geschah von anderer Seite, verhärtete die Fronten in der Akademie und führte schließlich zu ungeahnten Folgen. S. Koenig, ein angesehener Mathematiker jener Zeit und ehemaliger Studienkollege Maupertuis' bei Johann Bernoulli, erschien als frischgebackenes Berliner Akademiemitglied im Herbst 1750 bei seinem Präsidenten, um sich für die erfolgte Aufnahme in die Akademie zu bedanken, aber auch um ihm ein kritisches Manuskript über das Prinzip der kleinsten Aktion vorzulegen.

Maupertuis sollte die Veröffentlichung in den Berliner Memoires anheim gestellt sein, was eine überaus korrekte Haltung von seiten Koenigs war. Maupertuis war jedoch bereits über das Ansinnen Koenigs, der nur dank seiner Gunsterweisung Akademiemitglied werden konnte, empört und zu keiner sachlichen Diskussion bereit.
Der Gedanke eines Widerspruches beleidigte schon Maupertuis, und er gab in hochfahrender Art das Manuskript mit einer Druckerlaubnis Koenig ungelesen zurück, der missgestimmt Berlin verließ.

Das war die erste der verhängnisvollen Fehlentscheidungen, die Maupertuis nicht zu korrigieren bereit war, im Gegenteil: er missbrauchte seine ganze Macht, um sie zu stützen. Er war ein Bonze geworden, dem man sich mit Weihrauch, aber nicht mit Kritik nahen durfte.
1751 erschien daraufhin Koenigs Kritik im Märzheft der viel beachteten „Nova acta eruditorum". Neben den sachlichen Einwänden, nämlich dass das Prinzip falsch sei, die Beispiele unpassend und die Beweise nicht überzeugend - alles maßvoll vorgetragen -, sowie einem eigenen Prinzip enthielt die Arbeit die brisante Mitteilung, dass bereits Leibniz in einem Brief dieses Prinzip ausgesprochen habe - und zwar in der richtigen Form!

In welche Stimmung diese Arbeit den cholerischen Maupertuis versetzte, das kann man sich unschwer vorstellen. Das Drama konnte beginnen. „Nun war Feuer im Dach bei Maupertuis, Wie! der Plagiator Leibniz will aus dem Grab heraus auch ihn, den zweiten Newton, um die größte Entdeckung des Jahrhunderts bestehlen?" vermerkt der Euler-Biograph Spieß [32, S. 128] und hebt die wesentliche Seite der Maupertuisschen Betroffenheit heraus.
Es ist nicht so sehr die Kritik am Prinzip, sondern der Gegensatz zu Leibniz. Nachdem der

Lärm des Streites sich gelegt hatte, versuchte Maupertuis sich sachlich mit der geübten Kritik, die nicht nur von Koenig gekommen war, auseinanderzusetzen.

14 Karikatur Maupertuis' als Don Quichote. Vignette aus der Sammlung der Streitschriften „Maupertuisiana“, Hamburg 1753. (Eine deutsche Übersetzung erschien schon im gleichen Jahr bei Breitkopf in Leipzig.)
Maupertius wird der Ausruf „Trembles“ [Zittert!] in den Mund gelegt, der Satyr (rechte Ecke) bemerkt „Sic itur ad Astra‘ [so steigt man zu den Sternen].

Überraschend war tatsächlich für Maupertuis, dass sein philosophischer Gegner mit der gänzlich anders gearteten Weltsicht. das gleiche Prinzip besessen haben sollte. Simplifiziert gesehen kann sich in Leibnizens vorherbestimmter Weltharmonie die Aktion lediglich als Bedingung darstellen, unter der die unverbrauchbare Bewegung sich realisiert, während Maupertuis' Schöpfer nur durch sparsames Verwenden der sich verbrauchenden Aktion Veränderungen im Universum vornehmen kann, und das bestimmt den göttlichen Bauplan des Alls.

Euler dachte ähnlich und betonte stets, es gehe um die Authentizität des Briefes und nicht um Personen, schon gar nicht um Koenig, wiewohl die tieferen Ursachen als Hintergrund weltanschauliche Auseinandersetzungen hatten.
Es war aus beider Sicht folgerichtig, die Diskussion auf die Echtheit des Leibnizbriefes auszurichten, an dessen Ende sich die fragliche Stelle befindet:

> Sie (die Aktion - R. T.) ist wie das Produkt aus Masse, Strecke und Geschwindigkeit oder aus Zeit und lebendiger Kraft (kinetischer Energie - R. T.). Ich habe bemerkt, dass sie in den Bewegungsänderungen ständig zum Maximum oder zum Minimum wird. Man kann daraus mehrere Verhältnisse von großer Bedeutung ableiten; sie könnte dazu dienen, die Kurven zu bestimmen, die Körper beschreiben, die zu einem oder mehreren Zentren hingezogen werden.
> Ich wollte diese Dinge unter anderen im zweiten Teil meiner Dynamik behandeln, den ich unterdrückt habe. [102, S. 97]

Es lag Koenig fern, Maupertuis des Plagiats zu bezichtigen, denn sowohl damals als auch heute wäre dies die einzige bekannt gewordene Stelle, an der Leibniz das Prinzip formulierte. Verwunderlich bleibt aber, weshalb Leibniz nicht darauf zurückkam. War es ihm noch nicht durchsichtig genug (wie Helmholtz vermutete), oder fand der Vielbeschäftigte einfach keine Zeit zum Ausarbeiten?
Eulers Einwand im Akademiegutachten, dass Leibniz diese seine größte Entdeckung wohl kaum den wissenschaftlichen Freunden vorenthalten hätte, überzeugt nicht, da Leibniz nicht mit Eulerscher Freimut Einblicke in seine Gedanken gewährte. Wir erinnern lediglich an die grundlegenden Veröffentlichungen über Differential- und Integralrechnung, die Leibniz die Priorität

sichern sollten und welche nur von Jakob Bernoulli verstanden werden konnten.

Natürlich wäre Leibniz prinzipiell in der Lage gewesen, das Prinzip zu formulieren und anzuwenden, denn bereits seine Auffassung von der Welt als beste aller möglichen dokumentiert mathematisierbares Denken, und seine Kenntnisse der Variationsrechnung wären gewiss ausreichend gewesen. Er besaß ja auch ein Prinzip, das dem Fermats nachgebildet war und den Lichtweg durch Minimierung des Integrals

$$\int wds$$

bestimmte, wo w der erlittene Widerstand längs des Weges s ist. Setzt man hier den Widerstand proportional der Geschwindigkeit und fügt die unveränderliche Masse ein, so steht Maupertuis' Prinzip für die Lichtausbreitung da! Aber es ist müßig, sich in solchen Deutungen zu verlieren. Entscheidend ist, dass Leibniz nach heutigem Wissen offensichtlich darüber nichts veröffentlicht hat.

Euler, der Koenig noch 1744 als seinen Nachfolger in Petersburg vorgeschlagen hatte, unterwarf Koenigs Arbeit einer zu scharfen und teilweise unfairen Kritik. Das von Maupertuis angeordnete Vorgehen der Akademie zielte diplomatischer auf die Echtheit des Leibnizbriefes. Koenig besaß jedoch nur eine Abschrift, die 1911 durch den Fund einer weiteren Abschrift nun glaubwürdig geworden ist, aber Maupertuis vermeinte damals Oberwasser zu haben. Die Suche nach dem Original des Briefes begann, selbst Friedrich II. bemühte sich darum - ein von vornherein ziemlich aussichtsloses Unterfangen.
Koenig verteidigte sich geschickt, seine Briefe sind maßvoll und aussöhnend, jedoch war Maupertuis nicht mehr zu versöhnen. Er verlangte, da er durch Koenigs Stil gezwungen war, die Kontroverse persönlich beizulegen, dass die Akademie die Sache als unbefriedigend ansähe, und unter seinem Druck (er verteilte ja unumschränkt die Pensionen!) geschieht schließlich das Unglaubliche:

Am 13. April 1752 erklärte die Akademie unter Eulers Führung den Brief als Fälschung. Bezeichnenderweise war von den etwa 30 ordentlichen Mitgliedern ein Drittel nicht erschienen, obwohl Maupertuis viel daran gelegen hatte, Vollzähligkeit zu haben. Erinnern wir uns aber, dass nur 40 Jahre zuvor ein ähnliches skandalöses Urteil von der Royal Society in London gegen Leibniz ergangen war, das Newton initiiert hatte.

Koenig war zwar nicht direkt moralisch verurteilt worden, aber der durch Maupertuis' Machtmissbrauch Gemaßregelte handelte richtig. Er schickte der Akademie die Ernennungsurkunde zurück und veröffentlichte den Hergang in einem „Appel au public“ [Appell an die Öffentlichkeit], der Maupertuis' autoritäre Haltung bloßstellte. Maupertuis hingegen verschickte verzweifelt das Urteil in alle Welt, ohne die gewünschte Glaubhaftigkeit zu erzielen. Nicht Koenigs, sondern Maupertuis' wissenschaftlicher Ruf hatte schweren Schaden genommen, und eine Flut von Empörung, die sich beispielsweise in vielen Schmähschriften niederschlug, brach über den bestürzten Präsidenten herein, der die gesamte Gelehrtenrepublik, von Voltaire angeführt, gegen sich sah.

5.3.3 Voltaires Eingreifen

Euler hatte im Prioritätsstreit zwischen Maupertuis und Koenig versagt. Nicht nur, dass er die fachliche Seite bestens übersehen konnte und als einziger wohl Maupertuis hätte bremsen können, nein, er führte, wie Jacobi sich ausdrückte, „Spiegelfechtereien“ aus und betrieb die Sache auch dann noch weiter, als längst klar war, dass nichts mehr zu retten sei.

Denn für ihn hatte sich die hoffnungslose Angelegenheit nunmehr zu einem Kampf gegen die Freigeister ausgeweitet, für ihn war es nicht mehr der „Fall Koenig“, sondern der „Fall Voltaire“!

15 Moreau de Maupertuis, Stich von Daulle nach dem Gemälde von Tournieres
16 Francois Marie Arouet de Voltaire. Zeitgenössischer Stich

Der Streit hatte sich nämlich vom wissenschaftlichen Boden auf höfisches Parkett begeben, um dort seinem Höhepunkt und Ende zuzueilen.
Voltaire, der nach dem Tode der Marquise du Châtelet im Jahre 1749 nach Sanssouci gekommen war, avancierte durch seine geistreiche Unterhaltung an der Tafelrunde Friedrichs II., so dass bald der ehrgeizige Maupertuis sich mit dem bissigen Voltaire auf das bitterste verfeindete.

Er (Maupertuis - R, T.) misst mich hart mit seinen Quadranten. Man sagt, dass sich in seine Untersuchungen etwas Neid mischt,

ließ im Februar 1750 Voltaire seine Nichte Denis wissen. So nimmt es nicht wunder, wenn der unbetroffene, aber streitbare Voltaire erfreut in die Auseinandersetzungen eingriff, schließlich hatte er genügend Ressentiments: Voltaire war nur Gast in Potsdam (wie lange?), aber Maupertuis Präsident der Akademie (was auch Voltaire angeboten worden war),
Voltaire war trotz aller Bemühungen kein Mitglied der Pariser Akademien geworden, wohl aber Maupertuis; endlich war für die neuere französische Aufklärung, die das Volk aufklären wollte und die deshalb vom elitär denkenden Friedrich enttäuscht sein musste und mit ihm zu hadern begann, auch Maupertuis kein geeigneter Präsident mehr.

Ein anonymer öffentlicher Brief Voltaires, von Friedrich zwar diplomatisch in der Anonymität belassen, aber ungeschickt beantwortet, verteidigte Koenig und erteilte dem preußischen Monarchen einige Seitenhiebe, Dann aber lieferte Maupertuis dem Kontrahenten mit einer populärwissenschaftlichen Schrift ein gefundenes Fressen für den großen Angriff.
In einer satirischen Schrift „Diatribe du Docteur Akakia“ [Schmähschrift über Dr. Akakia] ließ Voltaire den Kranken von St. Malo, Maupertuis’ Geburtsort, vom Hochmut kurieren. (Aber nicht genug dieser Anspielung: Akakia war der in Berlin geläufige Spitzname Maupertuis’.)

Friedrich II., dem Voltaire diese Schrift vorlas, ein unter Höflingen übliches Verfahren, Nebenbuhler zu diskreditieren, ließ - angeblich unter Lachen - den Druck verbieten und stellte sich wie bisher loyal hinter seinen Präsidenten, denn er wollte und konnte eine öffentliche Diffamierung seiner Akademie oder des ihr vorstehenden Präsidenten nicht hinnehmen. Voltaire hat sich nicht an das Verbot gehalten, was zum Bruch mit Friedrich führte, den Euler als Zurückstecken der Freigeister mit tiefer Befriedigung zur Kenntnis nahm.

In Leipzig, und damit dem Zugriff Friedrichs II. entzogen, verfasste Voltaire ein weiteres Pamphlet, in dem von S. Koenigs Angelegenheiten nur am Rande die Rede ist und so seine eigentlichen Ziele deutlich werden. J. O. Fleckenstein hat denn auch treffend bemerkt:

Man kommt aber bei der Darstellung des dahintersteckenden Akademieskandals nicht ganz von dem Eindruck los, dass hier ein biederer Schweizer als Sündenbock dafür hinhalten muss, dass die Giftsuppe aus der Hexenküche der in allen höfischen Intrigen versierten akademischen Grandseigneurs durch die Ungeschicklichkeit eines anderen Eidgenossen - nämlich Koenig - zu früh verschüttet worden ist. [EO 11/5 S. XXVI]

Es besteht begründeter Verdacht, dass Voltaire nur auf eine Gelegenheit gewartet hat, um eine Kabale gegen den Präsidenten anzuzetteln, und Euler hierbei, des Ränkespiels unkundig, zum Sündenbock wurde, zum einen durch die Pflicht, seinen Präsidenten und die Akademie zu verteidigen, und dies nicht erst, seit er durch die „Überlassung“ des Prinzips in die Händel gezerrt worden war, zum anderen aber erst recht durch seine tiefe Gegnerschaft zur Leibniz-Wolffschen Philosophie und zur radikalen französischen Aufklärung.

Nun einige Passagen aus der Fortsetzung des Dr. Akakia, die den zwischen Maupertuis und Koenig abgeschlossenen Friedensvertrag betreffen, worin sich Maupertuis in 19 Artikeln als im Unrecht bekennt und Besserung verspricht.

Artikel 15: Geloben Wir künftig die Deutschen nicht mehr herabzusetzen und geben zu, dass die Kopernikus, Kepler, Leibniz, Wolff, Haller und Gottsched auch etwas sind; - dass Wir ferner bei den Bernoullis studiert haben und noch studieren - und dass endlich der Herr Prof. Euler, Unser Leutnant,[4] ein sehr großer Geometer ist, der Unser Prinzip durch Formeln gestützt hat, die Wir zwar nicht verstehen, die aber nach dem Urteil derjenigen, die sie verstehen, voll Genie sind, wie alle Werke des genannten Professors, Unseres Leutnants. [32, S. 134]

Maupertuis, ein kranker und unglücklicher Mann, floh vor dem Gelächter ins Ausland, wo er bis zu seinem Tode 1759 blieb, lediglich von zwei Berliner Jahren unterbrochen. Ihm war eine vernichtende Spottschrift zuteil geworden, von der Art, wie er sie 1737 selbst gegen die Anhänger Descartes' gerichtet hatte, wo er aus Verärgerung über seine zu gering beachteten Leistungen in Lappland höhnisch vorschlug, wissenschaftliche Fragen künftig nicht durch kostspielige und langwierige Expeditionen zweifelhaften Wertes zu entscheiden, sondern einfach durch Würfeln, wobei er noch boshaft den Gegnern Kombinationen anbot, die ihre Auffassungen mit großer Wahrscheinlichkeit bestätigt hätten. In einer einsichtigen Stunde klagte der gebrochene Mann, dass er nun wisse, was Kritik bedeute.

Einer verzweifelten Herausforderung des todkranken ehemaligen Dragonerkapitäns Maupertuis begegnete Voltaire mit der bekannten Bissigkeit, da er zur Zeit krank sei, könne er ihm nur mit Klistierspritze und pot de chambre [Nachtgeschirr] dienen, aber nach seiner Herstellung werde er gern die Masse einer Pistolenkugel mit dem Quadrat der Geschwindigkeit solange multiplizieren, bis die Aktion und Maupertuis selbst auf das Minimum Null reduziert seien.
Auch Euler erhält einige Seitenhiebe. Voltaire lässt ihn im Artikel 19 offen bekennen:

I. dass er nie Philosophie gelernt hat, und es aufrichtig bereut, von Uns (Maupertuis - R. T.) zu der Meinung verführt worden zu sein, man könne sie verstehen, ohne sie gelernt zu haben, und dass er sich künftig mit dem Ruhm begnügen will, unter den Mathematikern von Europa derjenige zu sein, der in einer gegebenen Zeit das Maximum von Rechnungen aufs Papier wirft; ...

[4] Anspielung auf Eulers Absicht, in der russischen Kriegsmarine Dienst zu tun.

II. ... stets erröten wird über den Vorstoß gegen die gesunde Vernunft und die gewöhnlichsten Begriffe, den er begangen hat, indem er aus seinen Formeln den Schluss zog, dass ein Körper, der von einem Zentrum aus angezogen wird, in der Mitte wieder umkehrt, [32, S, 135]

Die aufgeführte Sünde Eulers findet sich in der Kritik von Robins an Eulers Mechanik von 1736, wo Euler insbesondere seinen paradoxen Schluss aus der Dissertation über den Schall von 1727 begründen wollte, der sich durch unerlaubtes Vertauschen von Grenzübergängen eingeschlichen hatte. Er sollte „auf den Knien die Logiker um Verzeihung" bitten, dass er das paradoxe Resultat mit dem Satz „Wenn dies auch der Wahrheit zu widerstreiten scheint, so müssen wir doch der Rechnung mehr trauen als unserem Verstand" erledigen wollte.
Euler konnte sich bei aller Weißglut, in die ihn der Streit versetzte, immerhin wohl noch selbst zum Besten halten, denn er schickte bedenkenlos an den Bürokraten Schumacher in Petersburg auf dessen Bitte ein Exemplar der in Preußen verbotenen Schmähschrift.
Die sachlich treffenden Bemerkungen, wie auch die folgende, verdankte Voltaire, der in solchen Fragen nicht kompetent war, einem Ratgeber:

Die Behauptung, dass das Produkt von Entfernung und Geschwindigkeit immer ein Minimum sei, scheint uns falsch zu sein, denn dieses Produkt ist manchmal ein Maximum, wie es Leibniz glaubt und wie er es auch gezeigt hat. [58, S. 631]

Allerdings irrte Voltaire verhängnisvoll in der Angriffsrichtung, wenn er meinte, dass Maupertuis Euler zur Philosophie verführt habe, denn es ist wohl umgekehrt gewesen. Euler war existentiell in der Angelegenheit betroffen: Die physikalischen Gesetze, die nicht aus der reinen Vernunft hergeleitet werden können, sind aus göttlichen Eigenschaften ableitbar.
Sein zeitweise polemischer und gehässiger Ton offenbart bestens die irrationalen Motive, die weit entfernt von den vorn zitierten abwägenden Gedanken sind. Er geißelt z.B. Voltaires Angriffe gegen Maupertuis, da Maupertuis Voltaire doch niemals den geringsten Anlass dazu gegeben habe, außer Voltaire zuliebe nicht an seiner letzten Krankheit zu sterben, um so den Präsidentenstuhl frei zu machen, oder er charakterisiert den letzten Inhaber des gesuchten Leibnizbriefes als „fameux Henzi, decapite à Berne" (was man sowohl als berühmter oder berüchtigter Henzi, zu Bern enthauptet, übersetzen kann).

Lassen wir abschließend beide Kontrahenten durch einen gemeinsamen Freund beurteilen, der in ihnen die größten Geister seiner Zeit sah. Friedrich II. schrieb:

Von Voltaires Liebenswürdigkeit eine Million Meilen entfernt. Aber was das Herz anbelangt, so ist der Lappländer Maupertuis ein Jahrhundert von dem Affen Voltaire entfernt. [32, S. 143]

Insgesamt 10 Arbeiten legte Euler von 1744 bis 1753 zum Prinzip der kleinsten Aktion vor, und mit dem Verlesen der bedeutenden Arbeit von Lagrange über Variationsrechnung in der Berliner Akademie sicherte sich Euler 1756 noch einen guten Abgang in dieser Affaire. Lagrange entwickelte Eulers Gedanken für Systeme von Körpern mit der neuen Variationsrechnung weiter und verhalf dem Prinzip in der Mechanik zu grundlegender Bedeutung.
Jacobis Ansicht darüber erhellt den Sachverhalt ausgezeichnet:

Indem er Eulers Methode (a. d. Anhang der Variationsrechnung - R. T.) verallgemeinerte, kam er auf seine merkwürdigen Formeln, wo in einer einzigen Zeile die Auflösung aller Probleme der analytischen Mechanik enthalten ist.

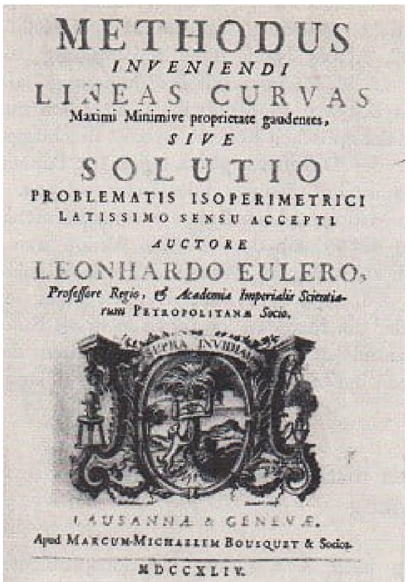
Die geäußerte Ansicht, dass der zum „Metaphysiker" gewordene Euler vom „Physiker" Lagrange überflügelt werden musste, wird sich kaum beweisen lassen. Aber der Einwand ist nicht von der Hand zu weisen, dass Lagrange eine Reihe von Idealisierungen vornahm, insonderheit

auf Reibung u. ä. verzichtete, worauf der praktisch orientierte Euler großen Wert legte, was Lagrange den großen Wurf in der Mechanik und die Eleganz „ermöglichte".
Euler begutachtete z.B. 1751 Kugellager, die die Reibung herabsetzten [47], und gab bei der Haftreibung theoretisch den Reibungskoeffizienten mit 1/3 an, womit er dem empirischen Wert von 0,3 sehr gut entspricht. Immerhin versagte das Maupertuissche Prinzip bereits bei Bewegungswiderständen, und Euler war auch nicht entgangen, dass „die Bahnkurven aus den gewöhnlichen mechanischen Prinzipien sich mit weniger Kalkül gewinnen lassen". [102, S. 106]

Nicht ohne Berechtigung lässt sich sagen, dass bis zu W.R. Hamiltons Formulierung von Extremalprinzipien mit den Variationsprinzipien eigentlich nur elegante Einkleidungen der optischen Reflexions- bzw. Brechungsgesetze einerseits oder der Differentialgleichungen für Bahnen in konservativen mechanischen Systemen andererseits vorlagen.
Ganz im Gegensatz zu Maupertuis' hat Eulers wissenschaftlicher Ruf in dem Streit um das Prinzip der kleinsten Aktion wenig gelitten, wenn er auch zeitweilig im Mittelpunkt von Schmähschriften, Polemiken u.ä. stand („... dass Denken nicht sey Rechnern eigen, und dass ein Mathematicus noch mehr als Euler wissen muss"). Der Grund lag gewiss in seinem Verhalten, das stets untadlig war, wenn ihn nicht sein metaphysischer Dämon ritt.

5.4 Eines der schönsten mathematischen Werke: die Variationsrechnung

Bereits in Petersburg hatte sich Euler Variationsproblemen gewidmet; im Gegensatz zu Leibniz oder den Bernoullis packte er aber gleich ganze Bündel von Problemen an, auch wenn er gelegentlich noch falsche Ergebnisse erhielt. Allmählich rankte sich jedoch um die Beispiele eine Theorie, die zur „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti" [Methode, Kurven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder Lösungen des isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefasst wird] führte, einem Buch von 320 Quartseiten mit rund 200 Beispielen, das 1744 in Lausanne erschien.


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
SUPRA INVIDIAM
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

17 Titelblatt der Variationsrechnung von 1744

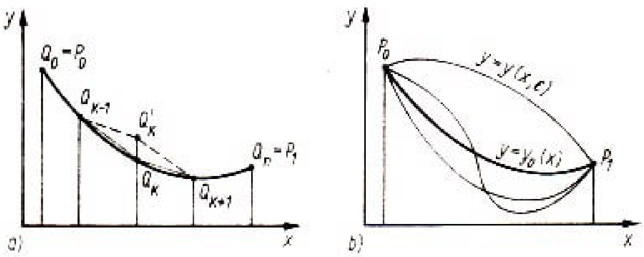
Für die Beispiele gilt, was Jacobi allgemein bemerkte: „Es ist immer ein Fortschritt, wenn man den Beispielen Eulers ein wirklich neues hinzuzufügen weiß."

C. Caratheodory, ein subtiler Kenner der Variationsrechnung, bezeichnete die Eulersche Variationsrechnung als „eines der schönsten mathematischen Werke, die je geschrieben worden sind“.

Das bereits erwähnte Brachystochronenproblem besteht, analytisch formuliert, in der Forderung, das Integral über die Zeit zu minimieren:

$$\int_{P_0}^{P_1} dt = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y-b)}} dx \to \min$$

Leibniz löste es, indem er zunächst die gesuchte Kurve sich durch ein (endliches) Polygon ersetzt dachte und das zugehörige Integral durch eine endliche Summe.
Die Eckpunkte des Polygons werden mit $Q_k(x_k, y_k)$ $(k = 0,1,...,n)$ bezeichnet, wobei $P_0 = Q_0$ und $P_1 = Q_n$ ist. Leibniz fragte nun, wie für drei aufeinanderfolgende Eckpunkte Q_{k-1}, Q_k und Q_{k+1}, wenn Q_{k-1} und Q_{k+1} als fest gewählt betrachtet werden, die Ordinate y_k von Qk zu verändern sei, damit der Fall des Massenpunktes von Q_{k-1} nach Q_{k+1} längs des gebrochenen Linienzuges $Q_{k-1}Q'_kQ_{k+1}$ in kürzester Zeit erfolge (Abb. 18a).



18 Zur Variation. a) geometrische Variation von Leibniz, b) Variation von Lagrange

Hieraus ergaben sich, die Existenz einer Lösung angenommen, notwendige Bedingungen für die Koordinatendifferenzen der Eckpunkte, die schließlich, wenn die Differenzen gegen Null gehen oder - etwas verschwommen ausgedrückt - wenn die Kurve als Polygon mit „unendlich vielen Seiten“ betrachtet wird, auf eine Differentialgleichung für die gesuchte Kurve führen.
Diesen geometrischen Weg fasst Euler analytisch, aber nicht mehr dem Einzelfall verhaftet, sondern in großer Allgemeinheit. Für das Variationsproblem

$$I(x) = \int_{x_1}^{x_2} L\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}\right) dx \to \text{ extr !}$$

lautet bei zweimal stetig differenzierbarem Integranden L, die berühmte, nach Euler benannte Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} L'\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}\right) - L_y\left(x, y(x), \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung muss jede (zweimal stetig differenzierbare) Lösung $y = y(x)$ des Problems genügen, das Umgekehrte braucht nicht zu gelten.

Einige Bemerkungen zum Inhalt der Variationsrechnung.
Bereits im ersten Kapitel betont Euler, dass das geometrische Gewand der Polygonmethode zufälliger Art sei, da es sich im Grunde um Fragen der reinen Analysis handle, und seine Bemerkung: „Man vermisst noch eine Methode, welche unabhängig ist von der geometrischen

Lösung", wird so verständlich. Er unterscheidet im weiteren zwar absolute von relativen Minima bzw. Maxima, hält aber notwendige und hinreichende Bedingungen für ein Extremum nicht klar auseinander. Der häufigste Beispieltyp hat die Form

$$\int y\sqrt{1+y'^2}dt \to \text{ extr !}$$

Neben den bereits vorgestellten Variationsproblemen werden auch solche mit Nebenbedingungen betrachtet. Dabei können Nebenbedingungen als Integrale erscheinen (isoperimetrische Probleme, z. B. das Problem der Dido mit einer Kurve gegebener Länge - der Nebenbedingung - eine maximale Fläche zu umschließen) oder in differentieller Form gestellt werden (z. B. eine Variante des Brachystochronenproblems bei widerstehendem Mittel, etwa Luft, die 1736 von Euler in der Mechanik noch falsch gelöst worden ist).
Erstmalig erscheinen die später nach Lagrange benannten Multiplikatoren. Es gibt zahlreiche Anwendungen auf mechanische Probleme. Mit dem Buch setzt die auch heute noch bearbeitete, komplizierte Theorie der Minimalflächen ein.

Euler hat das Prinzip der kleinsten Aktion als kurzen Zusatz (Additamentum II) in mathematisch korrekter Form veröffentlicht. Auch der Zusatz I „De curvis elasticis" [Von den elastischen Kurven] enthält ein höchst bemerkenswertes Resultat.
Nach Daniel Bernoulli ist die Gestalt einer elastischen Linie (z. B. eines Balkens) durch das Minimum der aufgespeicherten Formänderungsarbeit (Potentialkraft) bestimmt. Euler geht davon aus und behandelt die Biegung einer elastischen Linie, wobei die 1743 gefundene Formel zur Ermittlung der Knicklast eingeschlossen ist, die technisch von größtem Interesse ist und ohne die noch heute wohl keine Brücke o.ä. gebaut werden kann. Euler gibt den vollständigen Zusammenhang zwischen der Länge des belasteten Balkens, seiner Steifigkeit und der kritischen Belastung an, Mathematisch gesehen hat Euler wiederum Neuland betreten:
Er löste ein Eigenwertproblem.

Euler strebte in der Variationsrechnung das an, was Leibniz mit seinem Kalkül oder Euler selbst in der Mechanik in glänzender Weise gelungen war, nämlich die Idee Leibnizens, die ars inveniendi [Erfindungskunst] zu verwirklichen, alle Begriffe auf eine kleine Zahl widerspruchsloser Elemente zu reduzieren, mit denen dann symbolisch operiert werden kann und sich so alle bekannten, aber auch unbekannten Wahrheiten ergeben.
Obwohl Euler dem Algorithmus zustrebte, indem er „mechanisch" zu handhabende Regeln zur Lösung angab, hat er sein Ziel nicht ganz erreicht - oder genauer: Lagrange fand eher den sachgemäßen Algorithmus, die von Euler vermisste nicht-geometrische Methode.

Die Methode Eulers, so Lagrange, zerstöre eigentlich den Mechanismus der Infinitesimalrechnung, da sie nur endlich viele Punkte der Kurve variiere. Lagrange veränderte deshalb gleich die gesamte Kurve, indem er die als gegeben angesehene Lösung mit der Gleichung $y = y_0(x)$ in eine Kurvenschar mit der Gleichung (Abb. 18b)

$$y(x,\varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon \cdot \eta(x)$$

($\eta(x)$ beliebige Funktion, ε reell) einbettete, womit das Integral $I(y)$ sich ebenfalls in Abhängigkeit von ε ergibt: $I(y,\varepsilon)$.
Da für $\varepsilon = 0$ gemäß Voraussetzung ein Extremum vorhanden sein soll, muss nach der bekannten Regel der Differentialrechnung

$$\frac{d}{d\varepsilon}I(y,\varepsilon) = 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon = 0$$

gelten. Hierfür schreibt Lagrange symbolisch $\delta I(y,0) = 0$ und bemerkt dazu: „Vor allem muss ich aber darauf aufmerksam machen, dass ich ... in meinen Rechnungen ein neues Symbol δ eingeführt habe."
Da der Mathematiker Schlüsse auf Schlüsse häuft, ist es gut, möglichst viele davon in einem Zeichen symbolisieren zu können. Dem genügt die Lagrangesche Bezeichnung in vorbildlicher Weise. Als Antwort auf Eulers Unbehagen an der „geometrischen" Methode kann Lagrange nun erklären:

Hier findet man eine Methode, welche nur einen sehr einfachen Gebrauch der Prinzipien der Differential- und Integralrechnung verlangt. [102, S. 119]

Und in der Tat sind nur wenige analytische Umformungen und Überlegungen notwendig, um elegant die Eulerschen Differentialgleichungen zu ermitteln, wobei die Methode sich mühelos bis in die mehrdimensionale Variationsrechnung übertragen oder mit den Lagrangeschen Multiplikatoren auf Probleme mit Nebenbedingungen verallgemeinern lässt.
Der 19 jährige Lagrange teilte Euler am 12. August 1755 brieflich die neue Technik mit, Euler erkannte sofort Lagranges Leistung an und machte sich zum Propheten dieser Auffassung - ein in der Wissenschaftsgeschichte rares Beispiel von Uneigennützigkeit und Gleichgültigkeit gegenüber eigenen Verdiensten.

Er hielt sogar eine eigene Veröffentlichung zurück, bis Lagrange die seine publiziert hatte, „um Sie nicht irgendwie in dem Ruhm zu schmälern, der Ihnen zukommt". Euler beherrschte den formalen Lagrangeschen Kalkül gleichfalls und handhabte ihn virtuos, so dass er verdienterweise das Glück hatte, der neuen Disziplin den Namen zu geben: calculus variationum [Variationsrechnung].
Die weitere Entwicklung knüpft nicht an Eulers geometrischer Methode an, die er in faszinierender Weise und mannigfaltigen Wendungen effektiv einzusetzen wusste, sondern am Lagrangeschen Formalismus. Sie führte in der Physik besonders durch die Arbeiten W. R. Hamiltons 1834/35 zur „Prinzipienmechanik", deren Apparat mit Erfolg in die moderne und unanschauliche Physik übernommen werden konnte.

19 Joseph-Louis Lagrange. Lithographie von Delepech nach einer Zeichnung von J. Belliard
20 Jean Baptiste le Rond d'Alembert. Stich von B. L. Henriquez nach einer Zeichnung von N. R. Jollain

Euler erahnte, dass die Zurückführung dynamischer Aufgaben auf isoperimetrische Probleme in der Nähe eines allgemeinen Prinzips der Naturwissenschaften läge und die Methode über das ursprüngliche Ziel hinausginge.

Heute gewinnt auch Eulers direkte Methode wieder an Interesse.

Die Ideen der Variationsrechnung bieten einen guten Leitfaden für einige physikalische Probleme, die Euler in dieser Zeit interessierten. Euler ging zunächst von einer frei aufgehängten Kettenlinie, einer in sich beweglichen Kurve, aus, deren Form er aus der Forderung nach tiefster Lage des Schwerpunktes bestimmte.
Danach behandelte er eingespannte elastische Linien (Saiten) ohne Biegesteifigkeit und ging dann zu einseitig oder zweiseitig festgehaltenen Bändern mit Biegesteifigkeit (Stahlband) über. Die Schwingungen der Saiten und Bänder verursachen Töne, die Euler auch musiktheoretisch behandelte. Akustische Vorgänge reduzierte er auf Schwingungen, die menschlichen Hörgrenzen legte Euler mit 20 bzw. 7000 Schwingungen pro Sekunde fest.

Er baute erfolgreich die Analogie zum Licht aus, das er sich wie den Schall durch Erschütterungen der Luft als Welle im Äther, der das All ausfüllt und Körpern keinen Widerstand bietet, vorstellte. Von der Sonne kommt, genau wie von einer klingenden Glocke, nichts. Die Farben des Lichtes entsprechen den Schwingungszahlen.
Eine Kerze verliert zwar an Substanz, weil sie raucht, aber die Sonne behält ihre Substanz. Euler kommt hier sehr nahe an die Undulationstheorie des Lichtes heran und kritisiert mit Recht Schwächen der Newtonschen Emissionstheorie.

Der gerade erwähnte Äther ist in Eulers Verständnis die Quelle aller elektrischen Vorgänge: Elektrizität entspricht Störungen im Äthergleichgewicht, der Äther kann entweder in den Körper gepresst oder aus ihm herausgetrieben werden, wie es mit dem Wasser in einem Schwamm geschieht. Zur Erklärung des Magnetismus führte Euler magnetische Wirbel ein, die er sich noch feiner und beweglicher als den Äther vorstellte.
Entscheidend wurde von diesen Vorstellungen B. Riemann beeinflusst, der 1854 in seiner Habilitationsrede eine Konzeption des physikalischen Raumes entwarf, die aus gewissen Schwierigkeiten mit Eulers Äthertheorie entstanden war und von der letztendlich auch Einstein Gebrauch machte. Erscheinungen der Elektrizität, des Magnetismus und der Optik sah Euler durch den Äther als eng verbunden an.
Ihnen müsste deshalb sowohl eine einheitliche physikalische als auch mathematische Behandlung gerecht werden. Eulers Auffassungen können als Vorläufer einer elektromagnetischen Feldtheorie angesehen werden.

Da die Brechung des Lichtes für unterschiedliche Farben verschieden ausfällt, besitzen Linsen (also auch die zu Beginn des 17. Jahrhunderts erfundenen Fernrohre) für weißes Licht einen Abbildungsfehler (Farbringe). Euler wandte sich in einer 1749 erschienenen Arbeit gegen Newtons Ansicht, dass es keine Linsensysteme ohne derartige Fehler geben könne, wobei er von der vermeintlichen Farbfehlerfreiheit des Auges ausging (was nebenbei bemerkt für den frommen Euler ein untrügliches Zeichen für die Existenz Gottes war).

Der gemeinsame Gegensatz zu Newton war es sicherlich, der dem „Rechner“ Euler die Sympathien des „zahlenscheuen“ Goethe einbrachte, der an Zelter 1823 geschrieben hatte, „mit Mathematikern ist kein heiteres Verhältnis zu gewinnen“. Newtons Ansicht hatte bei den Fernrohren, um Farbfehler zu vermeiden, zum Ausweichen auf die komplizierten Spiegelfernrohre geführt.
Newton hielt zwar selbst später farbfehlerfreie Linsensysteme für möglich, publizierte aber darüber nichts mehr. So kam es, dass der Londoner Optiker J. Dollond an der Achromasieauffassung festhielt und erst auf Grund der Eulerschen Arbeit und einer folgenden des schwedischen Physikers S. Klingenstjerna Newtons „Dogma“ 1757 experimentell überprüfte und widerlegte.

Er konnte deshalb 1758 aus zwei verschieden brechenden Gläsern (Kron- und Flintglas) ein farbfehlerfreies Linsensystem herstellen. Die aus Eulers Theorie folgenden Schleifvorschriften hätten allerdings, unabhängig davon, dass Euler von Glas-Wasser-Objektiven ausging, erst nach Korrekturen zum gewünschten Resultat geführt. Trotzdem ist sein Anteil an dieser umwälzenden Erfindung beachtlich.

Ob alle an der Achromasieauseinandersetzung von dem bereits 1729 durch C. M. Hall hergestellten Achromat wussten, ist ungewiss.
Euler verfasste insgesamt 67 Arbeiten zur Optik (was 7 Bände der Gesamtausgabe füllt), darunter die als Blinder(!) geschriebene dreibändige Dioptrik („Dioptrica"), die einen gewissen Abschluss der Theorie astronomischer Fernrohre brachte.

Das Schicksal dieses Eulerschen Buches war es, durch einen praxisbezogenen Auszug von G. S. Klügel zwar sehr populär zu werden, wobei aber Substantielles des Originals in Vergessenheit geriet und manches neu entdeckt werden musste. Infolge fehlender optischer Experimente entsprachen einige Ansätze Eulers nicht der physikalischen Realität. Euler, der fest an seine Erkenntnisse, insbesondere an die elegante Beherrschung des Abbildungsfehlers durch seine Berechnungen, glaubte, war tief enttäuscht, als er die Ergebnisse praktischer Erprobungen erfuhr.
Seine Rivalen auf diesem Gebiet, Clairaut und d'Alembert, erhielten so in einigen Fragen einen Vorsprung gegenüber dem blinden und alternden Euler.

De Castillon, ein von Euler nicht besonders geschätzter Mathematiker und Astronom, der später in Berlin als Nachfolger von Eulers Nachfolger Lagrange Direktor der mathematischen Klasse von 1787 bis 1791 wurde, bat einmal Euler um Rat, welche Formel er aus einer Arbeit Eulers am besten für den Bau eines gewissen Fernrohres verwenden solle.
Zu de Castillons größtem Erstaunen riet aber Euler von der entsprechenden Arbeit völlig ab, da die Rechnungen zu falschen Ergebnissen führen würden, und die richtigen Berechnungen seien gerade im Druck. Wie ein Zeitgenosse berichtet, musste der staunende de Castillon sich noch belehren lassen, dass trotzdem die Rechnungen wertvoll seien, weil der Gang der Rechnungen unabhängig vom Gegenstand und seiner Anwendung interessant sei.

Diese Episode charakterisiert eine Seite von Eulers Einstellung zur Optik recht gut, die Fellmann mit einer „großen, nicht immer glücklichen Liebe" [EO 11/9, S. 296] vergleicht. Eulers Pionierleistung in der Optik besteht wie in der Mechanik in der analytischen Behandlung des Stoffes, die bisher synthetisch vorgenommen worden war.
Zunächst hatten Euler mehr physikalische Fragen in der Optik interessiert, während er sich etwa ab 1750 intensiver der geometrischen Optik sowie der Konstruktion optischer Instrumente (Teleskope, Mikroskope) widmete. Bahnbrechende Resultate

Wie für viele große Mathematiker war die Zahlentheorie auch ein Lieblingsgebiet Eulers, und seine Liebe zur Zahlentheorie, „der Königin der Mathematik" (C. F. Gauß), nahm mit dem Alter zu. Neben Legendre und Lagrange war Euler - alle drei von Gauß mit dem Beiwort clarissimus [sehr berühmt] bedacht - einer der drei großen Zahlentheoretiker des 18. Jahrhunderts, und seine Leistungen auf diesem Gebiet hätten allein ausgereicht, seinen Namen unsterblich zu machen.

Wenn seine spätere Wirkung in der Zahlentheorie mitunter als nicht so groß eingeschätzt wird, wie es nach diesen Bemerkungen zu erwarten wäre, so mag das daran liegen, dass sein um 1750 ins Auge gefasstes Lehrbuch über diesen Gegenstand nur ein Entwurf geblieben ist, und auch, dass seine vorauseilenden Ideen oft ihre Wirksamkeit in der Bearbeitung durch andere

Mathematiker zu späteren Zeitpunkten entfalteten.
So dominierte in der Zahlentheorie bis zur Hälfte des 19. Jahrhunderts der hauptsächlich auf Euler und Lagrange fußende „Essai sur la theorie des nombres" [Abhandlung über Zahlentheorie] von A. M. Legendre, wiewohl er 1801 durch die „Disquisitiones arithmeticae" [Arithmetische Untersuchungen] von C.F. Gauß, „dem Buch mit sieben Siegeln" (P. G. Lejeune Dirichlet) inhaltlich überholt war.

Euler knüpfte in Berlin an die in Petersburg begonnenen zahlentheoretischen Untersuchungen an. So bewies er 1742 die von Fermat 1640 formulierte, aber unbewiesene Behauptung (der sogenannte „kleine Fermat")

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod p \qquad , \qquad (a,p) = 1, \quad p \text{ prim}$$

nachdem er 1731 bereits den Sonderfall, dass jede ungerade Primzahl der Form $n+1$ die Zahl $2^n - 1$ teilt, erledigt hatte (was übrigens schon 500 v. u. Z. den Chinesen bekannt war). 1763 publizierte Euler schließlich als vierten Beweis für diese Aussage den allgemeineren Satz:

$$a^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod n \qquad , \qquad (a,n) = 1, \quad p \text{ prim}$$

wobei $\varphi(n)$ die Gaußsche Bezeichnung für die Eulersche Funktion ist. $\varphi(n)$ gibt die Anzahl der zu n teilerfremden natürlichen Zahlen $\leq n$ an, und für $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} ... p_r^{\alpha_r}$ ermittelte Euler:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Bemerkenswert im Hinblick auf die Kontroverse Maupertuis - Koenig ist Eulers Reaktion auf Koenigs öffentliche Mitteilung, dass Leibniz in der gleichen Weise wie Euler den Satz bewiesen habe. Obwohl beide Beweise verschieden waren, ein Plagiat mithin nicht unterstellt werden konnte, ging Euler darauf gar nicht ein, sondern erklärte 1752, dass er folglich nach Fermat und Leibniz den dritten Beweis geliefert habe.

Der zahlentheoretische Höhenflug Eulers nahm seinen Ausgang bei den Studien über Primteiler von Zahlen der Form $a^2 + 1$, insbesondere bei den Fermatschen Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$. Das führte ihn zu Aussagen über die möglichen Primteiler und die Gestalt der Teiler von Zahlen der Form $a^2 + b^2$ (a, b teilerfremd), womit erste Keime einer Theorie der binären quadratischen Formen entstanden, die vornehmlich der junge C.F.Gauß zur Entfaltung brachte.

Die Untersuchungen wurden auf Zahlen der Form $a^2 \pm b^2$ ausgedehnt und noch etwas allgemeiner schließlich auf die Form $ma^2 \pm nb^2$.
Eine erschöpfende Antwort auf die Frage nach den Primteilern der quadratischen Form $a^2 \pm b^2$ bei $(a,b) = 1$ liefert das quadratische Reziprozitätsgesetz, welches häufig A. M. Legendre zugeschrieben wird, der einen teilweisen Beweis dafür angab. P. L. Tschebyschew hob jedoch 1849 hervor, dass Euler die Priorität an dieser kapitalen Entdeckung gebührt, und L. Kronecker führte in seiner Abhandlung über die Geschichte des Reziprozitätsgesetzes aus:

Schon in einer Abhandlung aus den Jahren 1744-1746 ... giebt Euler eine Reihe von Lehrsätzen und Bemerkungen, welche das Reciprozitätsgesetz im Wesentlichen enthalten; denn es ist darin als Resultat von Beobachtungen angegeben, dass die Primtheiler von $a^2 + Nb^2$ oder $a^- Nb^2$ und diejenigen Primzahlen, welche Nichtteiler eines solchen Ausdruckes sind, sich nach gewissen Linearformen $4Nm \pm \alpha$ sondern ... Euler selbst hat das Reciprocitätsgesetz in ganz entwickelter und vollendeter Form erst viel später ... [Petersburg 1783] publiziert. [78]

Der Beweis des famosen Sachverhaltes, der sich implizit zuerst offenbar 1742 in einem Brief an Goldbach (28. 8. 1742) findet, gelang Euler zeitlebens nicht. Das Aufstellen dieser Vermutung und die Bemühungen um den Beweis bieten ein schönes Beispiel dafür, dass mathematische Einsichten auch genialer Gelehrter keine unvermuteten und vom Himmel fallenden Erleuchtungen sind, sondern durch Fleiß und Ausdauer erzielt werden.
In der Zahlentheorie arbeitete Euler mit „experimentellen“ Methoden, indem er leicht und gewandt rechnend sich nicht scheute, auch riesige Zahlenmengen zu untersuchen, und dabei mit unfassbarer Intuition Gesetzmäßigkeiten aufspürte. In unserem Fall genügten bereits Tabellen mäßigen Umfangs.

Betrachten wir aus dieser Sicht den gewaltigen Bogen, welchen Euler von Goldbachs kleiner Anregung bis zum quadratischen Reziprozitätsgesetz zu spannen wusste, so ist dies phänomenal!
Der fruchtbare Boden, auf den Goldbachs Postskriptum fiel, ist außerdem eine überwältigende Bestätigung für die Tragweite von Hilberts „simpler“ Devise durch ein Genie, man möge immer mit den ganz einfachen Beispielen beginnen. Die Zwangsläufigkeit einer mathematischen Entwicklung lässt sich hier ebenfalls auf eindrucksvolle Weise belegen. Rund 50 Jahre nach Euler und unabhängig von diesem durchlief bis in die Einzelheiten der junge Gauß faktisch den selben Weg, aber schneller und erfolgreicher als Euler. [88]

Gauß gelang als erstem der vollständige Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes (1796), dem er noch sieben weitere folgen ließ. Insgesamt sind heute über 50 Beweise dieses tiefliegenden Satzes der elementaren Zahlentheorie bekannt, der in ihrer Geschichte einen zentralen Platz einnimmt und der von Gauß auch als „theorema aureum“ [goldener Satz] bezeichnet wurde.

Wir skizzieren das Reziprozitätsgesetz. Von großer zahlentheoretischer Bedeutung sind ganzzahlige Lösungen x und y der Gleichung

$$x^2 + my = a$$

(m, a ganze Zahlen), was gleichbedeutend mit der Teilbarkeit von $x^2 - a$ durch m ist bzw. in Kongruenzschreibweise

$$x^2 - a \equiv 0 \pmod m$$

Wenn für zwei teilerfremde ganze Zahlen p und q folgendes gilt:

a) p ist kongruent einer beliebigen Quadratzahl modulo q, dann heißt p quadratischer Rest von q (wie 12 quadratischer Rest von 13 wegen $12 \equiv 8^2$ modulo 13 ist),

b) p ist keiner Quadratzahl modulo q kongruent, dann heißt p Nichtrest von q (wie z. B. -1 von 3, weil niemals $x^2 \equiv -1$ modulo 3 möglich ist).

Nach Euler ist für $p > 2$ eine Zahl a quadratischer Rest bzw. Nichtrest, je nachdem ob

$$a^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

durch p teilbar ist oder nicht bzw. kongruent 1 oder -1 modulo p ist. Mit der Abkürzung (Legendre Symbol)

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{wenn } a \text{ quadratischer Rest von } p \text{ ist} \\ -1 & \text{wenn } a \text{ kein quadratischer Rest von } p \text{ ist} \end{cases}$$

lautet der Eulersche Satz

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \text{ modulo } p$$

Das von Euler vermutete quadratische Reziprozitätsgesetz für die ungeraden Primzahlen p und q hat die Gestalt:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

Fermat hatte eine Äußerung A. Girards von 1625 aufgegriffen und behauptet, dass die ungeraden Primteiler von Zahlen der Form $a^2 + b^2$ mit $(a, b) = 1$ in einer Progression $4n + 1$ liegen. Euler gelang der Beweis 1749.
Der umgekehrte Sachverhalt, dass jede Primzahl der Form $4n + 1$ eine gewisse Summe aus teilerfremden Quadratzahlen teile, erwies sich als schwierig. Euler zeigte aus diesem Umfeld folgende weitreichende Gruppe von Sätzen:

„Wenn eine [quadratfreie] Zahl der Form $4n+1$ nur auf eine Weise als Summe zweier zueinander teilerfremder Quadrat- zahlen dargestellt werden kann, so ist sie Primzahl." [EO 1/2, S. 314]. Weitere Sätze besagen, dass bei fehlender oder mehrfacher Zerlegung sowie nicht teilerfremden Quadratzahlen, keine Primzahl vorliegt.

Euler gibt a. a: O. hierfür die Beispiele:
a) $262657 = 129^2 + 496^2$
Ist wegen eindeutiger Darstellung mit $(129, 496) = 1$ Primzahl.

b) $100009 = 1000^2 + 3^2 = 235^2 + 975^2$
Wegen zweifacher Darstellung als Summe von Quadratzahlen keine Primzahl.

c) $32129 = 95^2 + 152^2$
Es liegt zwar eine eindeutige Zerlegung in Quadratzahlen vor, diese sind jedoch nicht teilerfremd: $(95, 152) = 19$, also keine Primzahl.

d) 233033 gestattet keine Zerlegungen in eine Summe zweier Quadratzahlen, also keine Primzahl.

Beim Beweis dieser Aussagen bediente sich Euler erstmals der sogenannten Methode der Differenzen, einem wirksamen Beweisverfahren der Zahlentheorie. Melnikow hat darauf hingewiesen, dass obiger Satz durch Euler nicht ganz korrekt formuliert wurde, da er strenger für quadratfreie Zahlen der Form $4n + 1$ auszusprechen ist. Für Euler war stets $(0, n) = 1$, so dass bereits $9 = 2 \cdot 4 + 1 = 3^2 + 0^2$ ein Gegenbeispiel wäre.

Euler hat hier einen neuen Zugang zum Problem der Primzahlen gefunden. Es soll entschieden werden, ob eine gegebene Zahl n Primzahl ist. Mit dem Sieb des Eratosthenes kann diese Frage prinzipiell beantwortet werden, jedoch wachsen selbst mit Computern für große Zahlen die Schwierigkeiten enorm an.
Im 18. Jahrhundert gab es Primzahltafeln bis etwa 100000, die um 1770 bis 144000 gediehen waren. Euler selbst diskutierte in einer Abhandlung die Aufstellung von Primzahltafeln bis zu einer Million.

Euler verband die Frage nach dem Primzahlcharakter einer Zahl mit der Zerlegung dieser Zahl als Summe zweier Quadratzahlen.
Es geht also zunächst darum, zu ermitteln, ob sich beim Subtrahieren aller Quadratzahlen kleiner als $n/2$ von der gegebenen Zahl n Quadrate ergeben, um dann die obigen Erkenntnisse anwenden zu können. Euler hat auch praktische Methoden angegeben, um das Probieren beim Zerlegen zu reduzieren. Er fand weiterhin, dass neben der Quadratsumme $a^2 + b^2$ auch passende natürliche Zahlen existieren, mit denen die Summe $a^2 + mb^2$ die gleichen Eigenschaften aufweist. Mit anderen Worten, Euler dehnte die Theorie der Zerlegung in zwei Quadrate auch

auf Zerlegungen der Form

$$a^2 + 2b^2, a^2 + 3b^2 2, a^2 + 4b^2, ... \qquad (a, b) = 1$$

aus, wobei sinngemäß alle Sätze erhalten bleiben. Mit der Zerlegung $a^2 + 1848b^2$ konnte Euler z.B. 18518809 als Primzahl erkennen. Der erste nicht passende Wert für m stellt sich mit 11 ein, da beispielsweise

$$15 = 2^2 + 11 \cdot 1^2 \qquad (1,2) = 1$$

nur auf diese Art zerlegt werden kann, jedoch keine Primzahl ist. Welche Zahlen m sind nun passende Zahlen (numeri idonei)?
Euler fand eine Methode, die es ihm erlaubte, für jedes m die unendlich vielen Zahlen a^2+mb^2 zu überprüfen, und er führte diese Rechnungen bis über $n = 10000$ hinaus aus. Dabei stellte sich nach der 65. passenden Zahl $m = 1848$ keine weitere mehr ein.

Euler zog den für die Zahlentheorie merkwürdigen Sachverhalt der Endlichkeit der Menge dieser Zahlen in Betracht. Erst Heilbronn und Chowla bewiesen 1934 die Richtigkeit dieser Vermutung, und 1954 zeigten Chowla und Briggs, dass es höchstens 66 numeri idonei geben könne. An einigen Stellen dieses Problems stehen wir heute dort, wo Euler es vor: 200 Jahren verlassen hat.

Diese Ausführungen erklären die Aufmerksamkeit, welche die Werte von Quadratsummen oder allgemeiner von Polynomen im Hinblick auf Primzahluntersuchungen fanden. Wiederum angeregt durch Goldbach fand Euler das Polynom

$$P(x) = x^2 - x + 41$$

das für $x = 0,1,2,...,39, 40$ nacheinander 41 Primzahlen erzeugt. Offenbar teilt 41 die Zahl $P(41)$. Dieses Polynom bzw. $P(x + 1) = x^2 + x + 41$ wird gern als instruktives Beispiel für den Unterschied von mathematischer und empirischer Induktion benutzt. Unter den Werten für die ersten 2398 natürlichen Zahlen ist genau die Hälfte prim.
Eulers Virtuosität im Umgang mit Zahlen ist damit noch nicht markiert, denn er fand unter den Werten des Polynoms

$$Q(x) = x^2 + x + 72491$$

4923 Primzahlen. Schließlich zeigte Euler ganz allgemein, dass es kein Polynom geben könne, das nur Primzahlen liefere. Wenn nämlich $P(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit $P(a) = A$ ist, dann teilt A die Zahl $P(nA + a)$.
Er verglich übrigens in den Sechzigerjahren die Verteilung der Primzahlen mit der Quadratur des Kreises: Beides gehe über unsere Fassungskraft. Da der transzendente Charakter der Zahl π damals noch unbekannt war, konnte Euler die Möglichkeit einer Quadratur des Kreises (d. h. seine Verwandlung in ein flächengleiches Quadrat mit Zirkel und Lineal) nicht ausschließen.

Die berühmte Fermatsche Vermutung $a^n + b^n \neq c^n$ für alle ganzen Zahlen bei $n > 2$ konnte Euler für $n = 3$ und 4 bestätigen, der allgemeine Fall ist bis heute unerledigt. Gauß, dem wir bei seinem Ideenreichtum glauben dürfen, lehnte die Bearbeitung der Fermatschen Vermutung in einer Preisaufgabe der Pariser Akademie mit dem Hinweis ab, er könne eine Reihe ähnlicher Probleme geben, von denen die Lösung unbekannt sei, die aber für die mathematische Erkenntnis nur wenig liefern würden.
Ähnlich scheint sich Euler bei einem Problem verhalten zu haben, das heute jeder Mathematikstudent als beliebtes Standardbeispiel der mathematischen Grundlagenforschung kennt.

Nachdem Goldbach in einem Brief aus dem Jahre 1742 an Euler Vermutungen über Fermatsche Zahlen angestellt hatte, notierte er am Briefrand:

Es scheint wenigstens, dass eine jede [natürliche] Zahl, die größer ist als zwei ein aggregatum trium numerorum primorum sei [d. h. aus drei Primzahlen zusammengesetzt]. [15, S. 104]

Damals zählte man die 1 zu den Primzahlen, so dass z. B. 3=1+1+1 oder 6=1+2+3 die Vermutung belegen. Euler antwortete umgehend, bewies die Behauptungen über die Fermatschen Zahlen, schrieb aber über die am Briefrand geäußerte Vermutung:

Dass aber ein jeder numerus par [gerade Zahl] eine Summa duorum primorum [Summe zweier Primzahlen] sei, halte ich für ein ganz gewisses Theorem, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstrieren kann. [15, S. 111]

Beweisversuche Eulers sind nicht bekannt geworden. Heute ist die schärfere Behauptung, dass jede gerade Zahl ≥ 4 sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lasse, als Goldbachsche Vermutung bekannt (z. B. $90 = 31 + 59$). 1912 erklärte E. Landau auf dem 5. Internationalen Mathematiker-Kongress das Problem bei dem gegenwärtigen Stand des Wissens für unangreifbar.
Ein wesentlicher Teilerfolg gelang dem sowjetischen Mathematiker I. M. Winogradow 1937, als er zeigen konnte, dass jede hinreichend große ungerade natürliche Zahl als Summe dreier Primzahlen darstellbar ist.

Eulers Beiträge zur algebraischen Gleichungstheorie sind unvergänglich. 1742 hatte er in einem Brief an Nikolaus I Bernoulli die Vermutung ausgesprochen, dass jedes Polynom mit reellen Koeffizienten in Faktoren ersten und zweiten Grades mit reellen Koeffizienten zerlegt werden könne.
Hieraus und aus der Auflösungsformel für quadratische Gleichungen folgt sofort, dass zum einen eine algebraische Gleichung so viele Wurzeln hat, als ihr Grad angibt, und dass zum anderen diese Wurzeln komplexe Zahlen sind (d.h. die Form $a + bi$ haben):

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \equiv (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

Dieser fundamentale Zerlegungssatz für die algebraische Gleichungstheorie erschien zuerst bei A. Girard (1629) und R. Descartes (1637) als Aussage über die Zahl der Wurzeln einer Gleichung. Während man aber bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts es für möglich hielt, dass die Lösung algebraischer Gleichungen sich nicht nur auf komplexe Zahlen beschränke, sondern weitere Zahlenarten möglich seien, glaubte Euler seit spätestens 1743, dass alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten die Form $a + bi$ haben.

1746 trug er hierfür in der Berliner Akademie einen lückenhaften, vornehmlich algebraisch ausgerichteten Beweis vor, der 1751 veröffentlicht wurde. Eine beweistechnisch verschiedene Herleitung des Sachverhaltes, die aber ebenfalls mangelhaft ist, hatte 1746 auch d'Alembert gefunden.
Diese Beweise wurden später von vielen Mathematikern vervollkommnet, insbesondere von C.F. Gauß, der 1799 einen strengeren Beweis lieferte, den F. Klein als „im Prinzip richtig, aber unvollständig“ bezeichnete. Gauß kam später mit drei weiteren Beweisen auf dieses Thema zurück, aber B. Bolzano schloss wiederum eine Lücke bei Gauß. Wir können deshalb G. Frobenius zustimmen, der ausführte:

Für die Existenz der Wurzeln einer Gleichung führte Euler jenen am meisten algebraischen Beweis ... Ich halte es für unrecht, diesen Beweis ausschließlich Gauß zuzuschreiben, der doch nur die letzte

Feile daran gelegt hat. [EO I/6, S. XVI]

1759 versuchte Euler, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung n-ten Grades aus Radikalen n-ten Grades zusammenzusetzen, was ihm bis $n = 4$ gelang. Aber bereits für $n = 5$ musste er sich, was infolge der späteren Erkenntnisse über die Unauflösbarkeit algebraischer Gleichungen für $n = 5$ mittels Radikale von N. H. Abel (1824) und E. Galois (1832) unumgänglich ist, auf spezielle Fälle beschränken, beispielsweise hat $x^5 - 40x^3 - 72x^2 + 50x + 98 = 0$ die Wurzel

$$x = \sqrt[5]{-31 + 3\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-31 - \sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18 + 10\sqrt{-7}} + \sqrt[5]{-18 - 10\sqrt{-7}}$$

Euler war, wie seine Zeitgenossen, des irrigen Glaubens, die allgemeine Gleichung beliebigen Grades sei durch Radikale lösbar, und schrieb das Scheitern beim Aufstellen der Lösung der vermeintlich mangelhaften Entwicklung der Algebra zu. Es ist aber charakteristisch für Eulers praktischen Standpunkt, dass er Näherungslösungen für numerische Gleichungen entwickelte (1748).
Obwohl Euler selbst eine geometrische Veranschaulichung komplexer Zahlen am Kreis gegeben hatte, sprach er ihnen keine reale Bedeutung zu, sondern sah in ihnen lediglich zweckmäßige Vereinbarungen beim Rechnen. Sein Beiwort „eingebildete Zahlen“ umreißt treffend den Standpunkt.
Die von W. R. Hamilton 1843 eingeführten Quaternionen, eine Erweiterung der komplexen Zahlen, finden sich substantiell bereits bei Euler.

In der Flächentheorie fand Euler 1760, dass sich jede Normalkrümmung eines Flächenpunktes, der kein Nabelpunkt ist, durch die Relation (Eulersche Formel)

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\cos^2\alpha}{\kappa_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\kappa_2}$$

aus den Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 ausdrücken lässt, wobei α den Winkel zwischen einer bestimmten Hauptkrümmungsrichtung und der Normalkrümmungsrichtung misst.

In der Analysis wies er 1744 als erster auf die unendliche Vieldeutigkeit der Logarithmusfunktion im Komplexen hin und führte die für die Berechnung von π nützliche Formel $i \log i = -\pi/2$ ein. Euler gab 1760 für elliptische Integrale Normalformen sowie Additionstheoreme an und verhalf dadurch den elliptischen Funktionen zu ähnlicher Bedeutung wie den zyklometrischen oder logarithmischen Funktionen. Die Funktionalgleichung der Zetafunktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

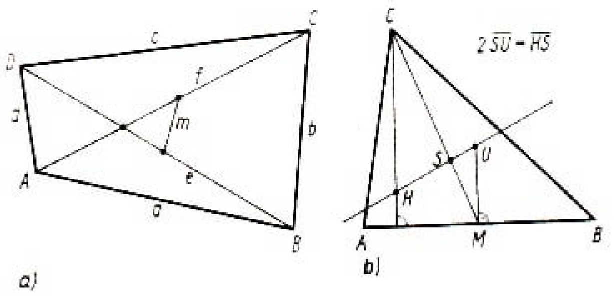
(z komplex, Realteil von $z > 1$), eine der merkwürdigsten Funktionen der Mathematik, wurde von ihm vermutet. $\zeta(z)$ ist u. a. für die Primzahlverteilung von Interesse.

In der ebenen Geometrie fand Euler für vier Punkte A, R, S und B einer Geraden die Relation

$$AB \cdot RS + AR \cdot SB = AS \cdot BS$$

die von Möbius und Steiner zum Grundbegriff der projektiven Geometrie gemacht wurde. Allgemein bekannt ist auch der Satz über die Mittellinien eines Vierecks oder über die Eulersche Gerade (Abb. 21).
Den sogenannten Feuerbachschen Neunpunktekreis, den 1822 Karl Feuerbach entdeckte, kannte Euler bereits seit 1765. Euler führte den Begriff des Ähnlichkeitspunktes für ebene Figuren

ein: Haben zwei ähnliche Figuren die homologen Seiten AB und ab, so gibt es einen Punkt Γ in ihrer Ebene, so dass ΓAB und Γab ähnlich sind.
Der Name „affine Figur“ ist von ihm. Auf Euler ist die übersichtliche Gestaltung vieler Formeln der Geometrie oder Trigonometrie zurückzuführen, wie z.B. die konsequente Bezeichnung der Dreiecksseiten mit a, b, c und der Winkel mit A, B, C. Kreisähnliche Kurven konstanter Breite, die heute Releaux-Kurven heißen, interessierten Euler ebenfalls bereits. Die uns vertraute Inhaltsformel eines Tetraeders, ausgedrückt durch eine algebraische Summe der zwölf Koordinaten der Eckpunkte, gab 1752 erstmals Euler an.



21 Zwei geometrische Sätze.

a) Für jedes Viereck mit den Seiten a, b, c und d, den Diagonalen e und f sowie dem Abstand m der Mitten der Diagonalen gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2$$

b) In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt H der Höhen, der Schwerpunkt S des Dreiecks sowie der Mittelpunkt U des Umkreises auf einer Geraden (Eulersche Gerade).

Wir nennen noch bekannte elementare Probleme, die Euler behandelte. Er löste das von Nikolaus Bernoulli gestellte Problem unabhängig von diesem, das in einer alltäglichen Interpretation das Problem der vertauschten Briefe betrifft.
Jemand schreibt n Briefe und auf n Umschläge die zugehörigen Adressen. Auf wie viele Arten kann er die Briefe sämtlich in falsche Umschläge stecken? Die Lösung lautet:

$$n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

also für $n = 4$ beispielsweise auf 9 Arten.

Euler stellte Goldbach 1751 die Aufgabe, auf wie viele Arten sich ein konvexes n-Eck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen lässt.
Zunächst sieht das Problem recht einfach aus, aber mit der Eckenzahl steigt die Schwierigkeit zunehmend an, so dass Euler bemerkte: „Die Induktion aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam.“ Die gesuchte Anzahl ist

$$\frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n - 10)}{(n-1)!}$$

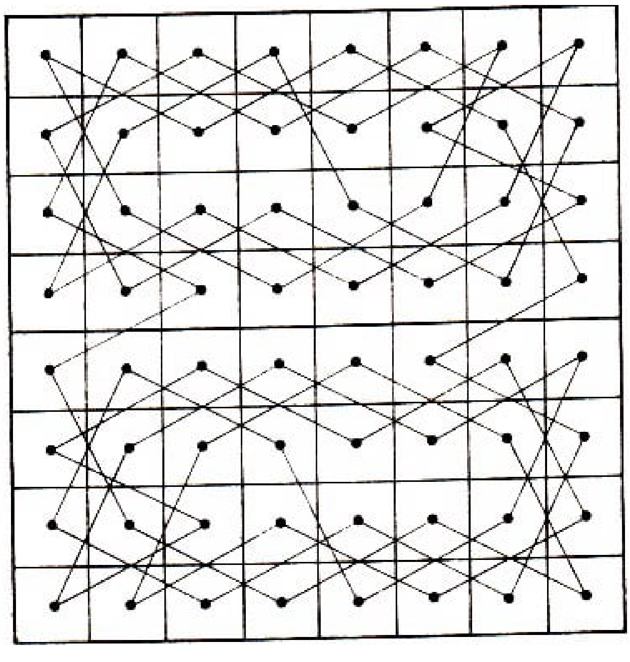
also z.B. für $n = 9$ ergibt sich 429.

Euler hat sich auch mit mathematischen Spielen befasst. Er war ebenfalls ein guter Schachspieler. In Berlin, das Euler als sehr schachfreudig kennzeichnete, hat er bei einem Juden das Spiel erlernt, und er sagt: „Ich habe ... es so weit gebracht, dass ich ihm (dem Lehrer - R., T.) die meisten Partien abgewinne.“

Wie wir einem Brief aus dem Jahre 1751 entnehmen können, bedauerte er die wegen einer Affaire notwendige plötzliche Abreise des Schachmeisters Philidor aus Potsdam, „sonst würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben, mit ihm zu sprechen“. Philidors Bauernführung („Der Bauer ist die Seele des Schachs“) hat die Spielweise im Schach stark beeinflusst. Euler besaß 1751 bereits Philidors 1749 in London erschienenes Buch „Analyse du jeu des echecs“ [Analyse des Schachspiels].
In den Memoires der Berliner Akademie von 1759 findet sich eine 22seitige Abhandlung über den Rösselsprung:

Eines Tages befand ich mich in einer Gesellschaft, als bei Gelegenheit des Schachspiels jemand die Frage aufwarf, mit einem Springer bei gegebenem Anfangsfeld alle Felder des Schachbretts der Reihe nach, jedes nur einmal zu passieren . . . Diejenigen, die die Aufgabe für ziemlich leicht hielten, machten mehrere nutzlose Versuche, ohne zum Ziel zu gelangen. Hierauf gab derjenige, der die Frage aufgeworfen hatte, eine Route so an, dass eine vollständige Lösung entstand.
Die Menge der Felder ließ indessen nicht zu, die gewählte Route dem Gedächtnis einzuprägen, und erst nach mehreren Versuchen gelang es mir, eine der Aufgabe genügende Route zu finden, sie galt auch nur für ein bestimmtes Anfangsfeld. [39, Band 1, S. 319]

Vermutlich ist die Rösselsprungaufgabe so alt wie das Schachspiel selbst, aber erst Euler gab ihr, wenn auch nicht eine Theorie, so doch ein praktikables Lösungsverfahren. Er geht dabei zunächst aufs Geratewohl voran, bis der Rösselsprung sich nicht weiter ausführen lässt. Dann wird der Rösselsprung in zwei Teile zerlegt sowie auf neue Art miteinander wieder verbunden, so dass alle früheren Felder wieder besetzt sind, aber ein neuer Endpunkt zustande kommt, von dem möglicherweise eines der freien Felder erreichbar ist.



22 Zweiteiliger, geschlossener Rösselsprung von Euler

Die geschickten Zerlegungen Eulers in den Beispielen machen es glaubhaft, dass man stets zum Ziel kommen könne, bewiesen wird es nicht.
Jean Paul schreibt im Hesperus: „Gegen den Eulerschen Rösselsprung der Ratten zog er nur mit einem Schlägel zu Felde“, woraus zumindest hervorgeht, dass auch Euler den Rösselsprung populär gemacht hatte. Die Abb. 22 zeigt einen in sich geschlossenen Rösselsprung Eulers, der zweiteilig genannt wird, da er zuerst auf der einen und dann auf der anderen Hälfte des Bretts ausgeführt wird. Von dieser Art gibt es übrigens 31054144 Lösungen, wie die Mathematiker

katalogisierend ermittelt haben.

Euler untersuchte auch rechteckige und andersartige Bretter in bezug auf den Rösselsprung. Er zeigte z. B., dass es auf Brettern vom Format 3 $\times$ 5 keine Rösselsprünge gibt, auf dem Format 3 $\times$ 7 sind keine geschlossenen Rösselsprünge möglich.

Euler befasste sich auch mit magischen Quadraten, von denen gegen Ende des 18. Jahrhunderts eine neue Art große Beachtung fand, die sogenannten lateinischen Quadrate. Es handelt sich dabei um ein quadratisches Schema aus n Zeilen und n Spalten, in dem n verschiedene Symbole so auf die n^2 Felder verteilt werden, dass jedes Symbol genau einmal in jeder Zeile und jeder Spalte erscheint.
Die Bezeichnung lateinisches Quadrat folgt Eulers Angewohnheit, für die n Symbole lateinische Buchstaben zu verwenden. Wir denken uns jetzt ein zweites lateinisches Quadrat mit griechischen Buchstaben gefüllt, so dass die Überlagerung beider Quadrate zu einem neuen jede Buchstabenkombination genau einmal enthält, wie z. B. in

$$\begin{array}{cccc} a,\alpha & b,\beta & c,\gamma & d,\delta \\ b,\gamma & a,\delta & d,\alpha & c,\beta \\ c,\delta & d,\gamma & a,\beta & b,\alpha \\ d,\beta & c,\alpha & b,\delta & a,\gamma \end{array}$$

Diese Quadrate werden als griechisch-lateinische Quadrate bezeichnet. Unser Beispiel gibt übrigens eine Lösung für das im 18. Jahrhundert populäre Problem, sämtliche Asse, Könige, Damen und Buben eines Kartenspieles in einem quadratischen Schema so anzuordnen, dass jeder Wert und jede Farbe in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal auftreten.
Euler vermutete, dass ein analoges Problem für 36 Offiziere mit je 6 verschiedenen Dienstgraden aus 6 verschiedenen Regimentern unlösbar sei, also ein entsprechendes griechisch-lateinisches Quadrat der Ordnung 6 nicht existiere. Abgesehen von den Ordnungen $n = 4k + 2$, $k = 1,2,3,...$, führte Euler den Nachweis für das Vorhandensein griechisch-lateinischer Quadrate, und so vermutete er verallgemeinernd die Unmöglichkeit für diese Fälle.

1901 konnte durch mühevolles Ausprobieren aller Fälle der französische Mathematiker G. Tarry die Vermutung für $n = 6$ als richtig nachweisen, aber 1958 gelang es den amerikanischen Mathematikern E. T. Parker, R.C. Bose und S. S. Shrikhande, die Eulersche Vermutung für die restlichen Fälle $n > 6$ und mit durchaus klassischen Mitteln zu widerlegen.
Euler hatte sich auch in der Einschätzung seiner Resultate geirrt, denn er beschloss seine Arbeit mit den Worten, dass diese Ergebnisse für sich betrachtet kaum von Bedeutung seien, während heute in der angewandten Mathematik griechisch-lateinische Quadrate beim Aufstellen kostensparender und optimaler Versuchspläne äußerst wichtig sind.

Vor der Berliner Akademie hielt Euler u. a. Vorträge über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kartenspiele, Witwenkassen und Lotterien. In der Frage nach dem richtigen Verhältnis von Jahresbeitrag und Pensionshöhe in Abhängigkeit von den jeweiligen Altersgruppen bezog sich Euler auf die empirisch ermittelten Sterblichkeitstafeln seines Akademiekollegen J. P. Süßmilch, der Statistiker und orthodoxer Theologe war.
Dieser verfolgte in seinem Hauptwerk „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts" von 1741 zwar apologetische Zwecke, er blieb aber als Forscher stets exakt. Euler, dem die Tendenz des Buches sympathisch war, hat selbst ein Kapitel davon bearbeitet. Er pflegte gern am Beispiel einer in einer geometrischen Reihe anwachsenden Bevölkerungszahl die Einwürfe der Ungläubigen zu entkräften, welche die 6000 Jahre der Schöpfung (aus genealogischen Angaben der Bibel errechnet) für die Ausbreitung der Menschheit als zu gering erachteten.

Außer bei Euler fand der deutsch publizierende Süßmilch wenig Beachtung, dementsprechend auch seine Bitten um eine Pension, und so starb er nach zwanzigjährigem Wirken für die Akademie 1766, ohne jemals einen einzigen Taler von dieser erhalten zu haben!

Eulers Produktivität war mittlerweile so angestiegen, dass er die Kapazitäten für Publikationen sowohl der Berliner als auch der Petersburger Akademie überschritt. Er arbeitete im Grunde genommen gleichzeitig für die Berliner und Petersburger Akademie und hätte mühelos mehrere mathematische Institute mit Arbeit versehen können. Mit den „Varia opuscula“ [Verschiedene kleinere Werke] in drei Bänden veröffentlichte Euler von 1746 bis 1751 eine Reihe von Einzeluntersuchungen, die er in Zeitschriften nicht mehr unterbringen konnte. Die Pariser Akademie würdigte seine unvergleichbaren Leistungen, als sie ihn 1755 als neuntes auswärtiges Mitglied wählte, während ihre Statuten eigentlich nur acht auswärtige Mitglieder zuließen.

Wir geben abschließend als Leseprobe einen Satz nebst dessen Kommentar über Restklassen (EO 1/2; S. 494):

Satz I: Wenn p Primzahl und a eine nicht durch p teilbare Zahl ist, dann ist kein Term dieser geometrischen Progression

$$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \quad \text{usw.}$$

durch p teilbar.

Scholion: Ich habe mir vorgenommen, die Reste welche bei der Division dieser geometrischen Reihe (die oben hingeschriebene - R. T.) durch p entstehen, aufmerksam zu beobachten. Zunächst sind diese einzelnen Reste, wie sich aus der Natur des Divisionsverfahrens ergibt, kleiner als p; kein Rest wird aber gleich Null sein, weil kein Term durch p teilbar ist.
Wenn im Verlaufe der Untersuchungen Reste vorkommen, die größer als p sind, so weiß man aus der Arithmetik, wie man sie zu reduzieren hat. So ist der Rest $p + r$ gleich bedeutend mit dem Rest r, und allgemein führt der Rest $np + r$ zurück auf den Rest r, wenn r größer ist als p, so führt man diesen Rest zurück auf $-p$ oder $r - 2p$ oder $r - 3p$ usw., bis man zu einer Zahl kommt, die kleiner ist als p.
Daher sollen alle Reste $r \pm np$ als ein und derselbe Rest r angesehen werden. Genau zu reden, sind alle Reste positive Zahlen kleiner als p; trotzdem ist es aber oft bequem, negative Reste zu betrachten; wenn r ein Rest ist kleiner p, so wird auch $r - p$, was eine negative Zahl ist, Rest sein, so dass der positive Rest r gleichbedeutend mit dem negativen $r - p$ ist.

5.5 Er rechnete, wie andere atmen (Eulers Beiträge zur Analysis)

Hieraus folgt also ganz deutlich, dass der Nützen der Mathematik keineswegs in den gemeinen Teilen derselben bestehe, als deren Gebrauch nicht sonderlich weit sich erstrecket, sondern dass man der höheren Mathematik allein diejenigen Vorteile zu danken habe, welche man von dieser Wissenschaft teils schon wirklich erhalten, teils aber noch zu erwarten hat.
L. Euler

Leibniz, Newton und die Bernoullis hatten, auf den Schultern ihrer Vorgänger stehend, eine neue Mathematik, die Differential- und Integralrechnung (kurz Analysis) begründet, deren Denkweisen deutlich einen Bruch mit den antiken Auffassungen dar- stellten. Die Entwicklung der Analysis fußt auf drei Grundlagen, die die Antike nicht besaß: der Buchstabenrechnung, der analytischen Geometrie und der Theorie der Funktionen.

Die ersten beiden fanden die Begründer der Analysis durch Viete und Descartes hinreichend ausgebildet vor, wenn auch erst dank Eulers Autorität die algebraische Schreibweise eine „internationale Kurzschrift“ wurde und die Durcharbeitung der Descartesschen Koordinatenmethode

für den Raum erst von Euler 1748 (1745 geschrieben) in der „Introductio in analysin infinitorum“ [Einführung in die Analysis des Unendlichen] geleistet wurde.
Als zentraler Begriff der Analysis schälte sich der der Funktion heraus, der sich zwar schon bei Leibniz nachweisen lässt, aber erst von Euler in voller Klarheit an die Spitze der Theorie gestellt wurde.

Die vormals rein algebraische Behandlung von Gleichungen gedieh unter den Händen von Descartes zur Untersuchung von Veränderungen der in die Gleichungen eingehenden Größen (Quantitäten). Geometrisch deutete man an Einzelfällen die Veränderungen in einem Koordinatensystem als Verhältnis der Ordinate zur Abszisse einer Kurve. Erst als der allgemeine, über spezielle Fälle hinausgreifende Kalkül ausgebaut wurde, bedurfte dieses fundamentale Abhängigkeitsverhältnis auch eines allgemeinen Begriffs, nämlich des der Funktion.
Der Name findet sich bereits bei Leibniz, er wurde durch Johann Bernoulli popularisiert, und Euler schließlich verbesserte 1734 Bernoullis Schreibweise fx in $f(x)$, was noch heute üblich ist. Im Vorwort der erwähnten Introductio betont Euler, dass die mathematische Analysis in der Untersuchung veränderlicher Größen und ihrer Funktionen bestehe.

In der Definition einer Funktion schließt sich Euler zunächst seinem Lehrer Johann Bernoulli an. In einem um 1730 verfassten Manuskript, das als Vorarbeit für die 1748 verfasste Differentialrechnung angesehen werden muss, schrieb er:

Eine Quantität, die aus einer oder mehreren Quantitäten irgendwie zusammengesetzt ist, wird ihre Funktion genannt. [73, S. 226]

Euler zählt die Arten der Zusammensetzung auf: die elementaren algebraischen Operationen wie Addition, Multiplikation usw., Potenzierung, Logarithmierung und die Kombination dieser Operationen. Später, in der Introduction von 1745, änderte er die Formulierung nur unwesentlich, allerdings wurde die Menge der zulässigen Operationen beträchtlich erweitert. Sie besteht jetzt aus algebraischen Operationen (einschließlich der Lösung impliziter algebraischer Gleichungen), elementaren transzendenten Operationen, Integrationen sowie die Ausweitung des Argumentbereiches von reellen Zahlen auf imaginäre.
Euler teilte die Funktionen auch ein, z. B. in algebraische, transzendente, gerade, ungerade oder rationale.
Ausgangspunkt und Vorbild der Definition waren die algebraischen Funktionen

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \tag{1}$$

($a_i, i = 0,1,...,n$, reelle Zahlen), denn transzendente Funktionen dachte man sich kritiklos durch unbeschränktes Ausführen der Elementaroperationen (+, -, ·, :) dargestellt, also durch eine Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \tag{2}$$

Euler konnte zwar nicht beweisen, dass jede der Definition genügende Funktion eine solche Reihenentwicklung (oder mit rationalen Exponenten) besitzt, er hielt es aber für unbezweifelbar und legte zunächst diese Funktionen, die nach Lagrange analytisch genannt werden, durchweg den Untersuchungen zugrunde. In der Abgrenzung dieser Klasse von Funktionen besteht bereits ein herausragendes Verdienst Eulers.
Die „algebraische Einengung“ beim Fassen des Funktionsbegriffs machte alsbald eine Erweiterung erforderlich. Bereits 1727 hatte Euler an Johann Bernoulli folgende Zeilen geschrieben:

Ich bin zufällig auf diese Gleichung gestoßen: $y = (-1)^x$, was für eine Figur sie darstellt, scheint schwer bestimmbar, da y bald positiv, bald negativ, bald imaginär ausfällt. Mir scheint sie nicht eine stetige Linie auszudrücken, sondern unendlich viele Punkte, welche diskret im Abstand gleich 1 zu beiden Seiten der Achse liegen, aber gleichzeitig zusammengenommen, der Achse gleichkommen. [33, S. 121]

Bernoullis Antwort, dass $y = 1$ sei, ist unbefriedigend, zeigt aber doch die Schwierigkeit des Problems für die damaligen Mathematiker.
Wenn man auch zu Eulers Zeiten solche Funktionen als Anomalie betrachtete und es erst der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts vorbehalten blieb, sie systematisch zu untersuchen (was sowohl zur Theorie der reellen Zahlen als auch zur Mengenlehre führte), so erzwang jedoch die Frage nach der Natur der Lösungen von gewissen Gleichungen der mathematischen Physik eine Revision der Funktionsauffassung.
Namentlich die Lösungen der Gleichung für die Schwingungen einer Saite zeigten neuartige Eigenschaften. Im Gegensatz zu den durch Potenzreihen wie (2) dargestellten Funktionen, deren gesamtes Verhalten - wie Euler zeigte - bereits durch ein kleines Intervall völlig festgelegt ist, haben Funktionen, die der Schwingungsgleichung genügen, diese Eigenschaft nicht!

Damit besteht zwischen der bereits genannten analytischen Erklärung einer Funktion und einer weiteren Definition Eulers einer Funktion aus geometrischer Sicht als willkürliche mit freier Hand gezeichnete (libero manus ductu) kontinuierliche Linie offensichtlich keine Gleichwertigkeit.
Daniel Bernoulli, der aus physikalischen Erwägungen für die Lösungen der Schwingungsgleichung eine trigonometrische Reihenentwicklung gefunden hatte (Superposition der Eigenschwingungen), glaubte damit die allgemeine Lösung, auch im Sinn der „geometrischen“ Definition zu besitzen, was Euler bezweifelte. Erst Fourier klärte, insbesondere in der „Theorie de la chaleur“ [Theorie der Wärme] von 1822, die Tragweite trigonometrischer Reihen und bestätigte Bernoullis Behauptung, aber auch Eulers Koeffizientenbestimmung für trigonometrische Reihen aus dem Jahre 1777 erhielt ihre volle Bedeutung.

Erstaunlich an Eulers Koeffizientenbestimmung ist, dass Euler nicht bemerkt hat, auf diesem Weg Bernoullis Behauptung bestätigen zu können. Eulers Untersuchungen über trigonometrische Reihen und deren Summen setzten 1744 ein, als er an Goldbach ein Schreiben richtete, das folgende Reihe enthält:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

Euler, der sich in der Introductio auch den inversen und parametrischen Funktionen gewidmet und dabei hervorgehoben hatte, dass eine Funktion durch mehrere analytische Ausdrücke gegeben sein könne, benutzte diesen Sachverhalt, dass nämlich letztendlich nur die Zuordnung gewisser Zahlenmengen zueinander entscheidend ist, für eine neue Definition in den „Institutiones calculi differentialis“ [Unterweisung in der Differentialrechnung] von 1748 (1755 erschienen):

Wenn einige Quantitäten von anderen in der Weise abhängen, dass sie bei Änderung letzterer selbst einer Veränderung unterliegen, so heißen erstere Funktionen der letzteren. [73, S. 230]

Einen kräftigen Anstoß, sich der Definition von dieser Seite zu nähern, hatte zweifelsohne die Frage nach der Natur der Lösungen der Schwingungsgleichung gegeben. Die letzte Definition entspricht völlig der klassischen Erklärung P. G. Lejeune Dirichlets aus dem Jahre 1837. Wie es bei einem so grundlegenden Begriff nicht anders sein kann, hat sich sein Umfang über Riemanns monogamen Funktionsbegriff bis in unsere Tage (z. B. Bourbakis Auffassung) erweitert.

Das Kernstück der klassischen Analysis ist die Ableitung oder das Differential einer Funktion. Leibniz gründete die Analysis auf das Prinzip der Vernachlässigung unendlich kleiner Größen im Verhältnis zu endlichen Größen. Er hat die Kleinheit höherer Ordnung durch einen Vergleich plastisch zu machen versucht, indem er sagte, dass das All sich zur Erde verhielte wie die Erde zum Staubkorn und dieses zum magnetischen Teilchen (gemeint ist das Atom), und es genüge neben dem All noch das „Nichts" Erde zu berücksichtigen, das Staubkorn und magnetische Teilchen zu berücksichtigen, sei sinnlos.
Johann Bernoulli folgte 1691 Leibniz in seiner Differentialrechnung und erklärte:

Eine Größe, die um unendlich kleine Größen vermindert oder vermehrt wird, wird weder vermindert noch vermehrt. [73, S. 224]

Dieser Grundsatz bietet eine breite Angriffsfläche sowohl für den gesunden Menschenverstand als auch für die Logik. Euler stimmte zunächst seinem Lehrer Bernoulli zu. Newton, der Gegenspieler Leibnizens in der Analysis, hielt in der Mathematik jede auch noch so kleine Vernachlässigung für unzulässig und versuchte von der Bewegung als physikalischem Hintergrund geleitet, eine Begründung durch Grenzwerte. Sein zentraler Begriff ist nicht das Differential, sondern die Ableitung (die „Geschwindigkeit" der Änderung einer variablen Größe).

Wie es bei einer so tiefgehenden Umwälzung im Denken nicht anders erwartet werden kann, waren alle anfänglichen Begründungen der Analysis, des „größten Fortschritts im exakten Denken" (J. v. Neumann), mit Unzulänglichkeiten behaftet. Diese Mängel sind der Grund für die Aufmerksamkeit, mit der G. Berkeleys Einwände in „The analyst" [Der Analytiker] aus dem Jahre 1734 während des ganzen 18. Jahrhunderts gelesen wurden.
B. Robins, ein Vertreter der kritischen Richtung, ging mit Eulers Mechanik von 1736 drei Jahre danach hart ins Gericht. Über die durch das Leibnizsche Prinzip hervorgerufenen Fehler schreibt Robins, dass Euler sich fürchte; „seiner eigenen Intelligenz sogar in Fällen zu vertrauen, wo die Maximen, die er gelernt hat, dem gesunden Menschenverstand zu widersprechen schienen".

Die durch Berkeley hervorgerufene Diskussion wird Euler gewiss auch zum Überdenken seiner Auffassung bewogen haben, und er rückte in den Vierzigerjahren von der Leibnizschen Konzeption ab.
Zwar benutzt er weiterhin das Prinzip der Vernächlässigung, aber er gibt weder eine Definition noch Erklärung der unendlich kleinen Größen. In der Introductio erklärt Euler im Vorwort, dass der Leser sich bei den Untersuchungen mit der Idee des Unendlichen vertraut machen werde. Er versucht hier offenbar aus pädagogischen Gründen, den schwankenden Boden der Grundlagen der Analysis zu verlassen.
Euler bezieht jetzt den Newtonschen Standpunkt, den er allerdings arithmetisch ohne physikalischen Hintergrund einführt. Dazu benutzt Euler die endliche Differenzenrechnung, aus der sich die Differentialrechnung als Spezialfall für hinschwindende Differenzen ergibt.
Er geht also von endlichen Zuwächsen der unabhängigen und abhängigen Variablen aus:

Danach muss man sich gedanklich vorstellen, dass diese Zuwächse stetig immer kleiner werden, und dann findet es sich, dass sich ihr Verhältnis stetig einer gewissen Grenze immer mehr nähert, die sie jedoch nur dann erreichen, wenn sie vollständig Null werden. Diese Grenze, die gleichsam das letzte Verhältnis der genannten Verhältnisse bildet, ist nun der wahre Gegenstand der Differentialrechnung. [73, S. 232]

In heutiger Terminologie erklärt Euler damit die Ableitung der Funktion $y = f(x)$ durch den Grenzwert des Bruches $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wiewohl der Begriff des Grenzwertes direkt gar nicht definiert wird.

Die praktische Berechnung der ersten Ableitung läuft jedoch bei ihm auf die Bestimmung des Koeffizienten von Δx in

$$f(x+\Delta x) - f(x) = P(x)\cdot \Delta x + Q(x) \cdot \Delta x^2 + ...$$

hinaus, was Lagrange später ganz formal durch Umformen der zur Funktion gehörigen Potenzreihe erreicht, womit aber der Zusammenhang zwischen Differenzen- und Differentialrechnung verlorengeht. Das Zeichen Δ verdanken wir übrigens Euler.

Euler betrachtet das Verfahren, infinitesimale Größen zu vernachlässigen, als zu beweisenden Satz. Auf der Grundlage dieses Satzes und der für ihn (wie auch für Newton) selbstverständlichen Annahme, dass die betrachteten Funktionen stetig seien (also ihre Grenzwerte annehmen!), entwickelte er den zu Unrecht angegriffenen Kalkül des Rechnens mit Nullen. Auf diese Missverständnisse wies bereits 1796 L. Carnot und in unseren Tagen detailliert erneut A. P. Juschkewitsch hin. In heutiger mathematischer Auffassung ist beispielsweise die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \tag{3}$$

zunächst für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 1$ erklärt, $x = 1$ ergibt vorerst keinen Sinn. Wegen $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ sieht man aber sofort, dass sich $f(x)$ im Punkt $x = 1$ stetig durch $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ ergänzen lässt. Damit kann die Funktion $f(x)$ zu einer Funktion $F(x)$ erweitert werden:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1 \end{cases} \tag{4}$$

die für alle reellen Zahlen x definiert ist. Euler begreift nun unter einer derart stetigen[5] Funktion $f(x)$ gleich deren Erweiterung $F(x)$, er würde also in unserem Beispiel zwar die Funktion (3) aufschreiben, im Grunde genommen aber stets mit (4) rechnen. Den Funktionswert $F(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ bezeichnet Euler als das Verhältnis zweier Nullen.

Aus dieser Sicht werden die Regeln des Rechnens mit Nullen exakte Sätze. Das Postulat von Bernoulli schreibt Euler, wenn a eine endliche und ω eine unendliche kleine Größe ist, als

$$a + \omega = a$$

weitere Regeln sind z. B.

$$a \cdot \omega = 0, \qquad \omega^n : \omega^m = \omega^{n-m} = 0 \quad \text{für } n > m$$

Euler erklärt konsequent (was Newton nicht sagte):

Ein Unendlichkleines ist nichts anderes als eine verschwindende Größe und daher wirklich Null. Soll nämlich eine Größe kleiner sein als jede, die sich vorgeben lässt, so muss sie notwendig gleich Null sein. Wäre sie es nicht, so ließe sich eine noch kleinere vorweisen.

Er hebt aber deutlich hervor:

Daher existieren unendlich viele Ordnungen von unendlich kleinen Größen, die obwohl alle gleich Null sind, wohl voneinander zu unterscheiden sind, wenn man auf ihre gegenseitige Beziehung achtet.

Ein Beispiel für die Nullenrechnung ist die elegante Ableitung der Funktion $y = \log x$ (Inst.

[5] Der Begriff stetig wird hier im modernen Sinn gebraucht. Euler selbst bezeichnete damit einen etwas anderen Sachverhalt.

calc. diff., § 182, die allerdings nicht kritiklos hingenommen werden kann; weshalb vielleicht Euler diese Herleitung erst als Wiederholung gab. Er benutzt die Beziehung

$$\log x = \lim_{b \to 0} \frac{x^b - 1}{b}, \quad \text{symbolisch } \log x = \frac{x^\omega - 1}{\omega}$$

Mit der Regel $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$ folgt hieraus für $\omega = 0$

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{d}{dx} \frac{1}{\omega} x^\omega = \frac{\omega \cdot x^{\omega - 1}}{\omega} = x^{\omega - 1} = \frac{1}{x}$$

Ein anderes Beispiel ist der Beweis des Satzes: Jeder gegebenen Zahl kommen unendlich viele Logarithmen zu. Wir lesen:

Nun beruhen die ... Logarithmen auf dem Satze, dass der Logarithmus von $1 + \omega$, wenn ω eine unendlich kleine Zahl ist, $= \omega$, oder $\log(1 + omega) = \omega$ sei.
Hieraus fließt $\log(1 + \omega)^2 = 2\omega$, $\log(1 + \omega)^3 = 3\omega$; und überhaupt $\log(1 + \omega)^n = n\omega$.
Da aber ω eine unendlich kleine Zahl bedeutet, so kann die Zahl $(1+\omega)^n$ nicht anders einer gegebenen Zahl gleichgesetzt werden, als wenn n unendlich angenommen wird.
Es sei daher n eine unendlich große Zahl, und $x = (1 + \omega)^n$, folglich $\log x = y = n\omega$. Um nun y durch x auszudrücken, so gibt die erste Formel $(1 + \omega) = x^{1/n}$ und $\omega = x^{1/n} - 1$, und durch Substitution dieses Wertes erhält man aus der zweiten Formel

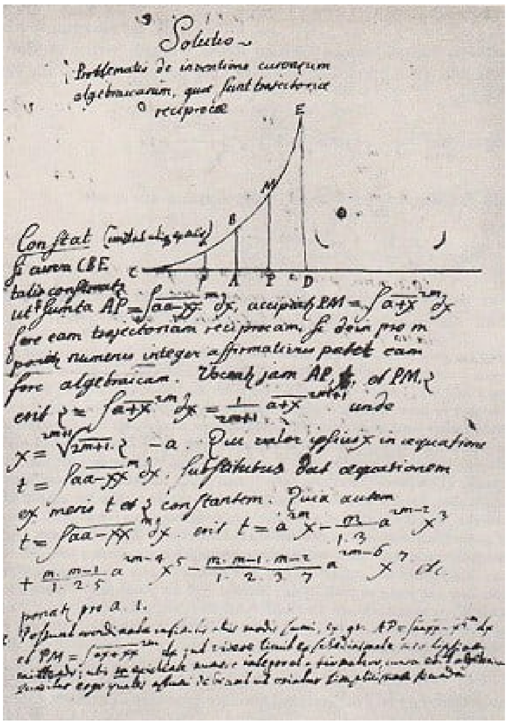
$$y = nx^{1/n} - n = \log x$$

Hieraus erhellt, dass sich der Wert der Formel $nx^{1/n} - n$ dem Logarithmus von x um so mehr nähert, je größer man n annimmt, und dass diese Formel den wahren Wert des Logarithmus von x ausdrückt, wenn man n unendlich groß werden lässt.
So, wie nun ausgemacht ist, dass $x^{1/2}$ zwei, $x^{1/3}$ drei, $x^{1/4}$ 4 vier verschiedene Werte hat, usw., so leidet es auch keinen Zweifel, dass der Ausdruck $x^{1(n}$ unendlich viele Werte in sich schließt. Es muss folglich diese unendliche Menge der Werte von $x^{1/n}$ eine unendliche Menge von Werten für $\log x$ ergeben, und also jede gegebene Zahl x unendlich viele Logarithmen hat.

Dieses instruktive Beispiel zeigt einmal Eulers ausführliche und klare Art zu erklären und zum anderen sein Bestreben, Grenzprozesse zu umgehen, um weiterhin im alten algebraischen Kalkül rechnen zu können. Die unendliche Vieldeutigkeit der Logarithmenfunktion ist uns durch die zum Logarithmus gehörige Riemannsche Fläche zur Selbstverständlichkeit geworden, sie war aber zu Eulers Zeiten für Mathematiker ersten Ranges wie Johann Bernoulli oder d'Alembert ein diffiziles Problem.

Der Übersetzer der Introductio hielt es 1788 noch für nötig, Eulers Auffassung durch zwei langatmige Zusätze zu „widerlegen", aus denen wir zitiert haben [Band 1, S. 493f].

Eulers Rechnen mit Nullen führte auf zahlreiche wichtige Sätze der Analysis, die deren Entwicklung förderten. Auf die Begründung der Analysis hat dieses Verfahren andererseits wenig Einfluss gehabt, da Eulers Nachfolger (Cauchy, Weierstraß) nicht mit verschwindenden Größen arbeiteten, sondern mit Abschätzungen, in denen beliebig kleine Größen auftraten (sogenannte Epsilontik) und die als Grenzfall die gewünschten Gleichungen ergaben. Ansätze hierzu finden sich gleichfalls bei Euler.
Er bereitete die Arithmetisierung der Analysis vor, die mit den bereits beschriebenen Auffassungen Lagranges einsetzt. Bei Weierstraß erhielt sie die klassische Vollendung. In diesem Sinn führt Euler im Vorwort der Differentialrechnung aus:



23 Schriftprobe Eulers

Das gegenwärtige Werk hält sich durchaus innerhalb der Grenzen der reinen Analysis, so dass ich auch nicht einmal eine einzige Figur zur Erläuterung nötig gehabt habe. [33, S. 135] .

In den „Institutiones calculi integralis“ [Unterweisungen in der Integralrechnung] schließt sich Euler ebenfalls an Newton an und erklärt ein unbestimmtes Integral über die Stammfunktion. Erst bei der angenäherten Integration bestimmter Integrale greift er auf Leibniz’ Summendefinition zurück.

Unter den vielen Bezeichnungen, die durch das überragende Ansehen der Lehrbücher Eulers üblich wurden, sind insbesondere e und π sowie die Bezeichnungen für die trigonometrischen Funktionen hervorzuheben. Die Trigonometrie mit ihrer Auffassung der trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse fand durch Euler ihre endgültige Darstellung in der Introductio.
Gleichfalls rührt die praktische Bezeichnung der Seiten und Winkel eines Dreiecks von ihm her.
Führende Mathematiker wie Lagrange, Laplace oder Gauß übernahmen Eulers Schreibweisen.
Über die Lehrbuchtrilogie lässt sich das sagen, was C. G. J. Jacobi für die Integralrechnung in einem Brief an P. H. Fuß ausdrückt:

Ich habe in der letzten Zeit wieder ein anhaltendes Studium aus Eulers Integralrechnung gemacht und mich aufs Neue gewundert, wie frisch sich dieses über 70jährige Buch erhalten hat, während der gleichzeitige d’Alembert ganz unmöglich zu lesen ist. Der Grund scheint mir in seinen Beispielen zu liegen. Denn diese Beispiele spielen nicht so bloß beiher und erläutern, sie sind der ganze Inhalt, den die allgemeine Proposition [Thema] zu der Zeit hat. [35]

Einige Ergebnisse aus den Lehrbüchern der Analysis.
Die Introductio stellt eine Theorie der Funktionen dar. Euler lehrt hier zum ersten Mal die Elimination von Unbekannten aus Gleichungssystemen, behandelt mit der regula falsi [Regel des Falschen] transzendente Gleichungen wie $x = \cos x$ und studiert trigonometrische Funktionen unter Einführung des Bogenmaßes als Verhältnisse.
Die Theorie der Kettenbrüche wird dargelegt und in Beziehung zu gewissen Differentialgleichungen gesetzt, was die Grundlage für die späteren Irrationalitätsbeweise von Lambert für

e und e^2 bildet. Es finden sich Partialbruchzerlegungen für rationale Funktionen, aber auch allgemeine wie

$$\pi x \cot \pi x = 1 + 2x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}$$

Der zweite Band widmet sich der Anwendung der Analysis auf Kurven und Flächen.
Eulers Differentialrechnung - nach G. A. Kästner, dem Verfasser der ersten deutschen Mathematikgeschichte, „unser vornehmstes klassisches Werk von der Differentialrechnung“ - enthält die klassische Differentialrechnung bis hin zu mehreren Variablen und der Bestimmung der Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher mit der Taylorreihe als zentralem Theorem. Unter anderem werden Reihentransformationen angegeben, die auf schnell konvergente Reihen führen. Euler führt eine Reihe an, die es ihm erlaubt, in einer Stunde π auf 20 Stellen genau zu berechnen. Er findet z.B. aus der Leibnizreihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + ...\right)$$

Die für die Statistik oder Ausgleichsrechnung wichtige Summenformel von Euler, die er bereits in Petersburg gefunden hatte, wird angegeben.

Die dreibändige Integralrechnung Eulers erschien erst in Petersburg (1768-1770). Später wurde postum noch ein vierter Band angefügt. Die ersten drei Bände wurden nach Eulers Erblindung korrigiert, was die relativ hohe Druckfehlerzahl erklären mag.
Ihnen liegen 1700 Quartseiten Manuskript zugrunde, die bereits 1763 druckfertig waren. Da auch die Differentialrechnung sieben Jahre ungedruckt gewesen war, sprach sich die Nichtveröffentlichung bedauernd herum, selbst bis in die Schweiz. Dort gab es einen wohlhabenden Kürschner mit außerordentlich starkem Interesse an der Mathematik, der zu Euler nach Berlin reiste, um den Gelehrten zu bitten, das Manuskript abschreiben zu dürfen, was Euler ihm gerne gewährte.

Die Integralrechnung ist nicht schlechthin Integralrechnung im engeren Sinn, sondern behandelt alle auf der Analysis fußenden Gebiete jener Zeit, wie etwa die gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die Variationsrechnung im Lagrangeschen Kalkül, die speziellen Funktionen usw. Erstmals werden durch Euler Doppelintegrale eingeführt und studiert. Als Meister der Substitutionen behandelt Euler mit erstaunlicher Leichtigkeit die schwierigsten Integrationsprobleme, insbesondere in der zweiten Ausgabe (1792-1794) ist der hinzugekommene vierte Band hierfür eine Fundgrube.

Die unbestimmten Integrationen, die elementar ausführbar sind, finden sich fast vollständig.
Viele wichtige bestimmte Integrale werden ausgewertet, darunter auch die durch die Beta- und Gammafunktionen definierten parametrischen Integrale. Gewöhnliche Differentialgleichungen werden mit den heute üblichen Lösungsmethoden Trennung der Veränderlichen, Variation der Konstanten, Multiplikatorenmethode sowie Näherungslösungen behandelt. Euler unterscheidet bei der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten klar zwischen allgemeiner und partikulärer Lösung. Die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen führen für die damalige Zeit auf völliges Neuland in der Analysis.

Alle Lehrbücher sind mit vorbildlicher Klarheit, Überzeugungskraft sowie unvergleichlicher Darstellungsgabe geschrieben. Die Praxis der Analysis wird in ihnen in großartiger Weise entfaltet. Diese pädagogischen Meisterleistungen Eulers dürfen getrost zur unvergänglichen mathematischen Weltliteratur gerechnet werden.

Die konsequente Einführung komplexer Variabler bei der Exponential- und Logarithmenfunktion verdanken wir Euler, der bereits als Zwanzigjähriger in Briefen an seinen Lehrer Johann Bernoulli auf den Kern der Sache - unbeeindruckt von der Autorität Bernoullis - zustrebt. Er lässt dann ohne ersichtlichen Grund die Angelegenheit kurz vor dem Ziel fallen, bis endlich in den Vierzigerjahren der neue Begriff der komplexen Variablen mit voller Klarheit plötzlich hervorbricht.

Euler und d'Alembert leisteten bedeutende Ansätze zur Theorie der analytischen Funktionen mit komplexen Argumenten. 1752 gelangte d'Alembert bei hydrodynamischen Untersuchungen mit der Funktion $z(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ zu den Gleichungen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \qquad , \qquad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

die einen Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion vermitteln. Vom allgemeinen Gesichtspunkt erhielt Euler diese Gleichungen für eine analytische Funktion im Jahre 1777 ebenfalls, die heute zu Ehren von Cauchy und Riemann benannt werden, da diese die Theorie allgemein entwickelten.

Ein bemerkenswertes Resultat einer komplexen Substitution Eulers ist die Berechnung des uneigentlichen Integrals

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Analytische Funktionen einer komplexen Variablen erscheinen bei kartographischen Untersuchungen Eulers. Konforme Abbildungen wurde bereits von Euler benutzt.
Eulers Einstellung zu komplexen Zahlen, die er noch in der „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ im Jahre 1770 im § 144 des 1. Teils ausdrückte, zeigt weiterhin sein Erstaunen über diese Quantitäten und seine Auffassung als bedeutungsleere, aber formal nützliche Vereinbarungen:

Von diesen (imaginäre Zahlen - R. T.) behauptet man also mit allem Recht, dass sie weder größer noch kleiner sind als nichts und auch nicht einmal nichts (=0. - R. T.) selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müssen. [EO I/1 oder 9]

In den folgenden §§ 146 und 148 zeigt sich eine schwankende Einstellung, die sich aus der Konfusion der eindeutigen Erklärung des Wurzelzeichens und der algebraischen Aufgabe, eine quadratische Gleichung zu lösen, ergibt. Einmal muss laut Erklärung imaginärer Zahlen

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = -2$$

sein, während gemäß des allgemeinen Wurzelgesetzes $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$$\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2} = \sqrt{4} = 2$$

gefolgert wird. Endlich darf die Lehre von den imaginären Zahlen nicht „als nutzlose Grille angesehen“ werden, da sie von der „größten Wichtigkeit“ ist. Wir haben einen hinreichenden Begriff von diesen eingebildeten Zahlen, der es uns erlaubt, sie „dem Verfahren der Rechnung zu unterwerfen“, Aufgaben, die imaginäre Zahlen als Lösungen haben, verlangen aber Unmögliches.

Gemeinsam mit Daniel Bernoulli und d'Alembert hat Euler eine neue Disziplin geschaffen: die mathematische Physik.
Die Mathematisierung der Physik, genauer ihre Behandlung mittels der neuen Analysis, ist eine der bahnbrechenden und unvergänglichen Leistungen Eulers. Eine wichtige Rolle spielten hierbei die Auseinandersetzungen des Dreigestirns über die Lösungen der Schwingungsgleichungen.

Hier hatte d'Alembert zwar eine richtige Lösungsmethode, die Charakteristikenmethode, angegeben, sich aber in eine falsche, die Lösung wieder einschränkende Auffassung verrannt, was zu Auseinandersetzungen mit Euler führte.

D. Bernoulli wandte, vom physikalischen Hintergrund geleitet, eine mathematisch wesentlich einfachere Form an, die heute als Entwicklung der Lösung nach einem vollständigen Funktionensystem (das durch die Eigenschwingungen gegeben ist) bezeichnet wird. Die physikalische Motivierung ersetzte jedoch nicht den mathematischen Beweis, dass hiermit jede Lösung darstellbar sei. Und diesen Beweis fand man nicht, obwohl bereits 1759 Clairaut Formeln für die Koeffizienten angegeben hatte, um eine Funktion im Intervall $(0,\pi)$ in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln.
Euler wiederholte unabhängig diese Entdeckung, indem er eine gegebene Funktion in eine Cosinus-Reihe entwickelte (1798 veröffentlicht), aber erst Fourier musste 1807 ein drittes Mal den Sachverhalt unabhängig von seinen Vorgängern entdecken, um die Tragweite der trigonometrischen Entwicklungen zu erkennen.

Es ist interessant zu bemerken, dass die Absichten Eulers und D. Bernoullis hinsichtlich der mathematischen Physik durchaus unterschiedlich waren, was sich in der Behandlung trigonometrischer Reihen aufweisen ließe.
Allgemeiner kann aber festgestellt werden, dass Bernoulli, der Physiker, für ein Problem eine mathematische Methode und Behandlung anstrebte, bei der er es dann mathematisch gesehen bewenden lassen möchte. Dabei versuchte er, soweit wie möglich, ohne Mathematik als Hilfsmittel auszukommen. So ist es folgerichtig, dass er seine Aufmerksamkeit solchen abstrakten Gebieten wie der Zahlentheorie nicht zuwandte.

Euler, der Mathematiker, andererseits strebte die mathematische Formulierung der physikalischen Probleme an, er entwickelte und verallgemeinerte die Lösungsverfahren, und seine Bemühungen waren dabei stets auf die Mathematik als Einheit gerichtet. Hervorgehoben werden muss aber hierbei Eulers überaus praktische Orientierung und sein unentwegtes Suchen nach direkten Lösungsmethoden. Speiser charakterisierte ihn, dass er von der Mathematik her alles erkundete.

Zeitgenossen bezeichneten Euler als die personifizierte Analysis, immerhin weist seine Gesamtausgabe 17 Bände zur Analysis auf. Er war in der Tat Analytiker, aber nicht nur ein unerschrockener Rechner, dem jeder Gedanke zur Formel wurde. Bemerkenswert ist Eulers Vermögen, den Dschungel der Auffassungen zu ordnen, die verwirrende Vielfalt widersprechender Ergebnisse zu übersehen und durch Labyrinthe von Formeln ans gewünschte Ziel zu kommen.

Heute, da vieles Verworrene aus diesen „paradiesischen" Zuständen der Wissenschaft durch Euler Allgemeingut des Mathematikers geworden ist, sieht seine Leistung einfach und naheliegend, ja geradezu zwingend aus - aber eben das ist ein Zeichen für ihre Größe. Diese Bemerkungen sind nicht allein auf die Analysis oder Mathematik beschränkt, sie treffen gleicherweise auch für die Physik oder Philosophie zu.

5.6 Briefe an eine deutsche Prinzessin

Von 1760-1762 schrieb Euler im Auftrag des befreundeten Markgrafen von Brandenburg-Schwedt - beide Männer liebten die Musik - an dessen 16jährige Tochter Friederike die „Briefe an eine deutsche Prinzessin" [Lettres à une princesse d'Allemagne[6] sur divers sujets de phy-

[6] Einen Titel „Princesse d'Allemagne" [Prinzessin von Deutschland] gab es nie.

sique et de philosophie], die Physik, Philosophie, Musiktheorie, Logik, Ethik und Theologie behandeln.
In der Logik wurden beispielsweise die von Euler erdachten und heute sehr beliebten Kreisdiagramme zur Veranschaulichung logischer Sachverhalte benutzt.

Die Briefe übersteigen das Verständnis der jugendlichen Leserin, was als Hinweis gewertet werden kann, dass Euler sich von Anfang an mit Veröffentlichungsgedanken trug. 1768 erfolgte dann die erste Ausgabe der französisch geschriebenen Briefe, (Die Sprache der Gelehrten, insbesondere der deutschen, war Latein. Wenn man populär sein wollte, so schrieb man französisch.) Übersetzungen in alle Kultursprachen folgten sofort. Das Buch ist bis heute ein beispielloser Erfolg der populärwissenschaftlichen Literatur.

In dem 67. Brief unterläuft Euler ein liebenswürdiger Fehler. Er hat eben das Nivellieren erläutert und lässt als Anwendung die Prinzessin eine gerade Linie von ihren Gemächern in Berlin zu den derzeitigen in Magdeburg ziehen. Mittels des Nivellierinstruments wird man feststellen können, ob die Linie horizontal oder geneigt sei.
Euler glaubt, dass das letztere der Fall sei, denn Berlin liegt an der Spree und Magdeburg an der Elbe, und bekanntlich fließt die Spree in die Havel und diese in die Elbe, folglich müsse Berlin höher liegen als Magdeburg (auf das Flussniveau bezogen, für die Turmspitzen des Magdeburger Domes als Endpunkt räumt Euler die Möglichkeit einer waagerechten Lage ein). Ein Blick auf den von ihm selbst edierten „Geographischen Atlas“ hätte Euler von der Fragwürdigkeit seines Kettenschlusses überzeugt: Magdeburg liegt ja hinreichend weit von der Havelmündung in die Elbe entfernt, und in der Tat liegt dann Magdeburgs Elbspiegel auch etwa 10 m über dem der Spree in Berlin.

Eulers Sorglosigkeit gründet sich sicher sowohl auf den eingeschliffenen Kettenschluss als auch auf die Belanglosigkeit der Behauptung, und auf beiden Gründen fußten wohl bis heute bei allen Ausgaben der Briefe an eine Prinzessin (die Opera omnia eingeschlossen) das Fehlen einer korrigierenden Anmerkung.

Die Briefe enthalten Eulers philosophische Auffassungen, die sich bereits in seiner Rede zur Erlangung der Magisterwürde bemerkbar machten, sich in Petersburg durch die weltanschaulichen Auseinandersetzungen entwickelten und durch den Monadenstreit vertieft wurden. Philosophie und Naturwissenschaft waren zur Zeit der Aufklärung eng verbunden, wobei der Mathematik eine wichtige Rolle zukam.
Die entwickeltste Naturwissenschaft der Zeit war die Mechanik, und ihre Erfolge sowohl im theoretischen Denken als auch in der Praxis führten zu der bekannten mechanistischen Auffassung, die - nicht zuletzt infolge der Popularisierung Newtonscher Ideen durch Voltaire - als Grundhaltung im 18. Jahrhundert dominierte.

Die Welt wurde als materiell und erkennbar angesehen. Als wichtige Probleme standen die Struktur der Materie, die Existenz des leeren Raumes und die Natur der mechanischen Kräfte auf der Tagesordnung, für die zwei verschiedene Konzepte von Descartes und Newton vorgeschlagen worden waren.
Euler, der in vielem zu Descartes neigte, entwickelte eigenständige Auffassungen. Die ganze Welt ist mit Materie angefüllt. Die Körper sind aber nicht, wie bei Descartes, allein durch ihre Ausdehnung charakterisiert (Gegenbeispiel: Gespenster), sondern auch durch ihre Materialität, deren Kennzeichen Undurchdringlichkeit, Trägheit und Beweglichkeit sind. Hieraus leitete Euler mit einzigartiger Klarheit die Prinzipien der Mechanik ab, wobei er keine außerphysikalischen Begriffe (also auch keine theologischen Argumentationen) verwendete.

Zwischen den gröberen Körpern befindet sich der Äther, den man sich als „eine der Luft ähnliche flüssige Materie“ vorstellen muss.

Weil also alles voll ist; so kann sich kein Körper auch nur einen Augenblick bewegen, ohne auf andere Körper zu stoßen, durch die er durchdringen müsste, wenn er sich weiter fortbewegen und sie doch in Ruhe bleiben sollten. (78. Brief) In der Undurchdringlichkeit liegt der wahre Ursprung der Kräfte, (77. Brief)

Und hieraus folgert Euler auch im 78. Brief das Maupertuissche Prinzip der kleinsten Aktion. Zustandsänderungen können nur durch äußere Kräfte bewirkt werden, sie sind keinesfalls das Ergebnis der den Körpern innewohnenden Kräfte, wie sie die Monadenlehre oder Newtons Gravitationstheorie annimmt.
Nur Geister können innewohnende Kräfte aufweisen, denn ihr Wesen besteht in der Freiheit, auch Gott gegenüber. Gott ist es nur möglich, durch Motive auf den freien Willen einzuwirken. Daraus folgt die moralische Verantwortlichkeit des Menschen und die große Bedeutung des freien Willens. Hegel und Fichte haben solche Auffassungen in ihrer Philosophie verarbeitet.

Das Verwenden klarer Prinzipien anstelle der Allmacht Gottes hat auch auf die kritische Philosophie Kants Einfluss gehabt. Eulers Bestreben, Physik und Metaphysik klar gegeneinander abzugrenzen, findet sich in seiner Vollendung bei Kant, der das Wissen aufheben wollte, „um zum Glauben Platz zu bekommen“.
Euler sieht dort Probleme, wo seinen Zeitgenossen schon alles klar ist. Der Raum überbrückt nach Eulers Auffassung den Abgrund zwischen Subjekt und Objekt im Erkenntnisprozess. In einer Abhandlung über Raum und Zeit („Reflexion sur l'espace et le temps“) konstatierte er, dass der Raum als Behälter der Körper existiert, aber auch als abstrakter mathematischer Gegenstand.
Zunächst scheint es sich so zu verhalten, wie mit dem Baum in der Biologie. Der Begriff „Baum“ entsteht durch Abstraktion, er ist ein allgemeiner Begriff und in der Natur nicht wirklich vorhanden, denn die Gegenstände des Denkens sind Begriffe, nicht die Dinge selbst. Ein wirklicher Baum ist für das Denken eine unendliche Aufgabe, indem Merkmal für Merkmal hervorgehoben werden muss, um ihn gegen andere Gegenstände abzugrenzen.

Anders ist es mit dem Raum. Denn wenn wir von aller Materie abstrahieren, die sich in ihm befindet, so bleibt doch der Raum im Sinn der Mathematik, wie er in der Geometrie zugrunde gelegt wird. Obzwar er nicht aus der Erfahrung abgeleitet werden kann, muss ihm doch eine gewisse Realität zugesprochen werden. Hierüber schreibt Euler in der „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum“ [Theorie der Bewegung fester oder starrer Körper] im § 128 am deutlichsten (1760, gedruckt 1765):

Der Ort hängt nicht von den Körpern ab und ist auch nicht bloß ein Begriff unseres Geistes, welche Realität er aber außerhalb unseres Geistes hat, wage ich nicht zu definieren, wenn wir auch eine gewisse Realität in ihm annehmen müssen ... Mit der Zeit verhält es sich gleich.

Die Eigenschaften des Raumes gelten ebenfalls für die Körper, sonst könnte die Mathematik keine Anwendungen haben. Weil der mathematische Raum unendlich teilbar ist, müssen es auch die Körper sein. Das ist eine schwache Stelle der Eulerschen Philosophie.
Wir erwähnen aber, dass die Differentialgleichungen, die physikalische Vorgänge beschreiben, einen kontinuierlichen Raumbegriff unterstellen und nicht auf diskrete Gebilde (Atome) gegründet werden können.
Euler vertritt beim Verhältnis von Körper und Geist, zeitgemäß gesprochen Materie und Bewusstsein, moderne Ideen. Die Gewissheit der Außenwelt (objektiven Realität) ist nicht nur

das Ergebnis von Reflexionen über gehabte Erfahrungen, sondern bereits wesenhaft mit dem Wahrnehmungsvorgang selbst verknüpft. Die Außenwelt wirkt auf die Sinne ein. Die Wahrheit der Sinne entspricht der der Mathematik.

Ein Hund, wenn er mich sieht und anbellt ist gewiss, dass ich existiere, denn meine Gegenwart erregt in ihm die Idee meiner Person. Dieser Hund ist also kein Idealist. (97. Brief).

Die Wahrnehmung, verlangt Euler, soll ebenso auf Regeln wie die Logik gegründet werden. Durch die Wahrnehmung erhält die Seele Kenntnis von den Dingen außer ihr, schöpft Ideen und verbindet Urteile sowie Schlüsse, was zur Erkenntnis führt.
Bei unseren Sinneswahrnehmungen sind wir einfach nicht in der Lage, eine andere Wirklichkeit zu konstatieren.

Interessant sind auch Eulers Vorstellungen über die Seele. Das Unendliche charakterisiert nicht Geister, sondern Körper. Geistige Wesen können nicht körperlich sein, da sie eine unteilbare Einheit bilden. Die körperlose Seele ist also ohne einen gewissen Ort, hat aber über eine wunderbare Verbindung Gewalt über den Körper. (Maupertuis hatte in seiner Schrift, die Voltaire als Grundlage für seinen bissigen Akakia gedient hatte, angeregt, durch Sektionen mehr über diese Verbindung zu ermitteln.)

Der Tod ist in der Eulerschen Auffassung nichts weiter als die Auflösung dieser geheimnisvollen Verbindung. Der Ort des Einflusses der Seele auf den Körper ist an das Gehirn gebunden. Euler lokalisiert ihn mit ähnlicher Entschlossenheit wie Spinoza in der Zirbeldrüse im Corpore calloso [Gehirnbalken].
Erkenntnisse beruhen auf drei unterschiedlichen Klassen von Wahrheiten, denen jedoch gleiche Sicherheit zukommt: auf physikalischer Wahrnehmung, auf logischen Beweisen und auf historischen Überlieferungen. Kant ist hier insbesondere von Eulers Darlegung über die grundsätzliche Zuverlässigkeit der Sinne beeindruckt, die die philosophischen Hauptströmungen, den Berkeley-Humeschen Sensualismus (Sein ist Wahrnehmung, allgemeine Ideen sind Täuschung) und die Descartessche-Leibnizsche Philosophie (Geist und Materie sind verschieden, Gott vermittelt), überwindet.

Euler fordert auf dieser Basis, dass die Philosophie imstande sein müsse, die Lehre von den Körpern (Physik) zu begründen. Die materielle Welt der Körper findet eine Widerspieglung in der geistigen Welt der Ideen. Das war Euler z.B.in der theoretischen Physik über jeden Zweifel erhaben. Die allgemeinen Begriffe des Denkens beschreiben dabei das Wesen der Dinge (wie etwa eines Körpers) genau, sonst wäre kein Wissen möglich.

Individuelle Dinge sind begrifflich nicht unterscheidbar, denn das Denken hebt nur gemeinsame Merkmale hervor, subsumiert also die individuellen Gegenstände unter gebildete Begriffe wie Art, Gattung oder Klasse. Allgemeine Begriffe sind das Ergebnis der Fähigkeit zu abstrahieren, wobei die Abstraktion auf Begriffe führen kann, die keine wirklich existierenden Gegenstände mehr vorstellen. Die Idee eines Dreiecks bzw. Vierecks usw. kann beispielsweise von einem dreieckigen bzw. viereckigen Tisch abgesondert sein und - wie er 1761 schreibt - bis zum 1761-Eck führen. Entsprechend verhält es sich mit den Zahlen oder in der Physik mit dem Begriff der Wärme.

Der Ursprung der Erkenntnis liegt in der Außenwelt. „Unsere Sinne stellen nur Gegenstände vor, die in der Tat außer uns existieren.“ Wenn Euler im 96. Brief schreibt, dass die Meinung der Materialisten abgeschmackter als die der Idealisten ist, so bezieht er sich eindeutig auf den mechanistischen Materialismus, für den nur die Materie existiert, denn bereits im 97. Brief ver-

sucht er, Waffen zur Bekämpfung des Idealismus zu geben, gesteht aber sogleich, so lächerlich dessen Solipsismus auch sei, logisch könne, er nicht zu Fall gebracht werden.
Er verweist bei der Widerlegung nachdrücklich auf die gesellschaftlichen Erfordernisse. Auch gegenüber dem dogmatischen Offenbarungsglauben bewahrt sich Euler eine kritische Haltung, wenn er es lächerlich findet, „biblische Stellen anzuführen, um zu beweisen, dass die Erde stillsteht und die Sonne sich bewegt".

Eulers philosophische Haltung intendiert aber letztendlich ein Koalitionssystem von Materialismus und Idealismus: Die von metaphysischen Begriffen gereinigte Wissenschaft führt nicht zur Aufhebung dieser Begriffe, sondern weist ihnen einen gesicherten Platz jenseits von Vernunft und Wissen an, in einem geoffenbarten Reich des Glaubens („Wahrheit unserer Religion"), in das keine Vernunft-mehr gelangen kann.

An Eulers Philosophie bleibt die Erkenntnis der sozialen Rolle der Philosophie höchst bemerkenswert. Es ist Euler eine ausgemachte Erfahrung („so gewiß wie geometrische Wahrheiten"), dass die Seele von Empfindungen beständig auf das Dasein wirklicher Gegenstände außer uns schließt, und zu den Ungereimtheiten und Schrullen, die das in Zweifel stellen, können nur Philosophen fähig sein, die mit diesen seltsamen Meinungen auch noch Bewunderung erregen wollen, während folgendes ausgemacht ist:

Ohne diese Überzeugung könnte keine menschliche Gesellschaft bestehen, und wir alle, so viel unserer sind, würden uns ohne sie in die größten Widersprüche und die größten Ungereimtheiten stürzen, [117. Brief]

5.7 Das Zerwürfnis mit Friedrich II.

> In unseren Tagen ist es soweit gekommen, dass eine Regierung in Europa, die die Ermunterung der Wissenschaft im geringsten verabsäumte, binnen kurzem um ein Jahrhundert hinter ihren Nachbarn zurückstehen würde, Gute Sitten haben für die Gesellschaft mehr Wert als alle Berechnungen Newtons.
>
> Friedrich II.

In Friedrich II. und Euler standen sich zwei in Charakter, Neigung und Ansichten ungleiche Männer gegenüber. Obwohl Friedrich II. privat zwar begabter Schöngeist und überzeugter Freigeist war, stand er als König in der Tradition des Adels und verfolgte als begabter Feldherr Preußens großmachtpolitische Pläne. Von einer ererbten, qualvollen Stoffwechselkrankheit gepeinigt, versuchte der König sein zwiespältiges, sensibles Wesen hinter einem kalt beherrschten Äußeren zu verbergen.

Aber beißender Spott bis hin zur Menschenverachtung brach, selbst im Umgang mit „Freunden", ständig hervor. Seine Untertanen, nicht minder auch der Schweizer Euler, waren ihm letztendlich nur Diener, von denen er absoluten Gehorsam verlangte.
Auf der anderen Seite stand der bürgerliche Wissenschaftler Euler mit dem Schweizer Freiheitsbewusstsein, menschenfreundlich, gesellig und gütig, fest im christlichen Glauben verwurzelt.

Die Gegensätzlichkeit dieses für das 18. Jahrhundert markanten Paares offenbart sich bereits in Friedrichs schwankender Haltung zur Mathematik, die aus seiner Unsicherheit gegenüber der ihm unverständlichen neuen Analysis resultierte.
Von Jugend an bis zu seinen letzten Tagen war Friedrich mit kindlichem Eifer bemüht, alle ihm kompetent erscheinenden Wissenschaftler über den Wert der Mathematik zu befragen. Auch Euler musste darüber dem König eine Abhandlung liefern, tat es allerdings in Latein,

das Friedrich nicht beherrschte. Euler wurde von Friedrich in höchsten Tönen als Zierde seiner Akademie gepriesen, um dann von Friedrich mit gehässiger Befriedigung beim kleinsten Versehen die Nichtigkeit („Vanite des vanites!“) der Mathematik entgegengedonnert zu erhalten.

Zur Entwicklung Preußens bedurfte der König auch der Mathematik, und er schätzte ihren praktischen Wert, aber es war ihm stets ein Triumph, wenn er von Irrtümern und Versehen in der Theorie erfuhr.
Zu Euler gewann der König kein persönliches Verhältnis, da ihm dieser im Gegensatz zu Maupertuis oder d'Alembert kein homme d'esprit [Mann von Geist] war. Das Verhalten des Königs war hier subjektiv und spiegelte keine Vorbehalte des Adels gegen Euler wider, denn wie kaum ein Gelehrter seiner Zeit verkehrte Euler in Berlin, Warschau und Petersburg mit fürstlichen Personen.

Selbst Eulers Namen ließ der König Ellers (Eller hieß sein Leibarzt) und Eilers schreiben (deutsche, aber auch französische Orthographie waren nicht Friedrichs Stärke) - Ranküne oder zeitbedingte Nachlässigkeit? Friedrich II., den es nach der täglichen Arbeit (der er sich nicht entzog) nach geistreichen Gesprächen mit weltmännischen Philosophen (Tafelrunde in Sanssouci) und musikalischen Abenden verlangte, sah in Euler keinen Partner, denn dieser zeigte ja bereits für des Königs Lieblingskind, die Poesie, wenig Interesse.
Auch in der Musik fanden beide keinen gemeinsamen Nenner. Trotz beachtlicher kompositorischer und solistischer Begabung (1 Sinfonie, 4 Flötenkonzerte und 120 Flötensonaten) war Friedrich nicht frei von Einseitigkeiten des Geschmacks. Gluck beispielsweise blieb ihm zeitlebens fremd. Eulers Wettstreit mit dem Hofkapellmeister Graun, bei dem Euler nach „mathematischen Prinzipien“ ein Menuett komponieren wollte, fand die verächtliche Bemerkung Friedrichs:

Ein gewisser Geometer, der beim Rechnen ein Auge verloren hat, nahm sich heraus, durch a plus b ein Menuett zu komponieren. Wenn man ihn vor den Richterstuhl Apollos gebracht hätte, so wäre der arme Geometer Gefahr, gelaufen, lebend geschunden zu werden wie Marsyas (Flötenspieler. der griechischen Sage, der von Apollo im Wettstreit besiegt und getötet wurde - R, T.). [32, S. 175]

Spätere Berichte, in denen die Eulersche Musik als „unsangbar steif, ohne die mindeste Anmuth; man war froh, als er die letzte Note anschlug“ beschrieben wird, dürften Friedrichs Meinung zur Vorlage haben, denn das erscheint bei Eulers Musikverständnis doch etwas fragwürdig.
Es stand somit für Friedrich II. von vornherein fest - und das ist aus seiner Sicht konsequent -, dass Euler, der in seiner Verwandtschaft sogar zwei Kammacher hatte, nicht der geeignete Mann sei, die Akademie als Präsident zu repräsentieren; selbst wenn die Tatsache, einen Wissenschaftler, wenn auch von Adel, an die Spitze der Akademie zu stellen, die Berliner Akademie von entsprechenden Einrichtungen unterschied.
Der biedere Euler war aber auch in Berlin den eleganten Franzosen und dem glatten höfischen Parkett nicht gewachsen. Sein Landsmann A. von Haller folgte, ähnliche Erfahrungen befürchtend, einem Ruf in die preußische Residenz nicht.

Als berühmter Mathematiker wurde jedoch Euler in vielen mathematischen und technischen Fragen gern vom König konsultiert, etwa wenn es sich um Dammbauten in gerade eingegliederten ostfriesischen Gebieten, die Gradierung der Sole im Salzbergwerk von Schönebeck, die Trockenlegung des Oderbruchs und den Bau des Finow-Kanals, die Springbrunnen in Sanssouci, Personalfragen der Universität Halle und der Akademie, Witwenkassen oder Lotterien handelte.

Zum sich deutlich gestört zeigenden Verhältnis Friedrichs zu Euler bemerkt E. A. Fellmann:

> Es ist peinlich, ja erschütternd, im Briefwechsel, in Billets und Gedichten Friedrichs nachlesen zu müssen, mit welchem Unverstand dieser aufgeklärteste aller Despoten sich über die mathematischen Wissenschaften (sofern sie nicht französischer Provenienz sind, versteht sich) auslässt und sich offenbar geistreich vorkommt, wenn er das körperliche Gebrechen des weltgrößten Mathematikers seiner Zeit geschmacklos bewitzelt („... einen einäugigen Geometer durch einen zweiäugigen zu ersetzen“). [22, S. 502]

Trotzdem war Euler anfänglich (und nicht nur er!) ganz Feuer und Flamme für Friedrich. Obwohl der König den zugereisten Euler vor eine praktisch nicht vorhandene Akademie stellte, war dieser stolz, dass Friedrich II. während des ersten Schlesischen Krieges Zeit aufgebracht hatte, ihn wenigstens brieflich zu begrüßen.
Von der Anrede „mon professeur“ war Euler geradezu entzückt und nahm es in Kauf, dass die Schwierigkeiten vorläufig in Berlin im Vergleich zu den sich bessernden Petersburger Verhältnissen keinesfalls geringer waren, als sie dort gewesen wären. Eulers Kopf war voller Ideen, und er war ja nach Berlin gekommen, um zu arbeiten und eine Akademie wieder aufzubauen.
Aber der König steckte mitten im Kriege, den er als noch nicht entschieden erkannte, und wies Eulers wohlgemeinten Vorschläge schroff ab bzw. ließ sie unbeachtet.

24 Bildnis Eulers von E. Handmann aus der Berliner Zeit (etwa um 1753 bis 1756)

So kamen Euler nach ersten Differenzen in den Jahren 1742/1743 doch Zweifel, ob sein Weggang von Petersburg nicht übereilt gewesen war. Trotzdem verbesserte er seine französischen Sprachkenntnisse, um den Gepflogenheiten der preußischen(!) Akademie entsprechen zu können (in Berlin veröffentlichte er französisch und in Petersburg lateinisch), kümmerte sich um die Neugestaltung des von der Akademie herausgegebenen Kalenders, der eine wichtige finanzielle Grundlage der Akademie bildete, bemühte sich 1746 um Siegesmedaillen für den ersten Schlesischen Krieg, dechiffrierte diplomatische Depeschen und zeigte eine große Anteilnahme am Kriegsgeschehen.

Die Akademiegründung ging nur langsam voran, denn der König war durch Krieg beansprucht und sah auch keinen möglichen Präsidenten, wiewohl sich auch Euler deutlich dafür anbot.

So beschwerte sich Euler beispielsweise brieflich 1744 bei Goldbach über den starken Einfluss der Franzosen, der ihrem geistigen Gewicht nicht entspräche. Daniel Bernoulli, dem Euler auch seine Bedenken vorgebracht hatte, schrieb, als. Maupertuis nach dem entscheidenden Sieg Friedrichs. 1745 von Hohenfriedberg sich entschloss, in Berlin zu präsidieren:

"Dieses macht mich hoffen, dass es noch gut mit der Akademie gehen werde, weil der Herr Maupertuis gar wohl an dem ganzen Hof gelitten ist und sich gewiss eine Ehre darauf machen wird, die Akademie emporzuschwingen.

Eulers Einfluss auf Maupertuis, mit dem er bereits seit 1740 korrespondierte, war groß, und er suchte diesen Einfluss für die Entwicklung der Akademie geltend zu machen, insonderheit ihre weltanschauliche Position zu bestimmen, so dass der Direktor der mathematischen Klasse gewissermaßen der heimliche Präsident wurde.
Euler war immer noch bemüht, Friedrich zu dienen. Beispielsweise überreichte er ihm 1753 Pfirsiche aus dem Akademiegarten, schickte 1759 ein neu konstruiertes Fernrohr ins Feldlager oder als Höhepunkt seiner „patriotischen“ Gesinnung bewog er den jüngsten Sohn, 1759 in Friedrichs Armee einzutreten, was der Landesherr gnädigst quittierte. Noch zu Beginn des Siebenjährigen Krieges schrieb er nach Petersburg:

Allein wir leben hier in guter Ruhe und lachen über alle uns angedrohten Gefahren.

Die Wende in Eulers Einstellung setzte nach Maupertuis' Abreise aus Berlin, mit seinem Tod 1759 und den schließlich drückenden Kriegslasten um 1760 ein.
Euler war, nicht ohne Stolz, seit 1753 amtierender Präsident, indem er - ohne im geringsten in seiner wissenschaftlichen Produktivität zu erlahmen - die Amtsgeschäfte des abwesenden Präsidenten in den schwierigsten Kriegsjahren führte, so dass dank seiner Leitung die Arbeit der Akademie nie zum Erliegen kam, aber sein Einfluss auf die Gestaltung der Akademie schwand, denn die Rückendeckung durch den beim König einflussreichen Maupertuis fehlte.

Der durch die Leitung der Akademie in den schweren Kriegsjahren verdiente Euler konnte sich wohl mit Recht Hoffnung auf die Präsidentschaft machen, er war aber - wie bereits bemerkt - nicht der Mann, sie im Geiste Friedrichs zu leiten, und so lud 1763 der König nicht nur unmittelbar nach dem Ende des Krieges mit Frankreich d'Alembert ein, also einen ehemaligen Kriegsgegner, sondern bot ihm sogar die Präsidentschaft an, die d'Alembert allerdings ablehnte. Man kann sich leicht vorstellen, wie die Zeit um d'Alemberts Besuch den auf die Sechzig zugehenden Euler belastet haben muss, denn er war ja zweifelsohne der bedeutendere Mathematiker, ganz zu schweigen von seinen Verdiensten um die Akademie. Euler wäre sparsam und gewissenhaft gewesen, bescheinigte ihm A. Harnack, der Verfasser der umfangreichsten Akademiegeschichte.

Der König war Euler bei seinen persönlichen Wünschen nie entgegengekommen: Wenn er den zugesagten Übersiedlungsbeitrag erbat, einen Neffen seiner Frau vom Militärdienst befreien lassen wollte, seinen aus Petersburg mitgekommenen Bruder Heinrich am Hofe unterzubringen wünschte, für seinen Sohn Johann Albrecht an der Ritterakademie um eine Anstellung bat, die dieser angeblich wegen seiner Jugend (29 Jahre) nicht erhielt und die dann an einen 18jährigen vergeben wurde, oder für seine Tochter eine Heiratserlaubnis mit einem Kornett nachsuchte usw.

Welche Gunstbezeigungen hatte nicht Maupertuis erhalten! Dabei hatte Euler in Berlin überdurchschnittliche Energien für den Aufbau der Akademie aufgebracht: Er war Direktor der mathematischen Klasse, häufig Mitglied von Kommissionen, eifrig um die Finanzierung der

Akademie bemüht sowie mitverantwortlich für die Bibliothek und die Veröffentlichungen der Akademie, zuständig für die Herausgabe von Kalendern und Karten und leitete schließlich die Sternwarte und verwaltete den botanischen Garten. Euler war folglich zutiefst verletzt von dem Unverständnis des Königs.
Über d'Alemberts - natürlich unbeachteten - Vorschlag, Euler zum Präsidenten zu berufen, schreibt der Sohn Johann Albrecht mit Verbitterung:

... da mein Vater aber das Unglück hat, ein redlicher Teutscher zu sein, so hat der König nichts davon hören wollen. [111, S. 73]

Obwohl der König keinen Nachfolger für Maupertuis fand, erhielt Euler den Posten nicht. Euler leitete de facto, aber unter der über einen Mittelsmann erfolgenden Oberaufsicht des Königs die Akademie, und d'Alembert beriet auch nach seiner Abreise als graue Eminenz aus Paris den König.
Der begründete Anspruch Eulers auf die Präsidentschaft wurde abgewiesen, und trotz der zusätzlichen Mehrarbeit Eulers, der schrieb, er habe „die ganze Administration der Akademie auf dem Hals", änderten sich Eulers Bezüge nicht. Als Akademiepräsident hätte er etwa das doppelte Gehalt gehabt.

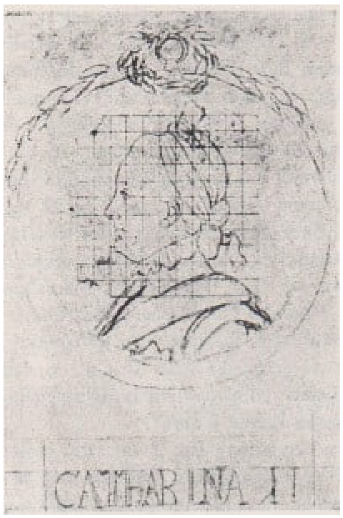
Die geistigen Auseinandersetzungen hatten sich inzwischen zugunsten des Wolffschen Lagers verschoben, der König selbst - von seinen prominenten Gästen verlassen - liebäugelte mit radikalen französischen Aufklärern, so dass für den frommen Euler die Situation insgesamt unerträglich wurde. Euler war gläubiger Christ, der allabendlich eine Hausandacht abhielt und aktiv in hohen Kirchenämtern wirkte (Ältester der Friedrichstadt-Gemeinde, Consistoriumsmitglied der französisch-reformierten Gemeinde in Berlin, Leitungsmitglied der Maison de Charite), der selbst Vorschläge zur Reform des Gottesdienstes machte, um die rückläufigen Besucherzahlen zu ändern, oder die Katechisierung dem Vorbild seines Vaters anpassen wollte.

Für seine kirchliche Offenbarungsgläubigkeit und Gesinnung stand Euler beständig ein. Seine Schriften gegen die Freidenker, seine Angriffe gegen sie, in denen die Rotte der Freigeister („diese Elenden", schrieb er) etwas zu hören bekam, wie in der Schrift von 1747 „Rettung der Göttlichen Offenbarung gegen die Freigeister", zeigten zwar persönlichen Mut, das in der unmittelbaren Nachbarschaft des regierenden Freigeistes zu tun, wirkten aber auf die Dauer zänkisch.
Mit Leuten der Provenienz de Lamettries, des „königlichen Hofatheisten" (so G. E. Lessing), oder Vertretern der deutschen Popularphilosophie Wolffscher Prägung an einem Tisch zu sitzen, ja sich ihnen unterordnen zu sollen, ging verständlicherweise über Eulers Kräfte, aber auch über seinen Willen.

Er begann, nachweislich bereits 1762, an seinen Weggang zu denken, da er die Liegenschaften zu verkaufen suchte. Meinungsverschiedenheiten in finanziellen Fragen - Euler fürchtet unbegründet einen Rückgang der Kalendereinnahmen der Akademie bei einer erforderlichen Reform und damit um seine eigenen Bezüge, während Friedrich II. ihn, den Erfahrenen, in dieser Angelegenheit allein nicht mehr für kompetent hielt und Rat bei einer Kommission suchte (der - allerdings bevormundet - Euler wieder angehörte) - das brachte das Fass zum Überlaufen.
Euler, der die Verbindung nach Petersburg sogar während der kriegerischen Auseinandersetzungen mit Russland nie abgebrochen hatte (selbst wenn er es Maupertuis gegenüber erklärte), kostete es keine Mühe, seine Absicht, anderswo Fuß zu fassen, zu verwirklichen - wenn er es auch in seinem Alter mit Zögern tat. Zeitweilig hatte er auch Göttingen erwogen, möglicherweise nur, um schneller eine Zusage aus Petersburg zu erhalten.

So reichte er am 2.2.1766 sein erstes Abschiedsgesuch ein, dem noch zwei weitere folgen mussten, um Friedrich, der nun merkte, was er an Euler verlöre, zur Zustimmung zu bewegen. Friedrich II. versuchte anfangs, die Sache herabzuspielen, lenkte sogar ein, hatte aber beim verbitterten Euler keinen Erfolg mehr.
Danach kam im „aufgeklärten", aber verärgerten König der Despot zum Vorschein, der den Schweizer Euler über ein Vierteljahr im Ungewissen ließ. Mit dem lakonischen Satz „Je vous permets, sur votre lettre du 30 d'avril dernier, de quitter pour aller en Russie'" [Ich gestatte Ihnen auf Grund Ihres Briefes vom 30. April die Ausreise nach Russland] vom 2.5. 1766, ohne jeden Dank für das unvergleichliche Wirken des berühmtesten Gelehrten seiner Zeit an der Berliner Akademie, entlässt Friedrich II. Euler - ein beschämender Vorgang!

Das Zerwürfnis mit Friedrich II. hatte sich auf Eulers wissenschaftliche Tätigkeit in der Akademie nicht ausgewirkt, wenn man vom demonstrativen Niederlegen administrativer Ämter (Direktorenstelle u. a.) absieht. Sein früherer Diensteifer gegenüber dem König war jedoch gänzlich erloschen.
Als Euler 1765 einen geeigneten Oberbibliothekar für die königliche Bibliothek vorschlagen sollte, nannte er zwar sofort einen Kandidaten, übersah jedoch, dass er durch oberflächliche Recherchen einer Verwechslung aufgesessen war. Später bemerkte Euler seinen Irrtum, es ist aber erstaunlich, dass er ihn nicht zugab, sondern es - nach Morgensternscher Art - tatsächlich fertigbrachte, einem Double des Berliner Professors Wegelin ins Dasein zu verhelfen, und als die Berufung konkretere Formen anzunehmen drohte, ihn flugs in seiner Heimat avancieren und damit an einer Berliner Tätigkeit uninteressiert sein zu lassen.
Die Sache kam allerdings heraus, erledigte sich aber durch Eulers Fortgang.



25 Friedrich II., nach dem Siebenjährigen Krieg. Zeichnung von D. Chodowiecki. Unterschrift Friedrichs aus der Zeit vor dem Siebenjährigen Krieg.
26 Katharina II. Zeichnung von D. Chodowiecki

Wie sehr das Ansehen der Berliner Akademie in Europa durch Eulers Wirken gestiegen war, zeigt allein die Tatsache, dass es mit d'Alemberts Hilfe Friedrich II. gelang, unmittelbar nach Eulers Weggang den einzigen gleichwertigen mathematischen Ersatz, Lagrange aus Turin, als Nachfolger Eulers zu gewinnen.
Die Berufung Lagranges war von den nicht unbescheidenen Worten begleitet, dass der größte König den größten Mathematiker an seiner Seite benötige. (Umgekehrt soll andererseits der naiv-selbstbewusste J. H. Lambert vor seiner Aufnahme in die Berliner Akademie erklärt haben, wenn Friedrich diese nicht bestätige, so wäre das ein ewiger Makel in seiner Geschichte.)

Lagrange blieb aber in seinen administrativen Fähigkeiten hinter dem praktischen Euler zurück. Die Blütezeit der Mathematik an der Berliner Akademie hielt jedoch weiter an, und die ersten Jahrzehnte gehören zu den besten der Akademie.
Abschließend wollen wir an Lessings Erfahrung mit Friedrich II. erinnern, nach der der König keinen bezahle, der unabhängig sein wolle.

6 Petersburg 1766-1783

Dadurch ist unfehlbar der Grundstein zur Wiederaufrichtung unseres so verfallenen Musensitzes gelegt worden.
J. Stählin an Euler zur Berufung nach Petersburg (1766)

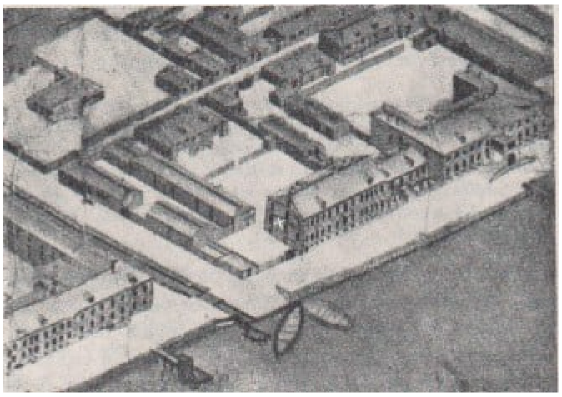
6.1 Rückkehr nach Petersburg

Bereits einen Monat nach dem Entlassungsschreiben Friedrichs II., am 1. Juni 1766, verließ der fast sechzigjährige Euler mit seiner 18köpfigen Familie (darunter vier Dienstboten) Berlin, in dessen Akademie einerseits sein Wirken den Höhepunkt erreicht hatte und deren Ansehen andererseits maßgeblich durch seine Tätigkeit gefestigt worden war.

Sein jüngster Sohn Christophor wurde von Friedrich II. noch zurückgehalten, ja sogar wegen Fluchtverdacht bewacht. Er durfte erst auf die Intervention Katharinas II. hin dem Vater nachreisen. Eulers Verbitterung, mit der er von Berlin schied, mag während seiner Reise durch die ehrenvollen Gunstbezeigungen in der russischen Einflusssphäre gemildert worden sein.
In Warschau war er Gast des Königs Stanislaus II. Poniatowski, in Mitau des Herzogs von Curland (des Günstlings Birons), und in Riga gewährte man Euler freie Wohnung, Equipage, Aufwartung und zwei Grenadiere als Wache, so dass der Sohn Johann Albrecht notierte, „allso dass wir billig zweiffelten, ob man uns nicht zum besten halten wollte“.

Am 28. Juli 1766 traf Euler in Petersburg ein. Zwar fand Euler an der Stätte seines ersten Wirkens keine alten Freunde und Bekannten mehr vor, aber es wurde ihm ein triumphaler Empfang bereitet. Fast alle Forderungen, die er geltend gemacht hatte, waren ihm bewilligt worden: die Vizepräsidentschaft an der Akademie erhielt er nicht, jedoch 3000 Rubel Gehalt jährlich bei freier Wohnung nebst Beheizung, keine militärischen Einquartierungen (wie es vorher in Petersburg der Fall gewesen war), Zollfreiheit für sein Gepäck, Erstattung der Reisekosten sowie Stellungen für seine drei Söhne.

Die Zarin Katharina II. empfing ihn mit seinen Söhnen sofort und zeichnete ihn in jeder Hinsicht aus. Seit 1762 war Katharina II. (eine Prinzessin von Anhalt-Zerbst) Zarin, die ihren Gemahl Peter III, ein halbes Jahr nach dessen Thronbesteigung hatte beseitigen lassen, woran der spätere Akademiedirektor Graf Orlow beteiligt gewesen war.
Fürs erste erhielt Euler 10800 Rubel zum Kauf eines Hauses und des benötigten Mobiliars geschenkt, ein Koch der Zarin stand ihm in der Übergangszeit zur Verfügung. Er erwarb ein geräumiges zweistöckiges Haus in der Nähe der Akademie am Newa-Kai, von dem eine Abbildung aus dem Jahr 1765/66 erhalten ist (Abb. 27).



27 Perspektivische Zeichnung der Wassili-Insel um 1766 mit Eulers Haus (X)

Gegenwärtig ist das Haus die Nr. 15 des Leutnant-Schmidt-Kai, wobei jedoch 1851 eine Etage aufgestockt und ein Anbau vorgenommen worden sind. Der Etat der Petersburger Akademie von 60000 Rubel betrug etwa das Dreifache des Etats der Berliner Akademie von 13000 Talern, mit denen Euler bisher zu wirtschaften gehabt hatte.
Er hatte in zahlreichen Audienzen Gelegenheit, mit der Zarin selbst über die Reorganisation der Akademie zu sprechen. Euler musste fühlen, dass er hier seiner Bedeutung nach geschätzt wurde und in der Akademie die führende Rolle spielen sollte. Das Ansehen seiner Familie war dem einheimischen Erbadel gleichgestellt.

Euler, der die Bedeutung des von Peter I. eingeführten Amtsadels mit 14 Rangstufen kannte und deshalb für sich einen Tschin erbat, wurde dieser Wunsch versagt, übrigens mit der Bemerkung, er würde dadurch mit zu vielen Leuten auf eine Stufe gehoben.
Die Sorge des alternden Eulers um die wirtschaftliche Zukunft seiner Familie war von ihm genommen worden: Seine Frau erhielt eine Witwenpension zugesichert, und die Söhne wurden in einträglichen Ämtern untergebracht. Johann Albrecht etwa wurde Professor für Experimentalphysik und später ständiger Sekretär der Akademie.

Eulers Rückkehr war von schweren Schicksalsschlägen begleitet, der geringste darunter war wohl der teilweise Verlust seines Reisegepäcks. Friedrich II. widmete diesem Ereignis folgende schadenfrohen Zeilen in einem Brief an d'Alembert, die indirekt erkennen lassen, wie verärgert der Monarch über Eulers Weggang war:

Herr Euler, der den großen und den kleinen Bären bis zur Tollheit liebt, ist dem Norden etwas näher gerückt, um sie mehr nach Wunsch beobachten zu können. Ein Schiff, das seine x, z und kk trug, hat Schiffbruch erlitten; alles ist verloren, und das ist schade, weil er damit sechs Foliobände Abhandlungen hätte anfüllen können, von Anfang bis zu Ende chiffriert.
Europa wird vermutlich des angenehmen Vergnügens beraubt sein, das ihm diese Lektüre bereitet hätte. [33, S. 18]

Kaum war Euler in seinem neuen Haus am Newa-Kai heimisch geworden, als ihn nach einer kurzen Krankheit ein Altersstar am gesunden linken Auge fast vollständig erblinden ließ. Euler sah die Erblindung kommen, aber sein Glaube gab ihm Gelassenheit. Denn ihm war es eine Gewissheit, dass niemand die Schuld auf äußere Umstände schieben könne, da alles so geordnet sei, dass es ihm zum besten dienen müsse.
Obwohl die langwierigen Rechnungen oder die zahlreichen Hilfslinien in den verwickelten Figuren jener Zeit die weitere Tätigkeit eines jeden Mathematikers ernsthaft in Frage gestellt hätten, schien sich Eulers ganzes Genie erst jetzt zu offenbaren: Die Hälfte seiner Arbeiten entstand in der Zeit der Blindheit!
(Juschkewitsch weist auf die Kürze und spezielle Thematik der späteren Veröffentlichungen hin. Die 56 Arbeiten des Jahres 1776 füllen die gleiche Seitenzahl, nämlich 1000, wie die 19 Arbeiten von 1751.)

Gestützt auf sein phänomenales Gedächtnis und seine unglaubliche Einbildungskraft arbeitete Euler weiter, wobei er einem Gehilfen diktierte.
Bald standen dem Meister eine Handvoll tüchtiger, junger Leute zur Verfügung. 1773 war auf Eulers Bitte ein Schüler Daniel Bernoullis, der Basler Nikolaus Fuß, in Petersburg eingetroffen, der Euler eine ständige und. äußerst. wertvolle Hilfskraft wurde.

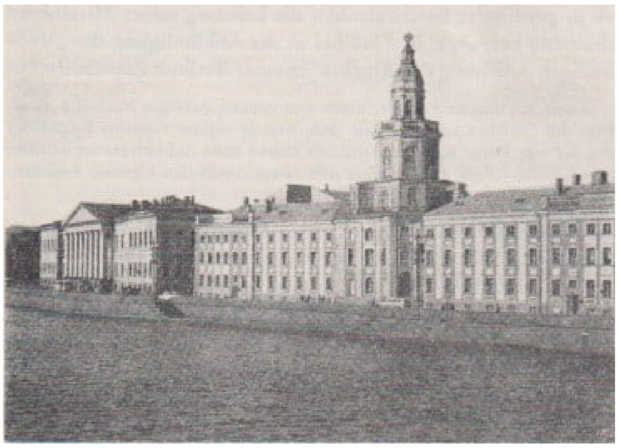
Eulers Arbeitstag begann mit dem Verlesen der Korrespondenzen, Zeitungen und mathematischen Arbeiten. Danach wurde ein Problem in Angriff genommen, und der Gehilfe notierte Eulers Ausführungen. Am nächsten Tag brachte der Gehilfe einen Entwurf mit, den Euler bis zur Druckreife ausfeilte. So wirkte Euler rastlos weiter, und seine Blindheit vermehrte seinen

Ruhm um ein weiteres.
Die imposante Mondtheorie „Theoria motus lunae Eulers von 775 Seiten wurde mit Hilfe des Sohnes Johann Albrecht, Kraffts und Lexells geschaffen, sie werden alle am Titelblatt aufgeführt. W. L. Krafft unterstützte Euler bei der Niederschrift der „Dioptrica“, N. Fuß und M. E. Golowin, ein Neffe Lomonossows, halfen bei 250 bzw. 70 Arbeiten. Für Fuß hat das bedeutet, etwa alle 12 Tage eine Arbeit zu redigieren.
Euler hob in gewohnter Bescheidenheit die Leistung seiner Mitarbeiter gebührend hervor, z. B. 1768 bei in der Ankündigung der „Vollständigen Anleitung zur Algebra“ in einer Berliner Zeitschrift:

... nehme ich mir die Freiheit, Ihnen von meinen Arbeiten Nachricht zu erteilen, mit welchen ich mich seit dem Verlust meines Gesichts beschäftigt habe, der von Herrn Krafft und meinem älteren Sohn dadurch ersetzt worden, dass sie meine Ideen ausgearbeitet und öfters durch ihre eigenen Ansichten weiter ausgeführt haben. [51, S. 75]

Eine zweite Katastrophe hätte Eulers Leben beinahe ein Ende gesetzt. Im Mai 1771 suchte auf der Wassili-Insel das Gebiet zwischen der 7. und 21. Linie eine Feuersbrunst heim, der etwa 500 Häuser zum Opfer fielen, darunter war auch Eulers. In der ausbrechenden Verwirrung wäre der hilflose Blinde umgekommen, wenn ihn nicht ein beherzter Basler Handwerker namens Grimm aus den Flammen geholt hätte.
So hatten sich die alten Befürchtungen von Eulers Frau noch erfüllt. Zwar halfen 6000 Rubel der Zarin, den Verlust zu mindern, jedoch viele Manuskripte, darunter die Pariser Preisschrift über die Mondtheorie, waren verbrannt und mussten nochmals angefertigt werden; aber am schlimmsten war wohl, dass der Blinde sich mühevoll in einer neuen Wohnung zurechtfinden musste.

Im gleichen Jahr erwuchs Euler eine große Hoffnung, als der seinerzeit berühmteste Staroperateur, Freiherr von Wenzel, nach Petersburg kam und Euler sich einer Operation unterziehen konnte. Diese war zwar kurz, aber trotzdem sehr schmerzhaft und brachte Euler vorübergehend die Sehkraft wieder.
Da man sich aber offenbar nicht genügend vorgesehen hatte, verlor er infolge mangelnder Asepsis wenige Tage später endgültig das Augenlicht.



28 Akademiegebäude (Kunstkammer), in dem Euler arbeitete

Auch Eulers Familie blieb vom Alter nicht verschont. 1773 starb nach 40jähriger Ehe Eulers Frau.
Da Euler ohne Pflege und Fürsorge nicht existieren konnte, heiratete er 1776 die Halbschwester der Verstorbenen, Salome Gsell. Schließlich erlebte Euler noch 1780 und 1781 den Tod seiner

beiden Töchter. Dafür umgab ihn eine wachsende Schar von Kindeskindern, insgesamt 26 Enkel.

Nach diesen schmerzlichen und tiefgehenden Veränderungen seines Lebens zeigte sich der alte Euler geistig ungebrochen, auch sein fröhliches Wesen verließ ihn nicht.
Dank Eulers versöhnlichem Charakter waren - wie früher in Berlin die Beziehungen nach Petersburg - nun die Beziehungen nach Berlin nicht abgebrochen worden. Euler hatte Kontakte zu den Berliner Kollegen. Lagrange drückte er seine Genugtuung aus, als Nachfolger den erhabensten Mathematiker des Jahrhunderts zu haben.

Aber auch mit seinem früheren Dienstherren knüpfte Euler wieder Beziehungen an und schlug 1776 Friedrich II. als erstes auswärtiges Ehrenmitglied der Petersburger Akademie vor, nachdem Katharina II. 1767 bereits Ehrenmitglied der Berliner Akademie geworden war.
Euler schickte Friedrich II. 1776 auch zwei mathematische Arbeiten, da dessen Witwenpensionskasse auf falschen Grundlagen beruhte.

Viele Reisende suchten Euler auf, unter ihnen auch 1770 der Bruder Friedrichs II., Prinz Heinrich, der in Petersburg mit der Zarin in geheimer Mission über die erste Teilung Polens konferierte. Der liebste Besucher war Euler jedoch ein Enkel Johann Bernoullis, der bereits in Berlin sein Kollege gewesen war und ihn 1778 aufsuchte. Johann II Bernoulli fand Euler bei guter Gesundheit, wenn auch mit etwas geschwächtem Gehör vor.
Er sah auch die Magnete und Eisenstangen, mit denen Euler aus Muße und wohl auch, um sich Bewegung zu verschaffen, experimentierte. Folgenden Bericht hat er überliefert:

> Mit seiner Gesundheit stehet es noch ganz gut, welches er einer sehr mäßigen und regulären Lebensart zu danken hat; und sein schon lange größtentheils und auf eine Zeit ganz und gar verlorenes Gesicht kann er doch jetzt noch besser gebrauchen, als viele sich einbilden: Personen kann er zwar nicht an ihrer Gesichtsbildung erkennen, auch weder Schwarz auf Weiß lesen, noch mit der Feder auf Papier schreiben; hingegen schreibt er mit Kreide sehr deutlich und ziemlich in gewöhnlicher Größe seine mathematischen Rechnungen auf eine schwarze Tafel; diese werden so fort von einem seiner Adjuncten, dem Herrn Fuß und Golowin (am öftesten von dem ersten) in ein großes Buch abgeschrieben und aus diesen Materialien hernach unter seiner Anleitung Abhandlungen aufgesetzt. [34, S. 274]

Gelegentlich lief Euler dozierend um die Tafel herum und fuhr mit der Hand am Rand der Tafel entlang, wodurch diese mit der Zeit glänzend glatt wurde.

6.2 Ein erblindetes Genie

Die Grundlinien der Entwicklung Eulers zeichneten sich bereits in Basel und in den ersten Petersburger Jahren ab. Sein Wirken in der Berliner Zeit kann als glanzvolles und erfolgreiches Fortschreiten auf der vorgezeichneten Bahn angesehen werden und das Petersburger Schaffen der zweiten Periode als eine „Nachlese“ - wobei aber nicht außer acht gelassen werden darf, dass einer der Größten der Menschheit sein Lebenswerk vollendete.

Die Nachlese hebt bereits mit seinem ersten großen Werk „Vollständige Anleitung zur Algebra“ aus der Zeit der Erblindung an, das vermutlich in Berlin begonnen wurde. In ihm findet sich auch eine Definition der Algebra „als die Wissenschaft, ... welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet“, die also als zentrales algebraisches Problem das Auflösen von Gleichungen begreift.
Euler diktierte das Werk einem ungebildeten Schneidergesellen in der Absicht, die Verständlichkeit unmittelbar prüfen zu können. Das pädagogische Experiment gelang nach den Angaben

des Sohnes Johann Albrecht, denn der Schneider konnte ohne fremde Hilfe schwere algebraische Aufgaben lösen. Das Buch schreitet in kleinen Schritten bis zu schwierigen Problemen voran, als Beispiele mögen eine Variante der Summation arithmetischer Reihen (mit denen Gauß als Kind auf sich aufmerksam machte).

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlaguhr in 12 Stunden macht?

oder die tieferliegende Bestätigung der Fermatschen Vermutung für $n = 3$ mittels komplexer Zahlen der Form $a + b\sqrt{-3}$

Es ist nicht möglich, zwei Cuben zu finden, deren Summe oder deren Differenz ein Cubus wäre

dienen. Das Buch wurde in alle Kultursprachen übersetzt, und Lagrange versah es mit wertvollen Zusätzen., Es ziert sogar als mathematischer Band Reclams Universal-Bibliothek.
Die Dioptrik von 1768 wurde schon erwähnt. Es ist fast unvorstellbar, dass dieses Lehrbuch der geometrischen Optik von einem Blinden verfasst wurde! Da die „Scientia navalis“ für die Schiffsbauer zu mathematisch war, ließ Euler ihr 1773 eine auf die Fachleute zugeschnittene Darstellung folgen („Theorie complette de la construction et de la manceuvre des vaisseaux“ [Vollständige Theorie der Konstruktion und Steuerung von Schiffen]), die günstigste Aufnahme fand: Übersetzungen ins Italienische, Englische und Russische sowie Lehrbuch an Frankreichs Marineschulen (was Ludwig XVI. mit 1000 Rubel und Katharina II. gleich mit 2000 Rubel honorierte). Für die Arbeiten zum Schiffsbau und der Navigation erhielt Euler sechs Pariser Akademiepreise (wenn wir den seines Sohnes Johann Albrecht mitzählen).

Auf seine erste Mondtheorie von 1744, die sich aus berechtigten Zweifeln bei der Beschreibung des Sonnensystems durch Newtons Gravitationstheorie infolge der Abweichung von Theorie und Beobachtung bis zur Korrektur durch Clairaut ergab, ließ Euler 1770-1772 eine durchsichtigere zweite Theorie folgen. Im Überschwang der Entdeckerfreude verbreitete er sogar die Nachricht, das diffizile Dreikörperproblem vollständig gelöst zu haben, was sich infolge der Unlösbarkeit als Irrtum herausstellen musste, Immerhin erhielt er von der Pariser Akademie für diese Arbeit zwei Preise, schlechthin für Himmelsmechanik und kosmische Physik fünf Preise.

Die mathematischen Arbeiten des alten Euler konzentrieren sich deutlich auf die Zahlentheorie. Hier geriet der erblindete Euler in einen Wettstreit mit einem anderen großen Zahlentheoretiker des 18. Jahrhunderts, den um 29 Jahre jüngeren Lagrange. Wenn Eulers Beiträge zur Grundlegung der Zahlentheorie als Wissenschaft zu seiner Zeit und in der Folge nicht genügend gewürdigt wurden (seine bedeutende Vermutung über das quadratische Reziprozitätsgesetz blieb von den Zeitgenossen unbeachtet), so liegt es daran, dass die Arbeiten Eulers vom Eneström-Index 559 (eine Werknummer, vergleichbar dem Köchel-Verzeichnis bei Mozart) erst nach dem Tode Eulers, die vom Index 707 ab erst nach 1800 gedruckt wurden. (1801 erschienen die „Disquisitiones arithmeticae“, die bahnbrechenden zahlentheoretischen Untersuchungen von C. F. Gauß.)

In der Physik baute Euler oft künstliche und kurzlebige Modelle auf. Trotzdem zeigte sich seine Bedeutung im Prägen physikalischer Begriffe. Zur Gültigkeit von Modellen muss eine grundsätzliche Bemerkung gemacht werden. Im 17. Jahrhundert war der Praktiker dem Theoretiker i. a. überlegen, was an den Wissenschaften, die sich auch noch heute einer Mathematisierung entziehen, einsichtig wird.
Aber auch in der Physik waren damals die Messwerte noch sehr ungenau, so dass die Modelle auf schwachen Füßen standen. Beispielsweise beruhte die Bedeutung des Buches „New principles of gunnery“ [Neue Grundsätze der Schießkunst, 1742] von Robins wesentlich darauf, dass

der Autor eine Vorrichtung ersonnen hatte, die es ihm erlaubte, die Anfangsgeschwindigkeit der Geschosse zuverlässig zu messen. Darauf konnte Euler sicher seine Theorie bauen, als er 1745 das Werk „mit den nötigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen" versah, die es auf das Fünffache vergrößerten.[7]

Eulers großes Interesse für technische Probleme widerlegt bereits die häufig geäußerte Ansicht, dass ihm („der Rechenmaschine") das Experiment fremd gewesen sei.
Euler hat häufig technischen Kommissionen zur Begutachtung von Entwürfen und Erfindungen angehört. In Berlin hatte er sich u. a. mit Säge-, Elektrisier- und Musicalmaschinen sowie mit Turbinen und Fragen der Reibung beschäftigt, und einer der ihn konsultierenden Techniker beurteilte den Wert seiner Hilfe durch die für sich sprechende Feststellung, dass Euler „in wenigen Minuten ausmachen könne, wozu ein anderer so viel Jahre brauchet".
Selbst Anfragen ernsthafter Gelehrter erreichten den schreibfreudigen Euler, in denen man wissen wollte, ob es wahr sei, dass in Berlin ein Zauberer Menschen in Tiere verwandle, oder man diskutierte mit ihm über obskure magnetische Methoden zur Heilung von Zahnschmerzen (Mesmerismus).

Bemerkenswert für die späten Petersburger Jahre ist seine Ähnlichkeitsmechanik, die aus dem Problem erwuchs, für eine freitragende Brücke über die Newa von 300 m Länge die vom talentierten russischen Erfinder I. P. Kulibin experimentell erhaltenen Daten eines Brückenmodells auf die natürlichen Verhältnisse zu übertragen, was zu einer sicheren Brückenkonstruktion für die damals ungewöhnliche Spannweite führte.
Eulers anwendungsbezogene Tätigkeit erstreckte sich z.B. von den Berechnungen der Schwingungen einer Kinderwiege, dem Schleusen- und Kanalbau, der Saugwirkung von Pumpen, Ofenkonstruktionen, dem Entwurf des idealen Zahnradprofils und anderem mehr bis zur Ablehnung des Perpetuum mobile, das viele Gelehrte (wie z. B.B. Ch. Wolff) für möglich hielten, auf Betreiben Eulers wurden an der Petersburger Akademie keine Arbeiten mehr darüber geprüft.

6.3 Jeder Mensch ist sterblich

In den letzten Lebensjahren zog sich Euler mehr und mehr aus seinen Funktionen in der Akademie zurück, teils des Alters halber - sein Gehör ließ nach -, aber auch infolge von Differenzen mit dem Akademiedirektor Graf Orlow.
Es war sogar soweit gekommen, dass Euler und sein Sohn Johann Albrecht 1774 aus einer Kommission austraten, der sie seit 1766 angehört hatten. Dem Genie kann eben keine Administration gerecht werden: sei sie preußisch oder russisch.

Auch mit dem Nachfolger Orlows schwanden die Meinungsverschiedenheiten nicht, und Euler zog es schließlich vor, selbst den Akademiesitzungen fernzubleiben.

Euler behielt seine Geistesstärke bis zum Tode, und so konnte er mit Unterstützung seiner Gehilfen Arbeit um Arbeit verfassen.
Vier von seinen Enkeln gab der greise und blinde Mathematiker sogar noch elementaren Mathematikunterricht. Aber wie auch bei den Söhnen, so brachte es auch bei den Enkeln keiner zu großer wissenschaftlicher Bedeutung.
Im Jahre 1783 wurde die Fürstin Daschkow zum Direktor der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg ernannt, ein ungewöhnliches Amt für eine Frau. Die neue Direktorin

[7] Das Motto, das Euler der deutschen Übersetzung gab, lautet: „Sapere aude" [Wage es, weise zu sein!]!

war sich dessen bewusst, und so bat sie den berühmtesten Gelehrten Petersburgs, Euler, um seine Begleitung für ihr erstes Auftreten in der Akademie.

29 Johann „Albrecht Euler, der älteste Sohn Leonhard Eulers. Gemälde von E. Handmann, 1756.
Der (kränkliche) Johann Albrecht Euler liest in einer Abhandlung Johann Bernoullis „Über die Ernährung"

Euler sagte zu, die Fürstin fuhr bei Euler vor, und der Sohn Johann Albrecht führte den hochbetagten Vater in den Sitzungssaal der Akademie. Nach der Ansprache der neuen Direktorin glaubte - einer Überlieferung zufolge - der eitle Professor für Eloquenz und Poesie Stählin, dass ihm der Ehrenplatz neben der Fürstin gebühre, und nahm ihn ein. Die Fürstin Daschkow wandte sich jedoch unverzüglich an Euler mit den Worten:
„Setzen Sie sich, wohin Sie wollen, und der Platz, den Sie wählen, der wird natürlich der erste unter allen sein." Dies war vermutlich die letzte Sitzung, an der Euler teilnahm.

Im September des gleichen Jahres stellten sich kleine Schwindelanfälle ein, ohne dass sie weiter beachtet wurden. Am 5. Juni 1783 war die erste Montgolfiere aufgestiegen, und die Nachrichten waren jetzt auch bis zu Euler gedrungen. Er interessierte sich für die Aufstiegszeit und -geschwindigkeit, ein Problem, das auch heute noch in der Meteorologie von Bedeutung ist. Euler entwickelte in seiner letzten Arbeit ein Näherungsverfahren für die gesuchten Größen, das allerdings in großen Höhen versagt.

Am 17. September erhielt Euler Besuch von dem Pfarrer und Mathematiklehrer A. Burja, der ihn wie stets freundlich und fröhlich vorfand. Allerdings klagte Euler über Schwindel und sagte, wenn er in jüngster Zeit über seine Lage nachdenke, so scheine es ihm, dass er fremd in seiner Familie sei und sich selbst nicht kenne. Am folgenden Tag, dem 18. September, verbrachte Euler die erste Tageshälfte wie gewöhnlich.
Er unterrichtete einen Enkel und führte auf zwei Schiefertafeln einige Berechnungen in der Theorie des Luftballons aus sowie diskutierte mit seinen Gehilfen Fuß und Lexell beim Mittagessen über den zwei Jahre zuvor entdeckten Planeten Uranus.

Gegen 5 Uhr nachmittags ging er zu dem Enkel, den er am Vormittag unterrichtet hatte, um mit ihm zu scherzen. Er saß dabei auf dem Sofa und rauchte eine Tabakspfeife, die ihm plötzlich entfiel. „Meine Pfeife!" rief Euler laut und bückte sich, erhob sich jedoch ohne Pfeife, schlug sich mit den Händen an die Stirn und wurde mit den Worten: „Ich sterbe!" bewusstlos.

Euler war vom Schlag gerührt worden, und die Agonie dauerte bis gegen 11 Uhr nachts. Dann „hatte Euler aufgehört zu leben und zu rechnen" (Condorcet). Er „endigte seine Laufbahn in

einem Alter von 76 Jahren, 5 Monaten und 3 Tagen“, sagte N. Fuß in seiner ergreifenden Lobrede auf den Tod des Meisters...
Über das Sterben hatte Euler 22 Jahre früher (93. Brief an eine deutsche Prinzessin) geschrieben:

Da der Tod eine Auflösung des Bandes ist, das den Körper im Leben mit seiner Seele zusammenhält, so kann man sich hieraus von dem Zustand der Seele nach dem Tode eine Vorstellung machen. Gleichwie die Seele während des Lebens alle ihre Kenntnisse vermittels der Sinne erhielt, so erfährt sie nun,
... nichts mehr von dem ... Der Schlaf gibt uns ein schickliches Bild und zugleich eine Probe von diesem Zustand ... Nach dem Tod werden wir uns also in einem Zustand der vollkommensten Träume befinden ... Und dies ist meines Erachtens beinahe alles, was wir auf eine bestimmte Art davon sagen können.

Euler war auswärtiges Mitglied der bedeutendsten wissenschaftlichen Gesellschaften gewesen, etwa der Akademien in London, Paris, Turin oder Lissabon. Alle wussten, dass sie ihren Besten verloren hatten, insbesondere natürlich die Petersburger Akademie. In der Lobrede auf Euler, die Condorcet in einer Sitzung der Pariser Akademie hielt, sagte er:

Sein Tod wurde selbst in einem Land, worin er wohnte, als ein öffentlicher Verlust angesehen, die Akademie von Petersburg trug feierlich Trauer um ihn und beschloss, ihm auf ihre Kosten eine Marmorbüste zu errichten, die in einem ihrer Versammlungssäle aufgestellt wurde, sie hatte ihm schon während seines Lebens eine außerordentliche Ehre erwiesen. [10, S. 12]

30 Gruppenbild Petersburger Akademiemitglieder der mathematisch-physikalischen Klasse, die feierlich eine Euler-Büste auf ein Postament stellen. Schattenriss von F. Anting, 1784. V.l.n.r.: A. J. Lexell, J. A. Euler (mit Büste), N. Fuß (mit Amphore), I. I. Lepichin, P. S. Pallas, W.L, Krafft. Die Medaillons über der Gruppe zeigen Katharina II. (Mitte) sowie Pawel Petrowitsch und Frau Maria Fedorowna.

Leonhard Euler wurde am Lutheranischen Smolenski-Friedhof auf der Wassili-Insel begraben; ein zu schlichter, deutsch beschrifteter Stein markierte seine letzte Ruhestätte, so dass sie später für einige Jahrzehnte unauffindbar war. 1830 fand man anlässlich der Beerdigung einer Schwiegertochter Eulers den alten Grabstein wieder, der die Worte „Hier ruhen die sterblichen Reste des in der ganzen Welt bekannten Leonhard Euler“ trug.

1837 wurde von der Petersburger Akademie ein einfaches Monument aus Granit errichtet, das auf der Vorder- und Rückseite die Inschriften trägt:

LEONHARDO EULERO
ACADEMIA PETROPOLITANA MDCCCXXXVII
Natus Basileae die $\frac{4}{15}$ Aprilis MDCCVII
Mortuus Petropoli die $\frac{7}{18}$ Septembris MDCCLXXXIII.

31 Gedenktafel von J.Klügge für L. Euler an seinem Wohnhaus, anlässlich seines 250. Geburtstages am 15, April 1957 enthüllt.
Die Inschrift lautet auf deutsch: Hier wohnte von 1766 bis 1783 Leonhard Euler, Mitglied der Petersburger Akademie der Wissenschaften, bedeutender Mathematiker, Mechaniker und Physiker.

Im Herbst 1956 wurden Eulers Gebeine und der Stein auf den alten Friedhof der Aleksandr-Newski-Lawra [Newski-Kloster], der Leningrader Nekropole, überführt, wo Euler nun nahe dem Grabe Lomonossows ruht.

Eulers Nachfahren waren in Russland hochangesehene Bürger, die häufig die Offizierslaufbahn beschritten hatten oder als Ingenieure tätig gewesen waren; aber auch in ganz Europa finden sich Nachkommen, seit Beginn unseres Jahrhunderts auch wieder in Basel.
Bekannte Nachfahren des großen Gelehrten sind der deutsche Ingenieur A. H. Euler, der das deutsche Flugzeugführerzeugnis Nr. 1 erworben hatte, oder der Nobelpreisträger für Chemie H. K. von Euler-Chelpin und sein Sohn Ulf von Euler, Präsident der Nobel-Stiftung und gleichfalls Nobelpreisträger.

7 Der Mann und sein Werk

7.1 Leonhard Eulers Opera omnia

Sein Name ... kann nur mit den Wissenschaften erlöschen.
N. Fuß in der „Lobrede auf Herrn Euler“

Euler, der zu seinen Lebzeiten bereits rund 560 Arbeiten publiziert hatte, soll dem Grafen Orlow gegenüber geäußert haben, so viele Abhandlungen zu hinterlassen, dass die Akademie mit dem Druck 20 Jahre beschäftigt sein werde. Abgesehen von drei stattlichen Quartbänden, die mit Schriften aus dem Nachlass herausgegeben wurden, erschienen Eulers Arbeiten noch in 40 Jahrgängen der „Nova acta Petropolitana“!

Als man in den Dreißigerjahren des 19. Jahrhunderts am Ende zu sein glaubte, fand ein Urenkel Eulers, P. H. Fuß, einen weiteren Stoß ungedruckter Manuskripte, so dass man bis 1862 weiter veröffentlichen konnte. Gemeinsam mit C. G. J. Jacobi bemühte sich P. H. Fuß um eine Gesamtausgabe des Eulerschen Werkes, was an der Größe der Aufgabe, obwohl man sie stets zu klein einschätzte, scheiterte.

Anlässlich der Feier zum 200. Geburtstag Eulers in Basel wurde, insbesondere von F. Rudio, erneut der Gedanke einer Gesamtausgabe des Eulerschen Werkes gefasst, was am 6. September 1909 zu dem Beschluss der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft führte, sich in Verbindung mit der Berliner und Petersburger Akademie dieser Riesenaufgabe zu stellen. In der Gesamtausgabe, den „Opera omnia Leonhardi Euleri“ beschränkte man sich im wesentlichen auf Arbeiten, die Euler selbst zum Druck vorbereitet hatte und die kommentiert in der Originalsprache (also hauptsächlich in Latein, rund 600 Arbeiten, in Französisch, rund 140 Arbeiten, selten in Deutsch) in drei Serien (Mathematik, Physik und Vermischtes) wiedergegeben werden.

125000 Franken wurden durch Spenden erbracht, selbst Schüler in Rumänien trugen das Ihre bei. Bereits 1911 erschien im Teubner-Verlag der erste Band der auf 35 Bände geschätzten Edition.
Jedoch zur gleichen Zeit veröffentlichte der schwedische Mathematiker G. Eneström ein aus heutiger Sicht fast vollständiges Werkverzeichnis mit 866 Titeln. Daraufhin sah sich die Euler-Kommission genötigt, die Bandzahl des Gesamtwerkes auf 72 zu veranschlagen.
Ungeachtet aller Schwierigkeiten, die sich aus den Folgen zweier Weltkriege ergaben, wurde, besonders durch die Tatkraft des Basler Mathematikers A. Speiser, das gewaltige und seinesgleichen suchende Vorhaben verwirklicht.

Von den 72 Bänden stehen heute (1981) nur noch drei, allerdings bereits weit gediehene Bände aus; die rein mathematischen Arbeiten (Serie I: Opera mathematica) liegen vollständig seit 1956 in 29 Bänden vor.
Gegenwärtig vollendet die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Zusammenarbeit mit der Akademie der Wissenschaften der Sowjetunion die Monumentalausgabe durch eine vermutlich 13bändige vierte Serie, die im Birkhäuser-Verlag Basel erscheinen wird und die ca. 3000 bekannte Briefe von und an Euler sowie seine unveröffentlichten Manuskripte, Notizbücher und Handschriften umfasst.

Eulers Korrespondenzen mit nahezu 300 Partnern werden auf 4500 bis 5000 Briefe geschätzt, wovon etwa ein Drittel verloren gegangen zu sein scheint. Euler hat stets gewissenhaft alle Schreiben beantwortet. Die Briefe unterrichten über Persönliches, über wissenschaftliche

Vorhaben und ihre Organisation sowie Durchführung.
Euler stellte Aufgaben, gab Ratschläge, klärte nachsichtig Fehler auf, förderte die Entwicklung junger Wissenschaftler oder half bei Stellungssuchen und selbst bei der Beschaffung von Büchern und wissenschaftlichem Gerät. Häufig sind die Briefe kleine Abhandlungen, in denen noch offener als in den Abhandlungen Eulers Gedanken sich entwickeln und Formen annehmen. Der Briefwechsel zeigt auch die wichtige Rolle des Kontaktes zu Kollegen, denn die Entfaltung der Wissenschaften im 18. Jahrhundert war stark an isolierte, einzelne Persönlichkeiten gebunden.

Hierin, also in der fehlenden Teamarbeit und der Begrenztheit der Kommunikationsmittel, liegt sicher einer der gravierenden Gründe, dass im 18. Jahrhundert oft grobe Fehler übersehen wurden oder phantastische Hypothesen ersonnen und hartnäckig verteidigt werden konnten. Jedoch bot der individuelle Austausch von Meinungen die Möglichkeit, auf den Briefpartner persönlich einzugehen. Wenn wir weiterhin bedenken, dass einzelne große Persönlichkeiten eine entscheidende Rolle für die Entfaltung der Wissenschaft spielen, so wird die Wirksamkeit brieflicher Kommunikation klar.

Juschkewitsch, ein tiefgründiger Kenner des Eulerschen Werkes, bezeichnet das 18. Jahrhundert geradezu als das Zeitalter Eulers, ohne dadurch dessen Einfluss nur auf dieses Jahrhundert einschränken zu wollen, und bereits C. G. J. Jacobi hatte geschrieben, dass Euler in seiner Berliner Zeit die gesamte Mathematik umgestaltet habe. Worauf beruhte und beruht die Wirkung Eulers?

Eulers Souveränität bei der Anwendung der Mathematik in Verbindung mit der aufklärerischen Gewissheit der unbegrenzten Erkennbarkeit und des permanenten Fortschritts haben ihn vor allem befähigt, objektiven Tendenzen der Entwicklung der Produktivkräfte auf hervorragende Weise gerecht zu werden. In bezug auf die Weise seines Wirkens muss zunächst konstatiert werden, dass Euler trotz seines ausgezeichneten Lehrtalents als Akademieangehöriger kaum Schüler hatte. Unter ihnen waren - seinen Sohn Johann Albrecht eingeschlossen - keine bedeutenden Mathematiker.
Damit kommt den Veröffentlichungen das Ausschlaggebende zu. Jedoch waren Eulers letzte Lebensjahre in Petersburg, in denen dem erblindeten Meister junge Mathematiker assistierten, außerordentlich wichtig für die Entwicklung der russischen Mathematik, wie auch seine wissenschaftsorganisatorische Tätigkeit nicht vergessen werden darf!

Eulers Auffassungen, wie eine Akademie zu organisieren sei, spiegeln sich in dem Brief des Freundes Daniel Bernoulli vom 23. April 1743 an ihn wider, dass eine Akademie nur wenige „genies superieurs“ [überlegene Geister] benötige, die die wahren Zustände durchschauen, für den Rest, der zwar Geschick, aber keine wissenschaftlichen Fähigkeiten benötige, müsse wie im „Militärstand“ Subordination herrschen.
Eine echte Zusammenarbeit mit Euler, der im Gebäude der Mathematik einige Stockwerke höher als seine Mitarbeiter tätig war, wurde damit schlecht möglich. Interessant sind auch Eulers Vorschläge für die Einrichtung von Gymnasien aus dem Jahre 1737. Er sieht alle Jungen als bildungsfähig an, und schlug vor, ein 10klassiges Gymnasium zur Vorbereitung auf die Universität zu schaffen.

Begabte Schüler sollten das Gymnasium in der halben Zeit durchlaufen können. Euler forderte große Allgemeinbildung, lehnte aber einen philologischen Einschlag ab, da dieser nachteilige Folgen auf wichtige Lehrfächer habe. Der Unterricht sollte nach neuen Prinzipien gestaltet werden, die den Gegenstand leicht, verständlich und anschaulich darstellen, mit den einfachsten

Dingen beginnen und allmählich zum Schwierigen fortschreiten.
Obwohl sich die Zahl der Universitäten sowie Akademien und damit die Zeitschriften und Bibliotheken dieser Einrichtungen im 18. Jahrhundert vervielfachten, war es sowohl schwierig zu publizieren als auch die weniger bekannten Zeitschriften zu beziehen.

Euler mit seinen stets ausgezeichneten Beziehungen zu der Petersburger und Berliner Akademie hatte es vergleichsweise einfach, in deren vielbeachteten Publikationsmitteln a priori eines großen Leserkreises für seine Veröffentlichungen gewiss zu sein, so dass schon daher die Wirkung seiner Werke unmittelbar und weitreichend war. Seine zusammenfassenden Darstellungen, die unzugängliche oder auseinanderliegende Arbeiten mit seinen eigenen Forschungen verknüpfen und so oft erst zu einer einheitlichen Theorie erheben, sind von epochaler Wirkung gewesen.

Den Typ des Lehrbuchs in der Mathematik hat eigentlich Euler geschaffen. Die lebendig geschriebenen Abhandlungen und Bücher bieten stets einen offenen Einblick in seine Ideen und Ansätze und sind mit vorbildlicher Klarheit und großem didaktischem Geschick abgefasst.
Die Aristotelische Maxime: „Man muss nicht nur die Wahrheit sagen, sondern auch die Ursache des Irrtums“ aus dessen „Nikomachischer Ethik“ könnte Euler als Richtschnur beim Vermitteln wissenschaftlicher Erkenntnisse gedient haben.
Eine kürzlich begründete mathematische Zeitschrift „The Mathematical Intelligencer“ [Der mathematische Kundschafter] [1 (1978) 1], die sich in den Dienst allgemeiner mathematischer Informationsvermittlung stellt, wählte bezeichnenderweise die Eulersche Einstellung zu ihrem Credo:

Euler veröffentlichte kaum jemals das letzte Wort zu einer Sache, sehr im Gegensatz zu Gauß' „Pauca, sed matura‘“ [Weniges, aber Ausgereiftes]. Am Ende aller seiner Artikel fühlt man, dass er nur einen geeigneten Platz zum Aufhören gewählt hat und dass bald entweder er oder irgend jemand Weiteres zu sagen haben wird, und Euler ..., begierig die Wahrheit zu wissen, sorgt sich nicht viel darum, ob er oder ein anderer den nächsten Schritt tut.

Eulers Ehrlichkeit ist entwaffnend! Er schrieb 1749 z. B. an Goldbach, dass neulich in den „Braunschweiger Anzeigen“ die Frage:
„Wieviel Kapital von 1000 Rth. in 640 Jahren zu 5 pro cento [Prozent], Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?“ aufgegeben worden sei und der Auftraggeber verlange, die Antwort in einer halben Stunde zu finden. Euler „hat aber dieselbe wohl eine ganze Stund gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzt werden könnte“. Er gesteht auch offen, dass die Auflösung des übersichtlichen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x+y+z &= u^2 \\ xy+xz+yz &= v^2 \\ xyz &= z^2 \end{aligned}$$

in ganzen Zahlen ihn bald zur Verzweiflung brachte, so viel Mühe habe die Lösung gekostet. Es erstaunt daher auch nicht, dass die kleinsten ganzzahligen Lösungen folgende sind:

$$x = 1633780814400; \quad y = 252782198228; \quad z = 3474741058973$$

Später hat Euler noch weitaus schwierigere Probleme dieser Art bewältigt. - Ein anderes Beispiel. Auch Lagrange hat sich mit dem Drehimpulssatz und seiner Rolle in der Mechanik befasst.
Über seine Arbeit von 1773 bekennt der alte Euler:

... aber als ich mit der größten Gewissenhaftigkeit versuchte, seinen höchst. tiefsinnigen Gedanken in allen Einzelheiten zu folgen, bin ich wahrhaft nicht fähig gewesen, mich durch alle seine Rechnungen hindurch zu zwingen. Sogar das erste Lemma schrak mich so ab, dass ich meiner Blindheit wegen nicht hoffen konnte, sämtliche von ihm angewandten Kunstgriffe der Analysis durchzuprüfen. [102, S. 29]

C. A. Truesdell gibt von Euler nicht genannte Schwierigkeiten der Lagrangeschen Arbeit an: Verschwommenheit und eine Wolke von Rechnungen!
Heute wird zwar gelegentlich die „behagliche Breite“ Eulerscher Arbeiten bemängelt, aber der jetzt häufig bevorzugte knappe abstrakte Stil, der dem Leser eher das formale Gerüst als die tragenden Ideen vermittelt, verfällt in das andere Extrem. Obwohl der ungeheuere Einfallsreichtum Eulers sicher der Bearbeitung abgefasster Manuskripte nicht gerade förderlich gewesen sein mag, kann keinesfalls, wie mitunter behauptet wird, gesagt werden, dass Euler diese „ungelesen“ zum Druck gab.
Eulers Urenkel P. H. Fuß pflichtet auf Grund seiner Kenntnisse einer Bemerkung C. G. J. Jacobis bei, dass die Manuskripte über befreundete Zahlen ein schönes Beispiel böten, „wie Euler seine Abhandlungen oft umgearbeitet hat, ehe er sie zum Druck bestimmte. So kommt es, dass G. A. Kästner schreiben konnte:

Allemal wenn einerley Untersuchung von d'Alembert und von Euler angestellt ist, ziehe ich Euler vor. Sonst hatten die Franzosen das Verdienst, schwere Untersuchungen durch Auseinandersetzung und Witz zu erleichtern, aber bey den genannten beyden ist mir oft eingefallen: Euler sey der gefällig unterhaltende, belehrende Franzose und d'Alembert der schwerfällige Deutsche.

Die Methode Eulers besteht darin, mit einfachsten Beispielen zu beginnen, um dann schrittweise zu allgemeineren Zusammenhängen zu kommen. H. Hankel urteilt über Euler:

Er war eine wesentlich konkrete Natur, die sich mit wirklicher Liebe und Begeisterung dem Stoff hingab und sich von ihm treiben ließ. Man hat ihn die „lebendige Analysis“ genannt, und ich möchte sagen: Euler stand mit den Problemen „auf Du und Du“. Daher geht durch alle seine Schriften ein warmer, lebendiger Zug.

Das wird durch Eulers zahllose Arbeiten zur direkten Lösung anstehender Probleme unterstrichen sowie durch seine Vorliebe, praktische Probleme der Naturwissenschaften und Technik zu bearbeiten. Dabei strebte Euler stets algorithmische Verfahren an, also die einfachsten geeigneten Formeln oder Tabellen zur Berechnung mit der gewünschten Genauigkeit. Die Freude an der Rechnung, aber auch die bewundernswerte Fähigkeit dazu (die längst nicht allen Mathematikern zu eigen ist) hatte Voltaire im Dr. Akakia mit folgenden Worten geschmäht:

... dass er künftig nicht mehr sechzig Seiten rechnen wird für ein Resultat, das man mit ein wenig Überlegung auf zehn Zeilen ableiten kann; und wenn er wieder seine Ärmel aufkrempelt, um drei Tage und drei Nächte durchzurechnen, dass er dann vorher eine Viertelstunde zum Nachdenken verwenden will, welche Prinzipien am besten zur Anwendung kommen... .. [32, S. 136]

Keine Frage, dass diese Kritik weit am Ziel vorübergeht, wenn sie auch auf manche Zeitgenossen ihre Wirkung nicht verfehlte, wie das nachfolgende Epigramm von Ch. Mylius, einem Herausgeber freigeistiger Zeitschriften mit „gemeiner Moral“ (G.E. Lessing), „Gedanken bey Anschauung der Leibnitzischen Rechenmaschine auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover“ [74, S. 541] beweist:

Dies Kunststück so verderbt zu sehen,
Muß einem billig nahe gehen.
Das Glück ersetzt den Mangel doch:
Denn Euler lebt und rechnet noch.

Aus heutiger Sicht - und wen will das nach 200 Jahren verwundern - weist Eulers Werk Mängel an mathematischer Strenge auf. Neben den objektiven historischen Gründen wurden diese Mängel teilweise auch dadurch begünstigt, dass Euler ein schneller Denker und rascher Arbeiter war, so dass gelegentlich sich Gedankensprünge als kleine, aber fast immer schließbare Lücken erwiesen. Engagiert betont E. A. Fellmann:

> Mit Grenzwertbetrachtungen, Konvergenz- und Stetigkeitskriterien hat sich Euler das Leben wahrhaftig nicht versauert, und um die logisch exakte und geschlossene Fundierung der Analysis ,.. konnte und wollte er sich nicht kümmern, sondern er verließ sich - nur vereinzelt erfolglos - auf seine erstaunliche Instinktsicherheit und algorithmische Kraft. [22, S. 522]

Wenn auch die technischen Einzelheiten zu revidieren sind, so bleibt doch in fast allen Fällen Eulers Aussage bestehen.
C. Caratheodory hebt hervor, dass der Mangel an Strenge natürlich mit dem Maß der Zeit zu messen sei, denn die Beweistechnik hätten erst wir uns befriedigend angeeignet. Kritik sei nur dann angebracht, wenn Schlüsse logisch nicht begründbar sind.
Bereits F. Klein hatte betont, dass bisher jede Epoche, die glaubte, ein Maximum an Strenge erreicht zu haben, überboten wurde, Gemessen an den Maßstäben seiner Zeit kann Eulers Werk durchaus mit unserem heutigen axiomatischen Aufbau verglichen werden. Allerdings müssen wir uns dabei bewusst sein, dass Euler und seine Zeitgenossen, berauscht vom Erkenntnisstrom, sich der logischen Fundierung der Theorie nicht mit aller Kraft widmeten.

So publizierte Euler offenbar nicht zu dem Grundlagenproblem der Geometrie, dem Parallelenpostulat. Das mag mit seiner starken Neigung zur Analysis zusammenhängen, sicher aber auch mit der geometrischen Unanschaulichkeit der indirekten Beweisversuche, vielleicht auch mit der „geringen“ praktischen Auswirkung. Immerhin hatte sich Euler entschieden gegen geometrische Deutungsversuche anderer Mathematiker für komplexe Zahlen gewandt.
Es gibt jedoch zwei (vermutlich von N.Fuß verfasste) Manuskripte, die Eulers Gedanken zum Parallelenpostulat wiedergeben. Hier erweist sich Euler seinen Zeitgenossen nicht überlegen, da er wie sie unbemerkt vom zu Beweisenden ausgeht bzw. es unerkannt einbringt.

Juschkewitsch hat folgende aufschlussreiche Statistik über Euler Arbeiten angefertigt [70, S. 37]:

Jahre	Arbeiten	Prozent	Jahre	Arbeiten	Prozent
1725-34	35	5	1755-64	110	14
1735-44	50	7	1765-74	145	19
1745-54	150	20	1775-83	270	35

Algebra, Zahlentheorie, Analysis	40% der Arbeiten
Mechanik, restliche Physik	28% der Arbeiten
Geometrie, einschließlich Trigonometrie	18% der Arbeiten
Astronomie	11% der Arbeiten
Schiffswesen, Architektur, Artilleristik	2% der Arbeiten
Philosophie, Musiktheorie, Theologie u. a.	1% der Arbeiten

Eine weitere Sache ist bemerkenswert. Euler, wie auch d'Alembert und Lagrange, also die mathematische Elite im ausgehenden 18. Jahrhundert, die das mathematische Reich durch die erhabensten Entdeckungen unter sich aufgeteilt hatten und sich auf den Gipfeln der mathematischen Erkenntnisse fühlten (wo man bekanntlich stets einsam ist), resignierten hinsichtlich einer weiteren Entwicklung der Mathematik.

Vorbehaltlos können wir uns jedoch beispielsweise für die von Euler begründete Variationsrechnung und Flächentheorie der Ansicht A. Speisers anschließen, dass diese bis heute nichts von ihrer Kraft eingebüßt haben, ja Grundpfeiler der Relativitätstheorie geworden sind.

Auch J. Dieudonne mit seiner kompetenten Einschätzung aus heutiger Sicht, dass 90der seit 1700 eingeführten Begriffe und Methoden von vier oder fünf Wissenschaftlern des 18. Jahrhunderts, von etwa 30 des 19. Jahrhunderts und sicher nicht mehr als 100 des 20. Jahrhunderts geschaffen wurden, beleuchtet Eulers Wirkung sehr klar. Eine neue Generation, aus der sich majestätisch die Gestalt C. F. Gauß erhob, zeigte bald, wie unbegründet der Pessimismus gewesen war, der sich aus dem Bestreben, Mathematik zu sehr mit Mechanik oder Astronomie gleichzusetzen, ergeben hatte.
Resümierend können wir unsere Darlegungen über Eulers Werk und seine Wirkung nicht besser als durch ein Wort seines Zeitgenossen J. Swift abschließen, dass es nämlich das Schicksal der Elefanten sei, stets kleiner gezeichnet zu werden, als sie in Wirklichkeit seien.

7.2 Leonhard Euler

Dort nun, bei den Helden, bei diesen wirklich vorbildhaften Menschen, scheint uns das Interesse für die Person, für den Namen, für Gesicht und Gebärde erlaubt und natürlich ... In diesem Sinne bemühten wir uns um Nachrichten.
H. Hesse (Glasperlenspiel)

Eulers langes Gelehrtenleben verlief im großen und ganzen, von den schweren Schicksalsschlägen im Alter abgesehen, ruhig und ungestört. Alles in allem ein Leben, dem die Astrologen den Begriff Sonnenkind zuzulegen pflegen. Ganz anders sind etwa die Schicksale Abels, Jacobis oder Galois geartet.
Das erschwert es, ein Bild vom Menschen Leonhard Euler zu entwerfen, wobei der Zeitgeist seiner Epoche, geistreiche und anekdotisch aufgelockerte Beschreibungen von Lebensläufen anstelle exakter historischer Fakten zu geben, zusätzlich behindert.

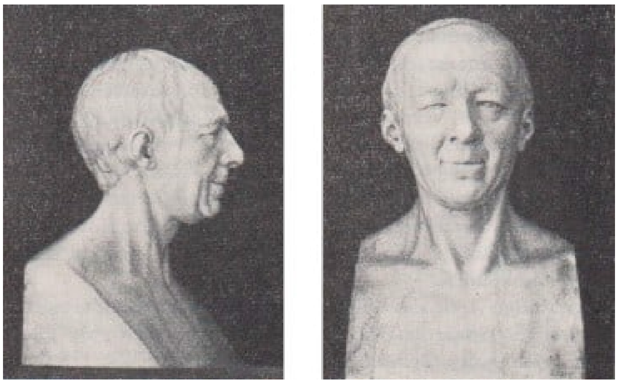
Dennoch gibt es einige Anhaltspunkte, die nicht zu übersehen sind. Zunächst müssen wir davon ausgehen, dass Euler nicht schlechthin ein - bedeutender und hervorragender Mathematiker gewesen ist, sondern - und dies durchaus im Gegensatz zu vielen tüchtigen zeitgenössischen Kollegen, namentlich zu den meisten an den Universitäten wirkenden Mathematikern - ein sowohl wissenschaftlich als auch gesellschaftlich erfolgreicher, vorbehaltlos anerkannter Gelehrter war, der sich und den Seinen nur auf Grund wissenschaftlicher Tätigkeit soziale Sicherheit, ja Wohlstand verschaffen konnte.

Diesen Umständen, begünstigt durch den aufklärerischen Optimismus und die Gewissheit des christlichen Glaubens, verdankte Euler zweifelsohne sein ausgeprägtes Selbstbewusstsein, das sich besonders in den Altersbildern offenbart (Abb. 1, 32 und 33). Er wusste von Anfang an um seinen Wert, wie sein bereits erwähntes Schreiben (vgl. S. 33) an den Petersburger Akademiepräsidenten Blumentrost aus dem Jahre 1730 deutlich erkennen lässt.
Jede Stärke eines Menschen ist jedoch stets eine Versuchung für ihn, und als Kehrseite der geistigen Souveränität Eulers erscheinen mitunter naive Haltungen und Einstellungen, die durch die Übertragung der geradlinigen und unbeirrbaren Selbstsicherheit des Mathematikers auf Gebiete außerhalb des ihm wohl vertrauten Reiches der Logik oder Naturwissenschaften bewirkt werden. Blaise Pascals tiefgründiger Gedanke,

Mathematiker, die nur Mathematiker sind, haben einen klaren Verstand, vorausgesetzt aber, dass man ihnen alles durch Definitionen und Prinzipien erläutert,

erklärt manches von Eulers Wesen, wie wir später sehen werden.
Wo viel Licht ist, da ist bekanntlich auch Schatten. Die Berliner Akademiker bescheinigen deshalb ihrem Kollegen Euler durchaus einige Schrullen, akzeptieren ihn aber als Menschen und erst recht als überragenden Gelehrten,

Vorerst hat uns jedoch Eulers unfassbare Produktivität zu interessieren, denn hierin überragt er alle Mathematiker und hält jedem Vergleich mit den Größten und Produktivsten der Menschheit (Goethe, Voltaire ...) stand. Auf der Höhe seiner Schaffenskraft ist die Leistung von 800 Quartseiten pro Jahr auch für einen Romancier beachtlich.



32 Büste Eulers in Hermenform, Ende des 18, Jahrhunderts

Euler war von ausgeglichener Art, wie es sein Schüler N. Fuß beschreibt:

Eine sich immer gleiche Laune, eine sanfte und natürliche Munterkeit, eine gewisse gutmütige Kausticität, eine sehr naive und drollige Art zu erzählen, machten seine Unterhaltung eben so angenehm als beliebt. [EO 1/1, S. XLII]

Die innere Ausgeglichenheit war gewiss eine notwendige Grundlage für seine ungewöhnliche schöpferische Tätigkeit, aber Eulers fast übermenschliche Arbeitsleistung, die sein Leben bestimmte und prägte, erforderte ungeheuren Fleiß und ausdauernden Willen, die durch eine hinter Eulers unauffälligem Wesen versteckte tiefe Liebe zum Wissen verursacht waren.
Eulers große Lebhaftigkeit, seine Neigung, leicht Feuer zu fangen oder gar aufzubrausen, sind Hinweise auf seine temperamentvolle sanguinische Psyche. Allerdings verlöschte sein Zorn rasch, und - wie N. Fuß in dem erwähnten Nachruf schreibt -: „Er war unfähig, gegen jemand anhaltenden Groll zu hegen.“

Die Grundlage für die Bewältigung eines so immensen Arbeitspensums bildete Eulers kräftige Konstitution, die sein Sohn Johann Albrecht nicht besaß und deren Mangel vielleicht dessen geistige Kräfte nicht völlig entfalten ließ. So schreibt Fuß auch:

Herr Euler war von einer gesunden und dauerhaften Leibesbeschaffenheit. Ohne diese würde er schwerlich so vielen Erschütterungen haben widerstehen können, mit denen die Heftigkeit und Menge seiner Krankheiten seinen Körper bestürmt hatten. [EO/I, S. XL]

Eulers Beherrschtheit zeigte sich, wenn er ohne Missvergnügen Rechnungen unterbrach, um Gäste zu begrüßen und zu unterhalten o. ä., um danach die geliebte Arbeit fortzusetzen. Bei Ereignissen, die er vermutlich mehr aus Verpflichtung als aus Interesse besuchte, brach dann doch die mathematische Neigung hervor, denn wie wir von Friedrich II. wissen, verließ Euler einmal - sehr zum Unwillen des musenbegeisterten Königs - eine Theatervorstellung, gewiss um ungestört eine Entdeckung (und er machte ja in der Regel jede Woche eine) zu Papier bringen zu können.

Das gewaltige Werk, das Euler mit großer Beharrlichkeit in ruhiger und stetiger Arbeit geschaffen hat, setzt aber noch zwei Dinge voraus: ein gutes Gedächtnis und eine große Konzentrationsfähigkeit. „Ein Kind auf den Knien," (er brachte es ja auf 38 Enkel) „eine Katze auf dem Rücken, so schrieb er seine unsterblichen Werke", berichtet ein Zeitgenosse.
Allerdings verzichten die auf uns gekommenen Bildnisse auf eine solche Staffage. Auch eine Unterhaltung um Euler störte ihn beim Denken in der Regel wenig. „Ich dürfte nur einen Augenblick aufstehen, so könnten mir meine Kinder leicht die Feder verwechseln", bekennt er nebenbei in den Briefen an eine deutsche Prinzessin und lässt uns seine Arbeitsbedingungen erahnen.

Die Breite seines Schaffens - in bunter Folge wechseln Arbeiten aus entlegensten Arbeitsgebieten (von der Astronomie bis zur Zahlentheorie) - lässt bereits Rückschlüsse auf Eulers ungewöhnliche Gedächtniskraft zu.
Er konnte, sehr zur Verwunderung d'Alemberts, mitten im Gespräch entlegene Formeln zitieren; sein erfindungsreicher Kopf muss aber auch so von Ideen erfüllt gewesen sein, dass die ständig anströmende Flut neuer Gedanken Altes zurückdrängte. Beispielsweise war das in dem Briefwechsel mit d'Alembert über den Logarithmus bei negativem Argument der Fall, wo er eine sofortige Stellungnahme ablehnte, weil ihm der Gegenstand nicht mehr vertraut genug wäre.

Euler scheint es hier ähnlich ergangen zu sein wie Gauß: Beiden strömten seit frühester Jugend Einfälle im Übermaß zu. Gauß notierte die übersprudelnde Gedankenfülle in einem Tagebuch, was ihn nicht vor Wiederholung einer Entdeckung schützte. Auch Euler scheinen bereits in der Basler Zeit und natürlich in den ersten Petersburger Jahren die Grundideen zugeströmt zu sein, die er in den späteren Jahren „abarbeitete".
Er bat 1742 in einem Brief an Goldbach um Kopien der in Petersburg verbliebenen Arbeiten, „damit ich nicht eine Sach zweimal zum Vorschein bringe".

Sein phänomenales Gedächtnis war von fotographischer Exaktheit. Noch im hohen Alter konnte er Vergils „Aeneis", die 9896 Verse umfasst, auswendig hersagen, wobei er zusätzlich die Anfangs- und Schlusszeile jeder Seite seiner Ausgabe, die sich vor seinem geistigen Auge aufgetan haben muss, bezeichnen konnte. Gewissermaßen, und häufig nebenbei, machte sein Gedächtnis „Momentaufnahmen" von den vor ihm liegenden Dingen, seien sie Akademieprotokolle oder mathematische Abhandlungen gewesen.
Beides, aber auch viele Dinge, die ihm während des Studiums in Basel untergekommen waren, konnte er später noch nach Jahrzehnten detailliert wiedergeben. In einer schlaflosen Nacht, wo andere angeblich Schafherden zählen, berechnete Euler die ersten sechs Potenzen der natürlichen Zahlen bis zur 20 und konnte sie noch nach Tagen auswendig hersagen (115 Zahlen, darunter achtstellige).

Euler besaß schon aus den dargelegten Gründen ein großes Allgemeinwissen, sein mit dem Theologiestudium verbundenes Sprachenstudium hatte ihm die besten klassischen Dichter nahegebracht, und er war auch in der Geschichte sehr bewandert, kannte sich in Medizin, Arznei- und Kräuterkunde, Biologie und Chemie gut aus (auch wenn er mit seinem großen Landsmann A. v. Haller hierüber nicht korrespondieren mochte) - insgesamt gesehen, erheblich mehr, als man von einem Fachgelehrten erwartet hätte.

Er beherrschte Latein, Französisch und Russisch, sprach aber bis zu seinem letzten Tag das ge-

liebte Schweizer-Deutsch. Den später aus Basel zugereisten Schüler N. Fuß verblüffte er, „Lieni Euler“, oft und gern durch manche konservierten Redewendungen des heimischen Dialekts.
R. Fueter hat bemerkt, dass Euler die Schweizer Unart, das Wörtchen „eben“ laufend im Munde zu führen, auch ins Lateinische übernommen hat, wo sich das entsprechende „plane“ häuft. Zur neueren Literatur, besonders französischer Art, hatte er kein rechtes Verhältnis, was ihn im 18. Jahrhundert wenig Sympathien einbrachte, nicht nur bei Friedrich II.

Das 6. Notizbuch Eulers „Catalogus librorum meorum“ [Verzeichnis meiner Bücher] gibt Einsicht in Eulers Bibliothek. Die 539 Titel umfassende Liste entspricht vermutlich dem Stand von 1749 und enthält in der Hauptsache Werke der exakten Naturwissenschaften und Philosophie, viel religiöse Literatur, sowohl Werke antiker als auch zeitgenössischer Autoren, Wörterbücher, auch russische Bücher. (Als 1749 Maupertuis den Schlendrian der Berliner Akademiker beim Entleihen von Büchern durch die Verordnung zur sofortigen Rückgabe unter Androhung von Bezahlung und gar Gehaltspfändung im anderen Fall behob, gehörte auch Euler zu den „Sündern“.)

Der Sekretär der Berliner Akademie Formey, später durch Heirat mit Euler verwandt, schreibt in seinen Memoiren:

> Doch könnte ich nicht sagen, dass er sich jemals über ein Werk von Geist und Geschmack lobend geäußert, oder dass er an irgendeiner Theateraufführung Gefallen gefunden hätte, mit Ausnahme der blödsinnigsten Marionettenspiele, in die er voll Eifer lief, die seine Aufmerksamkeit stundenlang fesselten und ihn vor Lachen bersten machten. [32, S. 161]

Das Urteil muss man allerdings relativieren, denn Formey, der Euler nicht besonders mochte, glaubte, dass naturwissenschaftliche Begabung zwangsläufig mit dem Verlust an Schöngeistigem einhergehe. Immerhin fand Euler gern und häufig in der Musik Entspannung, wo er auch selbst aktiv tätig wurde. Formey, aber auch andere, gestehen Euler Fröhlichkeit und Heiterkeit zu. Eine Probe für seinen Humor findet sich in den Briefen an eine deutsche Prinzessin (83. Brief), wo Euler eine Attacke gegen die missliebigen prästabilierten Harmonien (d. h. vorbestimmten Beziehungen zwischen Körper und Geist) so beschließt:

> Diese Maschine ist nun gerade mein Körper, der bloß durch diese Harmonie mit meiner Seele der meinige ist; denn würde seine Organisation bis auf. den Grund verändert, dass sie mit meiner Seele nicht weiter zusammenträfe, so würde er mir nicht mehr angehören, als mir der Körper eines Rhinozeros mitten in Afrika angehört, und wenn Gott, im Fall der Zerrüttung meines eigenen Körpers, den Körper eines Rhinozeros so für mich einrichtete, dass er die Pfote in dem Augenblick erhöbe, wenn ich die Hand wollte erhoben wissen und so in allen übrigen Bewegungen den Befehlen meiner Seele gehorchte, so wäre dieses alsdann mein Körper. Ich würde mich plötzlich in der Gestalt eines Rhinozeros mitten in Afrika befinden, aber dem unerachtet würde meine Seele ihre nämlichen Wirkungen fortsetzen.
> Ich würde ebensowohl als jetzt die Ehre haben, Ew. H. [Euer Hochwohlgeboren] zu schreiben; aber wie sie alsdann meine Briefe aufnehmen würden, das weiß ich nicht.

Die eleganten Franzosen führten den schlichten und natürlich gearteten Euler auf dem glatten höfischen Parkett gern aufs Glatteis, aber er stimmte anschließend fröhlich in ihr Gelächter mit ein. Mit den wortgewandten Schwätzern am Hofe konnte er nicht mithalten, aber bei ihm bestach die dem Zeitgeist weniger entsprechende Tiefe der Kenntnisse. Überhaupt wird seine Unterhaltung sehr unterschiedlich beurteilt.
Die Zeilen des selbst brillant unterhaltenden Friedrichs II. an seinen Bruder August Wilhelm aus dem Jahre 1746 überraschen nicht: „Ich dachte mir schon, dass Deine Unterhaltung mit Herrn Euler Dich nicht erbauen würde“, eher schon d'Alemberts Einschätzung in einem Brief von 1766 an Voltaire, Euler „sei sehr wenig amüsant“.

Anders urteilt der Kreis der Freunde, hierfür als Beleg:

Leonhard Euler ist nicht, wie die große Algebraisten zu sein pflegen, ein finsterer Kopf und im Umgang beschwerlicher Mann, sondern munter und lebhaft (insonderheit unter Bekannten), und obgleich sein verlorenes rechtes Auge etwas ekelhaft aussieht, so gewöhnt man sich doch bald daran und findet sein Gesicht angenehm. [33, S. 13]

Eulers Umgang und Lebensgestaltung waren nicht von höfischer, sondern einfacher bürgerlicher Art. N. Fuß hebt in der Lobrede hervor, dass Euler jede Bonzenhaftigkeit und Arroganz (der etwa Cauchy oder Jacobi gelegentlich erlagen) abging:

Die Kunst, das gelehrte Air [Wesen] in der Studirstube abzulegen, seine Überlegenheit zu verbergen und sich zu jedermanns Fähigkeiten herab zu stimmen, ist zu selten, als dass man den Besitz derselben Eulern nicht zum Verdienst anrechnen sollte, [EO 1/1, S. XCII]

Diese Einfachheit erstaunte immer wieder die Besucher. Auch sprach Euler stets anerkennend über andere, kaum über sich und sein Werk. In seinen zahllosen Arbeiten lobt er nie seine Leistungen, jedoch die der anderen bis zum Übermaß, obwohl er sich wie ein Kind freuen konnte, wenn ihm etwas Schweres gelang.
Neue wissenschaftliche Erkenntnisse erfreuten ihn stets, gleichgültig, woher sie kamen und wie groß sein Anteil daran war und ob dieser genügend gewürdigt worden war. Euler - wohl einer der wenigen Fälle - war das Gefühl des Neides vollkommen fremd. So konnte er, mit ungetrübter Freude, um Schillers Worte zu gebrauchen, als königlicher Bauherr für Jahrzehnte Kärrner in Arbeit setzen.

Es gibt einen Präzedenzfall für Eulers Bescheidenheit. Friedrich II. hatte 1745 von Euler Rat über das beste Ballistiklehrbuch eingeholt. Daraufhin empfahl Euler Robins „New principles of gunnery“ [Neue Prinzipien der Schießkunst], übersetzte es ins Deutsche, versah es mit zahlreichen Anmerkungen, die den Wert des Buches beträchtlich erhöhten, so dass es ins Englische rückübersetzt wurde.
Es gab auch eine französische Übersetzung, die Napoleon I. als Leutnant zu studieren hatte. Robins, den Euler so berühmt gemacht hatte, bezeichnete jedoch Euler nie anders als „die Rechenmaschine“.

Er hatte wegen Lappalien 1739 Eulers Mechanik verrissen und sich sogar zu der Meinung verstiegen, dass man besser dort nachschlüge, wo es von anderen in einfacherer Weise geschrieben sei. Euler ignorierte gelassen diese Ausfälle gegen ihn (die eigentlich der Bernoullischen Schule galten) - ein Beispiel unfasslicher Toleranz für jene Zeit, worüber sich der streitbare Johann Bernoulli sofort mokierte.
Der prominente Euler trug so sicher zu einer Normalisierung des zänkischen und gehässigen Klimas in der Wissenschaft des 18. Jahrhunderts bei, denn zumindest Daniel Bernoulli gelobte stehenden Fußes, es künftig ähnlich zu halten. D. Struik hat die rivalisierenden Gelehrten jener Zeit mit ihrem Gezänk und ihrer Medisance durch einen treffenden Vergleich veranschaulicht: Mit ihnen würde er nur ungern eine Tasse Kaffee trinken.

Natürlich besaß Euler auch Fehler und Schwächen. Seine Herkulesarbeit in der Wissenschaft machte eine gewisse Einengung des Blickfeldes erforderlich, da auch dem phänomenalsten Kopf und der unverwüstlichsten Energie irgendwo Grenzen gesetzt sind.
Die administrative Gewohnheit Eulers, Weisungen zu erteilen, und seine wissenschaftliche Sicherheit verband sich manchmal mit einigen Eigenarten. Harnack charakterisiert ihn als Leiter der Akademie mit den Worten:

Er war gewissenhaft und sparsam, aber kaum weniger heftig und eigensinnig als der alte Präsident (Maupertuis - R, T.), zwar gerecht, aber nicht ohne Vorurteile. [62]

Ein Akademiemitglied berichtete, dass man um den 1751 gegründeten botanischen Garten der Akademie in Berlin eine Mauer ziehen und einige Tiere zur Unterstützung des Gärtners anschaffen wollte. Euler widersetzte sich dem mit allen Kräften, denn es gäbe nichts Unwichtigeres als einen botanischen Garten, die ganze Botanik sei nichts als eine Spielerei, und er ergänzte aufgebracht, dass es überhaupt nur eine Wissenschaft in der Welt gäbe: die Mathematik.
Zur Ehre des erregten Euler muss allerdings gesagt werden, dass es um außerordentlich beträchtliche Summen ging, nämlich um 15000 Taler, die von Euler während des Siebenjährigen Krieges ersparten Gelder der Akademie.
(Der Antragsteller war Gleditsch, ein Mann, der nach dem Tode von Maupertuis tatsächlich fest glaubte, dessen Geist gesehen zu haben - Friedrich war außer sich über den Geisterseher in seiner aufgeklärten Akademie! In Linnes Rangordnung in Floras Leibregiment erhielt Gleditsch erst die Stelle eines Oberstleutnants. Übrigens übte der bedeutende Botaniker des 19. Jahrhunderts M. J. Schleiden eine harte, aber berechtigte Kritik an seinen Vorgängern: „Klassifikation gesammelten Heus“.)

Eulers fehlendes Geschick zu taktierendem diplomatischem Verhalten, das auf seiner grundehrlichen Art fußte, und die Unerfahrenheit in höfischen Angelegenheiten und den dort üblichen Intrigen sowie der Günstlingswirtschaft machten ihn - teils zu Recht, teils zu Unrecht - gelegentlich misstrauisch und argwöhnisch; etwa d'Alemberts angeblicher Absicht gegenüber, Präsident der Berliner Akademie zu werden, wobei er ihn sogar als zänkisch in Petersburg avisiert hatte, oder in Befürchtungen bei der Kalenderreform u. a. m.
Eulers weltanschaulicher Gegner, der führende Popularphilosoph Sulzer, bemerkte hierzu erstaunt, welche „kindischen Besorgnisse und Vorurtheile dieser in seinem Fach so große Mann“ habe. Hierzu eine Briefstelle über d'Alemberts Besuch aus einem Schreiben Eulers an Goldbach von 1763:

Nun ist aber unsere Freundschaft (mit d'Alembert - R. T.) auf das Vollkommenste wieder hergestellt worden; und man kann mir nicht genug beschreiben, mit wie großen Lobeserhebungen er beständig mit Sr. Königl. Majestät von mir gesprochen. Unter der Hand wird versichert, dass er doch künftigen Mai wieder herkommen und die Präsidentenstelle unserer Akademie antreten würde. [15, S. 400]

Die für die wissenschaftliche Arbeit unerlässliche Beharrlichkeit erscheint auch im Alltagsleben Eulers, besonders in den Zeiten, als er in Petersburg und Berlin hartnäckig und entschlossen seine Entlassung betrieb. Was Euler sich vorgenommen hatte, das führte er auch durch!
Auch in religiösen Fragen wart er unerbittlich, sein Eifer in Ausfällen gegen die Freigeister („elende Menschen“, „fürchterlicheren Gegner“) erlahmte nicht, wirkte aber gerade deshalb kleinlich und entnervend. Der erwähnte Sulzer wurde von Euler nach Berlin gerufen, aber als Euler klar wurde, dass er es mit einem profilierten Wolffianer zu tun hatte, erlosch alles Interesse an Sulzer, und nur durch den erstarkenden Einfluss der Leibniz-Wolffschen Philosophie wurde Sulzer doch noch Akademiemitglied.

Euler, das versichern seine Fachkollegen einhellig, war stets bemüht, fremde Verdienste und Rechte in gebührender Weise anzuerkennen. Freilich kam es dabei auch vor, dass der große Mann dem täglichen Leben etwas fremd gegenüberstand. Mit seinem Nachbarn in Berlin hatte er eine Auseinandersetzung über die Aufschüttung eines die Grundstücke trennenden Grabens, die bis zu Gericht kam und jede Partei 100 Taler kostete. Der Wert des Streitobjekts: 5 Taler!

Eulers steter Wunsch, den Seinen durch Anstellung ein gesichertes Auskommen zu verschaffen oder sie durch Heirat in geordneten Verhältnissen zu wissen, ist auch Ausdruck für das Streben nach ungestörtem Arbeitsklima, das er benötigte. Letztlich zeigte sich aber in Eulers Streben nach materieller Sicherheit für die Seinen wieder der ausgeprägte Familiensinn, den er sich gegenüber allen Beanspruchungen durch seine wissenschaftlichen Arbeiten zu bewahren wusste. Seinen ältesten Sohn Johann Albrecht mit Frau und Kind hatte Euler in Berlin zu sich genommen, da dessen „Einkommen wegen der Kriegsunruhen noch sehr gering“ war, den mittleren ließ er in Halle Medizin studieren, und der jüngste war in Berlin Ziethen Husar geworden.

Später erhielten seine Söhne in Petersburg ebenfalls glänzende Stellungen, denn Euler sorgte sich auch und gerade im Alter in gewohnter Weise um seine Familie. Seinem Schüler N. Fuß ist es ein unvergessliches Bild gewesen, den greisen und erblindeten Patriarchen inmitten seiner großen Familie zu sehen, zu der er stets ein inniges Verhältnis hatte.
Aus Briefen Eulers wissen wir, dass er gern zu seiner Mutter hinaus auf das Gut Charlottenburg fuhr und dass er sich um seine Kinder von klein auf intensiv bemühte, etwa sich um ihre Gesundheit sorgte, sie selbst unterrichtete (auch in Latein) oder ihre Schulbildung und ihr Studium aufmerksam verfolgte.

Der frühe Tod von acht Kindern, oft kurz nach der Geburt, muss ihn stets tief getroffen haben. Das Anzeigen der Geburt oder des Todes seiner Kinder veranlasste Euler zu den wenigen Äußerungen über seine Frau, die wir von ihm kennen, z.B. am 15. April 1749:

Vorgestern ist meine Frau mit 2 Töchtern auf einmal niedergekommen und befindet sich, Gott sei Dank, samt den Kindern wohlauf. [15]

Wir tun gewiss recht, aus dem bekannten Wort des Perikles in seiner berühmten Trauerrede, dass die beste Frau diejenige sei, von der man am wenigsten spreche, zu schließen, dass Eulers Ehe harmonisch und glücklich gewesen sein muss.
Es wäre unangemessen, eine Beschreibung Eulers in einer familiären Idylle ausklingen zu lassen. Seine Schöpferkraft, sein Fleiß und seine Beharrlichkeit sowohl im wissenschaftlichen Schaffen als auch in der nicht minder bedeutungsvollen Organisation weltweiter wissenschaftlicher Arbeit sowie in der Ausbildung und Wissensvermittlung gehören ebenso zu der Erscheinung Eulers und bestimmten den Pulsschlag der Wissenschaften im 18. Jahrhundert.

Er ist einer der Großen der Menschheit. Trotzdem werden dem schlichten Euler die einfachen neun Wörter von O. Spieß auf der in Riehen angebrachten und von der dortigen Bildhauerin R. Bratterle geschaffenen Bronzetafel auf treffende Weise gerecht:

Er war ein großer Gelehrter und ein gütiger Mensch.

8 Nachwort

Jeder Versuch einer Lebensbeschreibung, sei er nun kurz oder umfangreich, gibt die Sicht des Autors wieder, und das ist auch in diesem Buch der Fall. Bei einem Gelehrten wie Leonhard Euler ist ja bereits eine Auswahl aus dem schier unermesslichen Schaffen unumgänglich, um wenigstens das Wesentlichste darstellen zu können.
Ich habe mich dabei bemüht, die zwei Jahrhunderte, die uns von Euler trennen, zu überbrücken und stets auch den Menschen erscheinen zu lassen, wann immer das möglich war. Andererseits ist die Wissenschaft ein so wichtiger Teil von Eulers Leben gewesen, dass jede Biographie, die sein wissenschaftliches Werk nicht zu würdigen versuchte, ins anekdotische und oberflächliche Beschreiben abglitte.

Ich möchte hier an eine Bemerkung C. A. Truesdells in seiner Festrede zur Feier der 250. Wiederkehr des Geburtstages von Leonhard Euler in Basel erinnern:
„Euler ist eine große, umfassende Erscheinung wie Shakespeare gewesen: jeder, der die Werke des einen oder des anderen lesen kann, macht sich ein eigenes, vielleicht wahres wenn auch unvollständiges Bild davon. In den Arbeiten Eulers kann man schönste Beispiele jeder Art mathematischen Denkens finden, und es ist möglich, dass ein anderer Leser durch Auswahl anderer Eulerscher Forschungen zu einer anderen Auffassung gelangt.“ [107, S. 260-261]

Letztendlich sollte es aber das Ziel dieser wie wohl einer jeden Biographie sein, Mensch und Werk im Zusammenhang mit der jeweiligen Epoche darzustellen: sowohl im einzelnen den Geist der Zeit widerzuspiegeln als auch zu zeigen, wie dieser einzelne Einfluss auf die ihn umgebenden Verhältnisse nahm bzw. nehmen konnte.

Bei der Verwirklichung dieser Absichten wurde mir uneigennützige Hilfe erwiesen. Ich danke vor allem Herrn Prof. Dr. K.-R. Biermann (Berlin) sehr herzlich für das stete Interesse, das er an der Vorbereitung der Biographie genommen hat, für seine mannigfache, hilfreiche Unterstützung während der Abfassung des Textes sowie seine freundlichen Ermunterungen.
Frau Prof. Dr. D. Goetz (Potsdam) und die Herren Dr. E. A. Fellmann (Euler-Kommission, Basel) und Dr. O. Newmann (Jena) haben das Manuskript kritisch gelesen und zu dessen Verbesserung beigetragen. Hierfür schulde ich ihnen Dank, insbesondere bin ich Herrn Dr. Neumann für viele Hinweise zur Gestaltung der Abschnitte über Algebra und Zahlentheorie verpflichtet.

Mehr als es diese Zeilen ausdrücken können, verdanke ich den außerordentlich umfangreichen Auskünften von Herrn M. Rajth (Riehen bei Basel) für das Basler Kapitel. Ich gedenke meines kürzlich verstorbenen Freundes Dr. Wolfgang Uhlmann: neben unserem fruchtbaren Gedankenaustausch über Jahrzehnte hat auch seine unermüdliche praktische Hilfe, wie bereits andere Arbeiten, so auch diese gefördert. Weiterhin war mir die Mitarbeit von Herrn W. Hintzsche (Halle), Frau Dr. E. Schubmann (Leipzig) und Frau G. Werner (Beucha bei Leipzig) eine, wirksame Hilfe.

Eine Reihe von Personen und Institutionen haben mich freundlicherweise bei der Beschaffung des Bildmaterials unterstützt bzw. mir eine Abdruckerlaubnis erteilt. Sie sind im Quellenverzeichnis aufgeführt.

Halle, den 18. September 1981 Rüdiger Thiele

33 Vorder- und Rückseite der anlässlich des 250. Geburtstages von L. Euler von der Akademie der Wissenschaften der UdSSR geprägten Medaille.

Die Wiedergabe der Abbildungen erfolgt mit freundlicher Genehmigung der genannten Personen oder Institutionen, bzw. der Reproduktion liegen die angeführten Bücher und Zeitschriften zugrunde:

Autographenkatalog Stargardt Nr. 557, Abb. 23.
K.-R. Biermann (Berlin), Abb. 28, 31.
Deutsches Museum München, Abb. 24.
Ch. Fellmann (Basel), Abb. 33.
Iswestija AN SSSR, otd. techn. nauk, 3 (1957), Abb. 6, 11.
O. Jäger, Weltgeschichte. Band 3. Bielefeldt-Leipzig 1888, Abb. 16, 25.
Karl-Marx-Universität Leipzig, Bibliothek der Sektion Mathematik, Abb. 17.
G. Kowalewski, Große Mathematiker. München-Berlin 1933, Abb. 5, 19, 20.
M. A. Lawrentjew u.a. (Hrsg.): L. Eiler. Sbornik statjei ... Moskau 1958, Abb. 7, 12, 27, 30.
Leopoldina, Deutsche Akademie der Naturforscher zu Halle, Abb. 13.
Nachrichten v. d. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, phil.-hist. Klasse, 3 und 4 (1930), Abb. 29, 32.
M. Raith (Riehen), Abb. 1.
Staatsarchiv der Stadt Basel, Abb. 2, 3.
Le Sueur, Maupertuis et ses correspondants, Montreuil-sur-mer, 1896, Abb. 15. Universitätsbibliothek Basel, Abb. 4.
Universitätsbibliothek Leipzig, Abb. 14.
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, EO 1/7, Abb. 9.
Der Wächter, 4 (1919), München, Abb. 26.
H. Wußing und W. Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Berlin 1975, Abb. 8.

9 Chronologie

1670 Paul Euler, Vater Leonhard Eulers, geboren.
1677 B. Spinoza gestorben.
1682 R. Cotes geboren.
1683 Die Türken belagern Wien,
1684 Erste Veröffentlichung von Leibniz zur Differential- und Integralrechnung.
1687 Newtons Principia erscheint. Nikolaus I Bernoulli geboren.
1690 Ch. Goldbach geboren.
1694 Voltaire geboren.
1698 P. L. M. de Maupertuis geboren.
1700-21 Der Nordische Krieg (Schweden, Russland).
1700 D. Bernoulli geboren.
1703 J. Böttger stellt Porzellan her,
1704 G. Cramer geboren.
1705 Jakob I Bernoulli, Bruder von Johann I Bernoulli, gestorben.
1706 Heirat von Paul Euler mit Margaretha Brucker (19. April).
1707 Leonhard Euler geboren (15. April). C. v. Linne geboren.
1708 Umzug der Familie Euler nach Riehen.
1710 Johann II Bernoulli, Sohn von Johann I Bernoulli, geboren. Meißner Porzellanmanufaktur. G. Berkeleys Essay über das menschliche Wissen, Temperaturskala von G. Fahrenheit.
1712 J. S. Koenig geboren. Friedrich II. geboren
1713 Euler besucht die Lateinschule in Basel. A.C. Clairaut geboren.
1714 Ch. W. Gluck (Neuschöpfer der Oper) geboren.
1716 G. W. Leibniz und R. Cotes gestorben.
1717 J. le Rond d'Alembert geboren.
1719 D. Defoes „Robinson Crusoe“ erscheint.
1720 Immatrikulation Eulers an der philosophischen Fakultät in Basel (20. Oktober).
1723 Wechsel Eulers zur theologischen Fakultät.
1724 Euler erhält die Magisterwürde. I. Kant geboren,
1725 Eulers erste Arbeit über zeitgleiche Kurven. Zar Peter I. gestorben und Katharina I. neue Herrscherin. Gründung der Petersburger Akademie. Daniel I und Nikolaus II Bernoulli, Söhne Johann I Bernoullis, Professoren in Petersburg.
1726 Erfolglose Bewerbung Eulers um eine Basler Physikprofessur. J. Swifts „ „Gulliver“ erscheint.
1727 Abreise Eulers aus Basel (5. April) und Ankunft in St. Petersburg (24. Mai). Peter II. nach dem Tode von Katharina I. neuer Zar. I. Newton gestorben.
1728 J. H. Lambert geboren.
1729 G. E. Lessing geboren.
1730 Euler stellt Reihenglieder durch Integrale dar, Anna Iwanowna nach dem Sturz Peters II. Zarin.
1731 Euler wird Professor für Physik als Nachfolger Bilfingers und so- mit Akademiemitglied.
1732 J. Haydn geboren. Der erste Band von 64 des Zedlerschen Universal-Lexikons erscheint.
1733-43 Große Kamtschatka- Expedition.
1733 Euler wird Professor für Mathematik als Nachfolger Daniel I Bernoullis.
1734 Heirat Eulers mit Katharina Gsell (7. Januar; 27.12.1733 alten Stils). Sohn Johann Albrecht (27. November) geboren. Untersuchungen über die Eulersche Konstante C. E. Waring geboren.
1735 Summe der reziproken Quadratzahlen berechnet (Basler Problem). Linnes natürliches System der Pflanzen und Tiere. Erster Kokshochofen (A. Darby).
1736 Eulers „Mechanik“ erscheint. J.L.Lagrange geboren.
1737 Untersuchungen Eulers über Kettenbrüche,
1738 Euler verliert das rechte Auge.

1739 Die 1731 geschriebene Musiktheorie Eulers erscheint. Beim Lesen von Johann I Bernoullis „Hydraulica“ kommt Euler die Erleuchtung, welche die späteren triumphalen Erfolge in der Mechanik bewirkt, Differenzenrechnung.

1740 Friedrich II. nach dem Tode seines Vaters Friedrich Wilhelm I. König von Preußen. Maria Theresia besteigt den österreichischen Thron. Zarin Anna gestorben, und die Mutter Iwans VI. führt in Russland die Regierung. D. Humes Essay über den menschlichen Verstand erscheint.

1740-42 1. Schlesischer Krieg (Preußen, Österreich, Frankreich).

1740 Eulers Sohn Karl geboren. Folter in Preußen abgeschafft.

1741 Euler verlässt St. Petersburg (19. Juni) und trifft in Berlin ein (25. Juli). Tochter Helene geboren. Staatsstreich in Russland durch Elisabeth.

1742 Quadratisches Reziprozitätsgesetz von Euler gefunden. Hundertteilige Temperaturskala von Celsius.

1743 Euler entdeckt die Knickformel. Im Januar im Notizbuch Eulers eine Bemerkung über ein Prinzip der kleinsten Aktion. Sohn Christophor geboren, D'Alemberts „Dynamik“ erscheint,

1744-45 2. Schlesischer Krieg (Preußen, Österreich).

1744 Eulers Himmelsmechanik und Variationsrechnung erscheinen, Maupertuis' Prinzip der kleinsten Aktion wird veröffentlicht. Johann III Bernoulli, Sohn von Johann II Bernoulli, geboren.

1745 Die von Euler übersetzte und ergänzte Fassung von B. Robins' „New principles of gunnery“ erscheint. Eulers Vater gestorben,

1746 Eulers „Gedanken von den Elementen der Cörper“ erscheint, Maupertuis wird Präsident der Berliner Akademie und Euler bestätigter Direktor der mathematischen Klasse. Dresdner Gemäldegalerie gegründet.

1747 Eulers „Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister“ erscheint. A. Marggraf entdeckt den Zuckergehalt der Rüben. Abhandlung über unendliche Vieldeutigkeit des Logarithmus vorgelegt.

1748 Eulers „Introductio in analysin infinitorum“ erscheint (1745 beendet). Johann I Bernoulli gestorben. Gesetz von der Erhaltung der Masse durch Lomonossow formuliert.

1749 Eulers „Scientia navalis" erscheint, Arbeit über Achromate (J. Dollond zur Konstruktion angeregt). J. W. Goethe und P.S. Laplace geboren. Buffons 44bändige Naturgeschichte erscheint.

1750 Eulers „Betrachtungen über den Raum und die Zeit“ sowie „Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik“ (Impulsänderungssatz). J. S. Bach gestorben.

1751 Erste Mondtheorie Eulers. J. S. Koenigs Kritik an Maupertuis' Prinzip erscheint. Blitzableiter von B. Franklin. Diderots Encyclopedie in 17 Bänden erscheint.

1752 Akademieurteil gegen J. S. Koenig (13. April). Voltaires „Akakia“ veröffentlicht. G. Cramer gestorben. A. M. Legendre geboren.

1753 Arbeiten zur Hydrodynamik und zum Turbinenbau von Euler. G. Berkeley gestorben.

1754 Ch. Wolff und A.de Moivre gestorben.

1755 Eulers 1748 geschriebene „Differentialrechnung“ erscheint. N. Fuß geboren. Erdbeben in Lissabon.

1756 W. A. Mozart geboren.

1756-63 Siebenjähriger Krieg (3. Schlesischer Krieg; Preußen, Österreich, Frankreich, Russland, England, Schweden)

1757 J. S. Koenig gestorben. Indien wird englische Kolonie.

1758 Eulers Kreiselgleichungen. Chronometer von J. Harrison. R. Boscovichs Naturphilosophie (Atomistik) erscheint.

1759 P.L. M. de Maupertuis, G. F. Händel und Nikolaus I Bernoulli gestorben. Jakob II Bernoulli und F. Schiller geboren. Voltaires „Candide“ erscheint.

1760 Drückende Kriegslasten in Preußen. J. H. Lamberts „Photometria“ erscheint.

1761 Eulers Mutter gestorben, Bleistiftfabrikation durch Faber.

1762 Zar Peter III. von seiner Gattin, der neuen Zarin Katharina II., beseitigt. Dampfmaschine

(J. Watt). J. J. Rousseaus „Gesellschaftsvertrag".
1763 D'Alembert in Potsdam.
1764 Ch. Goldbach gestorben. J. J. Winckelmanns „Geschichte der Kunst des Altertums“ erscheint,
1765 Eulers Mechanik der Festkörper erscheint. A.C. Claireaut gestorben,
1766 Zerwürfnis Eulers mit Friedrich II., Übersiedlung nach Petersburg (1. Juni), Ankunft in Petersburg (17. Juli). Sehschwäche. D. Hume gestorben, J.Lagrange wird Eulers Nachfolger in Berlin. Lessings „Laokoon“ erscheint.
1767 Spinnmaschine (J. Hargreaves). Optischer Telegraph London - New Market.
1768-71 Erste Weltumseglung J. Cooks.
1768-74 Russisch-türkischer Krieg.
1768 Die „Briefe an eine deutsche Prinzessin" von Euler, einer der größten buchhändlerischen Erfolge des 18. Jahrhunderts und eines der besten populärwissenschaftlichen Bücher, erscheint, die 1763 geschriebene „Integralrechnung“ wird veröffentlicht. Steingut und gusseiserne Werkstoffe werden hergestellt.
1769 Eulers „Dioptrik“ erscheint, Doppelintegrale werden zur Berechnung von bestimmten Integralen benutzt. A. v. Humboldt geboren.
1770 Eulers „Vollständige Anleitung zur Algebra“ erscheint. L. van Beethoven geboren. J. Cook entdeckt Australien und ergreift davon für die englische Krone Besitz.
1771 Misslungene Staroperation, Blindheit. Wohnhaus Eulers abgebrannt.
1772 Zweite Mondtheorie Eulers. Erste Teilung Polens, Herders Arbeit über den Ursprung der Sprache.
1773 Die Schiffswissenschaft Eulers erscheint in einer auf Fachleute zugeschnittenen Form. Eulers Gattin gestorben. N. Fuß kommt nach Petersburg.
1773-75 Bauernaufstände in Russland (Pugatschow).
1775 Drehimpulssatz von Euler aufgestellt.
1775-83 Nordamerikanischer Freiheitskrieg.
1776 Wiederverheiratung Eulers mit Salome Gsell. Unabhängigkeitserklärung der 13 Vereinigten Staaten (USA).
1777 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen für komplexe Funktionen durch Euler aufgestellt. J. H. Lambert gestorben. C. F. Gauß geboren.
1778 Voltaire gestorben.
1781 Kants „Kritik der reinen Vernunft“. G. E. Lessing gestorben.
1782 Daniel I Bernoulli gestorben.
1783 Euler gestorben (18. September). D'Alembert gestorben. Erste Montgolfiere. Krim an Russland. Erste deutsche Dampfmaschine „pfeift die neue Zeit ein“. England erkennt die USA an.
1786 Friedrich II. gestorben.
1787 Ch. W. Gluck gestorben.
1788 Lagranges „Analytische Mechanik“ erscheint.
1789 Sturm auf die Bastille, Große Französische Revolution. A.L. Lavoisiers bahnbrechende Abhandlung über Chemie,
1790 P. S. Laplace gestorben.
1798 Johann II Bernoulli gestorben,
1800 Johann Albrecht Euler gestorben.
1911 Erster Band der „Opera omnia Leonhardi Euleri“ erscheint (B. G. Teubner, Leipzig). Das monumentale Werk wird in diesem Jahrhundert der Vollendung entgegengehen.

10 Literatur

A. Originalarbeiten

Seit 1911 erscheinen Eulers Werke in der von Euler für den Druck vorbereiteten Fassung und der seinerzeit benutzten Sprache in einer in vier Serien aufgegliederten Edition. Jeder Band enthält Kommentare, die insbesondere in den später edierten Bänden sehr ausführlich sind, z. B.: Faber über unendliche Reihen in 1/16, Caratheodory über Variationsrechnung in 1/24, Speiser über Geometrie in I/26-29, Fleckenstein bzw. Truesdell über Mechanik in 1/5 bzw. 11/11,2 und 12-13, Habicht über Schiffstheorie in 11/21, Fellmann und Habicht über Optik in II1/9, Speiser über Philosophie in 111/11 oder Vogel über Musik in 111/11.

[1] Leonhardi Euleri Opera omnia, Leipzig-Berlin, später Zürich und Basel.
Series I: Opera mathematica [Mathematische Werke], 29 Bände.
Series II: Opera mechanica et astronomica [Mechanische und astronomische Werke], 31 Bände,
Series III: Opera physica, Miscellanea [Physikalische. Werke, Vermischtes], 12 Bände.
Series IV: Commercium epistolicum et manuscripta [Briefwechsel und Manuskripte], ca. 15 Bände geplant.
(Die Bände werden als EO Seriennummer/Bandnummer zitiert.)

Deutsche Übersetzungen und Ausgaben:

In Ostwalds Klassikern:

[2] Abhandlungen über Variationsrechnung I. (Abhandlungen von Joh. Bernoulli, Jak. Bernoulli, L. Euler). Hrsg. von. P. Stäckel. Leipzig 1914 (Band 46).

[3] Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen und allgemeinen sphärischen Trigonometrie. Herausgegeben von E. Hammer, Leipzig 1896 (Band 73).

[4] Drei Abhandlungen über Kartenprojektion. Hrsg. von A. Wangerin. Leipzig 1898 (Band 93).

[5] Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Schwingungen der ebenen elastischen Kurven. Hrsg. von Linsenbarth. Leipzig 1910 (Band 175).

[6] Vollständige Theorie der Maschinen, die durch Reaktion des Wassers in Bewegung versetzt werden. Hrsg. von E. Brauet und M. Winkelmann. Leipzig 1911 (Band 182).

[7] Drei Abhandlungen über die Auflösung von Gleichungen. Hrsg. von S. Breuer. Leipzig 1928 (Band 226).

[8] In Vorbereitung: Zur Theorie komplexer Funktionen. Hrsg. von A. P. Juschkewitsch. Leipzig 1983 (Band 261).

[8a] J. L. Lagranges Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Hrsg. von H. Weber. Leipzig 1898 (Band 103).

In Reclams Universalbibliothek:

[9] Vollständige Anleitung zur Algebra. Leipzig o. J. [1883]. Mit einer Einleitung von]. E. Hofmann. Stuttgart 1959.

[10] Briefe an eine deutsche Prinzessin. Philosophische Auswahl. Hrsg. von G. Kröber. Leipzig 1965,

Eulers wichtigste Werke, wie die „Mechanik", „Differential- und Integralrechnung", die „Dioptrik" usw. wurden im 18. und 19. Jahrhundert ins Deutsche übertragen. Da sie aber schlecht zugänglich sind, wurden sie hier nicht mit aufgeführt.

Briefwechsel:

[11] K.Bopp: Eulers und J. H. Lamberts Briefwechsel. In: Abhandlungen der preußischen Akademie der Wissenschaften. 1924, S. 7-37.

[12] G. Eneström: Briefwechsel zwischen Euler und Joh. Bernoulli bzw, Dan. Bernoulli bzw. d'Alembert. Bibliotheca mathematica, 4 (1903) 344-388, 5 (1904) 248-291, 6 (1905) 16-87 bzw. 7 (1906-07) 126-156 bzw. 11 (1911) 223-226.

[12a] P. H. Fuß: Correspondance mathematique et physique de quelques celebres geometres du XVIIeme siecle [Mathematischer und physikalischer Briefwechsel einiger berühmter Mathematiker des 18. Jahrhunderts]. Tome II St.-Petersbourg 1843. (Band I enthält wie [15] den Briefwechsel Eulers mit Goldbach.) Reprint 1968.

[13] A. P. Juschkewitsch/W. I. Smirnow: Perepiska, annotirowanny ukasatel [Briefwechsel, erläuternde Register]. Leningrad 1967.

[14] A. P. Juschkewitsch/E. Winter: Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers. 3 Bände. Berlin 1959-1976.

[15] A. P. Juschkewitsch/E. Winter: Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729-1764. Berlin 1965.

[16] A. le Sueur: Maupertuis et ses correspondants. Montreuil-sur-mer 1896,

Die Korrespondenz Eulers wird in den EO Serien IV/A künftig besser verfügbar sein. Erschienen sind bis jetzt (1981) der Registerband für den Briefwechsel (IV/A 1) sowie der Briefwechsel mit Clairaut, d'Alembert und Lagrange (IV/A 5). Vor dem Erscheinen sind die Korrespondenzbände in dieser Reihenfolge: IV/A 6 - Maupertuis und Friedrich II.; IV/A 2 - Daniel Bernoulli; IV/A 3 - restliche Bernoullis; IV/A 7 - restlicher Briefwechsel, der jedoch nicht [14] berücksichtigt. Der Briefwechsel mit Goldbach ist wegen [15] zunächst noch zurückgestellt worden.

B. Bibliographie

[17] G. Eneström: Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband IV (3 Teile). Leipzig 1910-1913,

[18] K. O. May: Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics. University of Toronto Press 1973.

[19] J. C: Poggendorf: Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Naturwissenschaften. Suppl. VIIa. Hrsg. von R. Zaunick. Berlin 1971,

C. Biographien

[20] E. T. Bell: Die großen Mathematiker (Übersetzung a. d. Amerikanischen). Düsseldorf 1967.

[21] H. Bernhardt: Leonhard Euler, In: Biographien bedeutender Mathematiker, Hrsg. von H. Wußing und W. Arnold. Berlin 1972.

[22] E. A. Fellmann: Leonhard Euler, In: Kindler Enzyklopädie. Die Großen der Weltgeschichte, Band IV. S. 495-531. Zürich 1975.

[23] O. J. Fleckenstein: Leonhard Euler. In: Die großen Deutschen. Berlin 1957.

[24] R. Fueter: Leonhard Euler. Beiheft 3 zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik". Basel 31979.

[25] N. Fuß: Lobrede auf Herrn Leonhard Euler (Übersetzung aus dem Französischen). In EO 1/1.

[26] A. P. Juschkewitsch: Leonhard Euler, In: Dictionary of Scientific Bibliography, vol. 4, p. 467-484, New York 1971.

[27] G. Kowalewski: Große Mathematiker, München-Berlin 1933, S. 173- 186.

[28] L.-G. du Pasquier: Leonard Euler et ses amis. Paris 1927.

[29] K. Reinhard: Er rechnete, wie andere atmen. Alpha 5 (1978) 100-102.

[30] A. Speiser: Leonhard Euler. In: Große Schweizer. Zürich 1938.

[31] A. Speiser: Leonhard Euler. In: Neue deutsche Biographie, Band 4. S. 688-689. Berlin 1953-72.

[32] O. Spieß: Leonhard Euler, Frauenfeld-Leipzig 1929.

[32a] R. Wolf: Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz. 4 Bände. Zürich 1858-1862.

[26] ist eine ausgezeichnete Darstellung vom Leben und Werk Eulers in komprimierter Form von einem der tiefgründigsten Euler-Kenner. Sehr lesenswert ist die lebendig und engagiert geschriebene, inhaltsreiche Abhandlung [22]. [32] ist eine anspruchsvolle Biographie, die von ihrer Frische nichts eingebüßt hat. [25] ist natürlich ein sehr interessantes Zeitdokument, das aber in Einzelheiten kritisch zu werten ist.

D. Gedenkbände

[33] P. Schafheitlin u. a. (Hrsg.): Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonhard Eulers. Leipzig-Berlin 1907.

[34] K. Schröder (Hrsg.): Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Berlin 1959.

[35] M. A. Lawrentjew u. a. (Hrsg.); Leonard Eiler. Sbornik statjei w tschest 250-letija so dnja roshdenija, predstablennych akademii nauk SSR. [Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard: Eulers der Akademie der Wissenschaften der UdSSR vorgelegten Abhandlungen], Moskau 1958.

[36] Festschrift zum 60. Geburtstag von Andreas Speiser. Zürich 1945:

[34] und [35] sind die zu den koordinierten und abgestimmten Festveranstaltungen der Akademien in der DDR und SU gehörigen Sammelbände.
Sie demonstrieren die enge Zusammenarbeit dieser wissenschaftlichen Institutionen, für die Leonhard Euler beiden ein Symbol ist. [35] ist mathematikgeschichtlich ausgerichtet, so dass jeder Beitrag sehr wichtig ist. Insgesamt vermittelt [35] ein umfassendes Bild vom Leben und Schaffen Eulers. Wie übrigens alle sowjetischen Veröffentlichungen anläßlich des 250. Geburtstages Eulers ist auch [35] mit deutschen Zusammenfassungen versehen, und umgekehrt weist [34] russische Zusammenfassungen auf, [34] enthält zum größten Teil mathematische Arbeiten. [36] bringt einige für Eulers Wirken interessante Beiträge: J. Ackeret: Eulers. letzte Arbeit; C. Caratheodory: Basel und der Beginn der Variationsrechnung; O. Spieß: Die Summe der reziproken Quadratzahlen.

E. Sekundärliteratur

[37] J. Ackeret: Untersuchungen einer nach. den Eulerschen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine. Schweizerische Bauzeitung, 123 (1944) 1,2.

[38] W. Ahrens: Lateinisch oder deutsch? Die „Sprachfrage“ bei der Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Magdeburg 1910.

[39] W. Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2 Bände. Leipzig-Berlin 21910, 21918.

[40] R. Ayoub: Euler and the zeta function [Euler und die Zeta-Funktion]. American Mathematical Monthiy, 81 (1974) 10, 1067-1086.

[41] I. G. Baschmakova/A, P, Juschkewitsch: Leonard Eiler [Leonhard Euler]. Istoriko - matematitscheskije issledowanije VII (1954) 453-521.

[42] I. G. Basmakova: Diophant und diophantische Gleichungen. (Übersetzung a. d. Russ.) Berlin 1974.

[43] O. Becker: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Frankfurt/M. 1975,

[44] J. A.Belyj: Euler und die Theorie der Parallelen. NTM 5 (1968) 12, 116-124.

[45] G. Bergmann: Über Eulers Beweis des großen Fermatschen Satzes für den Exponenten 3. Mathematische Annalen 164 (1966) 159-175.

[46] K.-R, Biermann: J. H. Lambert und die Berliner Akademie der Wissenschaften. Colloque international J. H. Lambert. Universite de Haute-Alsace. Paris 1979.

[47] K.-R. Biermann: Einige Euleriana aus dem Archiv der. Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. In [24], 21-34.

[48] E. du Bois-Reymond: Maupertuis. Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1892, S.,393-444.

[48a] H. H. von Borzeszkowski/R. Wahsner: Newton und Voltaire. Berlin 1980.

[49] S. Breuer: Das Abelsche Gleichungsproblem bei Euler. Jahresbericht der DMV 30 (1921) 158-169.

[50] W. Buchheim: William Rowan Hamilton und das Fortwirken seiner Gedanken in der modernen Physik (I). NTM 5 (1968) 12, 19-29.

[50a] P. Burckhardt: Geschichte der Stadt Basel von der Zeit der Reformation bis zur Gegenwart. Basel 21957,

[51] M. Cantor (Hrsg.): Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik. Band 3 und 4. Leipzig 1901 und 1908.

[51a] P. Costabel: L'affaire Maupertuis - Koenig et les „questions de fait“ [Der Fall Maupertuis - Koenig und die „Wirklichkeitsfragen“]. In: Arithmos-Arrythmos. Festschrift für J.O. Fleckenstein. Hrsg. von K. Figala u. E. H. Berninger. S. 29-48. München 1981.

[52] F. Dannemann: Die Naturwissenschaften in ihrer Entwicklung und ihrem Zusammenhang, Band 2 und 3, Leipzig 1921.

[52a] H. Degering: Eine Berufung an die Königlich-Preußische Bibliothek im Jahre 1765/66 ...In: Aus der Handschriften-Abteilung der Preußischen Staatsbibliothek. Hrsg. von H.Degering, K.Christ und J. Schuster. S. 1-54. Berlin 1922.

[53] L. E. Dickson: History of the theory of numbers [Geschichte der Zahlentheorie]. Reprint 1934 New York,

[54] H. M, Edwards: Advanced Calculus [Höhere Analysis]. Boston 1969,

[55] H. M. Edwards: Das Fermatsche Theorem (Übersetzung a. d. Amer.). Spektrum der Wissenschaft 1 (1978) 39-45.

[56] G. Eneström: Über eine von Euler aufgestellte Konvergenzbedingung. Bibliotheca mathematica 6 (1905) 186-189.

[57] K. Euler: Das Geschlecht der Euler-Schölpi. Gießen 1955 (insbesondere S, 45ff. und 252ff.).

[57a] E. A. Fellmann: Eulersche Integrale und spezielle ebene Kurven, Die Sinusspiralen. Verhandl. Naturf. Ges. Basel, Band 80 (1970) 2, 286-302.

[57b] M. Fontius: Voltaire in Berlin. Berlin 1966.

[58] P. Funk: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik (Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Band 94). Berlin 1962.

[59] M. Gardner: Mathematical Games [Mathematische Spiele]. Scientific American (1959) 11. Erweiterte deutsche Übersetzung in: M. Gardner: Mathematische Knobeleien. Braunschweig 1963.

[60] H. H. Goldstine: A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century. New York-Heidelberg-Berlin 1977.

[60a] J. H. Graf: Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in bernischen Landen. 3. Heft, 1. Abteilung. Bern und Basel 1889.

[61] W. Habicht: Die Serien I–III der Euler-Edition der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel 86 (1977) 1/2, 77-85.

[61a] R. Habs (Hrsg.): Leibniz. Kleinere philosophische Schriften. Reclams Universalbibliothek, Band 59. Leipzig 1966.

[62] A. Harnack: Geschichte der königlichen preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Band 1 und 2. Berlin 1900.

[63] F. G. Hartweg: Leonhard Eulers Tätigkeiint der französisch-reformierten Kirche vonBerlin, Die Hugenottenkirche 32 (1979) 4, 14-15 und 5, 17-18,

[63a] H. v. Helmholtz: Rede über die Entdeckungsgeschichte des Prinzips der kleinsten Aktion. In: [62], Band 2, S. 282-296,

[64] P. Hinneberg (Hrsg.): Prinzip der kleinsten Aktion (Kultur der Gegenwart, Band IIT). Leipzig 1906,

[65] J. E. Hofmann: Geschichte der Mathematik, Band III. (Sammlung Göschen, Band 882) Berlin 1957.

[66] J. E. Hofmann: Pierre de Fermat. Sci. Hist, 13 (1971) 4, 198-238.

[67] J. E. Hofmann: Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge

und Bedeutung. Archive Hist. Ex. Sc. 1 (1961) 2, 122-159.

[68] Istoriko - matematitscheskije issledowanija [Mathematikgeschichtliche Forschungen]. Moskau seit 1948. Folgende Bände enthalten Bei- träge über Euler: II, V, VI, VII, X, XII, XII, XIV, XVI, XVII, XVIIL XIX, XXI XXI.

[69] A. P. Juschkewitsch: Istorija matematika w Rossii do 1917 goda [Geschichte der Mathematik in Russland bis 1917]. Moskau 1968.

[70] A. P. Juschkewitsch: Istorija matematika [Geschichte der Mathematik] Band 3. Moskau 1972,

[71] A. P. Juschkewitsch: Euler und die Universität Halle. Nova Acta Leopoldina, N. F. 27 (1963).

[72] A. P. Juschkewitsch: Shisn i matematitscheskoje twortschestwo L. Eilera [Das Leben und mathematische Werk L. Eulers]. Uspechi matematitscheskich nauk XII, 4 (76) (1957) 3-28.

[73] A. P. Juschkewitsch: Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis, In [34], S. 224-244.

[74] C. Kaulfuß-Diesch: Maupertuisiana. Zentralblatt für das Bibliothekswesen 39 (1922) 525-546,

[74a] G. D. Komkov u. a.: Geschichte der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. (Übersetzung a. d. Russischen). Berlin 1981.

[75] Ju. Ch. Koplewitsch u.a. (Hrsg.): Rukopisnije materialy Leonarda Eilera wo archive akademii nauk SSR [Handschriftliche Materialien Leonhard - Eulers im Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR]. 2 Bände (enthalten u. a. einen Neudruck von [17], Verzeichnis der Korrespondenten Eulers). Moskau 1962, 1965.

[76] Ju. Ch. Koplewitsch: Materialy k biografii L. Eilera [Materialien zur Biographie L. Eulers]. Istoriko-matematitscheskije issledowanija (1957) 9-65,

[77] Ju. Ch. Koplewitsch: Wosnikowenije nautschnich akademii [Die Entwicklung der wissenschaftlichen Akademien]. Leningrad 1974.

[78] L. Kronecker: Zur Geschichte des Reziprozitätsgesetzes. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1875, 267-274, bzw. Werke Band II Leipzig 1897, 1-10.

[79] I. Lakatos: Beweise und Widerlegungen (Übersetzung a. d. Engl.). Braunschweig 1979.

[80] E. Landau: Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zeta-Funktion. Bibliotheca mathematica 7 (1906-1907) 69-79.

[81] I. G. Melnikow: Otkrytije Eilerom udobnych tschisel [Eulers Entdeckung der passenden Zahlen]. Istor.-mat. issledow. XIII (1960) 187-216.

[82] I. G. Melnikow: Eiler i ewo arifmetitscheskije raboty [Eulers zahlentheoretische Arbeiten]. Istor.-mat. issledow. X (1957) 211-228.

[83] I. G. Melnikow: K woprosu ob eilerowskom opredelnii udobnych tschisel [Über die Eulersche Definition passender Zahlen]. Istor.-mat. issledow. XXI (1976) 110-112,

[84] G. K. Michailow: K perejesdu Leonarda Eilera wo Peterburg [Zur Übersiedlung Eulers nach Petersburg]. Iswestija AN SSSR, otdelenije technitscheskich nauk 3 (1957) 10-37.

[85] G. K. Michailow: Leonard Eiler [Leonhard Euler]. Iswestija akademii nauk SSR, otdelenije technitscheskich nauk 1 (1955) 2-26.

[86] G. K. Michailow: Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler. In [34], S. 256-279, vgl. auch den entsprechenden Artikel gemeinsam mit W. I. Smirnow in [35], S. 47-78.

[871 I. Mittenzwei: Friedrich IL. Berlin 1979.

[88] O. Neumann: Bemerkungen aus heutiger Sicht über Gauß Beiträge zu Zahlentheorie, Algebra und Funktionstheorie. NTM 16 (1979) 2, 22-39.

[90] E. P. Oshigowa: Raswitije teorii tschisel w Rossii [Entwicklung der Zahlentheorie in Russland]. Leningrad 1972,

[91] A. Pringsheim: Über ein Eulersches Konvergenzkriterium. Bibliotheca mathematica 6 (1905) 252-256.

[92] M. Raith: Das kirchliche Leben seit der Reformation. In: Riehen, Geschichte eines Dorfes, Hrsg.

von A. Brucker u. a. Riehen 1972.

[93] M. Raith: Leonhard Euler - ein Riehener? Riehener Zeitung 51/52 (1979) 9.

[93a] P. Schafheitlin: Eine ungedruckte Arbeit Eulers. Sitzber. Berl. Math. Ges. (1921) 21.

[93b] P. Schafheitlin: Eine ungedruckte Rede Eulers. Dieselben Sitzungsberichte (1925) 24.

[93c] W. Scharlau/H. Opolka: Von Fermat bis Minkowski. Berlin 1980.

[93d] E. Schuhmann: Lob der Mathematik. Übersetzung einer Schulrede des 14jährigen Euler. [Übersetzung von [93b].] In Vorbereitung.

[94] C. J. Scriba: Leonhard Euler und die Berechnung der Tonleiter. In: Ars Organi 1962.

[95] A. Speiser: Naturphilosophische Untersuchungen von Euler und Riemann. Journal für reine und angewandte Mathematik 157 (1927) 105- 114.

[96] A. Speiser: Klassische Stücke der Mathematik. Zürich 1925.

[97] A. Speiser: Leonhard Euler und die deutsche Philosophie. Zürich 1934,

[98] A. Speiser: Einteilung der sämtlichen Werke Leonhard Eulers. Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 20, p. 288.

[98a] A. Speiser: Die Basler Mathematiker, Basel 1939.

[98b] J. Steinig: On Euler's Ideonal Numbers. Elem. d. Math. 21 (1966) 73-88.

[99] W. Stieda: Die Übersiedlung Leonhard Eulers von Berlin nach St. Petersburg. Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, 83. Band, 3. Heft. Leipzig 1931.

[100] D. J. Struik: Abriss der Geschichte der Mathematik (Übersetzung a. d. Amerikanischen). Berlin 71980.

[101] F. Stüssi: 200 Jahre Eulersche Knickformel. Schweizerische Bauzeitung 123 (1944) 1.

[102] I. Szabo: Geschichte der mechanischen Prinzipien (Wissenschaft und Kultur, Band 32). Basel 21979.

[103] H. Thiersch: Leonhard Euler's „verschollenes“ Bildnis und sein Maler. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, philologisch-historische Klasse 3 (1930) 193-219.

[104] H. Thiersch: Weitere Beiträge zur Ikonographie Leonhard und Albrecht Eulers. Dieselben Nachrichten 4 (1930) 219-249. Vgl. auch die Artikel von M. E. Glinka: Versuch einer Ikonographie, und G. A. Knjasew: Die Silhouettenbildnisse Leonhard Eulers von F. Anting. Beide in [35], S. 569-588 bzw. 590-596.

[105] J. Tropfke: Geschichte der Elementarmathematik. 7 Bände. Leipzig 1921-1924.

[106] C. A. Truesdell: Die Entwicklung des Dralisatzes. ZAMM 44. (1964) 4/5, 149-158.

[107] C. A. Truesdell: Eulers Leistungen in der Mechanik. L'enseignement mathematique. 3 (1957) 4, 251-262.

[108] P. L. Tschebyschew: Teorija sravneni. St. Petersburg 1849. Deutsche Übersetzung: Theorie der Congruenzen. Berlin 1888.

[109] G. Valentin: Eulers Wohnhaus in Berlin. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 15 (1906) 5, 270.

[110] H. Wieleitner: Geschichte der Mathematik. II Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. I. Hälfte: Arithmetik, Algebra und Analysis, Leipzig 1911.

[111] E. Winter mit M. Winter: Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746-1766. Berlin 1957.

[112] E. Winter u.a.: Die deutsch-russische Begegnung und Leonhard Euler. Berlin 1958.

[113] H. Wußing (Hrsg.): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, Berlin 1979.

[114] R. Calinger: Euler's „Letters to a Princess of Germany“ As an Expression of his Mature Scientific Outlook [Eulers „Briefe an eine deutsche Prinzessin“ als ein Ausdruck seiner reifen wissenschaftlichen Ansicht]. Archive Hist. Ex. Sc. 15 (1976) 3, 211-233,