В. В. Прасолов
Т. И. Голенищева-Кутузова
А. Я. Канель-Белов
Ю. Г. Кудряшов
И. В. Ященко

Московские математические олимпиады 1935—1957 г.

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
М82

Авторы:
В. В. Прасолов,
Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Я. Канель-Белов,
Ю. Г. Кудряшов, И. В. Ященко

М82 **Московские математические олимпиады 1935—1957 г.** / В. В. Прасолов и др. — М.: МЦНМО, 2010. — 344 с.
ISBN 978-5-94057-600-6

В книге собраны задачи Московских математических олимпиад 1935—1957 г. с ответами, указаниями и подробными решениями. В дополнениях приведены основные факты, используемые в решении олимпиадных задач.

Все задачи в том или ином смысле нестандартные. Их решение требует смекалки, сообразительности, а иногда и многочасовых размышлений.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков, школьников старших классов, студентов педагогических специальностей. Книга будет интересна всем любителям красивых математических задач.

ББК 74.200.58:22.1

Прасолов Виктор Васильевич
Голенищева-Кутузова Татьяна Игоревна
Канель-Белов Алексей Яковлевич
Кудряшов Юрий Георгиевич
Ященко Иван Валериевич

МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ
1935—1957 г.

Корректор *О. А. Васильева*
Технический редактор *В. Ю. Радионов*

Подписано в печать 10.03.2010 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная №1.
Печать офсетная. Печ. л. 21,5. Тираж 2000 экз. Заказ № ????

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-600-6

Предисловие

В этой книге собраны условия задач, дававшихся на Московских математических олимпиадах, начиная с первой, проходившей весной 1935 года, и кончая двадцатой, состоявшейся в 1957 году. В книге приводятся ответы, даются указания, а в заключение приводятся полные и подробные решения всех задач.

Московские математические олимпиады являются частью нашей отечественной культуры, которой все мы вправе гордиться. На протяжении семидесяти пяти лет энтузиасты, вдохновленные стремлением найти среди школьников тех, кто предрасположен к интеллектуальному творчеству, и желанием увлечь их красотой нашей науки, организуют кружки, циклы лекций, издают подготовительные сборники задач, наконец, проводят сами олимпиады, которые воистину становятся математическими праздниками.

Московским математическим олимпиадам посвящена значительная литература. Первая книга: «Московские математические олимпиады 1935 и 1936 гг.» была написана Р. Н. Бончковским (1905—1942), талантливым математиком и популяризатором науки, основавшим первую серию сборников «Математическое просвещение». Р. Н. Бончковский погиб под Сталинградом. В середине шестидесятых, в период расцвета московской математики и интереса к науке среди школьников, вышла тиражом 122 тыс. экземпляров книга «Сборник задач московских математических олимпиад» (составитель, автор указаний и решений А. А. Леман, под редакцией В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965). В этой книге есть раздел, посвященный задачам, взятым из подготовительных сборников к олимпиадам; приведены условия задач первых двадцати семи олимпиад и даны указания и решения некоторых задач олимпиад, начиная 1952 года по 1964. Через два с лишком десятка лет вышла книга Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго «Московские математические олимпиады» (под редакцией А. Н. Колмогорова, М.: Просвещение, 1986). В ней приведены условия задач, ответы, указания и решения всех олимпиад, вплоть до 1985 года. Книга была издана неслыханным тиражом 680 000 экземпляров. Об истории зарождения олимпиад, их развитии, организации и тех, кто стоял у истоков олимпиадного движения, читатель может узнать из замечательного очерка В. Г. Болтянского и И. М. Яглома «Школьный математический кружок при МГУ и московские математические олимпиады», открывающего сборник А. А. Лемана, из предисловия авторов к книге Гальперина и Толпыго, из статьи автора настоящего предисловия «Размышления о первых московских математических олимпиадах», помещенной во втором выпуске третьей серии «Математического просвещения» (М.: МЦНМО, 1998). Сборник задач Лемана, книга Гальперина и Толпыго и все выпуски третьей серии «Математического просвещения» содержатся в Интернете. В библиографии книги Гальперина и Толпыго читатель найдет множество книг и статей, так или иначе связанных с Московскими математическими олимпиадами.

Хочу сказать отдельно о предисловии А. Н. Колмогорова к книге Гальперина и Толпыго, вышедшей в свет в 1986 году. Андрей Николаевич скончался 20 октября 1987 года. В момент, когда ему надо было писать предисловие, он был смертельно болен. В ту пору он фактически лишился зрения и возможности говорить. Свои тексты Андрей Николаевич диктовал, и на произнесение одного слова у него уходило несколько мучительных секунд. Прочтите его поразительное предисловие, в котором великий ученый благословляет своих читателей к творческим свершениям.

Представляя книгу, посвященную первым двадцати олимпиадам, мне хочется вспомнить всех председателей оргкомитетов этих творческих состязаний. Каждый из них сыграл выдающуюся роль и в олимпиадном движении, и в самом формировании московской математики, и в жизни механико-математического факультета Московского университета. Председателями оргкомитетов первых двадцати Московских математических олимпиад были: П. С. Александров (олимпиада 1935 г.), Н. А. Глаголев (1936), А. Н. Колмогоров (1937), А. Г. Курош (1938), Л. А. Люстерник (1939), Л. С. Понтрягин (1940), А. О. Гельфонд (1941), И. М. Гельфанд (1945), С. А. Гальперн (1946), И. Г. Петровский (1947), В. В. Немыцкий (1948), А. И. Маркушевич (1949), М. А. Крейнес (1950), Б. Н. Делоне (1951), П. К. Рашевский (1952), Д. Е. Меньшов (1953), С. В. Бахвалов (1954), В. В. Немыцкий (1955), Е. Б. Дынкин (1956), О. А. Олейник (1957).

Несколько лет тому назад в МЦНМО (Московском центре непрерывного математического образования) родилась идея привести условия задач, сопроводить ответами, указаниями и подробными решениями задачи всех Московских математических олимпиад от самой первой и до наших дней. В осуществление этой идеи сделаны первые два шага: вышла книга «Московские математические олимпиады 1993—2005» (авторы Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Ященко, под редакцией В. М. Тихомирова. М. : МЦНМО, 2006) и книга, которая сейчас находится в руках читателя. Остается сделать два шага, чтобы покрыть расстояние от 1958 до 1992 гг. В заключение хочу пожелать новому поколению готовиться к встрече столетнего юбилея Московских математических олимпиад. А там, как говорится, посмотрим.

В. М. Тихомиров

Условия задач

1935 год (I олимпиада)

Первый тур

1-й вариант

1. Определить отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно $25:24$.

2. Построить треугольник по данным двум сторонам a и b и биссектрисе m угла между ними.

3. Пирамида, все боковые рёбра которой наклонены к плоскости основания под углом φ, имеет в основании равнобедренный треугольник с углом α, заключённым между равными сторонами. Определить двугранный угол при ребре, соединяющем вершину пирамиды с вершиной угла α.

2-й вариант

1. Железнодорожный поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найти длину и скорость поезда.

2. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трёх данных параллельных прямых.

3. Найти объём правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны a, а плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

3-й вариант

1. Составить две прогрессии: арифметическую и геометрическую, каждую из четырёх членов; при этом если сложить одноимённые члены обеих прогрессий, то должны получиться следующие числа: 27, 27, 39, 87.

2. Доказать, что если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то радиус вписанного круга равен $\frac{1}{3}$ одной из высот.

3. Высота усечённого конуса равна радиусу его большего основания; периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен периметру равностороннего треугольника, вписанного в большее основание. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

4-й вариант

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2, \\ x + y + 2z = 4(a^2 + 1), \\ z^2 - xy = a^2. \end{cases}$$

2. В треугольнике ABC из произвольной точки D на стороне AB проведены две прямые, параллельные сторонам AC и BC, пересекающие BC и AC соответственно в точках F и G. Доказать, что сумма длин окружностей, описанных около треугольников ADG и BDF, равна длине окружности, описанной около треугольника ABC.

3. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой сектор с углом в $120°$; в конус вписана треугольная пирамида, углы основания которой составляют арифметическую прогрессию с разностью $15°$. Определить угол наклона к плоскости основания наименьшей из боковых граней.

Второй тур

Серия A

1. Дана окружность и на ней три точки M, N, P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

2. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом. Доказать, что из остальных точек поверхности куба диагональ видна под бо́льшим углом, чем из найденных.

3. В двух различных плоскостях лежат два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Прямая AB пересекается с прямой A_1B_1, прямая BC — с прямой B_1C_1, прямая CA — с прямой C_1A_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 или все три пересекаются в одной точке, или параллельны друг другу.

Серия B

1. Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1? \end{cases}$$

2. Решить[1] систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3-y^3=26, \\ x^2y-xy^2=6. \end{cases}$$

3. Найти сумму

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3.$$

Серия C

1. Выбраны 6 различных цветов; требуется раскрасить 6 граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами можно это сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в 12 различных цветов.

---

[1] Найти все решения, включая комплексные. — *Прим. ред.*

2. Сколькими различными способами можно разложить целое положительное число n на сумму трёх положительных целых слагаемых? При этом два разложения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за различные.

3. Будем обозначать через $M(a, b)$ — общее наименьшее кратное двух чисел a и b, $D(a, b)$ — общий наибольший делитель двух чисел a и b.

Доказать формулу $M(a, b) \cdot D(a, b) = ab$.

Для трёх чисел доказать формулу

$$\frac{M(a, b, c) \cdot D(a, b) \cdot D(b, c) \cdot D(c, a)}{D(a, b, c)} = abc.$$

1936 год (II олимпиада)

Второй тур

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x^5 + y^5 = b^5. \end{cases}$$

2. На плоскости дан угол, образованный двумя лучами a и b, и некоторая точка M. Провести через точку M прямую c так, чтобы треугольник, образованный прямыми a, b и c, имел периметр данной величины.

3. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

4. Сколькими различными способами можно представить 1 000 000 в виде произведения трёх натуральных[1] чисел? Произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются тождественными.

5. В пространстве расположены три плоскости и шар. Сколькими различными способами можно поместить в

---

[1] В оригинальной формулировке вместо *натуральных* говорилось *целых*, но имелись в виду именно натуральные числа — *Прим. ред.*

пространстве второй шар так, чтобы он касался трёх данных плоскостей и первого шара?[1]

1937 год (III олимпиада)

Первый тур

1. Решить систему:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

2. Даны прямая и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой такую точку M, чтобы сумма $MA+MB$ равнялась заданному отрезку.

3. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка[2]. Доказать, что объём тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков не зависит от положения последних.

Второй тур

1. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две из них провести окружность так, чтобы три проведенные окружности имели в точках пересечения взаимно перпендикулярные касательные.

2. В пространстве расположен правильный додекаэдр. Сколькими способами можно провести плоскость так, чтобы она высекла на додекаэдре правильный шестиугольник?

3. На сколько частей разделяют n-угольник[3] его диагонали, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?

---

[1] В этой задаче речь фактически идёт о касании сфер, т. е. не предполагается, что шары могут касаться только внешним образом. — *Прим. ред.*

[2] На каждой прямой по отрезку. — *Прим. ред.*

[3] Выпуклый. — *Прим. ред.*

1938 год (IV олимпиада)

Второй тур

1. В пространстве даны точки O_1, O_2, O_3 и точка A. Точка A симметрично отражается относительно точки O_1, полученная точка A_1 — относительно O_2, полученная точка A_2 — относительно O_3. Получаем некоторую точку A_3, которую также последовательно отражаем относительно O_1, O_2, O_3. Доказать, что полученная точка совпадает с A.

2. На сколько частей могут[1] разделить пространство n плоскостей?

3. Построить треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании.

4. Сколько существует натуральных[2] чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

1939 год (V олимпиада)

Первый тур

1. Решить[3] систему уравнений:

$$\begin{cases} 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = b^3, \\ x + y + z = 2b, \\ x^2 + y^2 - z^2 = b^2. \end{cases}$$

---

[1] По-видимому, в задаче требовалось найти наибольшее число частей. В связи с этим мы предполагаем, что набор плоскостей невырожденный в том смысле, что любые три плоскости пересекаются в одной точке и никакие четыре плоскости не имеют общей точки (а при $n = 2$ нужно потребовать, чтобы плоскости не были параллельны). Если же рассматривать вырожденные наборы плоскостей, то возникает много вариантов. Описать все возможные ответы в этом случае очень трудно. — *Прим. ред.*

[2] В оригинальной формулировке вместо *натуральных* говорилось *целых*, но имелись в виду именно натуральные числа. — *Прим. ред.*

[3] Требуется найти все решения, в том числе и комплексные. — *Прим. ред.*

2. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.

3. Даны три точки A, B, C. Через точку A провести прямую так, чтобы сумма расстояний от точек B и C до этой прямой была равна заданному отрезку.

4. Решить уравнение $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

5. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведёнными из той же вершины.

Второй тур

1. Разложить на целые рациональные множители выражение $a^{10}+a^5+1$.

2. Даны два многочлена от переменной x с целыми коэффициентами. Произведение их есть многочлен от переменной x с чётными коэффициентами, не все из которых делятся на 4. Доказать, что в одном из многочленов все коэффициенты чётные, а в другом — хоть один нечётный.

3. Даны две точки A и B и окружность. Найти на окружности точку X так, чтобы прямые AX и BX отсекли на окружности хорду CD, параллельную данной прямой MN.

4. Найти остаток от деления на 7 числа

$$10^{10}+10^{(10^2)}+10^{(10^3)}+\ldots+10^{(10^{10})}.$$

5. Дана правильная пирамида. Из произвольной точки P её основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания. Доказать, что сумма отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней пирамиды не зависит от выбора точки P на основании.

6. На какое самое большее число частей можно разбить пространство пятью сферами?

1940 год (VI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Разложить на множители: $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

2. Пароход от Горького до Астрахани идёт 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

3. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

4. Провести данным радиусом окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности. Сколько решений имеет эта задача?

9—10 класс

1. Решить[1] систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2)=2b^5, \\ x+y=b. \end{cases}$$

2. Все целые числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 206 788-м месте.

3. Построить окружность, равноудалённую от четырёх точек плоскости. Сколько решений имеет задача?

4. В плоскости даны две прямые. Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от этих прямых равна заданному отрезку.

5. Факториалом числа n называется произведение всех целых чисел от 1 до n включительно. Найти все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

Второй тур

7—8 класс

1. Найти четырёхзначное число, являющееся точным квадратом и такое, что две первые цифры одинаковы между собой и две последние также.

2. Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. Доказать, что $DC=AD+BD$.

[1] Требуется найти все решения, в том числе и комплексные. — *Прим. ред.*

3. Данным четырёхугольником неправильной формы настлать паркет, т. е. покрыть всю плоскость четырёхугольниками, равными данному, без промежутков и перекрытий.

4. Сколько существует пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 7?

9—10 класс

1. На бесконечном конусе, угол развёртки которого равен α, взята точка. Из этой точки в обе стороны проводится линия перпендикулярно образующей так, что после развёртки она превращается в отрезки прямых. Определить число её самопересечений.

2. Что больше: 300! или 100^{300}?

3. Центр O описанной около треугольника ABC окружности отражается симметрично относительно каждой из сторон. По трём полученным точкам O_1, O_2, O_3 восстановить треугольник ABC, если все остальное стёрто.

4. Доказать неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$$

(a_1, a_2, …, a_n — положительные числа).

5. Сколько существует положительных целых чисел x, меньших 10 000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7?

1941 год (VII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Построить треугольник по высоте и медиане, выходящим из одной вершины, и радиусу описанного круга.

2. Дописать к 523… три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

3. Дан четырёхугольник; A, B, C, D — последовательные середины его сторон, P, Q — середины диагоналей. Доказать, что треугольник BCP равен треугольнику ADQ.

4. Через точку P, лежащую вне окружности, проводятся всевозможные прямые, пересекающие эту окружность. Найти множество середин хорд, отсекаемых окружностью на этих прямых.

5. Доказать, что произведение четырёх последовательных целых чисел в сумме с единицей даёт полный квадрат.

9—10 класс

1. См. задачу 2 для 7—8 классов.

2. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что их центры лежат в вершинах некоторого квадрата.

3. Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

принимающий при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, не имеет целых корней.

4. Построить треугольник ABC по точкам M и N — основаниям высот AM и BN — и прямой, на которой лежит сторона AB.

5. Решить уравнение:

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x + 2.$$

6. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \frac{x}{100}?$$

Второй тур

7—8 класс

1. Доказать, что из 5 попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

2. Дан треугольник ABC. Требуется разрезать его на наименьшее число частей так, чтобы, перевернув эти части на другую сторону, из них можно было сложить тот же треугольник ABC.

3. Дан треугольник ABC. Точка M, лежащая внутри него, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC, затем параллельно стороне CA и т. д. Доказать, что через некоторое число таких шагов точка вернётся в исходное положение, и найти это число.

4. Найти целое число a, при котором

$$(x-a)(x-10)+1$$

разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

5. Доказать, что квадрат любого простого числа $p>3$ при делении на 12 даёт в остатке 1.

6. Построить треугольник ABC по трём точкам H_1, H_2 и H_3, которые являются симметричными отражениями точки пересечения высот искомого треугольника относительно его сторон.

9—10 класс

1. Доказать, что из шести попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

2. Некоторое количество точек расположено на плоскости так, что каждые 3 из них можно заключить в круг радиуса $r=1$. Доказать, что тогда и все точки можно заключить в круг радиуса 1.

3. Найти такие отличные от нуля не равные между собой целые числа a, b, c, чтобы выражение

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

разлагалось в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

4. Решить в целых числах уравнение

$$x+y=x^2-xy+y^2.$$

5. В пространстве даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Найти множество середин всех отрезков данной длины, концы которых лежат на этих прямых.

6. Построить прямоугольный треугольник по двум медианам, проведённым к катетам.

1945 год (VIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Разделить $a^{128}-b^{128}$ на

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64}).$$

2. Доказать, что при любом целом $n \geqslant 2$ сумма

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

больше $\frac{1}{2}$.

3. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, даёт полный квадрат. Найти все такие числа.

4. Доказать, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

5. К двум окружностям, касающимся извне, проведены общие внешние касательные, и точки касания соединены между собой. Доказать, что в полученном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

9—10 класс

1. Разделить $a^{2^k}-b^{2^k}$ на

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}}).$$

2. Найти трёхзначное число, всякая целая степень которого оканчивается на три цифры, составляющие исходное число (в том же порядке).

3. Система уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений системы уменьшается до трёх или до двух?

4. Прямоугольный треугольник ABC движется по плоскости так, что концы его гипотенузы BC скользят по сторонам данного прямого угла. Доказать, что множеством точек A является отрезок, и найти его длину.

Второй тур

7—8 класс

1. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найти сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

2. Из картона вырезали два одинаковых многоугольника, совместили их и проткнули в некоторой точке булавкой. При повороте одного из многоугольников около этой «оси» на $25^\circ 30'$ он снова совместился со вторым многоугольником. Каково наименьшее возможное число сторон у таких многоугольников?

3. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Доказать, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ части диагонали ($AQ = \frac{AC}{n+1}$).

4. Вершины A, B, C треугольника ABC соединены отрезками с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах треугольника. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

9—10 класс

1. Решить в целых числах уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3.$$

2. Некоторые из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны $+1$, остальные равны -1. Доказать, что

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \ldots + a_n\sqrt{2}}}}.$$

В частности, при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ имеем

$$2\sin\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \\ = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}.$$

3. Окружность радиуса, равного высоте некоторого правильного треугольника, катится по стороне этого треугольника. Доказать, что дуга, высекаемая сторонами треугольника на окружности, всё время равна 60°.

1946 год (IX олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике?

2. На прямой даны 3 точки A, B, C. На отрезке AB построен равносторонний треугольник ABC_1, на отрезке BC построен равносторонний треугольник BCA_1. Точка M — середина отрезка AA_1, точка N — середина отрезка CC_1. Доказать, что треугольник BMN — равносторонний. (Точка B лежит между точками A и C; точки A_1 и C_1 расположены по одну сторону от прямой AB.)

3. Найти четырёхзначное число, которое при делении на 131 даёт в остатке 112, а при делении на 132 даёт в остатке 98.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ x_2+x_3+x_4=9, \\ x_3+x_4+x_5=3, \\ x_4+x_5+x_6=-3, \\ x_5+x_6+x_7=-9, \\ x_6+x_7+x_8=-6, \\ x_7+x_8+x_1=-2, \\ x_8+x_1+x_2=2. \end{cases}$$

5. Доказать, что в произведении

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}+x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не остаётся членов, содержащих x в нечётной степени.

9—10 класс

1. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения дана точка A. Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

2. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключённый между сторонами угла, делится в точке A пополам.

3. Доказать, что n^2+3n+5 ни при каком целом n не делится на 121.

4. Доказать, что для любого натурального n справедливо соотношение:

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n \cdot (2n-1)!!\,.$$

5. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha < \beta$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

Второй тур

7—8 класс

1. В шахматном турнире[1] участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения.

2. Докажите, что выражение

$$x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$$

не равно 33 ни при каких целых значениях x и y.

3. На сторонах угла AOB от вершины O отложены отрезки OA и OB, причем $OA > OB$. На отрезке OA взята точка M, на продолжении отрезка OB за точку B — точка N так, что $AM = BN = x$. Найти значение x, при котором отрезок MN имеет наименьшую длину.

4. Из тридцати пунктов A_1, A_2, ..., A_{30}, расположенных на прямой MN на равных расстояниях друг от друга, выходят тридцать прямых дорог. Эти дороги располагаются по одну сторону от прямой MN и образуют с MN следующие углы[2]:

---

[1] По правилам шахматного турнира каждый из участников турнира играет с каждым по одной партии. Если один из играющих выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает нуль очков. В случае ничьей играющие получают по 1/2 очка.

[2] Имеются в виду углы, отсчитываемые против часовой стрелки от прямой MN до соответствующей дороги. — *Прим. ред.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	60°	30°	15°	20°	155°	45°	10°	35°	140°	50°

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
α	125°	65°	85°	86°	80°	75°	78°	115°	95°	25°

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	28°	158°	30°	25°	5°	15°	160°	170°	20°	158°

Из всех тридцати пунктов выезжают одновременно тридцать автомобилей, едущих, никуда не сворачивая, по этим дорогам с одинаковой скоростью. На каждом из перекрёстков установлено по шлагбауму. Как только первая по времени машина проезжает перекрёсток, шлагбаум закрывается и преграждает путь *всем* следующим машинам, попадающим на этот перекрёсток. Какие из машин проедут все перекрёстки на своём пути, а какие застрянут?

5. Автобусная сеть города устроена следующим образом:

1°) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары[1] маршрутов найдётся, и притом единственная, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте ровно три остановки.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

9—10 класс

1. В шахматном турнире участвовали ученики IX и X классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники? Найти все решения.

2. Дан ряд чисел: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ..., в котором каждое число, начиная с третьего, рав-

[1] Предполагается, что есть хотя бы два маршрута. — *Прим. ред.*

но сумме двух предыдущих. Найдётся ли среди первых ста миллионов одного (10^8+1) членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

3. На сторонах PQ, QR, RP треугольника PQR отложены отрезки AB, CD, EF. Внутри треугольника задана точка S_0. Найти геометрическое место точек S, лежащих внутри треугольника PQR, для которых сумма площадей треугольников SAB, SCD, SEF равна сумме площадей треугольников S_0AB, S_0CD, S_0EF. Рассмотреть особый случай, когда

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{CD}{QR}=\frac{EF}{RP}.$$

4. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что:

1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдётся, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте не менее трёх остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

5. См. задачу 4 для 7—8 классов.

1947 год (X олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Определить коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1+x^5+x^7)^{20}.$$

2. Какой остаток даёт $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ при делении на $(x-1)$?

3. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ есть хотя бы одно число, взаимно простое с остальными четырьмя из этих чисел.

4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Сторонами, противоположными вершинам A, B, C, D, E, мы называем соответственно отрезки CD, DE, EA, AB, BC. Докажите, что если произвольную[1] точку M, лежащую внутри пятиугольника, соединить прямыми со всеми его вершинами, то из этих прямых либо ровно одна, либо ровно три, либо ровно пять пересекают стороны пятиугольника, противоположные вершинам, через которые они проходят.

5. Точка O является точкой пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Докажите, что три окружности, проходящие: первая — через точки O, A, B, вторая — через точки O, B, C и третья — через точки O, C, A, равны между собой.

9—10 класс

1. В каком из выражений:

$$(1-x^2+x^3)^{1000}, \quad (1+x^2-x^3)^{1000}$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

2. Вычислить с пятью десятичными знаками (т. е. с точностью до 0,00001) произведение:

$$\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{10^{99}}\right).$$

Докажите точность полученных знаков.

3. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+9$ есть число, хотя бы одно, взаимно простое с остальными девятью из этих чисел.

4. См. задачу 4 для 7—8 классов.

---

[1] В действительности нужно исключить точки диагоналей, потому что в этом случае проведённые прямые могут проходить не через внутренние точки сторон, а через вершины. Но если проведённые диагонали не рассматривать или считать их дважды (потому что они проводятся из двух вершин), то утверждение остаётся верным. — *Прим. ред.*

5. Найти все прямые в пространстве, проходящие через данную точку M на данном расстоянии d от данной прямой AB.

Второй тур

7—8 класс

1. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, алюминиевые, остальные[1] дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи 11 взвешиваний на весах с двумя чашечками без гирь определить число дюралевых кубиков?

2. Докажите, что выпуклый 13-угольник нельзя разрезать на параллелограммы.

3. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 199, 200 произвольно выбрали сто одно число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

4. Расположите[2] 4 точки так, чтобы при измерении всех попарных расстояний между ними получалось только два различных числа. Отыщите все такие расположения.

9—10 класс

1. В треугольной пирамиде все 4 грани имеют одинаковую площадь. Докажите, что они равны.

2. k проволочных треугольников расположены в пространстве так, что:

1) каждые 2 из них имеют ровно одну общую вершину,

2) в каждой вершине сходится одно и то же число p треугольников.

Найдите все значения k и p, при которых указанное расположение возможно.

---

[1] Предполагается, что все кубики могут быть алюминиевыми, но они не могут быть все дюралевыми (если все кубики окажутся одного веса, то нельзя выяснить, алюминиевые они или дюралевые). — *Прим. ред.*

[2] На плоскости. — *Прим. ред.*

3. В числовом треугольнике

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1
\end{array}$$

каждое число равно сумме чисел, расположенных в предыдущей строке над этим числом и над его соседями справа и слева (если не все такие числа присутствуют, то они считаются равными нулю). Докажите, что в каждой строке, начиная с третьей, найдутся чётные числа.

4. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, ..., 199, 200 выбрали одно число, меньшее 16, и ещё 99 чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдётся хотя бы 2 таких, что одно из них делится на другое.

5. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ лежит выпуклый четырёхугольник $A_5A_6A_7A_8$. Внутри $A_5A_6A_7A_8$ выбрана точка A_9. Докажите, что из этих девяти точек можно выбрать 5 точек, расположенных в вершинах выпуклого пятиугольника. [1]

1948 год (XI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Сумма обратных величин трёх целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

2. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

3. На плоскости проведено n прямых линий. Доказать, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно так закрасить двумя красками (каждая область закрашивается только одной краской), что никакие две соседние

[1] Предполагается, что никакие три из девяти точек не лежат на одной прямой. — *Прим. ред.*

области (т. е. области, соприкасающиеся только по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской.

9—10 класс

1. Если число $\frac{2^n-2}{n}$ — целое, то и число $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ — целое. Доказать.

2. Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

3. Даны две треугольные пирамиды $ABCD$ и $A'BCD$ с общим основанием BCD, причём точка A' лежит внутри пирамиды $ABCD$. Доказать, что сумма плоских углов при вершине A' пирамиды $A'BCD$ больше суммы плоских углов при вершине A пирамиды $ABCD$.

Второй тур

7—8 класс

1. Решить в натуральных числах уравнение $x^y=y^x$ ($x\neq y$). Найти все решения.

2. Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство: $R\geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанного и вписанного кругов соответственно), причём равенство $R=2r$ имеет место только для правильного треугольника.

3. Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

9—10 класс

1. Найти все рациональные положительные решения уравнения $x^y=y^x$ ($x\neq y$).

2. Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

3. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x|+|y|<100$?

4. Каково наибольшее возможное число лучей в пространстве, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы?

1949 год (XII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Показать, что

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

делится без остатка на 26460.

2. Доказать, что если многоугольник имеет несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

3. Доказать, что равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

для целых x, y и z возможно только при $x = y = z = 0$.

4. Дана плоская замкнутая ломаная периметра 1. Доказать, что можно начертить круг радиусом $\frac{1}{4}$, покрывающий всю ломаную.

5. Доказать, что для любого треугольника отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится описанной окружностью пополам.

9—10 класс

1. Найти целые числа x, y, z и v, такие, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv.$$

2. Как расположены плоскости симметрии ограниченного тела, если оно имеет две различные оси вращения? (Осью вращения тела называется прямая, после поворота вокруг которой на любой угол тело совмещается само с собой.)

3. Найти действительные корни уравнения:

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} \quad \left(0 < a < \frac{1}{4}\right).$$

4. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырёх попарно различных можно составить геометрическую прогрессию. Доказать, что среди этих чисел найдётся n одинаковых.

5. Доказать, что если у шестиугольника противоположные стороны параллельны и диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны, то вокруг него можно описать окружность.

Второй тур

7—8 класс

1. 12 полей расположены по кругу: на четырёх соседних полях стоят четыре разноцветных фишки: красная, жёлтая, зелёная и синяя.

Одним ходом можно передвинуть любую фишку с поля, на котором она стоит, через четыре поля на пятое (если оно свободно) в любом из двух возможных направлений. После нескольких ходов фишки стали опять на те же четыре поля. Как они могут при этом переставиться?

2. Даны треугольники ABC и DEF и точка O. Берется любая точка X в треугольнике ABC и любая точка Y в треугольнике DEF; треугольник OXY достраивается до параллелограмма $OXZY$.

а) Докажите, что все полученные таким образом точки образуют многоугольник.

б) Сколько сторон он может иметь?

в) Докажите, что его периметр равен сумме периметров исходных треугольников.

3. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на 2 чашки весов, по 6 гирь на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют один и тот же вес.

4. В произвольном[1] шестиугольнике соединены через одну середины сторон. Докажите, что точки пересечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

[1] Выпуклом. — *Прим. ред.*

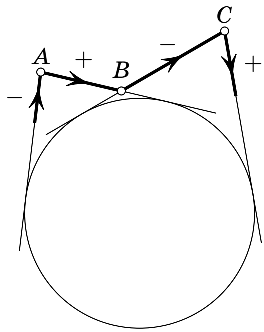


Рис. 1

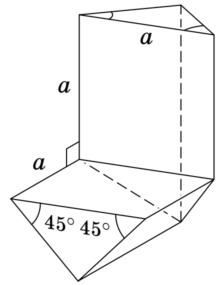


Рис. 2

5. Если имеется 100 любых[1] чисел, то среди них всегда можно взять несколько (или может быть одно) так, что в сумме они дадут число, делящееся на 100. Доказать.

6. Дана окружность и точка вне её; из этой точки мы совершаем путь по замкнутой ломаной, состоящей из отрезков прямых, касательных к окружности, и заканчиваем путь в начальной точке. Участки пути, по которым мы приближались к центру окружности, берём со знаком «плюс», а участки пути, по которым мы удалялись от центра, — со знаком «минус» (рис. 1). Докажите, что для любого такого пути алгебраическая сумма длин участков пути, взятых с указанными знаками, равна нулю.

9—10 класс

1. См. задачу 1 для 7—8 классов.

2. Сложить из одинаковых кирпичиков (рис. 2) выпуклый многогранник.

3. См. задачу 3 для 7—8 классов.

4. В данный треугольник поместить центрально-симметричный многоугольник наибольшей площади.

5. Докажите, что числа вида 2^n при различных целых положительных n могут начинаться на любую наперёд заданную комбинацию цифр.

---

[1] Целых. — *Прим. ред.*

6. Докажите, что к квадрату нельзя приложить более 8 не налегающих друг на друга квадратов такого же размера.

1950 год (XIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Имеется шахматная доска с обычной раскраской (границы квадратов считаются окрашенными в чёрный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на чёрном, и доказать, что большей начертить нельзя.

2. Имеется 555 гирь весом: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, ..., 555 г. Разложить их на три равные по весу кучи.

3. Даны три окружности O_1, O_2, O_3, проходящие через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3 и O_3 с O_1 обозначим соответственно через A_1, A_2 и A_3. На O_1 берём произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадет с A_2, то проводим через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Если B_3 не совпадет с A_3, то проводим через B_3 и A_3 прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_4. Докажите, что B_4 совпадает с B_1.

4. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника; A, B, C — величины противоположных углов. Докажите, что

$$Aa+Bb+Cc \geqslant \frac{1}{2}(Ab+Ba+Ac+Ca+Bc+Cb).$$

5. Из пункта A в другие можно попасть двумя способами:

1. Выйти сразу и идти пешком.

2. Вызвав машину и, подождав ее определённое время, ехать на ней.

В каждом случае используется способ передвижения, требующий меньшего времени. При этом оказывается, что

если конечный пункт отстоит на	то понадобится на дорогу
1 км	10 мин
2 км	15 мин
3 км	$17\frac{1}{2}$ мин

Скорости пешехода и машины, а также время ожидания машины принимаются неизменными.

Сколько понадобится времени для достижения пункта, отстоящего от A на 6 км?

9—10 класс

1. Пусть A — произвольный угол, B и C — острые углы. Всегда ли существует такой угол X, что

$$\sin X = \frac{\sin B \sin C}{1 - \cos A \cos B \cos C}\ ?$$

(Из «Воображаемой геометрии» Н. И. Лобачевского.)

2. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма рёбер внутренней пирамиды больше суммы рёбер внешней?

3. Имеется 81 гиря весом 1^2 г, 2^2 г, 3^2 г, ..., 81^2 г. Разложить их на три равные по весу кучи.

4. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

5. Дано n окружностей: O_1, O_2, ..., O_n, проходящих через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3, ..., O_n с O_1 обозначим соответственно через A_1, A_2, ..., A_n. На O_1 берём произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадает с A_2, то проводим через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Продолжая таким образом, мы получим точку B_n на окружности O_n. Если O_n не совпадает с A_n, то проводим через B_n и A_n прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_{n+1}. Докажите, что B_{n+1} совпадает с B_1.

Второй тур

7—8 класс

1. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с наибольшим числом сторон. Какое самое большее число сторон может он иметь?

2. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\ldots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

3. В треугольник вписана окружность. Около неё описан квадрат. Докажите, что вне треугольника лежит меньше половины периметра квадрата.

4. На окружности расположены 20 точек. Эти 20 точек попарно соединяются 10 хордами [1]. Сколькими способами это можно сделать?

9—10 класс

1. В выпуклом 1950-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с самым большим числом сторон. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

2. Числа 1, 2, 3, ..., 101 написаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастая, либо убывая).

3. Около сферы описан пространственный четырёхугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

4. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдётся остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки.

---

[1] Непересекающимися. — *Прим. ред.*

1951 год (XIV олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Докажите, что многочлен

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$$

при всех значениях x положителен.

2. У выпуклых четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственные стороны равны. Доказать, что если $\angle A > \angle A'$, то $\angle B < \angle B'$, $\angle C > \angle C'$ и $\angle D < \angle D'$.

3. Что больше:

$$\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2 + 2{,}00000000004}$$

или

$$\frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2 + 2{,}00000000002}\,?$$

4. Точка внутри равнобочной трапеции соединяется со всеми вершинами. Доказать, что из четырёх полученных отрезков можно сложить четырёхугольник, вписанный[1] в эту трапецию.

5. Имеется кусок цепи из 60 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 60 г (раскованное звено весит тоже 1 г)?

9—10 класс

1. Из всех выпуклых многоугольников, у которых одна сторона равна a и сумма внешних углов при вершинах, не прилегающих к этой стороне, равна 120°, выбрать многоугольник наибольшей площади.

[1] Разрешается, чтобы вершины четырёхугольника лежали не только на сторонах трапеции, но и на их продолжениях. — *Прим. ред.*

2. Докажите, что первые три цифры частного[1]

$$\frac{0{,}1234567891011\ldots4748495051}{0{,}51504948\ldots4321}$$

суть 0,239.

3. Имеются две концентрические окружности. Вокруг меньшей из них описан многоугольник, целиком находящийся внутри большей окружности. Из общего центра на стороны многоугольника опущены перпендикуляры, которые продолжены до пересечения с большей окружностью; каждая из полученных точек пересечения соединена с концами соответствующей стороны многоугольника. При каком условии построенный так звёздчатый многоугольник будет развёрткой пирамиды?

4. Имеется кусок цепи из 150 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 150 г (раскованное звено весит тоже 1 г)?

5. Даны три параллельные прямые на равных расстояниях друг от друга. Как надо изображать точками соответствующих прямых величины сопротивления, напряжения и силы тока в проводнике, чтобы, прикладывая линейку к точкам, изображающим значения сопротивления R и значения силы тока I, получить на шкале напряжения точку, изображающую величину напряжения $V = I \cdot R$ (точка каждой шкалы изображает одно и только одно число).

Второй тур

7—8 класс

1. Докажите, что число

$$1\underbrace{00\ldots0}_{49}5\underbrace{00\ldots0}_{99}1$$

не является кубом никакого целого числа.

---

[1] После запятой. — *Прим. ред.*

2. На плоскости даны три точки A, B, C и три угла $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$, меньшие 180° и в сумме составляющие 360°. Построить с помощью линейки и транспортира точку O плоскости такую, что $\angle AOB = \angle D$, $\angle BOC = \angle E$, $\angle COA = \angle F$ (с помощью транспортира можно измерять и откладывать углы).

3. На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.

4. Проекцией точки A из точки O на плоскость P называется точка A', в которой прямая OA пересекает плоскость P. Проекцией треугольника называется фигура, состоящая из всех проекций его точек. Какими фигурами может быть проекция треугольника, если точка O не лежит в его плоскости?

5. При делении многочлена $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ получается частное и остаток. Найти в частном коэффициент при x^{14}.

9—10 класс

1. Все рёбра треугольной пирамиды равны a. Найти наибольшую площадь, которую может иметь ортогональная проекция этой пирамиды на плоскость.

2. Имеется несколько чисел, каждое из которых меньше чем 1951. Наименьшее общее кратное любых двух из них больше чем 1951. Доказать, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

3. Автобусный маршрут содержит 14 остановок (считая две конечные). В автобусе одновременно могут ехать не более 25 пассажиров. Доказать, что во время поездки автобуса из одного конца в другой:

а) найдутся восемь различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, таких, что ни один пассажир не едет от

A_1 до B_1, ни один пассажир не едет от A_2 до B_2, ни один пассажир не едет от A_3 до B_3 и ни один пассажир не едет от A_4 до B_4;

б) может оказаться, что пассажиры едут таким образом, что не существует 10 различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5, которые обладали бы аналогичными свойствами.

4. Окружность обладает тем свойством, что внутри неё можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая вершина треугольника описывала эту окружность. Найти замкнутую несамопересекающуюся кривую, отличную от окружности, внутри которой также можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая его вершина описывала эту кривую.

1952 год (XV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается его сторон в точках L, M и N. Докажите, что треугольник LMN всегда остроугольный (независимо от вида треугольника ABC).

2. Докажите тождество

$$(ax+by+cz)^2+(bx+cy+az)^2+(cx+ay+bz)^2 = \\ = (cx+by+az)^2+(bx+ay+cz)^2+(ax+cy+bz)^2.$$

3. Если все 6 граней параллелепипеда — равные между собой параллелограммы, то они суть ромбы. Докажите.

4. Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/ч. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/ч. A отправляется в путь пешком, а B

выезжает одновременно с A и едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N в M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно (если он идёт пешком с той же скоростью, что A и B)?

8 класс

1. Докажите, что если ортоцентр делит высоты треугольника в одном и том же отношении, то этот треугольник — правильный.

2. Докажите тождество

$$\begin{gathered}(ax+by+cz+du)^2+(bx+cy+dz+au)^2+\\ +(cx+dy+az+bu)^2+(dx+ay+bz+cu)^2=\\ =(dx+cy+bz+au)^2+(cx+by+az+du)^2+\\ +(bx+ay+dz+cu)^2+(ax+dy+cz+bu)^2.\end{gathered}$$

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Два человека A и B должны попасть как можно скорее из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/ч. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/ч. A и B отправляются в путь одновременно: A идёт пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N и M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы время, затраченное A и B на дорогу в N, было наименьшим (C идёт пешком с той же скоростью, что A и B; время, затраченное на дорогу, считается от момента выхода A и B из M до момента прибытия последнего из них в N).

9 класс

1. Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой — целое число (не равное 0 и -1). Докажите, что сумма любого числа произвольно выбранных её членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

2. Даны три скрещивающиеся прямые. Докажите, что они будут общими перпендикулярами к своим общим перпендикулярам.

3. Докажите, что $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$, если $|x| < 1$ и $|y| < 1$.

4. Треугольник ABC разбит прямой BD на два треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и DBC, больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Дана последовательность целых чисел, построенная следующим образом: a_1 — произвольное трёхзначное число, a_2 — сумма квадратов его цифр, a_3 — сумма квадратов цифр числа a_2 и т. д. Докажите, что в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ обязательно встретится либо 1, либо 4.

10 класс

1. Найдите соотношение между

$$\arcsin \cos \arcsin x \quad \text{и} \quad \arccos \sin \arccos x.$$

2. Докажите, что при целом $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$

$$2^n > (1-x)^n + (1+x)^n.$$

3. В трёхгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром в точке O. Докажите, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна к прямой SO.

4. Если при любом положительном p все корни уравнения

$$ax^2 + bx + c + p = 0$$

действительны и положительны, то коэффициент a равен нулю. Докажите.

Второй тур

7 класс

1. Решить систему пятнадцати уравнений с пятнадцатью неизвестными:

$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 = 0, \\ 1 - x_2x_3 = 0, \\ 1 - x_3x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 - x_{14}x_{15} = 0, \\ 1 - x_{15}x_1 = 0. \end{cases}$$

2. Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соблюдено условие: $AB + CD = BC + DA$. Докажите, что окружность, вписанная в треугольник ABC, касается окружности, вписанной в треугольник ACD.

3. Докажите, что если квадрат некоторого числа начинается с $0{,}999\ldots9$ (100 девяток), то и само число начинается с $0{,}999\ldots9$ (100 девяток).

4. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место вершин C остроугольных треугольников ABC.

8 класс

1. Вычислить с шестьюдесятью десятичными знаками

$$\sqrt{0{,}\underbrace{999\ldots9}_{60}}.$$

2. Из точки C проведены касательные CA и CB к окружности O. Из произвольной точки N окружности опущены перпендикуляры ND, NE, NF соответственно на прямые AB, CA и CB. Докажите, что ND есть среднее пропорциональное между NE и NF.

3. Имеются семь жетонов с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное посредством этих жетонов, не делится на другое.

4. 99 прямых разбивают плоскость на n частей. Найдите все возможные значения n, меньшие 199.

9 класс

1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 = 0, \\ 1 - x_2x_3 = 0, \\ 1 - x_3x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 - x_{n-1}x_n = 0, \\ 1 - x_nx_1 = 0. \end{cases}$$

2. Поместить в полый куб с ребром a три цилиндра диаметра $\frac{a}{2}$ и высоты a так, чтобы они не могли менять своего положения внутри куба.

3. См. задачу 3 для 8 класса.

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол $\angle ABC$ равен 20°. На равных сторонах CB и AB взяты соответственно точки P и Q такие, что $\angle PAC = 50^\circ$ и $\angle QCA = 60^\circ$. Докажите, что $\angle PQC = 30^\circ$.

5. 200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше?

10 класс

1. Докажите, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_1\cos x$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Докажите, что ни при каком целом A многочлен $3x^{2n} + Ax^n + 2$ не делится на многочлен $2x^{2m} + Ax^m + 3$.

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. См. задачу 5 для 9 класса.

1953 год (XVI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Доказать, что в трапеции сумма углов при меньшем основании больше, чем при большем.

2. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое бы делилось на число, составленное из ста троек ($333\ldots33$).

3. Разделить отрезок пополам с помощью угольника. (С помощью угольника можно проводить прямые и восставлять перпендикуляры, опускать перпендикуляры нельзя.)

4. Докажите, что при любом целом положительном n число $n^2+8n+15$ не делится на $n+4$.

8 класс

1. Три окружности попарно касаются друг друга. Через три точки касания проводим окружность. Доказать, что эта окружность перпендикулярна к каждой из трёх исходных. (Углом между двумя окружностями в точке их пересечения называется угол, образованный их касательными в этой точке.)

2. См. задачу 2 для 7 класса.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. Доказать неравенство

$$\frac{2-\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}^{n\text{ раз}}}{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ раз}}} > \frac{1}{4}.$$

9 класс

1. Найти геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют соотношению $\sin (x+y)=0$.

2. AB и A_1B_1 — два скрещивающихся отрезка. O и O_1 — соответственно их середины. Докажите, что отрезок OO_1 меньше полусуммы отрезков AA_1 и BB_1.

3. Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200}+1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и одного только y.

4. A — вершина правильного звёздчатого пятиугольника[1]. Ломаная $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ является его внешним контуром. Прямые AB и DE продолжены до пересечения в точке F. Докажите, что многоугольник $ABB_1CC_1DED_1$ равновелик четырёхугольнику AD_1EF.

5. См. задачу 4 для 8 класса.

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Дан прямой круговой конус[2] и точка O. Найти геометрическое место вершин конусов, равных данному, с осями, параллельными оси данного конуса, и содержащих внутри данную точку O.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. См. задачу 4 для 8 класса.

Второй тур

7 класс

1. Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.

---

[1] Правильный звёздчатый пятиугольник — это фигура, образованная диагоналями правильного пятиугольника. — *Прим. ред.*

[2] Для определённости будем считать, что конус бесконечен в одну сторону. — *Прим. ред.*

2. Около окружности описан четырёхугольник. Его диагонали пересекаются в центре этой окружности. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

3. В плоскости расположено 11 зубчатых колёс таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т. д. Наконец, последнее, одиннадцатое, колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

4. Тысяча точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено ещё пятьсот точек так, что никакие три из этих 1500 точек не лежат на одной прямой. Данный тысячеугольник разрезан на треугольники таким образом, что все указанные 1500 точек являются вершинами треугольников и эти треугольники не имеют никаких других вершин. Сколько получится треугольников при таком разрезании?

5. Решить систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5=1, \\ x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5=2, \\ x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5=3, \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+8x_5=4, \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=5. \end{cases}$$

8 класс

1. a, b, c и d — длины последовательных сторон четырёхугольника. Обозначим через S его площадь. Доказать, что

$$S \leqslant \frac{1}{4}(a+b)(c+d).$$

2. 1953 цифры выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 1953-значное число делится на 27. Докажите, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

3. На окружности даны точки $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Построим все возможные выпуклые многоугольники, вершины которых находятся среди точек $A_1, A_2, \ldots, A_{16}$. Разобьём эти многоугольники на две группы. В первую группу будут входить все многоугольники, у которых A_1 является вершиной. Во вторую группу входят все многоугольники, у которых A_1 в число вершин не входит. В какой группе больше многоугольников?

4. В плоскости расположено n зубчатых колёс таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т. д. Наконец, последнее колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

5. Решить систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+2x_4+2x_5+\ldots+2x_{100}=1,\\ x_1+3x_2+4x_3+4x_4+4x_5+\ldots+4x_{100}=2,\\ x_1+3x_2+5x_3+6x_4+6x_5+\ldots+6x_{100}=3,\\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+8x_5+\ldots+8x_{100}=4,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5+\ldots+199x_{100}=100. \end{cases}$$

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. В плоскости дан треугольник $A_1A_2A_3$ и прямая l вне его, образующая с продолжением сторон треугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 соответственно углы α_3, α_1, α_2. Через точки A_1, A_2, A_3 проводятся прямые, образующие с l соответственно углы $180^\circ-\alpha_1$, $180^\circ-\alpha_2$, $180^\circ-\alpha_3$. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке. Все углы отсчитываются от прямой l в одном направлении.

3. Даны уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \quad (1) \qquad \text{и} \qquad -ax^2+bx+c \quad (2).$$

Доказать, что если x_1 и x_2 — соответственно какие-либо корни уравнений (1) и (2), то найдётся такой корень x_3

уравнения $\frac{a}{2}x^2+bx+c=0$, что либо $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2$, либо $x_1 \geqslant \geqslant x_3 \geqslant x_2$.

4. Дан лист клетчатой бумаги размером 101×200 клеток. Начиная от какой-либо угловой клетки, идём по диагонали и каждый раз, доходя до границы, меняем направление движения по правилу, указанному на чертеже (рис. 3). Попадём ли мы когда-нибудь в одну из угловых клеток?

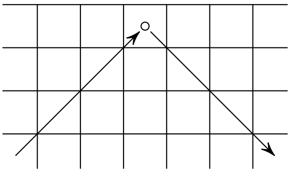


Рис. 3

5. Разрезать куб на три равные пирамиды.

10 класс

1. Найти корни уравнения

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0.$$

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Пусть $x_0=10^9$, $x_n=\frac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}$. Доказать, что $0<x_{36}-\sqrt{2}<10^{-9}$.

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найти все клетки, куда он может попасть за $2n$ ходов.

1954 год (XVII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Правильную шестиконечную звезду[1] разрезать на 4 части так, чтобы из них можно было сложить выпуклый многоугольник.

2. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3A_4\ldots A_n$ и $B_1B_2B_3B_4\ldots B_n$. Известно, что $A_1A_2=B_1B_2$, $A_2A_3=B_2B_3$,

[1] Правильная шестиконечная звезда — это фигура, которая получается в результате объединения правильного треугольника и треугольника, симметричного ему относительно его центра. — *Прим. ред.*

…, $A_nA_1 = B_nB_1$ и $n-3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?

3. Определить четырёхзначное число, если деление этого числа на однозначное производится по следующей схеме:

$$\begin{array}{r|l}
-\times\times\times\times & \underline{\ \times\ } \\
\underline{\times\times} & \ \times\times\times \\
-\times\times & \\
\underline{\times\times} & \\
0 &
\end{array}$$

а деление этого же числа на другое однозначное производится по такой схеме:

$$\begin{array}{r|l}
-\times\times\times\times & \underline{\ \times\ } \\
\underline{\times} & \ \times\times\times \\
-\times\times & \\
\underline{\times} & \\
-\times\times & \\
\underline{\times\times} & \\
0 &
\end{array}$$

4. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1954 = n^2$?

5. Определить наибольшее значение отношения трёхзначного числа к числу, равному сумме цифр этого числа.

8 класс

1. Из квадрата размером 3 на 3 вырезать одну фигуру, которая представляет развёртку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1.

2. Из произвольной внутренней точки O выпуклого n-угольника опущены перпендикуляры на стороны (или их продолжения). На каждом перпендикуляре от точки O по направлению к стороне построен вектор, длина которого равна половине длины той стороны, на которую опущен перпендикуляр. Определить сумму построенных векторов.

3. См. задачу 3 для 7 класса.

4. См. задачу 4 для 7 класса.

5. Найти все решения системы бесконечного числа уравнений

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+y\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+z\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)=0,$$

где $n=1, 2, 3, 4, \ldots$

9 класс

1. Доказать, что если

$$x_0^4+a_1x_0^3+a_2x_0^2+a_3x_0+a_4=0,$$
$$4x_0^3+3a_1x_0^2+2a_2x_0+a_3=0,$$

то $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ делится на $(x-x_0)^2$.

2. Дано число

$$123456789101112131415\ldots99100.$$

Вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

3. Дано 100 чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned}
a_1-3a_2+2a_3&\geqslant 0,\\
a_2-3a_3+2a_4&\geqslant 0,\\
a_3-3a_4+2a_5&\geqslant 0,\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
a_{99}-3a_{100}+2a_1&\geqslant 0,\\
a_{100}-3a_1+2a_2&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Доказать, что все числа a_i равны между собой.

4. Дан треугольник ABC. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых AS, BS, CS соответственно со сторонами BC, CA, AB треугольника, где S — произвольная внутренняя точка треугольника ABC. Доказать, что по крайней мере в одном из полученных четырёхугольников AB_1SC_1, C_1SA_1B, A_1SB_1C углы при вершинах C_1, B_1, или C_1, A_1, или A_1, B_1 — одновременно оба неострые.

5. Существуют ли в пространстве четыре точки A, B, C, D такие, что $AB = CD = 8$ см, $AC = BD = 10$ см, $AD = BC = 13$ см?

10 класс

1. Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x\sin(xy) + 1 = 0.$$

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Дано 100 чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} a_1 - 4a_2 + 3a_3 &\geqslant 0,\\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 &\geqslant 0,\\ a_3 - 4a_4 + 3a_5 &\geqslant 0,\\ &\dots\dots\\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 &\geqslant 0,\\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Известно, что $a_1 = 1$, определить a_2, a_3, ..., a_{100}.

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. См. задачу 5 для 9 класса.

Второй тур

7 класс

1. Дан лист клетчатой бумаги. Каждый узел сетки обозначается некоторой буквой. Каким наименьшим числом различных букв нужно обозначить эти узлы, чтобы на отрезке[1], соединяющем два узла, обозначенных одинаковыми буквами, находился по крайней мере один узел, обозначенный одной из других букв?

2. Город устроен по плану, изображённому на рис. 4. Из точек A и B одновременно выезжают в одном направлении две машины, которые двигаются с одинаковой скоростью. Доехав до перекрёстка, каждая машина или про-

[1] Идущем по сторонам клеток. — *Прим. ред.*

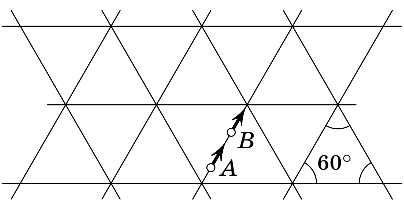


Рис. 4

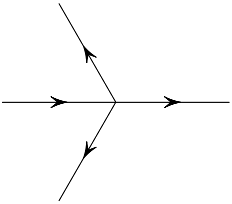


Рис. 5

должает движение в том же направлении, или поворачивает на 120° вправо или влево от направления движения (см. рис. 5). Могут ли машины встретиться?

3. Решить систему:

$$\begin{aligned}
10x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\
11x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 &= 0,\\
15x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 &= 0,\\
2x_1 + x_2 - 3x_3 + 12x_4 - 3x_5 + x_6 + x_7 &= 0,\\
6x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 17x_5 + x_6 &= 0,\\
3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 16x_6 + 2x_7 &= 0,\\
4x_1 - 8x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 + 19x_7 &= 0.
\end{aligned}$$

8 класс

1. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В клетках квадрата произвольным образом написаны числа 1, 2, 3, ..., 70 по одному и только одному числу в каждой клетке.

Доказать, что существуют четыре различные клетки с центрами в точках A, B, C, D такие, что $AB = CD$, $AD = BC$ и сумма чисел, стоящих в клетках с центрами в A и C, равна сумме чисел в клетках с центрами B и D.

2. Даны четыре прямые m_1, m_2, m_3, m_4, пересекающиеся в одной точке O. Через произвольную точку A_1 прямой m_1 проводим прямую, параллельную m_4, до пересечения с прямой m_2 в точке A_2, через точку A_2 проводим прямую, параллельную m_1, до пересечения с m_3 в точке A_3, через A_3 проводим прямую, параллельную m_2, до пересечения с прямой m_4 в точке A_4, и через точку A_4 проводим прямую, параллельную m_3, до пересечения с m_1 в точке B. Доказать, что $OB < \frac{OA_1}{2}$ (см. рис. 6).

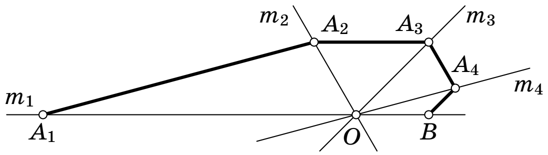


Рис. 6

3. Дано число

$$H = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37$$

(произведение простых чисел). Пусть 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, ..., H — все его делители, выписанные в порядке возрастания. Под рядом делителей выпишем ряд из $+1$ и -1 по следующему правилу: под единицей $+1$, под числом, которое разлагается на чётное число простых сомножителей, $+1$, и под числом, которое разлагается на нечётное число простых сомножителей, -1. Доказать, что сумма чисел полученного ряда равна 0.

4. См. задачу 3 для 7 класса.

5. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

9 класс

1. На двух лучах l_1 и l_2, исходящих из точки O, отложены отрезки OA_1 и OB_1 на луче l_1 и OA_2 и OB_2 на луче l_2; при этом $\frac{OA_1}{OA_2} \neq \frac{OB_1}{OB_2}$. Определить геометрическое место точек S пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2 при вращении луча l_2 около точки O (луч l_1 неподвижен).

2. Даны четыре прямые m_1, m_2, m_3, m_4, пересекающиеся в одной точке O. Через произвольную точку A_1 прямой m_1 проводим прямую, параллельную прямой m_4, до пересечения с прямой m_2 в точке A_2, через A_2 проводим прямую, параллельную m_1, до пересечения с m_3 в точке A_3, через A_3 проводим прямую, параллельную m_2, до пересечения с m_4 в точке A_4 и через точку A_4 проводим прямую, параллельную m_3, до пересечения с m_1 в точке B. Доказать, что $OB \leqslant \frac{OA_1}{4}$ (см. рис. 6).

3. Сто положительных чисел $C_1, C_2, \ldots, C_{100}$ удовлетворяют условиям

$$C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_{100}^2 > 10000,$$
$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{100} < 300.$$

Доказать, что среди них можно найти три числа, сумма которых больше 100.

4. Если дан ряд из 15 чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_{15}, \tag{1}$$

то можно написать второй ряд

$$b_1, b_2, \ldots, b_{15}, \tag{2}$$

где b_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, 15)$ равно числу чисел ряда (1), меньших a_i. Существует ли ряд чисел a_i, если дан ряд чисел b_i:

$$1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13?$$

5. Дан отрезок OA. Из конца отрезка A выходит 5 отрезков AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5. Из каждой точки B_i могут выходить ещё пять новых отрезков или ни одного нового отрезка и т. д., причём концы никаких двух отрезков построенной системы не совпадают. Может ли число свободных концов построенных отрезков равняться 1001? Под свободным концом отрезка понимаем точку, принадлежащую только одному отрезку (кроме точки O).

10 класс

1. Сколько плоскостей симметрии может иметь треугольная пирамида?

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. Известно, что модули всех корней уравнений

$$x^2+Ax+B=0,$$
$$x^2+Cx+D=0$$

меньше единицы.

Доказать, что модули корней[1] уравнения

$$x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}=0$$

также меньше единицы. A, B, C, D — действительные числа.

5. Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, записываемые при помощи 2 и 1. Разбить их на два класса так, чтобы при сложении любых двух чисел каждого класса получилось число, в написании которого содержится не менее двух троек.

1955 год (XVIII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Числа 1, 2, ..., 49 расположены в квадратную таблицу

$$\begin{array}{ccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\
8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
43, & 44, & 45, & 46, & 47, & 48, & 49.
\end{array}$$

Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычёркивается строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей и т. д., всего 7 раз. Найти сумму выписанных чисел.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC. Из вершины B прямого угла проведена медиана BD. Пусть K — точка

---

[1] Действительных. — *Прим. ред.*

касания стороны AD треугольника ABD с окружностью, вписанной в этот треугольник. Найти углы треугольника ABC, если K делит AD пополам.

3. Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки D и E соответственно так, что $AE = CD$. Найти геометрическое место точек пересечения отрезков AE и CD.

4. Существует ли такое n, что n^2+n+1 делится на 1955?

5. Найти все прямоугольники, которые можно разрезать на 13 равных квадратов.

8 класс

1. Пусть $2^n = 10a + b$. Доказать, что если $n > 3$, то ab делится на 6. Здесь n, a и b — натуральные числа, $b < 10$.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. На стороне AB взята точка K, на стороне BC — точка L, на стороне CD — точка M и на стороне AD — точка N так, что $KB = BL = a$, $MD = DN = b$. Пусть $KL \nparallel MN$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых KL и MN при изменении a и b.

3. Квадратная таблица из 49 клеток заполнена числами от 1 до 7 так, что в каждом столбце и в каждой строке встречаются все эти числа. Если таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встречаются все эти числа. Доказать.

4. Какие выпуклые фигуры [1] могут содержать прямую?

5. На окружности даны четыре точки A, B, C, D. Через каждую пару соседних точек проведена окружность. Вторые точки пересечения соседних окружностей обозначим через A_1, B_1, C_1, D_1. (Некоторые из них могут совпадать с прежними.) Доказать, что A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности.

---

[1] Предполагается, что фигура плоская, не вырождается в прямую и *замкнута*, т. е. содержит все свои граничные точки. — *Прим. ред.*

9 класс

1. Числа 1, 2, ..., k^2 расположены в квадратную таблицу

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & \ldots, & k, \\ k+1, & k+2, & \ldots, & 2k, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (k-1)k+1, & (k-1)k+2, & \ldots, & k^2. \end{array}$$

Произвольное число выписывается, после чего из таблицы вычёркивается строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей из $(k-1)^2$ чисел и т. д. k раз. Найти сумму выписанных чисел.

2. Найти геометрическое место середин отрезков с концами на двух различных непересекающихся окружностях, лежащих одна вне другой.

3. Найти все действительные решения системы:

$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$$

4. Известно, что p простых чисел a_1, a_2, ..., a_p образуют возрастающую арифметическую прогрессию и $a_1>p$. Доказать, что если p — простое число, то разность прогрессии делится на p.

5. Дан треугольник ABC и точка D внутри него, причём $AC-DA>1$ и $BC-BD>1$. Берётся произвольная точка E внутри отрезка AB. Доказать, что $EC-ED>1$.

10 класс

1. Квадратная таблица в n^2 клеток заполнена числами от 1 до n так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются все эти числа. Если n нечётное и таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встретятся все эти числа 1, 2, 3, ..., n. Доказать.

2. См. задачу 3 для 9 класса.

3. На плоскости даны две прямые, пересекающиеся под острым углом. В направлении одной из прямых производится сжатие[1] с коэффициентом 1/2. Доказать, что найдется точка, расстояние от которой до точки пересечения прямых увеличится.

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Дан трёхгранный угол с вершиной O. Можно ли найти такое плоское сечение ABC, чтобы углы OAB, OBA, OBC, OCB, OAC, OCA были острыми?

Второй тур

7 класс

1. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

2. Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точной четвёртой степенью. Доказать, что тогда $a = b = 0$.

3. Дан треугольник ABC. Центры вневписанных окружностей O_1, O_2 и O_3 соединены прямыми. Доказать, что треугольник $O_1O_2O_3$ — остроугольный.

4. В турнире собираются принять участие 25 шахматистов. Все они играют в разную силу, и при встрече всегда побеждает сильнейший. Какое наименьшее число партий требуется, чтобы определить двух сильнейших игроков?

5. Разрезать прямоугольник на 18 прямоугольников так, чтобы никакие два соседних прямоугольника не образовывали прямоугольника.

8 класс

1. Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точным квадратом. Доказать, что тогда $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

2. Две окружности касаются друг друга внешним образом и третьей изнутри. Проводятся внешняя и внутрен-

[1] Здесь имеется в виду преобразование, при котором каждая точка перемещается параллельно одной прямой так, что её расстояние до второй прямой уменьшается вдвое, причём она остаётся по ту же самую сторону от второй прямой. — *Прим. ред.*

няя общие касательные к первым двум окружностям. Доказать, что внутренняя касательная делит пополам дугу, отсекаемую внешней касательной на третьей окружности.

3. Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1 \ldots A_n$ и соединена отрезками с вершинами. Стороны n-угольника нумеруются числами от 1 до n, разные стороны нумеруются разными числами. То же самое делается с отрезками OA_1, ..., OA_n.

а) При $n=9$ найти нумерацию, при которой сумма номеров сторон для всех треугольников A_1OA_2, ..., A_nOA_1 одинакова.

б) Доказать, что при $n=10$ такой нумерации осуществить нельзя.

4. Неравенство

$$Aa(Bb+Cc)+Bb(Cc+Aa)+Cc(Aa+Bb) >$$
$$> \frac{1}{2}(ABc^2+BCa^2+CAb^2),$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$ — данные числа, выполняется для всех $A>0$, $B>0$, $C>0$. Можно ли из отрезков a, b, c составить треугольник?

5. Числа $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ различны между собой, и числа $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, ..., $\left[\frac{M}{a}\right]$ тоже различны между собой. Найти все такие a.

9 класс

1. Дан треугольник ABC. На сторонах AB, BC, CA взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{n}.$$

На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки C_2, A_2, B_2 так, что

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = n.$$

Доказать, что $A_2C_2 \parallel AC$, $C_2B_2 \parallel CB$, $B_2A_2 \parallel BA$.

2. Расположить на прямой систему отрезков длины 1, не имеющих общих концов и общих точек так, чтобы бесконечная арифметическая прогрессия с любой[1] разностью и любым начальным членом имела общую точку с некоторым отрезком системы.

3. Дано уравнение

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = 0,$$

где $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$. Доказать, что это уравнение не может иметь двух положительных корней.

4. См. задачу 2 для 8 класса.

5. Пять человек играют несколько партий в домино (два на два) так, что каждый играющий имеет каждого один раз партнёром и два раза противником. Найти количество сыгранных партий и все способы распределения играющих.

10 класс

1. Доказать, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то $p - kq$ есть делитель числа $f(k)$ при любом целом k.

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. На плоскости P стоит прямой круговой конус. Радиус основания r, высота — h. На расстоянии H от плоскости и 1 от высоты конуса находится источник света. Какую часть окружности радиуса R, лежащей в плоскости P и концентрической с окружностью, лежащей в основании конуса, осветит этот источник?

4. Имеется 1955 точек. Какое максимальное число троек можно из них выбрать так, чтобы каждые две тройки имели одну общую точку?

---

[1] Ненулевой. — *Прим. ред.*

5. Дан треугольник $A_0B_0C_0$. На его сторонах A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки C_2, A_2, B_2, и вообще, на сторонах A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n, треугольника $A_nB_nC_n$ взяты точки C_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}. Известно, что

$$\frac{A_0B_1}{B_1C_0} = \frac{B_0C_1}{C_1A_0} = \frac{C_0A_1}{A_1B_0} = k,\ \frac{A_1B_2}{B_2C_1} = \frac{B_1C_2}{C_2A_1} = \frac{C_1A_2}{A_2B_1} = \frac{1}{k^2}$$

и, вообще,

$$\frac{A_nB_{n+1}}{B_{n+1}C_n} = \frac{B_nC_{n+1}}{C_{n+1}A_n} = \frac{C_nA_{n+1}}{A_{n+1}B_n} = \begin{cases} k^{2^n} & \text{при чётном } n; \\ \dfrac{1}{k^{2^n}} & \text{при нечётном } n. \end{cases}$$

Доказать, что треугольник ABC, образованный пересечением прямых A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, содержится в треугольнике $A_nB_nC_n$ при любом n.

1956 год (XIX олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Докажите, что не существует на плоскости четырёх точек A, B, C и D таких, что все треугольники ABC, BCD, CDA, DAB остроугольные.

2. Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

3. Имеется замкнутая самопересекающаяся ломаная. Известно, что она пересекает каждое своё звено ровно один раз. Докажите, что число звеньев чётно.

4. Найти все числа, на которые может быть сократима при целом значении l дробь $\dfrac{5l+6}{8l+7}$.

5. Какое наименьшее число точек можно выбрать на окружности длины 1956 так, чтобы для каждой из этих точек нашлась ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояния измеряются по окружности)?

8 класс

1. На сторонах AB и CB треугольника ABC откладываются равные отрезки произвольной длины AD и CE. Найти геометрическое место середин отрезков DE.

2. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с третьего знака после запятой (т. е. взято приближение α с недостатком с точностью до 0,01). Полученное число делится на α, и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

3. На окружности длины 15 выбрано n точек, так что для каждой имеется ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояние измеряется по окружности). Докажите, что n делится на 10.

4. Пусть a, b, c, d, l — целые числа. Докажите, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на число k, то $ad-bc$ делится на k.

5. На клетчатой бумаге написана таблица, причём в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырёх чисел, стоящих в соседних клетках. Из таблицы выбран кусок. Докажите, что если некоторое число больше всех остальных на этом куске, то оно стоит с края (т. е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

9 класс

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ взят четырехугольник $KLMN$, образованный центрами тяжести треугольников ABC, BCD, DBA и CDA. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в той же точке, что и прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $KLMN$.

2. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с четвертого знака после запятой (т. е. взято приближение α с недостатком с точностью до 0,001). Полученное число делится на α, и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

3. См. задачу 5 для 8 класса.

4. Даны положительные числа h, s_1, s_2 и расположенный в пространстве треугольник ABC. Сколькими способами можно выбрать точку D так, чтобы в тетраэдре $ABCD$ высота, опущенная из вершины D, была равна h, а площади граней ACD и BCD соответственно s_1 и s_2 (исследовать все возможные случаи)?

5. См. задачу 4 для 8 класса.

10 класс

1. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах треугольника. Доказать, что сторона квадрата меньше $2r$, но больше $\sqrt{2}r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

2. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с пятого знака после запятой (т. е. взято приближение α с недостатком с точностью до 0,0001). Полученное число делится на α, и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

3. См. задачу 4 для 8 класса.

4. Дана замкнутая пространственная ломаная. Некоторая плоскость пересекает все её звенья: A_1A_2 в точке B_1, A_2A_3 — в точке B_2, …, A_nA_1 — в точке B_n. Докажите, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2} \cdot \frac{A_2B_2}{B_2A_3} \ldots \frac{A_nB_n}{B_nA_1} = 1.$$

5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= a, \\ x_3 - x_4 &= b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

имеет хотя бы одно положительное решение $x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$, $x_4>0$ тогда и только тогда, когда $|a|+|b|<1$.

Второй тур

7 класс

1. Точка O — центр круга, описанного около треугольника ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны точке O относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что все высоты[1] треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через точку O, а все высоты треугольника ABC проходят через центр круга, описанного около треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 делят окружность радиуса 1 на шесть равных частей. Из A_1 проведен луч l_1 в направлении A_2, из A_2 — луч l_2 в направлении A_3, ..., из A_6 — луч l_6 в направлении A_1. Из точки B_1, взятой на луче l_1, опускается перпендикуляр на луч l_6, из основания этого перпендикуляра опускается перпендикуляр на l_5 и т. д. Основание шестого перпендикуляра совпало с B_1. Найти отрезок B_1A_1.

3. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчёркнуто, во-первых, каждое положительное число, а во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна. Может ли сумма всех подчёркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю?

4. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы: по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на одной из диагоналей, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно этой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любом столбце меньше 1035.

5. На столе лежат 15 журналов, закрывающих его целиком. Докажите, что можно забрать семь журналов так,

---

[1] Или их продолжения. — *Прим. ред.*

чтобы оставшиеся журналы закрывали не меньше 8/15 площади стола.

8 класс

1. Груз весом 13,5 т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках. (Весом пустого ящика можно пренебречь.)

2. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на двух диагоналях, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно любой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любой строке меньше 518.

3. Все точки данного отрезка AB проектируются на всевозможные прямые, проходящие через данную точку O. Найти геометрическое место этих проекций.

4. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчёркнуто, во-первых, каждое положительное число, во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна, и, в-третьих, каждое число, сумма которого с двумя следующими положительна. Может ли сумма всех подчёркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю?

5. В прямоугольнике площадью 5 кв. единиц расположены девять прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Докажите, что площадь общей части некоторых двух прямоугольников больше или равна 1/9.

9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 1956 точек. Всегда ли можно в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

3. Взяли три числа x, y, z. Вычислили абсолютные величины попарных разностей $x_1 = |x - y|$, $y_1 = |y - z|$, $z_1 = |z - x|$. Тем же способом по числам x_1, y_1, z_1 построили числа x_2, y_2, z_2 и т. д. Оказалось, что при некотором n $x_n = x$, $y_n = y$, $z_n = z$. Зная, что $x = 1$, найти y и z.

4. Четырёхугольник описан около окружности. Докажите, что прямые, соединяющие соседние точки касания и не пересекающиеся в одной из этих точек, пересекаются на продолжении диагонали или параллельны ей.

5. На клетчатой бумаге выбраны три точки A, B, C, находящиеся в вершинах клеток. Докажите, что если треугольник ABC остроугольный, то внутри или на сторонах его есть по крайней мере еще одна вершина клетки.

10 класс

1. Подряд выписаны n чисел, среди которых есть положительные и отрицательные. Подчёркивается каждое положительное число, а также каждое число, сумма которого с несколькими непосредственно следующими за ним числами положительна. Докажите, что сумма всех подчёркнутых чисел положительна.

2. Девять многоугольников площади 1 расположены внутри квадрата площади 5. Докажите, что некоторые два из них имеют общую часть площади, не меньшую чем $1/9$.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. Докажите, что если в треугольной пирамиде любые два трёхгранных угла равны, то все грани этой пирамиды равны.

5. На продолжениях сторон A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 правильного n-угольника[1] $A_1A_2\ldots A_n$ построить точки B_1, B_2, ..., B_n так, чтобы B_1B_2 было перпендикулярно к A_1A_2, B_2B_3 перпендикулярно к A_2A_3, ..., B_nB_1 перпендикулярно к A_nA_1.

---

[1] $n \geqslant 5$. — *Прим. ред.*

1957 год (XX олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Найти все равнобочные трапеции, которые разбиваются диагональю на два равнобедренных треугольника.

2. Известно, что ax^3+bx^2+cx+d, где a, b, c, d — данные целые числа, при любом целом x делится на 5. Доказать, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

3. Улитка ползёт по столу с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут она поворачивает на 90° налево или направо, а в промежутках между поворотами ползёт по прямой. Доказать, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов.

4. В прямоугольной таблице, составленной из положительных чисел, произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице.

5. От A до B 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых написаны расстояния до A и до B:

$$\boxed{999\,|\,0} \quad \boxed{998\,|\,1} \quad \ldots \quad \boxed{0\,|\,999}$$

Сколько среди них таких, на которых имеются только две различные цифры?

8 класс

1. Найти геометрическое место четвёртых вершин прямоугольников, три вершины которых лежат на двух данных концентрических окружностях, а стороны параллельны двум данным прямым.

2. См. задачу 3 для 7 класса.

3. Из всех параллелограммов данной площади найти тот, у которого наибольшая диагональ минимальна.

4. В прямоугольной таблице произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице или все числа равны нулю.

5. Известно, что $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, где a, b, c, d, e — данные целые числа, при любом целом x делится на 7. Доказать, что все целые числа a, b, c, d, e делятся на 7.

9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Решить уравнение $x^3-[x]=3$, где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, точка N — середина диагонали BD. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M' и N'. Доказать, что если $MM'=NN'$, то $BC \parallel AD$.

4. Школьник едет на олимпиаду на метро, платит рубль и получает сдачу. Доказать, что если он обратно поедет на трамвае, то сможет уплатить за проезд без сдачи. [1]

5. Плоский многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ составлен из n твёрдых стержней, соединённых шарнирами. Доказать, что если $n>4$, то его можно деформировать в треугольник.

10 класс

1. При каких целых n число $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323?

2. В пространстве построена замкнутая ломаная так, что все звенья имеют одинаковую длину и каждые три последовательных звена попарно перпендикулярны. Доказать, что число звеньев делится на 6.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. Школьник едет на кружок на трамвае, платит рубль и получает сдачу. Доказать, что если он обратно также

---

[1] Проезд в метро стоил 50 коп., в трамвае — 30 коп. В обращении находились монеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15 и 20 коп. — *Прим. ред.*

поедет в трамвае, то сможет уплатить за проезд без сдачи. [1]

5. Плоский многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ составлен из n твёрдых стержней, соединённых шарнирами. Можно ли его деформировать в треугольник?

Второй тур

7 класс

1. Прямые OA и OB перпендикулярны. Найти геометрическое место концов M таких ломаных OM длины 1, которые каждая прямая, параллельная OA или OB, пересекает не более чем в одной точке.

2. Радиолампа имеет семь контактов, расположенных по кругу и включаемых в штепсель, имеющий семь отверстий. Можно ли так занумеровать контакты лампы и отверстия штепселя, чтобы при любом включении лампы хотя бы один контакт попал на свое место (т. е. в отверстие с тем же номером)?

3. В треугольнике известны две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона, чтобы наибольший угол треугольника имел наименьшую величину?

4. В треугольник вписана окружность, и точки касания её со сторонами треугольника соединены между собой. В полученный таким образом треугольник вписана новая окружность, точки касания которой со сторонами являются вершинами третьего треугольника, имеющего те же углы, что и первоначальный треугольник. Найти эти углы.

5. Дана последовательность чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., в которой каждое число начиная с третьего равно сумме двух предыдущих. В этой последовательности выбрано восемь чисел подряд. Докажите, что их сумма не равна никакому числу рассматриваемой последовательности.

---

[1] Проезд в трамвае стоил 30 коп. В обращении находились монеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15 и 20 коп. — *Прим. ред.*

8 класс

1. В треугольнике известны две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона, чтобы наименьший угол треугольника имел наибольшую величину?

2. Доказать, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^8$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^9$.

3. Внутри равностороннего треугольника ABC находится точка O. Прямая OG, соединяющая O с центром тяжести (точкой пересечения медиан) G треугольника, пересекает стороны треугольника (или их продолжения) в точках A', B', C'. Доказать, что

$$\frac{OA'}{GA'} + \frac{OB'}{GB'} + \frac{OC'}{GC'} = 3.$$

4. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \quad \frac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1.$$

5. В неравносторонний треугольник вписана окружность, точки касания которой со сторонами приняты за вершины второго треугольника. В этот второй треугольник снова вписана окружность, точки касания которой являются вершинами третьего треугольника; в него вписана третья окружность и т. д. Докажите, что в образовавшейся последовательности треугольников нет двух подобных.

9 класс

1. Два прямоугольника положены на плоскость так, что их границы имеют восемь точек пересечения. Эти точки соединены через одну. Доказать, что площадь полученного четырёхугольника не изменится при поступательном перемещении одного из прямоугольников.

2. Найти все действительные решения системы

$$1 - x_1^2 = x_2, \; 1 - x_2^2 = x_3, \; \ldots, \; 1 - x_{98}^2 = x_{99}, \; 1 - x_{99}^2 = x_1.$$

3. Два равных диска насажены на одну ось. На окружности каждого из них по кругу на одинаковых расстояниях в произвольном порядке расставлены числа 1, 2, 3, ..., 20. Всегда ли можно повернуть один диск относительно другого так, чтобы никакие два одинаковых числа не стояли друг против друга?

4. Разбить число 1957 на 12 целых положительных слагаемых $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{12}$ так, чтобы произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot a_3! \cdot \ldots \cdot a_{12}!$ было минимально.

5. Три равные окружности касаются друг друга. Из произвольной точки окружности, касающейся внешним образом этих окружностей, проведены касательные к ним. Доказать, что сумма длин двух касательных равна длине третьей.

10 класс

1. Дан четырёхугольник $ABCD$. Вписать в него прямоугольник с заданными направлениями сторон.

2. Найти все действительные решения системы

$$1 - x_1^2 = x_2,\ 1 - x_2^2 = x_3,\ \ldots,\ 1 - x_{n-1}^2 = x_n,\ 1 - x_n^2 = x_1.$$

3. Точка G — центр шара, вписанного в правильный тетраэдр $ABCD$. Прямая OG, соединяющая G с точкой O, лежащей внутри тетраэдра, пересекает плоскости граней в точках A', B', C', D'. Доказать, что

$$\frac{OA'}{GA'} + \frac{OB'}{GB'} + \frac{OC'}{GC'} + \frac{OD'}{GD'} = 4.$$

4. Доказать, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^{k+1}$.

5. Дано n целых чисел $a_1 = 1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, причём $a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и сумма всех чисел чётна. Можно ли эти числа разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

Ответы

1935 год (I олимпиада)

Первый тур

2-й вариант. **1.** Длина поезда равна $l = \frac{t_1 a}{t_2 - t_1}$ м, а его скорость равна $v = \frac{a}{t_2 - t_1}$ м/с. **3.** $\frac{a^3}{6}\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

3-й вариант. **1.** Арифметическая прогрессия: 24, 18, 12, 6; геометрическая прогрессия: 3, 9, 27, 81. **3.** arctg 4.

4-й вариант. **1.** $(x, y, z) = (a^2 \pm a + 1,\ a^2 \mp a + 1,\ a^2 + 1)$. **3.** $\arccos \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Второй тур

Серия A. **2.** Вершины куба, отличные от концов данной диагонали.

Серия B. **1.** Одно. **2.** $(x, y) = \left(\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}),\ \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3})\right)$, $(-1, -3)$, $(3, 1)$, $\left(\frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})\right)$. **3.** $n^2(2n^2 - 1)$.

Серия C. **1.** 30 раскрасок куба и 7 983 360 раскрасок правильного двенадцатигранника. **2.** $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

1936 год (II олимпиада)

Второй тур

1. Если $a = b = 0$, то $x = c$, $y = -c$, где c — любое число; если $a = 0$, $b \neq 0$ или $a \neq 0$, $b = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 + 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b^5}{5a}}}}{2}$, $y = \frac{a \mp \sqrt{-a^2 + 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b^5}{5a}}}}{2}$, а если допускаются и комплексные решения, то получаем также решения $x = \frac{a \pm \sqrt{-a^2 - 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b^5}{5a}}}}{2}$, $y = \frac{a \mp \sqrt{-a^2 - 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b^5}{5a}}}}{2}$. **5.** От 0 до 16 (в зависимости от расположения данных плоскостей и шара).

1937 год (III олимпиада)

Первый тур

1. $(0,\,0,\,a)$, $(0,\,a,\,0)$ и $(a,\,0,\,0)$.

Второй тур

2. 30 способами. **3.** Число частей равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-3)}{2}+1=\frac{n^4}{24}-\frac{n^3}{4}+\frac{23n^2}{24}-\frac{7n}{4}+1.$$

1938 год (IV олимпиада)

Второй тур

2. На $(n^3+5n+6)/6$ частей. **4.** 686 чисел.

1939 год (V олимпиада)

Первый тур

1. Если $b=0$, то $(x,\,y,\,z)=(0,\,a,\,-a)$ или $(a,\,0,\,-a)$, где a — любое число; если $b\neq 0$, то

$$(x,\,y,\,z)=\left(\left(1\pm\sqrt{\frac{-1}{2}}\right)b,\ \left(1\mp\sqrt{\frac{-1}{2}}\right)b,\ 0\right).$$

4. $x=0$ при $a=0$; $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}$ при $a\geqslant 1$; нет решений при всех других значениях a.

Второй тур

1. $(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$. **4.** 5. **6.** На 30 частей.

1940 год (VI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **1.** $3(b-c)(c-a)(a-b)$. **2.** 35. **3.** 24. **4.** от 0 до 8 решений, за исключением 5 решений.

9—10 класс. **1.** $x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}b$, $y=\frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}b$ или $x=\frac{1\pm\sqrt{5/3}}{2}b$, $y=\frac{1\mp\sqrt{5/3}}{2}b$; если $b=0$, то $x=-y$. **2.** Цифра 7. **3.** 7 решений (в невырожденном случае). **5.** 145.

Второй тур

7—8 класс. **1.** 7744. **4.** $142^2=20164$.

9—10 класс. **1.** Число самопересечений равно n, где n — наибольшее натуральное число, для которого $n\alpha<180^\circ$ (если $\alpha\geqslant 180^\circ$, то самопересечений нет). **2.** $300!>100^{300}$. **5.** 2857.

1941 год (VII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **2.** 523 152 или 523 656.

9—10 класс. **5.** $x=-2$ или $x\geqslant 2$. **6.** 63.

Второй тур

7—8 класс. **4.** $a=8$ или $a=12$.

9—10 класс. **3.** Набор (a, b, c) равен одному из наборов $(1, 2, 3)$, $(-1, -2, -3)$, $(1, -2, -1)$, $(2, -1, 1)$ или получен из них перестановкой. **4.** $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$.

1945 год (VIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **1.** $a-b$. **3.** 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

9—10 класс. **1.** $a-b$. **2.** 376 и 625. **3.** Число решений уменьшается до трёх при $a=\pm 1$, число решений уменьшается до двух при $a=\pm\sqrt{2}$. **4.** Длина отрезка равна разности между длиной гипотенузы и длиной наименьшего катета прямоугольного треугольника ABC.

Второй тур

7—8 класс. **1.** 1 769 580. **2.** 240.

9—10 класс. **1.** $(x, y) = (-13, -2)$, $(-4, -1)$, $(-1, 0)$, $(2, 3)$, $(3, 6)$, $(4, 15)$, $(6, -21)$, $(7, -12)$, $(8, -9)$, $(11, -6)$, $(14, -5)$, $(23, -4)$.

1946 год (IX олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **1.** 3. **3.** 1946. **4.** $x_1 = -x_8 = 1$, $x_2 = -x_7 = 2$, $x_3 = -x_6 = 3$, $x_4 = -x_5 = 4$.

Второй тур

7—8 класс. **1.** 7 или 14. **3.** $x = \frac{OA - OB}{2}$. **4.** Нигде не будут задержаны машины с номерами 14, 23 и 24. **5.** 7.

9—10 класс. **1.** 10 очков. **2.** Да, найдётся. **4.** 8.

1947 год (X олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **1.** Коэффициент при x^{17} равен 3420, а коэффициент при x^{18} равен 0. **2.** 6.

9—10 класс. **1.** В выражении $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$. **2.** 0,89001. **5.** Прямые, лежащие в двух плоскостях, касающихся цилиндра радиуса d с осью AB и проходящих через точку M, за исключением прямой, параллельной AB (если точка M расположена на расстоянии d от прямой AB, то касательная плоскость будет одна и прямую исключать при этом не нужно; если расстояние от точки M до прямой AB меньше d, то искомых прямых нет).

Второй тур

9—10 класс. **2.** $(k, p) = (1, 1)$, $(4, 2)$ или $(7, 3)$.

1948 год (XI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **1.** $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$ или $(3, 3, 3)$. **2.** 31 цифру.

Второй тур

7—8 класс. **1.** $x=2$, $y=4$ или $x=4$, $y=2$. **3.** Нет, не может.

9—10 класс. **1.** $x=\left(\frac{p+1}{p}\right)^p$ и $y=\left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$, где p — произвольное целое число, отличное от 0 и -1. **3.** 19 801. **4.** 4.

1949 год (XII олимпиада)

Первый тур

9—10 класс. **1.** $x=y=z=v=0$. **2.** Оси вращения пересекаются в одной точке O, и любая плоскость, проходящая через точку O, является плоскостью симметрии (других плоскостей симметрии нет). **3.** $x_{1,2}=\frac{1-2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}}$.

Второй тур

7—8 класс. **1.** КЖЗС, СЗКЖ, ЖКСЗ, ЗСЖК. **2.** Полученный многоугольник может иметь от 3 до 6 сторон.

9—10 класс. **4.** Искомый многоугольник — выпуклый шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части.

1950 год (XIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **5.** 25 мин.

9—10 класс. **1.** Да, всегда. **2.** Да, может. **4.** $5\leqslant x\leqslant 10$.

Второй тур

7—8 класс. **1.** 13. **4.** 16796.

9—10 класс. **1.** 1949. **4.** Да, можно.

1951 год (XIV олимпиада)

Первый тур

7—8 класс. **3.** Второе выражение больше. **5.** 3 звена.

9—10 класс. **1.** Равносторонний треугольник со стороной a. **3.** При условии, что $R > 2r$, где R — радиус большей окружности, r — радиус меньшей окружности. **4.** 4 звена.

Второй тур

7—8 класс. **5.** -1.
9—10 класс. **1.** $a^2/2$.

1952 год (XV олимпиада)

Первый тур

7 класс. **4.** За $\frac{3}{11}$ ч до того, как A и B отправятся в путь из M.
10 класс. **1.** $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Второй тур

7 класс. **1.** $x_1 = x_2 = \ldots = x_{15} = \pm 1$.
8 класс. **4.** 100 и 198.
9 класс. **1.** $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \pm 1$ при нечётном n, $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = a$ и $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ при чётном n. **5.** Самый низкий среди высоких выше (точнее говоря, не ниже) самого высокого среди низких.

1953 год (XVI олимпиада)

Первый тур

7 класс. **2.** $\underbrace{11\ldots1}_{300}$.

9 класс. **1.** Семейство прямых, заданных уравнениями вида $x + y = k\pi$, где k — произвольное целое число.
10 класс. **2.** Объединение двух конусов (с общей вершиной O), один из которых получается из данного конуса симметрией относительно середины отрезка OS, где S — вершина данного конуса, а другой — параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{SO}$.

Второй тур

7 класс. **3.** Нет. **4.** 1998. **5.** $x_1 = x_3 = x_5 = 1$, $x_2 = x_4 = -1$.

8 класс. **3.** В первой. **4.** При чётном n могут, при нечётном $n \neq 1$ не могут. **5.** $x_1 = x_3 = \ldots = x_{99} = -1$, $x_2 = x_4 = \ldots = x_{100} = 1$.

9 класс. **4.** Да, попадём.

10 класс. **1.** 1, 2, ..., n.

1954 год (XVII олимпиада)

Первый тур

7 класс. **2.** Да, будут. **3.** 1014 (при делении на 2 и на 3) или 1035 (при делении на 5 и на 9). **4.** Нет, не существуют. **5.** 100.

8 класс. **5.** $y = -3x$, $z = 2x$ (x — произвольное число).

9 класс. **2.** 9999978596061...99100. **5.** Нет, не существуют.

10 класс. **1.** $x = \pm 1$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. **3.** $a_1 = a_2 = \ldots = a_{100} = 1$.

Второй тур

7 класс. **1.** Двумя буквами. **2.** Нет, не могут. **3.** $x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 0$.

8 класс. **5.** 0, 1 или 7.

9 класс. **1.** Окружность с центром на неподвижном луче (за исключением точек, лежащих на этом луче). **4.** Нет, не существует. **5.** Да, может.

10 класс. **1.** 0, 1, 2, 3 или 6.

1955 год (XVIII олимпиада)

Первый тур

7 класс. **1.** 175. **2.** $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle BCA = 30^\circ$. **3.** Высота (без концов отрезка), проведённая из вершины B, и дуга (тоже без концов) окружности, из которой сторона AC видна под углом 120°, лежащая внутри треугольника. **4.** Нет, не существует. **5.** Прямоугольники с отношением сторон $13:1$.

8 класс. **2.** Внутренность параллелограмма (см. рис. 7).

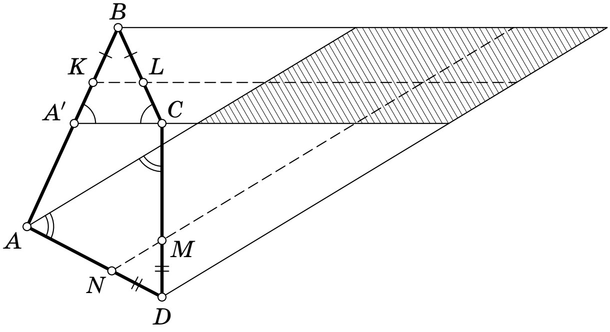


Рис. 7

4. Плоскость, полуплоскость и полоса, заключённая между двумя параллельными прямыми.

9 класс. **1.** $\frac{k(k^2+1)}{2}$. **3.** $(x, y) = (1, 0)$ или $(0, 1)$.

10 класс. **5.** Да, можно.

Второй тур

7 класс. **1.** $x = y = z = 0$. **4.** 28. **5.** См. рис. 8.

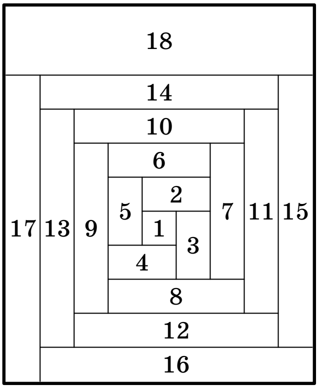


Рис. 8

8 класс. **4.** Не всегда. **5.** $\frac{N-1}{N} \leqslant |a| \leqslant \frac{M}{M-1}$.

9 класс. **5.** 5 партий; распределение играющих единственно (с точностью до их нумерации).

10 класс. **4.** $1954/2 = 977$ троек; нужно выбрать одну точку, оставшиеся точки разбить на пары и составлять тройки из выбранной точки и этих пар.

1956 год (XIX олимпиада)

Первый тур

7 класс. **2.** 18, 45, 90 и 99. **4.** 13. **5.** 1304.
8 класс. **2.** 0, $\frac{50}{100}$, $\frac{51}{100}$, ..., $\frac{99}{100}$, 1.
9 класс. **2.** 0, $\frac{500}{1000}$, $\frac{501}{1000}$, ..., $\frac{999}{1000}$, 1. **4.** 0, 2, 4 или 8.
10 класс. **2.** 0, $\frac{5000}{10000}$, $\frac{5001}{10000}$, ..., $\frac{9999}{10000}$, 1.

Второй тур

7 класс. **2.** $B_1A_1 = 2$. **3.** Нет, не может.
8 класс. **4.** Нет, не может.
9 класс. **2.** Да, можно. **3.** $y = 1$, $z = 0$ или $y = 0$, $z = 1$.

1957 год (XX олимпиада)

Первый тур

7 класс. **1.** Трапеция с углами $2\pi/5$ при большем основании. **5.** 40.

8 класс. **1.** Пусть $R > r$ — радиусы исходных окружностей. Если $2r^2 \leqslant R^2$, то искомое ГМТ состоит из двух исходных окружностей и части концентричной с ними окружности радиуса $\sqrt{2R^2 - r^2}$, выделенной на рис. 9 (прямые на этом рисунке параллельны данным прямым; один из прямоугольников изображён пунктиром). Если же $2r^2 > R^2$, то добавляется ещё часть окружности радиуса $\sqrt{2r^2 - R^2}$. **3.** Квадрат.

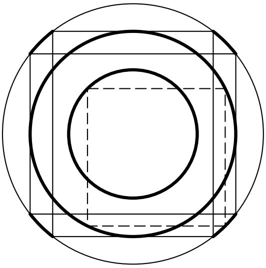


Рис. 9

9 класс. **2.** $x = \sqrt[3]{4}$.

10 класс. **1.** При чётных n. **5.** Если $n > 4$, то можно всегда, а при $n = 4$ можно деформировать любой четырёхугольник, кроме параллелограмма.

Второй тур

7 класс. **1.** В системе координат с осями OA и OB искомое ГМТ задаётся неравенствами $|x|+|y|>1$ и $x^2+y^2\leqslant 1$. **2.** Да, можно. **3.** Третья сторона должна быть равна наибольшей из сторон a и b. **4.** Все углы равны 60°.

8 класс. **1.** Если $a\geqslant\sqrt{2}b$, то третья сторона должна быть равна $\sqrt{a^2-b^2}$, а если $b\leqslant a<\sqrt{2}b$, то третья сторона должна быть равна b (для определённости предполагаем, что $a\geqslant b$). **4.** $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$.

9 класс. **2.** $x_1=x_2=\ldots=x_{99}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **3.** Всегда. **4.** $1957=\underbrace{163+\ldots+163}_{11\text{ слагаемых}}+164$.

10 класс. **2.** Если n нечётно, то $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Если n чётно, то либо $x_1=x_2=\ldots=x_n=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, либо $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}=0$ и $x_2=x_4=\ldots=x_n=1$, либо $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}=1$ и $x_2=x_4=\ldots=x_n=0$. **5.** Можно.

Указания

1935 год (I олимпиада)

Первый тур

1-й вариант

1. Составьте уравнение для $q=\sqrt{x/y}$, где x и y — данные числа.

2. Достройте исходный треугольник, проведя через одну из его вершин прямую, параллельную данной биссектрисе.

3. Пусть в основании лежит равнобедренный треугольник ABC, причём $AB=AC$. Опустите из вершин B и C перпендикуляры на ребро пирамиды, противолежащее ребру BC.

2-й вариант

1. Выясните, какое расстояние проедет поезд с того момента, когда первый вагон въедет на мост, до того момента, когда последний вагон покинет мост.

2. Рассмотрите поворот данных прямых на 90° с центром в одной из вершин искомого квадрата.

3. Выразите высоту пирамиды через боковое ребро и угол наклона боковых рёбер, а ребро основания — сначала через боковое ребро и угол наклона боковых рёбер, а затем через боковое ребро и плоский угол при вершине.

3-й вариант

1. Запишите четыре уравнения для сумм одноимённых членов и вычтите из каждого уравнения (кроме первого) предыдущее.

2. Выразите площадь треугольника через среднюю по величине сторону и опущенную на неё высоту и через радиус вписанного круга и полупериметр.

3. Получите соотношение между радиусами оснований конуса.

4-й вариант

1. Докажите, что $z = a^2 + 1$.

2. Воспользуйтесь тем, что радиусы описанных окружностей подобных треугольников пропорциональны соответственным сторонам.

3. Пусть ABC — треугольник, лежащий в основании пирамиды, причём сторона BC наименьшая; O — центр его описанной окружности. Тогда BOC — равнобедренный прямоугольный треугольник.

Второй тур

Серия A

1. Пусть высота, биссектриса и медиана проведены из вершины A и O — центр описанной окружности. Тогда прямые ON и AM параллельны.

2. Рассмотрите множество точек, из которых диагональ куба видна под углом $90°$.

3. Рассмотрите пересечение плоскостей, содержащих пары прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1.

Серия B

1. Докажите неравенство $xy \geqslant 1$ и воспользуйтесь неравенством $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$.

2. Сделайте замену $y = kx$ и решите систему относительно x и k.

3. Найдите сначала сумму $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + m^3$.

Серия C

1. Число геометрически различных раскрасок равно числу всех различных раскрасок куба (додекаэдра), делённому на число его самосовмещений.

2. Искомое число равно количеству способов выбрать два плюса в сумме $n = 1 + 1 + \ldots + 1$.

3. Для любого простого числа p степени, в которых оно входит в разложения чисел $M(a, b)$ и $D(a, b)$, зависят только от степеней, в которых оно входит в разложения чисел a и b.

1936 год (*II олимпиада*)

Второй тур

1. Получите уравнение для $t=xy$ и решите его.

2. Все прямые, отсекающие от данного угла треугольник данного периметра, касаются фиксированной окружности.

3. Если сумма квадратов двух чисел — полный квадрат, то одно из этих чисел делится на 3. Это верно и для делимости на 4.

4. Сначала найдите количество представлений, когда произведения, отличающиеся порядком множителей, считаются разными, а затем учтите те представления, которые мы при этом посчитали несколько раз.

5. Замените шар, касающийся трёх данных плоскостей и данного шара, на шар с тем же центром, проходящий через центр данного шара.

1937 год (*III олимпиада*)

Первый тур

1. Докажите, что $xyz=0$.

2. Окружность с центром B, радиус которой равен заданному отрезку, касается окружности с центром M и радиусом MA, которая проходит через точку A и точку A', симметричную точке A относительно данной прямой.

3. Рассмотрите параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через рёбра тетраэдра параллельно противоположным рёбрам.

Второй тур

1. Пусть A, B, C — данные точки, A', B', C' — центры требуемых окружностей (A' — центр окружности, проходящей через точки B и C, и т. д.). Найдите уравнения для углов при основаниях равнобедренных треугольников $BA'C$, $AB'C$ и $AC'B$.

2. Искомые плоскости перпендикулярны большим диагоналям додекаэдра.

3. Выясните, сколько частей добавляется при проведении одной диагонали.

1938 год (*IV олимпиада*)

Второй тур

1. Представьте рассматриваемую композицию шести преобразований как композицию трёх преобразований, каждое из которых — композиция двух исходных преобразований.

2. Примените индукцию, выяснив предварительно, на сколько частей разбивают плоскость n прямых (тоже с помощью индукции).

3. Рассмотрите точку, симметричную одной из вершин основания относительно прямой, проходящей через вершину параллельно основанию.

4. Если подчеркнуть все числа, делящиеся на 5, и все числа, делящиеся на 7, то числа, делящиеся на 35, будут подчёркнуты дважды.

1939 год (*V олимпиада*)

Первый тур

1. Докажите, что если $b \neq 0$, то $z = 0$.

2. Воспользуйтесь тем, что сумма векторов, идущих из центра правильного пятиугольника в его вершины, равна нулю.

3. Разберите отдельно два случая: когда искомая прямая пересекает отрезок BC и когда она его не пересекает.

4. Выразите a через x.

5. Рассмотрите точку, в которой продолжение биссектрисы пересекает описанную окружность.

Второй тур

1. Воспользуйтесь тем, что

$$a^{10}+a^5+1=\frac{(a^5)^3-1}{a^5-1} \quad \text{и} \quad a^{15}-1=(a^3)^5-1.$$

2. Если в обоих многочленах есть нечётные коэффициенты, то выберите члены минимальной степени с нечётными коэффициентами и рассмотрите в произведении этих многочленов коэффициент при члене, степень которого равна сумме степеней двух выбранных членов.

3. Предположив, что точка X найдена, рассмотрите точку K, в которой пересекает данную окружность прямая, проходящая через точку D параллельно прямой AB, и точку P, в которой пересекаются прямые KC и AB.

4. Проверьте, что $10^{10^k}\equiv 10^4 \pmod 7$ при $k\geqslant 1$.

5. Докажите, что для любой точки P, лежащей внутри правильного многоугольника, сумма расстояний от P до сторон многоугольника одна и та же.

6. Пусть a_n — наибольшее число частей, на которые разбивают сферу n окружностей, b_n — наибольшее число частей, на которые разбивают пространство n сфер. Покажите, что $a_n\leqslant a_{n-1}+2(n-1)$ и $b_n\leqslant b_{n-1}+a_{n-1}$.

1940 год (VI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Данное выражение обращается в нуль при $b=c$, при $c=a$ и при $a=b$, поэтому оно должно делиться на произведение множителей $b-c$, $c-a$ и $a-b$.

2. При движении вниз по течению реки скорость парохода складывается со скоростью течения реки, а при движении вверх по течению из скорости парохода вычитается скорость течения реки.

3. Выясните, сколько есть чисел от 1 до 100, делящихся на 5, и сколько — делящихся на 25.

4. Центр искомой окружности удалён на данное расстояние от данной прямой и от данной окружности.

9—10 класс

1. Найдите уравнение для $t = xy$.

2. Интересующая нас цифра принадлежит пятизначному числу.

3. Рассмотрите отдельно случаи, когда по одну сторону от искомой окружности лежат: две данные точки; три данные точки.

4. Рассмотрите точки пересечения данных прямых с прямыми, отстоящими от данных прямых на расстояние, равное заданному отрезку.

5. Сначала докажите, что ни одна цифра искомого числа не превосходит 5, а затем докажите, что у искомого числа есть ровно одна цифра 5 и что его первая цифра равна 1.

Второй тур

7—8 класс

1. Искомое число имеет вид $(11x)^2$, где x — натуральное число, заключённое между 4 и 9.

2. Если на отрезке DC выбрать такую точку L, что $DL = DA$, то треугольники DAB и LAC будут равны.

3. Составьте из четырёх экземпляров данного четырёхугольника фигуру так, чтобы параллельными сдвигами этой фигуры можно было замостить плоскость.

4. Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 7.

9—10 класс

1. Рассмотрите развёртку конуса, которая получается при разрезании по образующей, противоположной той, на которой лежит выбранная точка.

2. Докажите, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ для всех n.

3. Точка O является точкой пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$.

4. Произведение рассматриваемых дробей равно 1.

5. Остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 повторяются с периодами 3 и 7 соответственно.

1941 год (VII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Постройте сначала треугольник, образованный медианой и высотой.

2. Поделите 523 000 на $7\cdot 8\cdot 9=504$ с остатком.

3. Воспользуйтесь свойством средней линии треугольника.

4. Из искомых точек отрезок, соединяющий точку P с центром данной окружности, виден под прямым углом.

5. Представьте многочлен $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ в виде квадрата многочлена с целыми коэффициентами.

9—10 класс

2. Докажите, что равны четыре треугольника, одна из вершин каждого из которых — вершина параллелограмма, а две другие вершины — центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма, выходящих из этой вершины.

3. Докажите, что для всех целых x число $P(x)$ нечётно.

4. Точки M и N лежат на окружности с диаметром AB, поэтому можно построить центр этой окружности.

5. Воспользуйтесь методом интервалов.

6. Найдите число точек пересечения графиков функций $y=x/100$ и $y=\sin x$.

Второй тур

7—8 класс

1. Докажите, что если из попарно различных квадратов сложен прямоугольник, то самый маленький квадрат со всех сторон окружён другими квадратами.

2. Опустите перпендикуляры на стороны из центра вписанной окружности.

3. Треугольники, которые траектория точки отсекает от углов исходного треугольника, получаются друг из друга параллельным переносом.

4. Положите $x = -b$.

5. Простое число $p > 3$ имеет вид $6n \pm 1$.

6. Вершины треугольника ABC являются точками пересечения описанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$ с продолжениями его биссектрис или биссектрис внешних углов.

9—10 класс

1. Докажите, что если из попарно различных квадратов сложен прямоугольник, то самый маленький квадрат со всех сторон окружён четырьмя квадратами. Затем посмотрите, как может быть расположен последний (шестой) квадрат.

2. Рассмотрите круг наименьшего радиуса, содержащий все данные точки.

3. Докажите, что в искомом произведении двух многочленов эти многочлены равны.

4. Рассмотрите данное уравнение как квадратное уравнение относительно x и выясните, для каких y дискриминант этого уравнения положителен.

5. Воспользуйтесь методом координат, удобно расположив оси.

6. Выразите длины катетов через длины медиан.

1945 год (VIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Умножьте рассматриваемое произведение на $a - b$.

2. Каждое из n слагаемых не меньше $\frac{1}{2n}$.

3. Сумма цифр искомого числа делится на 11.

4. Отрезок, разрезающий треугольник на два треугольника равной площади, является медианой.

5. Проведите касательную к окружностям через точку их касания.

9—10 класс

1. Умножьте рассматриваемое произведение на $a-b$.

2. Если N — искомое число, то $N^2-N=N(N-1)$ делится на 1000.

3. Выразив y из первого уравнения, подставьте во второе.

4. Описанная окружность треугольника ABC проходит через вершину данного прямого угла.

Второй тур

7—8 класс

1. Вычислите отдельно сумму тысяч, сотен, десятков и единиц.

2. Представьте величину угла поворота в виде несократимой дроби, умноженной на 360°.

3. Воспользуйтесь подобием треугольников AQP и CQB.

4. Рассмотрите треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

9—10 класс

1. Представьте данное уравнение в виде $(x-5)(y+3)=c$, где c — некоторое число.

2. Примените индукцию по n и воспользуйтесь формулой $2\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{2-2\cos\alpha}$.

3. Рассмотрите также дугу, высекаемую на окружности продолжениями сторон треугольника.

1946 год (IX олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Каждому острому углу многоугольника соответствует тупой внешний угол, а сумма внешних углов равна 360°.

2. Рассмотрите поворот на угол 60° вокруг точки B.

3. Из равенства $131k+112=132l+98$ вытекает равенство $131(k-l)=l-14$. Поэтому если $k\neq l$, то l должно быть достаточно велико, а для четырёхзначного числа оно не может быть велико.

4. Сложите сначала все уравнения, а затем сложите первое, четвёртое и седьмое уравнения.

5. Рассматриваемое произведение является многочленом $P(x)$, обладающим свойством $P(-x)=P(x)$.

9—10 класс

1. Синус угла между рассматриваемой прямой l и плоскостью β равен произведению синуса угла между прямой l и прямой, по которой пересекаются плоскости α и β, на синус угла между плоскостями α и β.

2. Разрежем данный угол по прямой, отрезок которой делится в точке A пополам, и любой другой прямой, проходящей через точку A (и пересекающей обе стороны угла). При симметрии относительно точки A один из двух треугольников, которые при этом образуются, попадает внутрь другого треугольника.

3. Воспользуйтесь тем, что

$$n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33.$$

4. Воспользуйтесь тем, что $n!\,2^n=(2n)!!$.

5. Докажите геометрически, сравнивая площади фигур, что $\beta-\alpha<\cos\alpha(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)$ и $\alpha>\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

Второй тур

7—8 класс

1. Составьте уравнение для числа восьмиклассников и числа набранных ими очков, вычислив двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира.

2. Представьте данное выражение в виде

$$(x+2y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+3y).$$

3. Отрезок MN имеет наименьшую длину, когда он перпендикулярен биссектрисе данного угла.

4. Докажите, что машина a_n проходит через все перекрёстки тогда и только тогда, когда все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n, т. е. соответствующие им углы больше отклоняются от 90°. (Мы обозначаем одной буквой машину и дорогу, по которой она едет.)

5. Докажите, что через каждую остановку проходят ровно три маршрута.

9—10 класс

1. Каждый девятиклассник должен был выиграть все партии, которые он сыграл.

2. Замените числа остатками от деления на 10000 и докажите, что среди первых 10^8+1 пар соседних остатков найдутся две одинаковые пары.

3. Увеличьте пропорционально стороны треугольников SAB, SCD, SEF, лежащие на сторонах треугольника PQR, так, чтобы одна из увеличенных сторон совпала со стороной треугольника PQR, а две другие лежали на его сторонах. Затем сдвиньте эти две увеличенные стороны к первой из увеличенных сторон.

4. Докажите, что если на каком-то маршруте n остановок, то на любом другом маршруте тоже n остановок и через каждую остановку проходит n маршрутов.

1947 год (X олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. При раскрытии скобок получается сумма одночленов вида x^{5m+7n}.

2. Остаток равен значению многочлена $x+x^3+x^9+x^{27}+$ $+x^{81}+x^{243}$ при $x=1$.

3. Выберите среди данных чисел нечётное число, не делящееся на 3.

4. Рассмотрите области, на которые разбивают пятиугольник его диагонали.

5. Воспользуйтесь тем, что $\angle AOB = 180^\circ - \angle C$.

9—10 класс

1. Воспользуйтесь тем, что у многочленов $f(x)$ и $f(-x)$ коэффициент при x^{20} один и тот же.

2. Оцените отдельно произведение первых пяти множителей и произведение всех остальных множителей.

3. Сначала выберите среди данных чисел 5 нечётных чисел, затем среди них выберите три числа, не делящихся на 3, а потом выберите среди этих трёх чисел число, не делящееся ни на 5, ни на 7.

5. Найдите сначала прямые в пространстве, удалённые на расстояние d от данной прямой AB.

Второй тур

7—8 класс

1. Сначала положим на каждую чашечку весов по одному кубику. Если эти кубики разного веса, то мы получаем эталонную пару, с которой сравниваем оставшиеся 9 пар. Если эти кубики одного веса, то мы последовательно сравниваем с ними остальные пары. Как только какая-то пара окажется другого веса, мы сможем составить эталонную пару и дальше сравнивать с ней.

2. Если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то для каждой его стороны найдётся сторона, ей параллельная.

3. Докажите, что два из выбранных чисел имеют одинаковые наибольшие нечётные делители.

4. Разберите поочерёдно случаи, когда есть 1 отрезок одной длины и 5 отрезков другой длины, 2 отрезка одной длины и 4 отрезка другой длины, 3 отрезка одной длины и 3 отрезка другой длины.

9—10 класс

1. Докажите, что проекция этой пирамиды на плоскость, параллельную паре противоположных рёбер, представляет собой параллелограмм.

2. Докажите, что $p \leqslant 3$.

3. Выпишите в каждой строке, начиная с третьей, остатки от деления на 2 первых четырёх чисел и сравните первую выписанную строку с пятой.

4. Рассмотрите наибольшие нечётные делители всех выбранных чисел.

5. Проведите лучи из точки A_9 в вершины четырёхугольника $A_5A_6A_7A_8$.

1948 год (XI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Расположите искомые числа в порядке возрастания и покажите, что наименьшее из них не превосходит 3.

2. Воспользуйтесь тем, что $2^{10} = 1024$.

3. Примените индукцию по n.

9—10 класс

1. Если $2^n - 2 = nm$, то $\dfrac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1} = 2\dfrac{2^{nm}-1}{2^n-1}$.

2. Если $x = \dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi}$, то $\pi^x = 10 > \pi^2$.

3. Рассмотрите сначала случай, когда точка A' лежит на ребре AB.

Второй тур

7—8 класс

1. Используя разложения на простые множители, докажите, что если $x < y$, то y делится на x.

2. Рассмотрите гомотетию с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-\dfrac{1}{2}$.

3. При симметрии относительно одного центра симметрии фигуры её другой центр симметрии переходит в третий центр симметрии.

9—10 класс

1. Докажите, что $x=\left(\frac{p+q}{p}\right)^{p/q}$ и $y=\left(\frac{p+q}{p}\right)^{(p+q)/q}$, где p и q — взаимно простые целые числа.

2. Рассмотрите сечение куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно одной из диагоналей.

3. Найдите число целочисленных решений уравнения $|x|+|y|=n$ для $n=0$, 1, ..., 99.

4. Воспользуйтесь методом координат, считая, что первый луч задаётся вектором (1,0,0).

1949 год (XII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Число $27195^8-(10887^8-10152^8)=(27195^8-10887^8)+$ $+10152^8$ делится на $5\cdot 7^2$ и на $2^2\cdot 3^3$.

2. Все оси симметрии многоугольника проходят через его центр масс.

3. Поделите обе части равенства на 2^a так, чтобы одно из чисел $x^2/2^a$, $y^2/2^a$, $z^2/2^a$ стало нечётным.

4. Возьмите отрезок, концы которого делят пополам периметр ломаной, и рассмотрите круг с центром в середине этого отрезка.

5. Отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, виден из двух вершин под прямым углом.

9—10 класс

2. Оси вращения ограниченного тела пересекаются в его центре масс. Любая прямая, проходящая через центр масс этого тела, является его осью вращения.

3. Данное уравнение можно записать в виде $f(x)=f^{-1}(x)$.

4. Среди данных чисел не может быть больше четырёх попарно различных чисел.

5. Прямые, соединяющие середины противоположных сторон данного шестиугольника, пересекаются в одной точке.

Второй тур

7—8 класс

1. Соедините каждое поле с теми двумя полями, на которые может попасть из него фишка. В результате получится некоторый цикл. Рассмотрите движение по этому циклу.

2. Выберите ось координат и рассмотрите все точки каждого треугольника с наибольшей координатой. Посмотрите, какая фигура получается из этих точек.

3. Докажите, что все гири имеют вес одной и той же чётности. Если не все гири одного веса, то из каждой гири можно вычесть вес наименьшей гири; полученный в результате набор обладает прежним свойством.

4. Рассмотрите центр масс шестиугольника.

5. Рассмотрите остатки от деления на 100 чисел $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$.

6. В соответствии с соглашением о знаках длина участка пути между соседними вершинами выражается через длины касательных к окружности, проведённых из этих вершин.

9—10 класс

2. Из этих кирпичиков можно сложить куб, от которого отрезаны рёбра плоскостями, параллельными соответствующим рёбрам и проходящими через середины смежных с ними рёбер.

4. Среди всех центрально-симметричных многоугольников с данным центром симметрии O, лежащих в треугольнике T, наибольшую площадь имеет пересечение треугольника T и треугольника, симметричного треугольнику T относительно точки O.

5. Докажите, что для любого натурального числа A существуют натуральные числа m и n, для которых

$$\lg A < n \lg 2 - m < \lg(A+1).$$

1950 год (XIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Искомая окружность может пересекать границу любой клетки только в вершине.

2. Любые девять гирь весом n, $n+1$, ..., $n+8$ можно разложить на три равные по весу кучи.

3. Сравните углы B_1A_3O и B_3A_3O.

4. Произведение разности длин двух сторон треугольника на разность двух противолежащих им углов неотрицательно.

5. Если 2 км быстрее пройти пешком, то 1 км тоже можно пройти пешком. Но тогда на путь длиной 2 км будет затрачено ровно в два раза больше времени, чем на путь длиной 1 км.

9—10 класс

1. Воспользуйтесь тем, что

$$\sin B \sin C + \cos B \cos C = \cos(B - C) \leqslant 1.$$

2. Если все четыре вершины пирамиды расположены вблизи концов отрезка длины 1 (но не все вблизи одного и того же конца), то сумма рёбер приблизительно равна 3 или 4.

3. Разложите сначала девять гирь весом n^2, $(n+1)^2$, ..., $(n+8)^2$ на три кучи так, чтобы две кучи весили одинаково, а вес третьей кучи был на 18 г меньше.

4. Подкоренные выражения можно представить в виде полных квадратов.

5. Сравните углы B_nA_nO и $B_{n-1}A_{n-1}O$.

Второй тур

7—8 класс

1. Из каждой вершины исходного 13-угольника выходит не более двух диагоналей, которые являются сторонами рассматриваемого многоугольника.

2. Рассмотрите произведение

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{100}.$$

3. Точки касания с вписанной окружностью делят периметр квадрата на четыре части; рассмотрите отдельно каждую из этих частей.

4. Пусть a_n — количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами. Выразите a_n через a_1, a_2, ..., a_{n-1}.

9—10 класс

1. Из некоторой вершины A_1 выходят две диагонали, ограничивающие полученный многоугольник, причём их концы — соседние вершины A_p и A_{p+1}. Можно считать, что $p \leqslant 975$. Любая диагональ, кроме A_1A_{p+1}, выходит из одной из вершин с номерами от 2 до p.

2. Сопоставим члену a_k данной последовательности два числа x_k и y_k, где x_k — наибольшая длина возрастающей последовательности, начинающейся с a_k, y_k — наибольшая длина убывающей последовательности, начинающейся с a_k. Если $x_k \leqslant 10$ и $y_k \leqslant 10$ для всех k, то количество всех различных пар (x_k, y_k) не превосходит 100, но такие пары не могут совпадать.

3. Если на сторонах AB, BC, CA и AD выбраны точки K, L, M и N соответственно, то эти точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN}{AN}=1.$$

4. Рассмотрите 10 попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке.

1951 год (XIV олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Рассмотрите случаи $x \leqslant 0$, $0 < x < 1$, $x \geqslant 1$.

2. Если у треугольника фиксированы две стороны, то при увеличении угла между ними третья сторона увеличивается.

3. Вычислите разность $\dfrac{1+b}{1+b+b^2} - \dfrac{1+a}{1+a+a^2}$.

4. Рассмотрите точку, которая получается из точки P параллельным переносом на вектор средней линии трапеции и симметрией относительно средней линии.

5. Если мы расковали k звеньев, то наиболее выгодна ситуация, когда полученные при этом $k+1$ частей состоят из $k+1$, $2(k+1)$, $4(k+1)$, $8(k+1)$, ..., $2^k(k+1)$ звеньев (раскованные звенья здесь не учитываются).

9—10 класс

1. Если число сторон многоугольника больше 3, то его можно заменить на многоугольник (с меньшим числом сторон) строго большей площади.

2. Воспользуйтесь тем, что $0{,}515 < b < 0{,}516$ и $0{,}1234 < a < 0{,}1235$.

3. Сравните угол при вершине звёздчатого многоугольника, лежащей на большей окружности, с углом, под которым видна соответствующая сторона описанного многоугольника из центра окружности.

4. См. указание к задаче 5 для 7—8 класса.

5. Соотношение $2y = x + z$ можно записать в виде $10^{2y} = 10^x \cdot 10^z$.

Второй тур

7—8 класс

1. Это число заключено между кубами двух последовательных чисел.

2. Постройте на сторонах треугольника ABC внешним образом подобные треугольники с углами $180^\circ - \angle D$, $180^\circ -$

$-\angle E$ и $180^\circ - \angle F$, а затем соедините их вершины с вершинами треугольника ABC.

3. Рассмотрим граф, рёбра которого — задачи, а концы рёбер — решившие их школьники. Граф представляет собой объединение непересекающихся циклов, и разбор задач можно организовать по этим циклам.

4. Вместо проекции можно рассмотреть сечение плоскостью P фигуры, состоящей из всех прямых, проходящих через точку O и точки данного треугольника.

5. Деление на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ — это то же самое, что деление на $x^{12}-1$ и умножение на $(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)$.

9—10 класс

1. Наибольшую площадь имеет проекция на плоскость, параллельную двум противоположным рёбрам.

2. Число членов последовательности 1, 2, ..., 1951, делящихся хотя бы на одно из данных чисел $a_1, \ldots, a_n$, равно

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right]+\left[\frac{1951}{a_2}\right]+\ldots+\left[\frac{1951}{a_n}\right].$$

3. а) Достаточно учесть только тех пассажиров, которые находятся в автобусе, когда он едет от 7-й остановки до 8-й.

б) Рассмотрите случай, когда от каждой остановки с номерами 1, 2, ..., 10 до каждой другой остановки с этими номерами едет ровно один пассажир, а дальше автобус едет пустым.

4. Примените вращение правильного треугольника вокруг одной из его вершин, чередуя эти вершины.

1952 год (XV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Выразите углы треугольника LMN через углы треугольника ABC.

2. Оба выражения равны

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)+2(xy+yz+zx)(ab+bc+ca).$$

3. Любые два ребра параллелепипеда равны, потому что они являются сторонами двух равных параллелограммов с общей стороной.

4. Время, которое A и C едут на велосипеде, равно времени, которое B идёт пешком.

8 класс

1. Две вершины любого треугольника и основания высот, опущенных из этих вершин, лежат на одной окружности.

2. Оба выражения равны

$$(x^2+y^2+z^2+u^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)+$$
$$+2(xy+yz+zu+ux)(ab+bc+cd+da)+4(xz+yu)(ac+bd).$$

4. Чтобы A и B затратили на дорогу наименьшее время, они должны прибыть в N одновременно.

9 класс

1. Если сумма нескольких членов геометрической прогрессии равна одному из её членов, то обе части этого равенства можно поделить на первый из встречающихся в этом равенстве членов геометрической прогрессии (первый — это значит с наименьшей степенью знаменателя).

2. Если прямая b' перпендикулярна прямым a и c, а прямая c' перпендикулярна прямым a и c, то прямая a перпендикулярна прямым b' и c'.

3. Воспользуйтесь тем, что

$$(1-x)(1+y)>0 \quad \text{и} \quad (1+x)(1-y)>0.$$

4. Воспользуйтесь тем, что площадь треугольника равна произведению радиуса вписанной окружности на полупериметр.

5. Докажите, что либо a_3, либо a_4, либо a_5 меньше 100.

10 класс

1. cos arcsin cos arcsin $x = \pm x$ и sin arccos sin arccos $x = \pm x$.

2. Воспользуйтесь индукцией по n.

3. Проекции точек касания на прямую SO совпадают.

4. Рассмотрите отдельно случай $a > 0$ и случай $a < 0$.

Второй тур

7 класс

1. Из первого и второго уравнений получаем $x_1 = x_3$.

2. Выразите расстояния от вершины A до точек касания через длины сторон четырёхугольника и диагонали AC.

3. Если $0 < a < 1$, то $0 < a^2 < a < 1$.

4. Рассмотрите окружность с диаметром AB и перпендикуляры к отрезку AB, восставленные из его концов.

8 класс

1. Если $0 < a < 1$, то $0 < a < \sqrt{a} < 1$.

2. Треугольники NBD и NAE, NBF и NAD подобны.

3. Если a и b — рассматриваемые числа, причём a делится на b, то число $\frac{a-b}{b}$ делится на 9, а с другой стороны, оно не превосходит 7.

4. Если среди m прямых есть три прямые, пересекающиеся в трёх различных точках, то эти m прямых разбивают плоскость по крайней мере на $2m + 1$ частей.

9 класс

1. Из первого и второго уравнений получаем $x_1 = x_3$.

2. Оси цилиндров должны быть взаимно перпендикулярны.

4. Выберем на стороне BC точку R так, что $\angle CAR = 60^\circ$. Пусть S — точка пересечения прямых CQ и AR. Докажите, что QP — биссектриса угла SQR.

5. Рассмотрите ученика, стоящего на пересечении продольного ряда, в котором стоит самый низкий среди высоких, и поперечного ряда, в котором стоит самый высокий среди низких.

10 класс

1. Сложите указанную сумму с такой же суммой, заменив x на $x+\pi$, затем заменив x на $x+\pi/2$, и т. д.

3. Абсолютные величины корней каждого из этих многочленов принимают только два значения, причём произведение этих значений для одного многочлена больше 1, а для другого меньше 1.

1953 год (XVI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Разрежьте трапецию на параллелограмм и треугольник.

3. Восставьте перпендикуляры в концах отрезка и с их помощью постройте серединный перпендикуляр к отрезку.

4. Поделите $n^2+8n+15$ на $n+4$ с остатком.

8 класс

1. Рассматриваемая окружность вписана (или вневписана) в треугольник, вершины которого — центры данных окружностей.

4. Выразите рассматриваемую дробь через

$$a=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1}$$

и докажите, что $a<2$.

9 класс

1. Синус обращается в нуль в точках $k\pi$, где k — целое число.

2. Докажите, что $\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1})$.

3. Если $f(x)g(y) = x^{200}y^{200} + 1$, то можно положить сначала $x = 0$, а затем $y = 0$.

4. Воспользуйтесь тем, что $S_{EFA} = S_{ACE}$.

10 класс

2. Рассмотрите симметрию относительно середины отрезка, соединяющего точку O с вершиной данного конуса.

Второй тур

7 класс

1. Достаточно проследить за степенью каждого простого множителя отдельно.

2. Если диагональ четырёхугольника проходит через центр вписанной окружности, то эта диагональ является осью симметрии четырёхугольника.

3. Соседние колёса должны вращаться в противоположных направлениях.

4. Вычислите двумя способами сумму всех углов полученных треугольников.

5. Вычтите из второго уравнения первое, из третьего второе и т. д.

8 класс

1. Неравенство $2S \leqslant ad + bc$ очевидно. Чтобы доказать неравенство $2S \leqslant ac + bd$, разрежьте четырёхугольник по диагонали и сложите новый четырёхугольник, перевернув один из треугольников.

2. 1953 можно заменить на произвольное натуральное число n, делящееся на 3. Доказательство достаточно провести для числа, которое получается, если начать читать с соседнего места.

3. Добавить вершину A_1 можно всегда, а отбросить не всегда.

4. См. указание к задаче 3 для 7 класса.

5. См. указание к задаче 5 для 7 класса.

9 класс

2. Воспользуйтесь методом координат, выбрав прямую l в качестве одной из осей.

3. При $x = x_1$ и при $x = x_2$ трёхчлен $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ принимает значения разного знака.

4. На листе клетчатой бумаги, вершинами клеток которого служат центры клеток исходного листа, отражение происходит по правилу отражения луча света.

5. Основаниями пирамид служат три грани куба, имеющие общую вершину.

10 класс

1. Числа 1, 2, ..., n являются корнями данного уравнения.

3. Докажите неравенства

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad x_n - \sqrt{2} < \frac{(x_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2}.$$

5. Случай $n = 1$ надо разобрать отдельно, а при $n > 1$ требуемые наборы клеток устроены одинаково.

1954 год (XVII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Отрежьте 3 луча звезды и сложите трапецию.

2. Докажите равенство многоугольников индукцией по n.

3. Согласно второй схеме деления первые две цифры искомого числа равны 10.

4. Число $n^2 - m^2$ либо нечётно, либо делится на 4.

5. Для трёхзначного числа $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ выполняется неравенство $\dfrac{100a + 10b + c}{a + b + c} \leqslant 100$.

8 класс

1. Разрежьте поверхность куба по диагоналям одной его грани и рёбрам, перпендикулярным этой грани.

2. Поверните указанные векторы на 90°.

5. Рассматриваемая бесконечная система уравнений эквивалентна системе двух уравнений: $x+y+z=0$, $4x+2y+z=0$.

9 класс

1. Если $f(x_0)=f'(x_0)=0$, то x_0 — двукратный корень многочлена $f(x)$.

2. Первые цифры оставшегося числа должны быть наибольшими возможными.

3. Сложите все данные неравенства.

4. Предположите противное и посмотрите, как тогда должны располагаться проведённые отрезки по отношению к высотам треугольника.

5. Если все грани тетраэдра $ABCD$ равны, то треугольник ABC должен быть остроугольным.

10 класс

1. Выделите полный квадрат.

3. Сложите данные неравенства.

Второй тур

7 класс

1. Расставьте буквы в шахматном порядке.

2. На каждой улице направление движения машин определено однозначно.

3. Если $x_1, \ldots, x_7$ — такое решение рассматриваемой системы, что хотя бы одно из чисел $x_1, \ldots, x_7$ отлично от нуля, то выберем x_k — наибольшее по абсолютной величине из этих чисел. Тогда $|a_{kk}x_k| > \left|\sum\limits_{i\neq k} a_{ik}x_i\right|$.

8 класс

1. Существуют две пары клеток, симметричных относительно центра квадрата, с равными суммами написанных чисел.

2. Рассмотрите векторы, идущие из точки O в остальные рассматриваемые точки, и запишите соотношения между ними.

3. Докажите, что произведение первых k простых чисел имеет 2^{k-1} делителей, разлагающихся на чётное число простых сомножителей, и 2^{k-1} делителей, разлагающихся на нечётное число простых сомножителей.

5. Если у семиугольника есть две оси симметрии, то он правильный.

9 класс

1. Рассмотрите на луче l_1 такую точку C, для которой $CA_2 \parallel B_1B_2$, и проверьте, что $A_1S = A_1A_2 \cdot \frac{A_1B_1}{A_1C}$.

2. См. указание к задаче 2 для 8 класса.

3. Пусть $C_1 \geqslant C_2 \geqslant \ldots \geqslant C_{100} > 0$. Можно считать, что $C_1 < 100$. Воспользуйтесь неравенствами $100 - C_1 > 0$, $100 - C_2 > 0$, $C_2 - C_3 \geqslant 0$ и $C_1 - C_3 \geqslant 0$.

4. Расположите числа a_i в порядке возрастания и воспользуйтесь тем, что при перестановке чисел a_i числа b_i переставляются точно так же.

5. Если пятёрки отрезков проведены k раз, то число свободных концов равно $4k+1$.

10 класс

1. Воспользуйтесь тем, что плоскость симметрии треугольной пирамиды проходит через две её вершины.

4. Рассмотрите сумму данных уравнений.

5. Разбейте числа на классы в соответствии с чётностью числа встречающихся в них двоек.

1955 год (XVIII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Представьте каждое число таблицы в виде $7a+b$, где $0 \leqslant a \leqslant 6$ и $1 \leqslant b \leqslant 7$, и просуммируйте отдельно слагаемые $7a$ и слагаемые b.

2. Докажите, что $AB = BD = DC = DA$.

3. Рассмотрите поворот на 120° с центром в центре треугольника ABC.

4. Число $n^2 + n + 1$ не делится на 5.

5. Прямоугольник обязательно должен быть разрезан стандартным образом: разрезы проходят параллельно сторонам на равных расстояниях.

8 класс

1. Разберите отдельно случай, когда n делится на 4. В случае, когда n не делится на 4, нужно проверить, что $2^{4k} - 1$ делится на 3.

2. Все прямые KL заметают полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми.

3. Любое число от 1 до 7 встречается в таблице ровно 7 раз, причём вне диагонали оно встречается чётное число раз. Число 7 нечётно, поэтому каждое число встречается на диагонали нечётное число раз.

4. Если выпуклая фигура содержит прямую l и точку A, то она содержит и полосу, заключённую между прямой l и прямой, проходящей через точку A параллельно прямой l.

5. Пользуясь свойствами вписанного угла, сравните сумму углов при вершинах A_1 и C_1 с суммой углов при вершинах B и D.

9 класс

1. Представьте каждое число таблицы в виде $ka + b$, где $0 \leqslant a \leqslant k - 1$ и $1 \leqslant b \leqslant k$, и просуммируйте отдельно слагаемые ka и слагаемые b.

2. Параллельный перенос позволяет свести ситуацию к случаю концентрических окружностей.

3. Решений, для которых оба числа x и y отличны от нуля, нет. Для доказательства разберите отдельно случай, когда числа x и y одного знака, и случай, когда числа x и y разных знаков.

4. Остатки от деления на p для двух из чисел a_1, a_2, ..., a_p совпадают. Рассмотрите разность этих чисел.

5. Если отрезок CE пересекает отрезок AD, то $DA+ +EC > AC+ED$.

10 класс

1. Любое число от 1 до n встречается в таблице ровно n раз, причём вне диагонали оно встречается чётное число раз. Число n нечётно, поэтому каждое число встречается на диагонали нечётное число раз.

3. Рассмотрите точки перпендикуляра к прямой, параллельно которой производится сжатие.

5. Выберите точки A, B, C на одном расстоянии от точки O.

Второй тур

7 класс

1. Если есть ненулевое решение (x, y, z), то x чётно, поэтому y тоже чётно, поэтому z тоже чётно.

2. Пусть x принимает все целые значения от 1 до n. Выясните, в каких пределах изменяется при этом ax^2+bx+c и сколько есть точных четвёртых степеней, заключённых в этих пределах.

3. Выразите углы треугольника $O_1O_2O_3$ через углы треугольника ABC.

4. По олимпийской системе выявим победителя за $25- -1=24$ партии. Победитель при этом играл не более чем с 5 шахматистами, причём он обязательно играл со вторым по силе. Победителя среди 5 шахматистов можно выявить за 4 партии.

5. Окружите прямоугольник четырьмя прямоугольниками по спирали, затем полученный прямоугольник снова окружите четырьмя прямоугольниками и т. д. Так можно получить прямоугольник, разрезанный на 17 прямоугольников. 18-й прямоугольник можно к нему приложить.

8 класс

1. Если $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$, то разность $f(x+1)-f(x)$ постоянна при достаточно больших x.

2. Пусть O_1 и O_2 — центры первых двух окружностей, R — точка их касания, P — середина дуги, отсекаемой внешней касательной на третьей окружности. Докажите, что $PO_1^2-PO_2^2=RO_1^2-RO_2^2$.

3. Для n-угольника средняя сумма номеров сторон треугольников равна $\frac{3(n+1)}{2}$. При $n=10$ это число не целое.

4. Положите $a=b=1$, $c=2$.

5. Если $0<a<\frac{N-1}{N}$, то среди чисел $[a]$, $[2a]$, …, $[Na]$ есть совпадающие.

9 класс

1. Выразите векторы сторон треугольника $A_2B_2C_2$ через векторы сторон треугольника ABC.

2. Расположите на положительной полуоси отрезки так, чтобы промежутки между ними имели длину 1/2, 1/4, 1/8, …; на отрицательной оси отрезки расположите симметрично.

3. Поделите данное уравнение на x^n и перенесите все члены, кроме первого, в правую часть.

5. Проследите, с кем играл первый человек; распределение играющих единственно (с точностью до их нумерации).

10 класс

1. Докажите, что $f(x)=g(x)\left(x-\frac{p}{q}\right)$, причём многочлен $q^{n-1}g(x)$ имеет целые коэффициенты.

3. Чтобы выяснить, как устроена тень от конуса, рассмотрите точку пересечения плоскости основания конуса с прямой, проходящей через вершину конуса и источник света.

4. Общая точка для всех пар должна быть одной и той же.

5. Точки A_2, B_2, C_2 являются точками пересечения сторон треугольника $A_1B_1C_1$ с прямыми A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1.

1956 год (XIX олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Рассмотрите два случая: 1) точки расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника; 2) одна из точек лежит внутри треугольника с вершинами в трёх других точках.

2. Искомое число делится на 9.

3. Каждой точке самопересечения соответствует пара звеньев.

4. Вычислите наибольший общий делитель чисел $5l+6$ и $8l+7$.

5. Точки, удалённые от данной точки A на расстояния 1 и 2, расположены по разные стороны от неё. Расположение точек, удалённых от них на расстояния 1 и 2, определено однозначно и т. д.

8 класс

1. Проведите через середину отрезка DE отрезки, равные и параллельные отрезкам DA и EC.

2. Пусть $\alpha = \frac{n}{100} + \alpha_1$, где n — целое число и $0 \leqslant \alpha_1 < \frac{1}{100}$. Нас интересует округлённое с недостатком значение дроби $\frac{n}{n+100\alpha_1}$. Покажите, что эта дробь либо равна 0 (при $n=0$), либо заключена между $1/2$ и 1.

3. Точки, удалённые от данной точки A на расстояния 1 и 2, расположены по разные стороны от неё. Расположение точек, удалённых от них на расстояния 1 и 2, определено однозначно и т. д.

4. Из равенств $al+b=km$ и $cl+d=kn$ следует равенство $ad-bc=k(na-mc)$.

5. Число, равное среднему арифметическому четырёх чисел, не может быть больше всех этих чисел.

9 класс

1. Рассматриваемые прямые пересекаются в центре масс четырёхугольника $ABCD$.

2. Пусть $\alpha=\frac{n}{1000}+\alpha_1$, где n — целое число и $0\leqslant\alpha_1<\frac{1}{1000}$. Нас интересует округлённое с недостатком значение дроби $\frac{n}{n+1000\alpha_1}$. Покажите, что эта дробь либо равна 0 (при $n=0$), либо заключена между 1/2 и 1.

4. Воспользуйтесь методом ГМТ.

10 класс

1. Рассмотрите вписанную и описанную окружности квадрата; рассмотрите также треугольники, для которых эти окружности являются вписанными и стороны которых параллельны сторонам данного треугольника.

2. Пусть $\alpha=\frac{n}{10000}+\alpha_1$, где n — целое число и $0\leqslant\alpha_1<\frac{1}{10000}$. Нас интересует округлённое с недостатком значение дроби $\frac{n}{n+10000\alpha_1}$. Покажите, что эта дробь либо равна 0 (при $n=0$), либо заключена между 1/2 и 1.

4. Рассмотрите проекцию на прямую, ортогональную плоскости сечения.

5. После замены переменных можно считать, что $x_1=x_2+|a|$ и $x_3=x_4+|b|$. Тогда $1=x_1+x_2+x_3+x_4=2x_2+2x_4+|a|+|b|>|a|+|b|$.

Второй тур

7 класс

1. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственные стороны равны и параллельны.

2. Составьте уравнение для $x=B_1A_2$.

3. Сумма каждого подчёркнутого отрицательного числа и стоящего за ним положительного числа положительна.

4. Возьмите строку, симметричную данному столбцу от-носительно выделенной диагонали, и вычислите сумму всех элементов строки и столбца.

5. Если n журналов покрывают площадь S, то можно убрать один журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь не менее $(n-1)S/n$.

8 класс

1. Загрузим полностью 8 машин. Вызывающие перегруз ящики можно увезти на двух машинах, а все остальные — на одной.

2. Для каждой строки рассмотрите два столбца, симметричных этой строке относительно двух диагоналей, и другую строку, симметричную этим столбцам.

3. Проекции точки X на все прямые, проходящие через точку O, лежат на окружности с диаметром OX.

4. Выделите сначала тройки чисел, в которых первые два числа — подчёркнутые отрицательные числа; среди оставшихся чисел выделите пары, в которых первое число — подчёркнутое отрицательное число.

5. Если площадь общей части любых двух прямоугольников меньше $1/9$, то два прямоугольника занимают площадь больше $1 + 8/9$, три прямоугольника занимают площадь больше $1 + 8/9 + 7/9$ и т. д.

9 класс

2. Разрежьте данный куб на 13^3 кубиков с ребром 1. Внутри одного из этих кубиков нет выбранных точек.

3. Числа x, y, z неотрицательны, среди них есть по крайней мере один нуль, и по крайней мере два из этих чисел равны.

4. Выразите отношение длин отрезков, соединяющих концы диагонали с точкой пересечения диагонали и прямой, соединяющей точки касания, через отношения длин отрезков, на которые делят стороны четырёхугольника эти две точки касания.

5. Выберем прямоугольник так, чтобы его стороны были параллельны линиям клетчатой бумаги и вершины треугольника ABC лежали на его сторонах. Одна из точек A, B, C лежит на стороне прямоугольника (не в вершине). Сдвинувшись из этой вершины внутрь прямоугольника на единичный вектор, получим требуемую точку.

10 класс

1. Выделите сначала наборы чисел наибольшей длины m, в которых первые $m-1$ чисел — подчёркнутые отрицательные числа; среди оставшихся чисел выделите наборы длины $m-1$, в которых первые $m-2$ чисел — подчёркнутые отрицательные числа, и т. д.

2. Если площадь общей части любых двух многоугольников меньше $1/9$, то два многоугольника занимают площадь больше $1+8/9$, три многоугольника занимают площадь больше $1+8/9+7/9$ и т. д.

4. Развёртка данной пирамиды представляет собой треугольник, в котором проведены средние линии.

5. Составьте уравнения для $x_k = A_{k+1}B_k$.

1957 год (XX олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. В равнобедренном треугольнике, стороной которого служит большее основание, диагональ является боковой стороной, а в равнобедренном треугольнике, стороной которого служит меньшее основание, диагональ является основанием.

2. Положите $x=0$, $x=\pm 1$ и $x=2$.

3. В каждом из четырёх направлений (вперёд, назад, направо, налево) улитка должна проползти одно и то же расстояние.

4. Рассмотрите сумму чисел в некоторой строке, представив каждое число в этой строке в виде произведения суммы чисел столбца на сумму чисел строки.

5. Если в записи одного числа встречаются две разные цифры, то их сумма должна быть равна 9.

8 класс

1. Если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки O выполняется равенство $OB^2 - OA^2 = OC^2 - OD^2$.

3. Пусть d — наибольшая диагональ параллелограмма со сторонами a и b. Тогда $d^2 \geqslant a^2 + b^2 \geqslant 2ab \geqslant 2S$, где S — площадь параллелограмма.

4. Рассмотрите сумму чисел в некоторой строке, представив каждое число в этой строке в виде произведения суммы чисел столбца на сумму чисел строки.

5. Положите $x = 0$, $x = \pm 1$ и $x = \pm 2$.

9 класс

2. Докажите, что $-1 \leqslant x < 2$.

3. Пусть M'' и N'' — середины сторон AB и CD. Тогда векторы сторон треугольников $MM'M''$ и $NN'N''$ равны по величине и противоположно направлены.

4. Если есть любая сумма денег разными монетами, делящаяся на 5, то, меняя монеты достоинством 1, 2 и 3 коп. на монеты достоинством в 5, 10 и 15 коп., всегда можно добиться, чтобы монет 1, 2 и 3 коп. не осталось.

5. Рассмотрите часть многоугольника, которая остаётся после выбрасывания наибольшей стороны a, и выберите точку, которая делит пополам периметр этой части.

10 класс

1. Число $20^n - 3^n$ делится на 17, а число $16^n - 3^n$ делится на 19.

2. Из того, что каждые три последовательных звена попарно перпендикулярны, следует, что число звеньев делится на 3, а из того, что ломаная замкнута, следует, что число звеньев чётно.

4. Если есть любая сумма денег разными монетами, делящаяся на 5, то, меняя монеты достоинством 1, 2 и 3 коп. на монеты достоинством в 5, 10 и 15 коп., всегда можно добиться, чтобы монет 1, 2 и 3 коп. не осталось.

5. См. указание к задаче 5 для 9 класса.

Второй тур

7 класс

1. Введём систему координат с осями OA и OB. Докажите, что для точки M в первом квадранте координаты всех векторов звеньев данной ломаной положительны.

2. Занумеруйте контакты лампы по порядку, а отверстия штепселя — в противоположном порядке.

3. Рассмотрите равнобедренный треугольник, основание которого — наименьший из отрезков a и b, а боковая сторона — наибольший.

4. На каждом шаге углы треугольника заменяются на полусуммы пар углов исходного треугольника, поэтому наибольший угол не увеличивается.

5. Сумма $a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+8}$ восьми идущих подряд членов последовательности заключена строго между a_{k+9} и a_{k+10}.

8 класс

1. Пусть для определённости $a \geqslant b$. Фиксируем сторону BC; тогда точка A движется по окружности. Пусть BA_1 — касательная к этой окружности. Рассмотрите отдельно случай, когда $BA_1 \geqslant CA_1$ и когда $BA_1 < CA_1$.

2. Записав после некоторой цифры числа из первой последовательности нуль, мы получаем число из второй последовательности.

3. Замените рассматриваемые отношения на отношения расстояний от точек O и G до сторон треугольника. Затем докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного треугольника до его сторон постоянна, двумя способами выразив площадь треугольника.

4. Если хотя бы одно из чисел x_1, x_2, x_3 не равно нулю, то из данной системы уравнений следует, что

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_3}\right)^2=0.$$

5. На каждом шаге углы треугольника заменяются на полусуммы пар углов исходного треугольника, поэтому разность между наибольшим и наименьшим углом на каждом шаге уменьшается вдвое.

9 класс

1. Достаточно рассмотреть случай, когда прямоугольник перемещается вдоль одной из своих сторон.

2. Пусть α_1 и α_2 — корни уравнения $f(x)=x$, где $f(x)=1-x^2$. Докажите, что ни на одном из интервалов $(-\infty, \alpha_1)$, $(\alpha_1, 0)$, $(0, \alpha_2)$, $(\alpha_2, 1)$, $(1, +\infty)$ уравнение $f^{(n)}(x)=x$ не имеет решений.

3. Пусть против числа i стоит число $\sigma(i)$. Вычислите двумя способами сумму $\sum\limits_{i=1}^{20}(i-\sigma(i)) \pmod{20}$.

4. Воспользуйтесь тем, что если $b \geqslant a+2$, то

$$a!\,b! \geqslant (a+1)!\,(b-1)!.$$

5. Выразите длину касательной через расстояние от точки большей окружности до точки касания большей окружности и меньшей (и радиусы окружностей).

10 класс

1. Если три вершины прямоугольника с заданными направлениями сторон перемещаются по трём сторонам четырёхугольника $ABCD$, то четвёртая вершина перемещается по некоторому отрезку.

2. См. указание к задаче 2 для 9 класса.

3. Замените рассматриваемые отношения на отношения расстояний от точек O и G до граней тетраэдра. Затем докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри правильного тетраэдра до его граней постоянна, двумя способами выразив объём тетраэдра.

4. Записав после некоторой цифры числа из первой последовательности нуль, мы получаем число из второй последовательности.

5. Отнесём к одной группе самое большое число, а к другой — следующее за ним по величине. После этого будем относить к двум группам числа в порядке убывания, добавляя число в ту группу, в которой сумма чисел меньше.

Решения

1935 год (I олимпиада)

Первый тур

1-й вариант

1. Пусть x и y — искомые числа. По условию $\frac{x+y}{2} : \sqrt{xy} = 25 : 24$, т. е. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{25}{12}$. Положим $q = \sqrt{x/y}$. Тогда $q + \frac{1}{q} = \frac{25}{12}$, т. е. $q^2 - \frac{25}{12}q + 1 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим $q_1 = 4/3$ и $q_2 = 3/4$. Таким образом, $x : y = 16 : 9$ или $9 : 16$.

2. Пусть ABC — искомый треугольник, CD — его биссектриса. Возьмём на прямой AC точку E так, что $BE \parallel CD$ (рис. 10). Тогда углы при стороне BE треугольника BCE равны, поэтому $EC = CB = a$. Кроме того, $EB : CD = EA : CA$, поэтому

$$EB = \frac{m(a+b)}{b}.$$

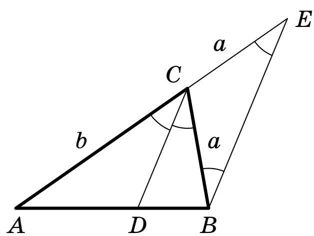


Рис. 10

В треугольнике BCE мы знаем длины всех сторон, поэтому можем его построить. Теперь для построения треугольника ABC достаточно отложить отрезок b на продолжении стороны EC за точку C.

Задача имеет решение, если $\frac{m(a+b)}{b} < 2a$.

3. Пусть ABC — основание данной пирамиды, причём A — вершина равнобедренного треугольника ABC, т. е. $\angle BAC = \alpha$; S — вершина пирамиды. Боковые рёбра наклонены под равными углами, поэтому они равны. Из равенства треугольников ASB и ASC следует, что основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C на прямую

AS, совпадают. Пусть D — основание этих двух перпендикуляров, E — середина отрезка BC. Тогда угол $\vartheta = \angle CDB$ искомый. Ясно, что $DE = AE \sin\varphi$ ($\angle ADE = 90^\circ$, поскольку прямая AD перпендикулярна плоскости BDC) и $EC = AE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{EC}{DE} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\sin\varphi}$.

2-й вариант

1. Пусть длина поезда равна l м. Чтобы проехать через мост, передний вагон должен въехать на мост, проехать по нему a м, а потом проехать ещё l м для того, чтобы последний вагон покинул мост. В результате получаем систему уравнений $l = t_1 v$, $l + a = t_2 v$. Решая её, находим $l = \frac{t_1 a}{t_2 - t_1}$ м и $v = \frac{a}{t_2 - t_1}$ м/с.

2. Пусть a, b, c — данные прямые, причём прямая b лежит между a и c. Предположим, что вершины A, B, C квадрата $ABCD$ лежат на прямых a, b, c соответственно.

Первый способ. Возьмём на прямой b произвольную точку B и опустим из неё перпендикуляр BA_1 на прямую a и перпендикуляр BC_1 на прямую c. Прямоугольные равные углы (рис. 11), поэтому они равны. Из этого вытекает следующее построение. На прямой a строим отрезок A_1A, равный отрезку BC_1. Мы построили вершину A. Вершина C строится аналогично (так, чтобы точки A и C лежали по одну сторону от прямой A_1C_1).

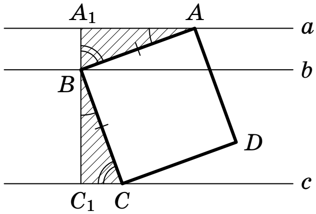


Рис. 11

Второй способ. Из того, что $\angle ABC = 90^\circ$ и $AB = BC$, вытекает следующее построение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и повернём прямую a относительно точки B на 90° (в одну или в другую сторону). Точка C — это точка пересечения прямой c и образа прямой a при указанном повороте.

3. Пусть длина бокового ребра равна b, а высота пирамиды равна h. Искомый объём V равен $a^2h/3$. Пусть плоские углы при вершине и углы наклона боковых рёбер к плоскости основания равны α. Тогда $b\sin\alpha = h$, $b\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ и $b\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$. Поэтому из 1-го и 3-го уравнений получаем

$$h = b\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)} = a\cos\frac{\alpha}{2},$$

а значит, $V = \frac{1}{3}a^3\cos\frac{\alpha}{2}$. Кроме того, из 2-го и 3-го уравнений получаем $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$. Пусть $\cos\frac{\alpha}{2} = x$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1, \qquad (1)$$

так как $\alpha < 90^\circ$, и

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x^2-1). \qquad (2)$$

После возведения обеих частей в квадрат новых корней не появится, так как $2x^2-1>0$ согласно неравенству (1). Поэтому уравнение (2) можно преобразовать к виду $4x^4 - 2x^2 - 1 = 0$. Это уравнение является квадратным уравнением относительно x^2. Решая его, получаем $x^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. Ни число x^2, ни число x не могут быть отрицательными, поэтому $x = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

3-й вариант

1. Пусть a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ — искомая арифметическая прогрессия; b, bq, bq^2, bq^3 — искомая геометрическая прогрессия. По условию

$$\begin{aligned} a+b &= 27,\\ a+d+bq &= 27,\\ a+2d+bq^2 &= 39,\\ a+3d+bq^3 &= 87. \end{aligned}$$

Вычтем из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвёртого третье:

$$d+b(q-1)=0,$$
$$d+bq(q-1)=12,$$
$$d+bq^2(q-1)=48.$$

Из первого уравнения получаем $b(q-1)=-d$; подставим это выражение для $b(q-1)$ во второе и третье уравнения:

$$d-dq=12,$$
$$d-dq^2=48.$$

Поделив последнее уравнение на предпоследнее, получим $1+q=4$, т. е. $q=3$. Следовательно, $d=\frac{12}{1-q}=-6$, $b=\frac{d}{1-q}=$ $=3$ и $a=27-b=24$. Таким образом, искомые прогрессии — это 24, 18, 12, 6; 3, 9, 27, 81.

2. Пусть $a-d$, a, $a+d$ — стороны треугольника, h — высота, опущенная на сторону a. Площадь треугольника, с одной стороны, равна $\frac{ah}{2}$, а с другой стороны, она равна произведению половины периметра на радиус вписанного круга: $\frac{(a-d)+a+(a+d)}{2}r$. Приравнивая эти выражения, получаем $\frac{ah}{2}=\frac{3ar}{2}$, т. е. $r=\frac{1}{3}h$.

3. Пусть R — радиус окружности большего основания, r — радиус окружности меньшего основания. Периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен $\frac{12r}{\sqrt{3}}$. Периметр правильного треугольника, вписанного в большее основание, равен $3R\sqrt{3}$. По условию $\frac{12r}{\sqrt{3}}=3R\sqrt{3}$, т. е. $r=\frac{3}{4}R$. Если φ — искомый угол наклона, то $\operatorname{tg}\varphi=$ $=\frac{R}{R-r}=4$ (рис. 12).

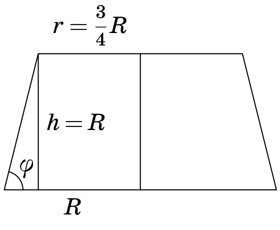


Рис. 12

4-й вариант

1. Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z^2+2a^2, \\ \quad x+y=4(a^2+1)-2z, \\ \quad -xy=a^2-z^2. \end{cases}$$

Второе уравнение возведём в квадрат, прибавим к нему третье уравнение, умноженное на 2, и вычтем первое уравнение. В результате получим

$$0=16(a^2+1)^2-16(a^2+1)z,$$

т. е. $z=a^2+1$ (здесь предполагается, что число a вещественное, поэтому $a^2+1\neq 0$ и на a^2+1 можно поделить). Теперь второе и третье уравнения записываются так:

$$\begin{cases} x+y=2(a^2+1), \\ \quad xy=a^4+a^2+1. \end{cases}$$

Решение этой системы сводится к решению квадратного уравнения; решая его, находим

$$x=a^2\pm a+1, \qquad y=a^2\mp a+1.$$

2. Радиусы R_1, R_2 и R описанных окружностей подобных треугольников ADG, DBF и ABC пропорциональны соответственным сторонам:

$$\frac{R_1}{AD}=\frac{R_2}{DB}=\frac{R}{AB},$$

поэтому $\dfrac{R_1+R_2}{AD+DB}=\dfrac{R}{AB}$, а значит, $R_1+R_2=R$. Умножая это равенство на 2π, получаем требуемое.

3. Пусть l — длина образующей конуса. Длина окружности основания равна длине дуги развёртки, поэтому радиус окружности основания равен $l/3$. Пусть углы треугольника, лежащего в основании пирамиды, равны $\alpha-15^\circ$, α и $\alpha+15^\circ$. Учитывая, что сумма углов любого треугольника равна 180°, получаем, что $\alpha = 60^\circ$. Поэтому основание пирамиды — треугольник ABC с углами 45°, 60°, 75°. Пусть BC — меньшая сторона, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle BOC = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, поэтому BOC — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $l/3$. Значит, $BC = l\sqrt{2}/3$. Пусть D — середина отрезка BC, S — вершина конуса. Тогда $OD = DB = \dfrac{l}{3\sqrt{2}}$ и $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = \sqrt{l^2 - \dfrac{l^2}{18}} = \dfrac{l\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$. Если φ — искомый угол, то $\cos\varphi = \dfrac{OD}{SD} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Второй тур

Серия А

1. Пусть ABC — исходный треугольник, причём A — вершина треугольника ABC, из которой проведены медиана, биссектриса и высота. По точкам M, N и P можно построить описанную окружность. Пусть O — её центр. Прямая ON параллельна прямой AM, поскольку обе они перпендикулярны стороне BC (рис. 13). Из этого вытекает следующее построение. Через точку M проводим прямую, параллельную прямой ON. Вершина A — это точка пересечения построенной прямой с описанной окружностью. Чтобы построить остальные вершины, найдём точку пересечения прямых AP и ON; из этой точки восставим перпендикуляр к прямой ON. Он пересекает окружность в искомых точках.

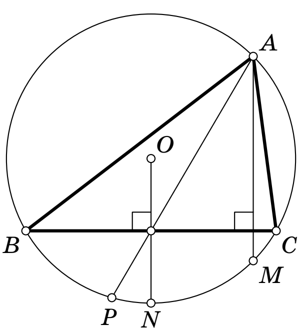


Рис. 13

2. Множество точек, из которых диагональ AC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ видна под углом 90°, представляет собой описанную вокруг куба сферу (концы диагонали исключены). Действительно, докажем, например, что из вершины B диагональ AC_1 видна под углом 90°. Прямая AB перпендикулярна грани BCC_1B_1, поэтому $AB \perp BC_1$ (рис. 14), т. е. $\angle ABC_1 = 90^\circ$. Для остальных вершин доказательство аналогично.

Пересечение этого множества с поверхностью куба состоит из шести точек — вершин куба, отличных от концов данной диагонали. Все остальные точки поверхности куба лежат строго внутри описанной сферы, поэтому из них диагональ видна под тупым углом.

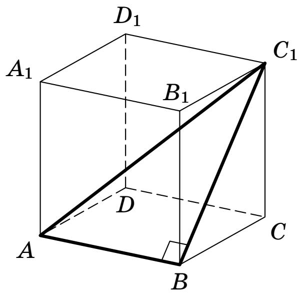


Рис. 14

3. По условию каждая пара прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежит в одной плоскости, поэтому мы можем рассмотреть плоскости ABA_1B_1, BCB_1C_1 и ACA_1C_1. Пересечением первых двух плоскостей служит прямая BB_1 (ни одна из пар рассматриваемых плоскостей не может совпадать, иначе треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежали бы в одной плоскости). Если третья плоскость пересекает прямую BB_1 в некоторой точке, то эта точка является как точкой пересечения трёх указанных плоскостей, так и точкой пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Действительно, прямые AA_1 и CC_1 являются пересечениями пар плоскостей, поэтому точка пересечения трёх плоскостей им принадлежит. Если же третья плоскость параллельна прямой BB_1, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны друг другу. Действительно, в этом случае пересечения пар плоскостей являются тремя параллельными прямыми.

Комментарий. Из этого утверждения легко выводится теорема Дезарга: если треугольники ABC и $A'B'C'$ расположены на плоскости так, что точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой, то прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке или параллельны друг другу.

Серия B

1. *Первый способ.* Из второго уравнения следует, что $xy \geqslant 1$. Числа x и y не могут быть оба отрицательны, поскольку их сумма равна 2. Значит, числа x и y положительны, и согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел $x+y \geqslant \geqslant 2\sqrt{xy} \geqslant 2$, причём равенство $x+y=2$ возможно лишь в том случае, когда $x=y=1$. В таком случае $z=0$.

Второй способ. Подставим выражение $y=2-x$ во второе уравнение. В результате получим $z^2=x(2-x)-1= =-(x-1)^2$. Следовательно, $z=0$, $x=1$ и $y=2-x=1$.

2. Пусть $y=kx$. Сразу отметим, что $k\neq 1$. Из уравнений

$$x^3-k^3x^3=26,$$
$$kx^3-k^2x^3=6$$

получаем $x^3=\dfrac{26}{1-k^3}$ и $x^3=\dfrac{6}{k-k^2}$. Следовательно,

$$\frac{26}{1-k^3}=\frac{6}{k-k^2}.$$

Поскольку $k\neq 1$, обе части этого уравнения можно умножить на $1-k$. В результате получим эквивалентное уравнение

$$\frac{26}{1+k+k^2}=\frac{6}{k},$$

т. е. $6k^2-20k+6=0$. Решая это квадратное уравнение, получаем $k=3$ или $\dfrac{1}{3}$. Поэтому равенство $x^3=\dfrac{26}{1-k^3}$ показывает, что $x^3=-1$ или $x^3=27$. В итоге, используя соотношение $y=kx$, получаем решения, перечисленные в ответе.

3. Индукцией по m легко доказать, что $1^3+2^3+3^3+\ldots$ $\ldots+m^3=\left(\dfrac{m(m+1)}{2}\right)^2$. Действительно, база индукции очевидна: при $m=1$ как левая, так и правая часть равны 1. Поэтому нужно лишь доказать шаг индукции, т. е. проверить равенство

$$\frac{m^2(m+1)^2}{4}+(m+1)^3=\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}.$$

После сокращения на $(m+1)^2$ и умножения на 4 получаем очевидное равенство $m^2+4(m+1)=(m+2)^2$.

Таким образом,

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n)^3=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2,$$

т. е.

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3+2^3(1^3+2^3+\ldots+n^3)=\\=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2.$$

Преобразуем последнее равенство, воспользовавшись тем, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. В результате получим

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=\\=\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2-2^3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=n^2(2n^2-1).$$

Серия C

1. Сначала решим задачу для куба.

Первый способ. Куб можно повернуть так, чтобы грань, окрашенная первым цветом, заняла заданное положение. Для окраски противоположной ей грани есть 5 различных вариантов; разные раскраски противоположной грани дают геометрически различные раскраски куба. Среди оставшихся четырёх граней можно выбрать грань, окрашенную данным цветом (одним из четырёх оставшихся цветов), и перевести её в данное положение (не меняя при этом положение первых двух граней). Разные раскраски трёх оставшихся граней дают геометрически различные раскраски куба. Одну из этих граней можно окрасить тремя способами, одну из оставшихся — двумя. Всего получаем $5\cdot3\cdot2=30$ геометрически различных раскрасок.

Второй способ. Сначала найдём число разных рас-красок куба без учёта его самосовмещений, т. е. мы считаем, что грани куба занумерованы, причём если цвета хотя бы одной грани разные, то такие раскраски считаются разными. Первую грань можно покрасить в 6 цветов, вторую в 5, третью в 4 и т. д. Всего получаем $6! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 6 = 720$ разных раскрасок. Из каждой такой раскраски можно получить столько разных раскрасок, сколько есть разных самосовмещений куба; при этом все эти раскраски будут геометрически одинаковыми. Таким образом, число геометрически различных раскрасок куба равно $720/N$, где N — число самосовмещений куба. Любую из 6 граней куба самосовмещением можно перевести в любую другую. После этого можно сделать любой из 4 поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается $6\cdot 4 = 24$ самосовмещения. Поэтому количество геометрически различных раскрасок куба равно $720/24 = 30$.

Решим теперь задачу для 12-гранника (додекаэдра); при этом мы будем рассуждать так же, как во втором решении задачи для куба. Количество всех возможных раскрасок додекаэдра равно $12! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 12$. Чтобы найти число геометрически различных раскрасок, нужно поделить $12!$ на число самосовмещений додекаэдра. Любую из 12 граней можно перевести в любую другую. Кроме того, есть 5 поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается 60 самосовмещений. Поэтому количество геометрически различных раскрасок додекаэдра равно $12!/60 = 7\,983\,360$.

2. *Первый способ*. Пусть $n = x + y + z$. Число x может быть равно 1, 2, 3, …, $n-2$. При фиксированном x число y может принимать одно из $n - x - 1$ значений. Всего получаем $(n-2) + (n-3) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

Второй способ. Запишем n как сумму единиц: $n = 1 + \ldots + 1$. Представить n в виде суммы целых положительных чисел $n = x + y + z$ — это то же самое, что выбрать среди $n-1$ знаков плюс какие-то два. Действительно, мы можем считать, что перед первым по порядку выбранным знаком плюс стоит x единиц, а после второго знака плюс стоит z единиц. Всего получаем $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

3. Докажем сначала формулу для двух чисел. Пусть $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$. Тогда

$$D(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\min\{\alpha_k, \beta_k\}},$$
$$M(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} \dots p_k^{\max\{\alpha_k, \beta_k\}},$$

где $\min\{\alpha, \beta\}$ обозначает наименьшее из двух чисел α и β, а $\max\{\alpha, \beta\}$ — наибольшее. Приведём доказательство для каждого простого множителя отдельно. Пусть $a = p^\alpha$ и $b = p^\beta$, причём $\alpha \leqslant \beta$. Тогда $D(a, b) = p^\alpha$ и $M(a, b) = p^\beta$. Поэтому $M(a, b) \cdot D(a, b) = p^\alpha p^\beta = ab$.

Аналогично докажем формулу для трёх чисел. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$, причём $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В этом случае

$$\frac{M(a, b, c)D(a, b)D(b, c)D(c, a)}{D(a, b, c)} = \frac{p^\gamma p^\alpha p^\beta p^\alpha}{p^\alpha} = abc.$$

1936 год (II олимпиада)

Второй тур

1. Пусть $xy = t$. Несложно проверить, что

$$x^5 + y^5 = (x+y)^5 - 5(x+y)^3 xy + 5(x+y)x^2y^2 = a^5 - 5a^3t + 5at^2.$$

При $a \neq 0$ для t получаем квадратное уравнение $t^2 - a^2 t + \frac{a^5 - b^5}{5a} = 0$. Решая его, находим $t = \frac{1}{2}\left(a^2 \pm \sqrt{\frac{a^5 + 4b^5}{5a}}\right)$.

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=t. \end{cases}$$

Решение этой системы тоже сводится к решению квадратного уравнения; его корни указаны в ответе.

2. Пусть A, B, C — точки пересечения прямых b и c, c и a, a и b. Рассмотрим вневписанную окружность треугольника ABC, которая касается стороны AB в некоторой точке M и продолжений сторон CA и CB в некоторых точках K и L (рис. 15). Тогда $CK+CL=(CA+AK)+$ $+(CB+BL)=(CA+AM)+(CB+BM)=CA+CB+AB$. Ясно также, что $CK=CL$, поэтому $CK=CL=p$, где p — полупериметр.

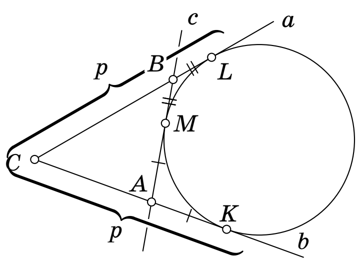


Рис. 15

Из этого вытекает следующее построение. Построим на разных сторонах угла точки K и L так, что $CK=CL=p$. Затем построим окружность S, касающуюся прямых b и a в точках K и L. Наконец, проведём из точки M касательные к окружности S. Те касательные, для которых окружность S является вневписанной окружностью треугольника ABC, будут искомыми прямыми c.

3. Пусть a и b — катеты данного треугольника, c — его гипотенуза. Тогда $a^2+b^2=c^2$. Легко проверить, что при делении на 3 квадрат целого числа даёт остаток 0 или 1. Поэтому если a^2+b^2 — квадрат целого числа, то одно из чисел a и b делится на 3. То же самое справедливо и для остатков от деления на 4, поэтому одно из чисел a и b делится на 4. Следовательно, ab делится на 12.

4. Пусть множители имеют вид $2^{a_1}5^{b_1}$, $2^{a_2}5^{b_2}$ и $2^{a_3}5^{b_3}$. Тогда $a_1+a_2+a_3=6$ и $b_1+b_2+b_3=6$. При этом числа a_i и b_i могут быть равны нулю. Если $a_1=k$, то для разложения $a_2+a_3=6-k$ получаем $7-k$ вариантов. Поэтому для разложения $a_1+a_2+a_3=6$ получаем $7+6+5+4+3+2+1=28$ вариантов. Всего получаем $(28)^2=784$ способа.

Но пока что мы не учли тождественность разложений, отличающихся лишь порядком множителей. Есть ровно одно разложение, не зависящее от порядка множителей, в котором все множители равны 100. Те разложения, в которых есть два равных множителя, мы посчитали трижды. В каждый из равных множителей 2 может входить в степени 0, 1, 2 или 3, т. е. всего четырьмя различными способами; столькими же способами может входить 5. Всего получаем 16 разложений такого вида, но одно из них — рассмотренное выше разложение с тремя равными множителями. Остаётся 15 разложений, каждое из которых мы посчитали трижды. Количество разложений с попарно различными множителями равно $784-1-45=738$. Каждое из них мы посчитали 6 раз, поэтому среди них будет $738/6=123$ различных разложения. Всего получаем $1+15+123=139$ разложений.

5. Пусть O и R — центр и радиус данной сферы S. Предположим, что сфера S_1 с центром O_1 касается данной сферы и трёх данных плоскостей. Сопоставим сфере S_1 сферу S_1' с центром O_1 и радиусом O_1O. Сфера S_1' проходит через данную точку O и касается трёх плоскостей, удалённых от данных плоскостей на расстояние R. Для каждой плоскости есть ровно две плоскости, удалённых от неё на расстояние R. Поэтому сфера S_1' проходит через данную точку O и касается тройки плоскостей, причём есть $2^3=8$ различных таких троек.

Легко проверить, что существует не более двух сфер, проходящих через данную точку O и касающихся трёх данных плоскостей. В случае, когда три данные плоскости пересекаются в одной точке, это доказывается следующим образом. Ясно, что искомая сфера должна быть расположена в том трёхгранном угле, который образован данными плоскостями и содержит точку O. Впишем в этот трёхгранный угол произвольную вспомогательную сферу. Проведём прямую, соединяющую точку O и точку пересечения данных плоскостей. Искомые сферы соответствуют точкам пересечения этой прямой с вспомогательной сферой, а таких точек не более двух. Это соответствие следующее: искомая сфера получается из вспомогательной сферы гомотетией, переводящей точку пересечения в точку O.

Отдельно рассматривается случай, когда точка O лежит на одной из данных плоскостей. В этом случае прямая, соединяющая точку O с точкой пересечения данных плоскостей, пересекает вспомогательную сферу не более чем в одной точке, но зато теперь у нас есть не один трёхгранный угол, содержащий точку O, а два. (Если точка O лежит на пересечении двух данных плоскостей, то искомой сферы не существует.)

Кроме того, нужно рассмотреть два более простых случая: 1) есть две параллельные плоскости и их пересекает третья плоскость; 2) прямые пересечения плоскостей параллельны. В обоих случаях мы снова строим вспомогательную сферу, касающуюся трёх данных плоскостей, но теперь мы проводим через точку O прямую, параллельную прямым пересечения плоскостей. Искомая сфера получается из вспомогательной сферы параллельным переносом, переводящим точку пересечения в точку O. (Легко видеть, что если все три плоскости параллельны или пересекаются по одной прямой, то сфера не может касаться трёх таких плоскостей.)

В итоге мы получаем, что существует не более 16 сфер S_1'. На первый взгляд, сфера S_1 восстанавливается по сфере S_1' не однозначно. Действительно, чтобы её восстановить, нужно взять точку O', в которой прямая OO_1 пересекает сферу S; сфера S_1 — это сфера с центром O_1 и радиусом O_1O' (рис. 16). Точек пересечения сферы с прямой, проходящей через её центр, две, поэтому мы получаем две сферы, а не одну. Но в действительности лишь одна из них может касаться трёх данных плоскостей (две концентрические сферы не могут касаться одной и той же плоскости). Поэтому существует не более 16 сфер, касающихся данной сферы и трёх данных плоскостей.

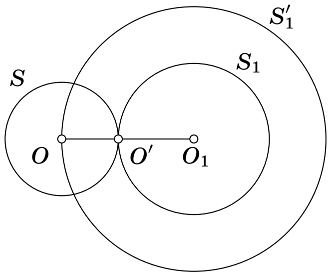


Рис. 16

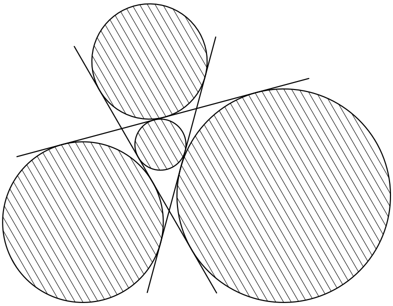


Рис. 17

Покажем теперь, что при различных расположениях данных плоскостей и данной сферы количество сфер, касающихся их, может быть любым целым числом от 0 до 16. Будем считать, что данные плоскости пересекаются по трём параллельным прямым, причём расстояния между этими прямыми попарно различны. Сферы, касающиеся трёх данных плоскостей, заметают четыре цилиндра, соответствующих вписанной и трём вневписанным окружностям треугольника, который образуется при пересечении данных плоскостей плоскостью, ортогональной всем трём данным плоскостям (рис. 17). Эти цилиндры не имеют общих точек, в том числе и точек касания.

Рассмотрим цилиндр и точку вне его. Рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке. Нас интересуют сферы, вписанные в цилиндр и касающиеся сферы S_R. Если радиус R сферы S_R мал, то таких сфер нет (рис. 18, а). Будем увеличивать радиус R до тех пор, пока сфера S_R не коснётся цилиндра. В этом случае количество искомых сфер равно 1 (рис. 18, б). Будем снова увеличивать радиус R. Когда сфера S_R пересечёт цилиндр, количество искомых сфер станет равно 2 (рис. 18, в). Затем сфера S_R будет пересекать цилиндр и ещё касаться его в одной точке. В этом случае количество искомых сфер равно 3 (рис. 18, г). Если же радиус R увеличить ещё больше, то количество искомых сфер будет равно 4 (рис. 18, д).

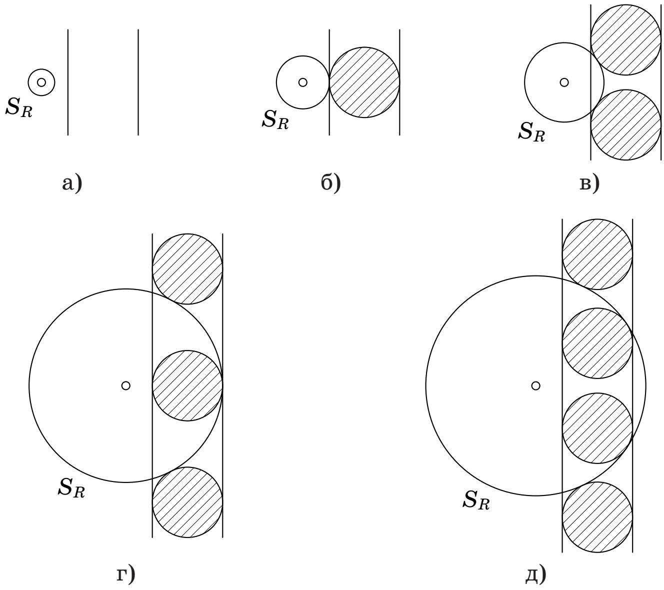


Рис. 18

Эти замечания показывают, что если мы выберем точку вне данных четырёх цилиндров и рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке, то при постепенном увеличении радиуса R мы получим конфигурации, для которых число искомых сфер последовательно изменяется от 0 до 16. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы не появлялись одновременно две точки касания сферы S_R с цилиндрами.

1937 год (III олимпиада)

Первый тур

1. Тождество

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+xz)$$

показывает, что

$$xy+yz+xz=0. \qquad (1)$$

Тождество $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$ показывает, что $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. Учитывая равенство (1), получаем

$$xyz=(xy+yz+xz)(x+y+z)-(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

Если $x=0$, то равенство (1) показывает, что $yz=0$. Поэтому либо $y=0$ и $z=a$, либо $z=0$ и $y=a$. Аналогично разбираются остальные варианты. В итоге получаем следующие решения: $(0, 0, a)$, $(0, a, 0)$ и $(a, 0, 0)$.

2. Пусть l — данная прямая, a — данный отрезок. Предположим, что точка M на прямой l обладает требуемым свойством. Пусть S — окружность радиуса a с центром B, S' — окружность радиуса AM с центром M, A' — точка, симметричная точке A относительно прямой l (рис. 19).

Тогда окружность S' касается окружности S, а точка A' лежит на окружности S'. Укажем теперь способ построения требуемой точки M. Достаточно провести через данные точки A и A' окружность S', касающуюся данной окружности S, и найти её центр M.

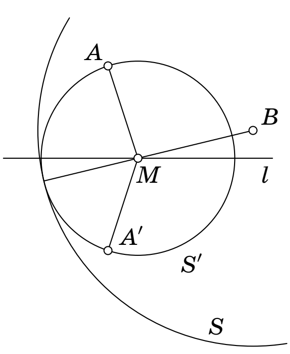


Рис. 19

Окружность S' строится следующим образом. Возьмём произвольную точку C окружности S, не лежащую на прямой AA', и построим описанную окружность треугольника

$AA'C$; она пересекает S в некоторой точке D. Если $AA' \parallel CD$ то построение очевидно: искомая окружность проходит через точки A и A' и одну из точек пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AA' с окружностью S. Предположим теперь, что $AA' \nparallel CD$. Пусть X — точка пересечения прямых AA' и CD. Проведём к окружности S касательные XP и XQ. Тогда описанные окружности треугольников $AA'P$ и $AA'Q$ искомые, так как $XP^2 = XQ^2 = XC \cdot XD = XA \cdot XA'$ (рис. 20).

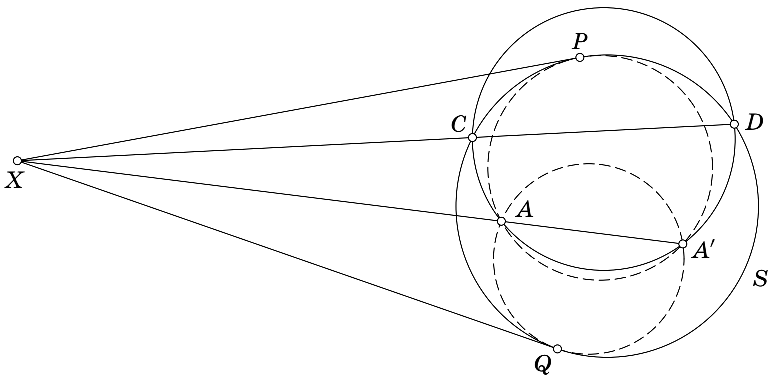


Рис. 20

В зависимости от длины отрезка a задача имеет 0, 1 или 2 решения.

3. Покажем, что объём такого тетраэдра равен

$$\frac{1}{6}\, abd \sin \varphi,$$

где a и b — длины отрезков, d — расстояние между скрещивающимися прямыми, φ — угол между ними. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через рёбра тетраэдра параллельно противоположным рёбрам (рис. 21). Плоско-

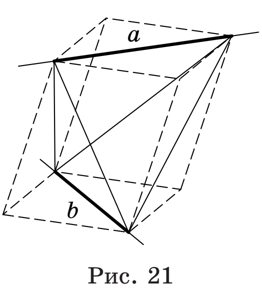


Рис. 21

сти граней исходного тетраэдра отсекают от параллелепипеда 4 тетраэдра, объём каждого из которых составляет 1/6 объёма параллелепипеда. Поэтому объём тетраэдра составляет 1/3 объёма параллелепипеда. А объём параллелепипеда легко вычисляется, поскольку его грань является параллелограммом с диагоналями a и b и углом φ между ними, а высота, опущенная на эту грань, равна d.

Второй тур

1. Пусть A, B, C — данные точки, A', B', C' — центры требуемых окружностей (A' — центр окружности, проходящей через точки B и C и т. д.). Треугольники $BA'C$, $AB'C$, $AC'B$ равнобедренные. Пусть x, y, z — углы при их основаниях, причём эти углы ориентированные: x — это угол поворота от вектора $\overrightarrow{CB}$ к вектору $\overrightarrow{CA'}$, y — угол поворота от вектора $\overrightarrow{AC}$ к вектору $\overrightarrow{AB'}$, z — угол поворота от вектора $\overrightarrow{BA}$ к вектору $\overrightarrow{BC'}$ (рис. 22). Пусть, далее, α, β, γ — углы треугольника ABC, ориентированные так, как

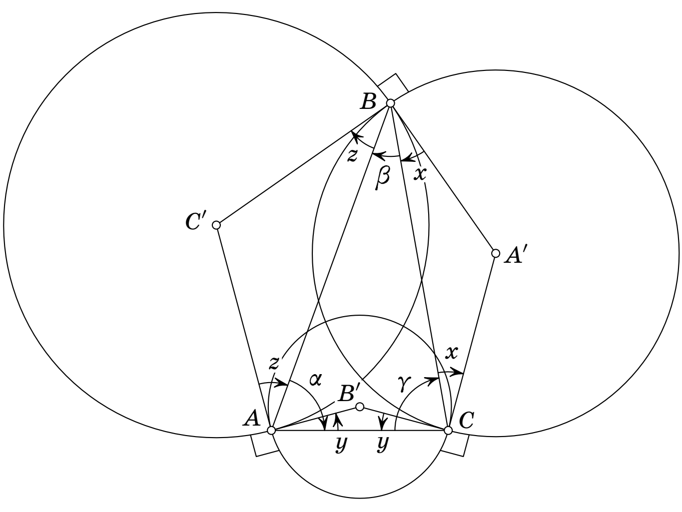


Рис. 22

показано на рис. 22. Тогда

$$\begin{cases} y+z+\alpha=\pm 90^\circ, \\ z+x+\beta=\pm 90^\circ, \\ x+y+\gamma=\pm 90^\circ. \end{cases}$$

Эта система уравнений легко решается. Например, чтобы найти x, нужно сложить два последних уравнения и вычесть из них первое уравнение. Если же мы знаем углы x, y, z, то требуемые окружности строятся очевидным образом: на сторонах треугольника ABC строятся равнобедренные треугольники с (ориентированными) углами при основаниях x, y, z; вершины этих треугольников — центры искомых окружностей. Поскольку в каждом из трёх уравнений мы можем независимо выбирать знак плюс или минус, исходная задача на построение всегда имеет ровно 8 решений.

2. У додекаэдра 20 вершин, поэтому у него 10 больших диагоналей. Прежде всего заметим, что для каждой из этих 10 больших диагоналей додекаэдра есть ровно три различных плоскости, перпендикулярных этой диагонали и высекающих правильный шестиугольник. Действительно, будем двигать плоскость, перпендикулярную диагонали, от одной вершины к другой. Сначала в сечении будет правильный треугольник, а потом шестиугольник с углами 120°, стороны которого поочерёдно принимают два значения (рис. 23). Этот шестиугольник правильный тогда и только тогда, когда эти два значения равны. Одно из этих значений возрастает от 0 до d, а другое убывает от d до a, где a — длина ребра додекаэдра, d — длина диагонали грани (ясно, что $d > a$). Следовательно, в определённый момент шестиугольник станет правильным. Потом мы снова получаем неправильный шестиугольник, который станет правильным, когда мы дойдём до центра додекаэдра (рис. 24); после этого всё повторится в обратном порядке.

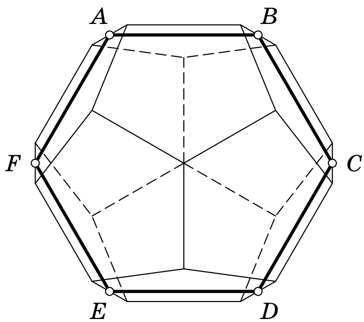


Рис. 23

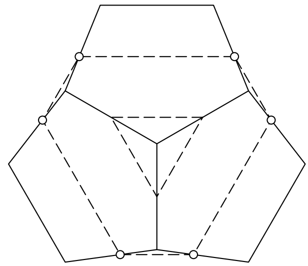


Рис. 24

Остаётся проверить, что плоскость, не перпендикулярная большим диагоналям додекаэдра, не может высекать правильный шестиугольник. Предположим, что плоскость пересекает додекаэдр по правильному шестиугольнику. Две грани додекаэдра могут быть: 1) смежными; 2) несмежными, но граничащими с одной и той же гранью; 3) противоположными. Поэтому достаточно рассмотреть следующие случаи расположения параллельных сторон правильного шестиугольника: 1) они лежат на двух смежных гранях; 2) они лежат на двух несмежных гранях, граничащих с одной и той же гранью; 3) они лежат на двух противоположных гранях.

В первом случае стороны шестиугольника параллельны общему ребру. У додекаэдра нет трёх рёбер, параллельных трём разным направлениям сторон правильного шестиугольника. Поэтому хотя бы для одной пары параллельных сторон имеет место второй или третий случай.

Разберём второй случай. В этом случае данные грани граничат с двумя общими гранями и плоскости двух данных граней пересекаются по прямой, параллельной диагоналям данных граней, соединяющих вершины общих граней. Из этого мы заключаем, что для двух других пар противоположных сторон шестиугольника тоже имеет место второй случай расположения. Поэтому мы имеем такую ситуацию, как на рис. 23: плоскость сечения параллельна плоскости, в которой лежат концы трёх рёбер додекаэдра, выходящих из одной вершины.

Наконец, разберём третий случай. В этом случае для остальных двух пар параллельных сторон шестиугольника заведомо не может иметь место первый случай, и, как видно из приведённого выше разбора второго случая, он тоже не может встретиться. Таким образом, все три пары параллельных сторон шестиугольника лежат на противоположных гранях додекаэдра. Несложная проверка показывает, что тогда плоскость Π не может пересекать грань по отрезку, соединяющему смежные рёбра, а тогда она должна пересекать именно такой набор граней, как на рис. 24. Покажем, что в этом случае плоскость Π проходит через вершины шестиугольника $ABCDEF$ (середины рёбер). Предположим, что это не так. Тогда найдутся три последовательные вершины шестиугольника $ABCDEF$, лежащие по одну сторону от плоскости Π (возможно, одна из этих вершин лежит в плоскости Π, но две другие не лежат). Следовательно, в сечении получается шестиугольник, у которого одна сторона меньше стороны шестиугольника $ABCDEF$, а другая больше. Приходим к противоречию.

3. Будем поочерёдно проводить диагонали. Когда мы проводим новую диагональ, число частей, на которые проведённые ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m+1$, где m — число точек пересечения новой диагонали с ранее проведёнными, т. е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят n-угольник, равно $D+P+1$, где D — число диагоналей, P — число точек пересечения диагоналей. Ясно, что $D=n(n-3)/2$. Остаётся вычислить P. Любой точке пересечения диагоналей соответствуют две диагонали, концы которых задают четыре вершины n-угольника. Наоборот, четыре вершины n-угольника определят одну точку пересечения диагоналей. Поэтому P равно количеству способов выбора четырёх точек из n, т. е.

$$P = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

1938 год (IV олимпиада)

Второй тур

1. Композиция отражений относительно точек X и Y является переносом на вектор $2\overrightarrow{XY}$. Действительно, пусть при отражении относительно точки X точка A переходит в точку B, а при отражении относительно точки Y точка B переходит в точку C. Тогда XY — средняя линия треугольника ABC (случай, когда точки A, B, C лежат на одной прямой, разберите самостоятельно).

Таким образом,

$$\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}, \quad \overrightarrow{A_2A_4} = 2\overrightarrow{O_3O_1} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{A_4A_6} = 2\overrightarrow{O_2O_3}.$$

Следовательно, $\overrightarrow{AA_6} = \vec{0}$, т. е. $A = A_6$.

2. Докажем сначала, что n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, разбивают плоскость на $(n^2+n+2)/2$ частей. Доказательство проведём индукцией по n. Для $n=0$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для n прямых, и докажем его для $n+1$ прямых. Выделим среди них одну прямую. Остальные прямые делят её на $n+1$ частей, каждая из которых делит на две части какую-либо из тех частей, на которые делят плоскость n прямых. Поэтому после проведения одной прямой число частей увеличивается на $n+1$. Остаётся заметить, что

$$\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} + n + 1.$$

Для плоскостей доказательство проводится почти так же, как и для прямых. Нужно лишь воспользоваться тем, что n плоскостей пересекают выделенную плоскость по n прямым, т. е. они разбивают её на $(n^2+n+2)/2$ частей. Для $n=0$ утверждение очевидно; равенство

$$\frac{(n+1)^3+5(n+1)+6}{6}=\frac{n^3+5n+6}{6}+\frac{n^2+n+2}{2}$$

проверяется простыми вычислениями.

3. Пусть надо построить треугольник ABC по основанию c, высоте h_c и разности углов A и B. Предположим, что треугольник ABC построен. Обозначим через C' точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, через B' — точку, симметричную B относительно прямой CC' (рис. 25).

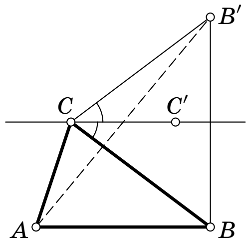


Рис. 25

Для определённости будем считать, что $AC<BC$. Тогда $\angle ACB'=\angle ACC'+\angle C'CB'=\angle ACC'+\angle C'CB=180^\circ-\angle A+$ $+\angle C'CB=180^\circ-(\angle A-\angle B)$, т. е. угол ACB' известен.

Из этого вытекает следующее построение. Сначала строим треугольник ABB' по сторонам $AB=c$ и $BB'=2h_c$ и углу $\angle ABB'=90^\circ$. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BB' и дуги окружности, из которой отрезок AB' виден под углом $180^\circ-$ $-(\angle A-\angle B)$.

4. Сначала вычеркнем из набора чисел 1, 2, ..., 999 числа, кратные 5; их количество равно $\left[\frac{999}{5}\right]=199$. Затем из того же набора чисел 1, 2, ..., 999 вычеркнем числа, кратные 7; их количество равно $\left[\frac{999}{7}\right]=142$. При этом числа, кратные 35, будут вычеркнуты дважды. Их количество равно $\left[\frac{999}{35}\right]=28$. Значит, всего мы вычеркнули $199+$ $+142-28=313$ чисел, а осталось $999-313=686$ чисел.

1939 год (V олимпиада)

Первый тур

1. Рассмотрим сначала случай, когда $b=0$. В этом случае последние два уравнения имеют вид $z=-x-y$ и $z^2=x^2+y^2$. Возведя первое из них в квадрат, получим $xy=0$. Значит, $x=0$, $z=-y$ или $y=0$, $z=-x$. Первое уравнение исходной системы при этом выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда $b\neq 0$. Воспользуемся тождеством

$$3xyz-x^3-y^3-z^3=(x+y+z)(xy+yz+xz-x^2-y^2-z^2).$$

Из первого и второго уравнений следует, что

$$xy+yz+xz-x^2-y^2-z^2=\frac{b^2}{2}.$$

Возведя в квадрат уравнение $x+y+z=2b$, получим

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=4b^2.$$

Следовательно,

$$x^2+y^2+z^2=b^2 \quad \text{и} \quad xy+yz+xz=\frac{3}{2}b^2.$$

Сравнивая первое из этих уравнений с последним уравнением исходной системы, получаем $z=0$. Таким образом,

$$x^2+y^2=b^2 \quad \text{и} \quad xy=\frac{3}{2}\,b^2.$$

Следовательно,

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=-2b^2.$$

Кроме того, учитывая, что $z=0$, из второго уравнения исходной системы получаем $x+y=2b$. Решая систему уравнений $x-y=\pm\sqrt{-2}\,b$ и $x+y=2b$, находим

$$x=\left(1\pm\sqrt{\frac{-1}{2}}\right)b, \quad y=\left(1\mp\sqrt{\frac{-1}{2}}\right)b.$$

2. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1 с центром O. Сумма векторов, идущих из точки O в вершины этого пятиугольника, равна нулю, поскольку при повороте на угол $\frac{2\pi}{5}$ эта сумма переходит сама в себя. Поэтому сумма проекций векторов $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ на прямую OA, на которой в качестве положительного направления выбрано направление от O к A, равна -1. С другой стороны, эта сумма проекций равна $2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}$.

3. Предположим, что требуемая прямая l построена. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Прямая l пересекает отрезок BC.

Проведём из точки B перпендикуляр к прямой l, а из точки C проведём прямую, параллельную l. Пусть A' — точка пересечения двух проведённых прямых (рис. 26). Треугольник $A'BC$ прямоугольный. В нём известны гипотенуза BC и катет $A'B$. Из этого вытекает следующее построение. Построим треугольник $A'BC$, а затем проведём прямую l, перпендикулярную BA'. Если прямая l пересекает отрезок BC, то эта прямая искомая.

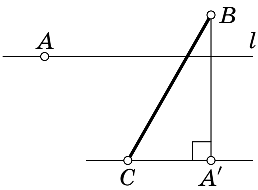


Рис. 26

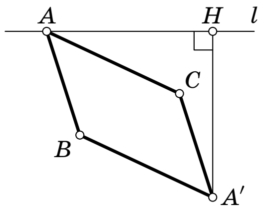


Рис. 27

Второй случай. Прямая l не пересекает отрезок BC.

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABA'C$ (рис. 27). Из равенства $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ видно, что сумма расстояний от точек B и C до прямой l равна расстоянию от точки A' до прямой l. Из этого вытекает следующее построение. Построим прямоугольный треугольник $AA'H$ с заданной гипотенузой AA' и катетом $A'H$, длина которого равна длине данного отрезка. Если прямая $l = AH$ не пересекает отрезок BC, то эта прямая искомая.

4. Избавляясь от радикалов, приходим к уравнению

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Относительно a это уравнение квадратное. Решая его, получаем два решения:

$$a = x^2 + x + 1;$$
$$a = x^2 - x.$$

Из исходного уравнения видно, что $x \geqslant 0$. Поэтому решение $a = x^2 - x$ подходит только при $a = 0$ (это проверяется непосредственной подстановкой в исходное уравнение), а решение $a = x^2 + x + 1$ подходит при всех $a \geqslant 1$. Решая последнее квадратное уравнение, находим решение, указанное в ответе.

5. Пусть AD, AM и AH — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC. Пусть, далее, D' — точка пересечения прямой AD с описанной окружностью этого треугольника. Тогда D' — середина дуги BC, поэтому $MD' \parallel AH$. Из этого следует, что точка D лежит на отрезке MH. Эти рассуждения справедливы и для тупоугольного треугольника (рис. 28).

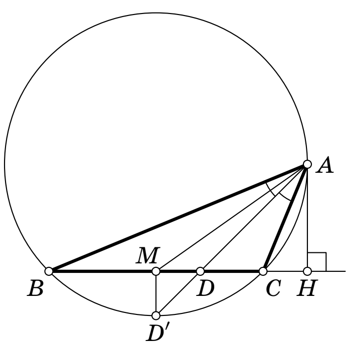


Рис. 28

Второй тур

1. Ясно, что

$$a^{10}+a^5+1=\frac{(a^5)^3-1}{a^5-1}=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=$$
$$=\frac{(a^3)^5-1}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=\frac{(a^3-1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=$$
$$=\frac{(a^2+a+1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{a^4+a^3+a^2+a+1}.$$

Непосредственное деление показывает, что

$$\frac{a^{12}+a^9+a^6+a^3+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}=a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1.$$

Следовательно,

$$a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1).$$

2. Из того, что не все коэффициенты произведения делятся на 4, следует, что у одного многочлена есть нечётный коэффициент. Достаточно доказать, что у другого многочлена нет нечётных коэффициентов. Предположим, что у обоих многочленов есть нечётные коэффициенты. Заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2. В результате получим многочлены $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+ +\ldots+x^r$ и $b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+x^s$; здесь r и s — минимальные степени членов, коэффициенты при которых нечётны, а каждое из чисел a_i и b_i равно 0 или 1. Если в произведении данных многочленов мы заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2, то получим многочлен $a_nb_mx^{n+m}+\ldots+x^{r+s}$. Таким образом, в произведении данных многочленов коэффициент при x^{r+s} нечётен, что противоречит условию.

3. Приведём решение задачи только для одного случая взаимного расположения точек A и B, данной окружности и прямой MN (рис. 29). В других случаях построение будет аналогично. Предположим, что мы построили требуемую точку X. Пусть прямая AX пересекает данную окружность S в точке C, а прямая BX — в точке D. Проведём через точку D прямую, параллельную прямой AB; она пересекает окружность S в некоторой точке K. Пусть прямая KC пересекает прямую AB в точке P. Треугольники APC и AXB подобны, поскольку угол A у них общий и $\angle APC = \angle CKD = \angle CXD$. Из подобия этих треугольников следует, что $AP \cdot AB = AC \cdot AX$.

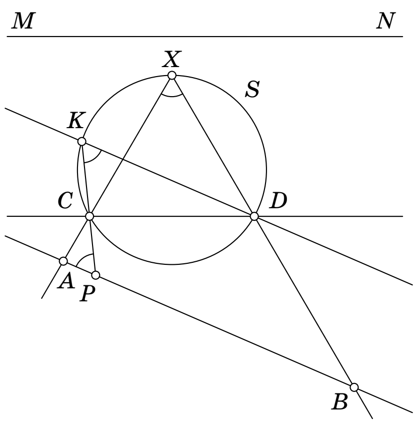


Рис. 29

Из этого вытекает следующее построение. Проведём через точку A прямую, пересекающую окружность S в некоторых точках C' и X'. Тогда $AP \cdot AB = AC \cdot AX = AC' \cdot AX'$, поэтому мы можем построить точку P. Далее, нам известен угол CDK (он равен углу между прямыми AB и MN). Поэтому мы знаем длину хорды KC, а значит, мы можем построить окружность S', которая имеет тот же центр, что и окружность S, и касается хорды KC. Проведя из точки P касательную к окружности S', находим точку C.

4. Сначала заметим, что $10^6 \equiv 1 \pmod 7$. Действительно, $10^3 + 1$ делится на 7, т. е. $10^3 \equiv -1 \pmod 7$. Кроме того, $10^k \equiv 4 \pmod 6$ при $k \geqslant 1$, поскольку число $99\ldots96$ чётно и делится на 3. Следовательно, $10^{10^k} \equiv 10^4 \pmod 7$ при $k \geqslant 1$. Поэтому требуемый остаток равен остатку от деления числа $10 \cdot 10^4 = 10^5$ на 7. Этот остаток равен 5, поскольку $10^5 \equiv 3^5 \equiv 243 \pmod 7$.

5. Пусть Π — плоскость основания пирамиды, Q — точка пересечения перпендикуляра к плоскости Π, восставленного из точки P, с плоскостью грани пирамиды, R — основание перпендикуляра, опущенного на ребро этой грани, лежащее в плоскости Π. Тогда $PQ = PR \operatorname{tg} \varphi$, где $\varphi = \angle PRQ$. Угол φ — это угол наклона плоскости грани к плоскости основания. Для всех граней пирамиды он один и тот же. Поэтому достаточно доказать, что для правильного многоугольника, лежащего в основании пирамиды, имеет место следующее утверждение: «Для любой точки P, лежащей внутри правильного многоугольника, сумма расстояний от P до сторон многоугольника одна и та же». Чтобы доказать это утверждение, разрежем правильный многоугольник на треугольники, проведя отрезки из точки P в вершины. С одной стороны, сумма площадей этих треугольников постоянна (она равна площади многоугольника). С другой стороны, эта сумма равна половине произведения суммы расстояний от точки P до сторон многоугольника на длину стороны правильного многоугольника.

6. Пусть a_n — наибольшее число частей, на которые разбивают сферу n окружностей, b_n — наибольшее число частей, на которые разбивают пространство n сфер. Ясно, что $a_1 = 2$ и $b_1 = 2$. Покажем, что $a_n \leqslant a_{n-1} + 2(n-1)$ и $b_n \leqslant b_{n-1} + a_{n-1}$. Пусть на сфере дано n окружностей. Фиксируем одну из них. Оставшиеся окружности разбивают сферу не более чем на a_{n-1} частей. Фиксированная окружность пересекает остальные окружности не более чем в $2n-2$ точках. Точки пересечения разбивают фиксированную окружность не более чем на $2n-2$ частей; каждая их этих частей окружности добавляет одну новую часть разбиения сферы. Поэтому $a_n \leqslant a_{n-1} + 2(n-1)$. Неравенство $b_n \leqslant b_{n-1} + a_{n-1}$ доказывается аналогично. Нетрудно построить примеры, когда доказанные неравенства обращаются в равенства. Таким образом, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 14$ и $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 16$, $b_5 = 30$.

Комментарий. Несложно получить и общие формулы: $a_n = n^2 - n + 2$ и $b_n = \dfrac{n^3 + 8n}{3} - n^2$.

1940 год (VI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Данное выражение обращается в нуль при $b = c$, при $c = a$ и при $a = b$, поэтому возникает естественное предположение, что оно должно делиться на произведение множителей $b - c$, $c - a$ и $a - b$. Раскрывая скобки в выражениях $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$ и $(b-c)(c-a)(a-b)$ и сравнивая полученные выражения, приходим к тождеству

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b).$$

2. Пусть v — скорость течения реки, u — скорость парохода, l — расстояние от Горького до Астрахани. По условию $\dfrac{l}{u+v} = 5$ и $\dfrac{l}{u-v} = 7$; требуется найти l/v. Из системы уравнений $l = 5u + 5v$, $l = 7u - 7v$ находим $l/v = 35$.

3. Среди чисел от 1 до 100 есть 20 чисел, делящихся на 5, и 4 числа, делящихся на 25, а чисел, делящихся на 125, среди них нет. Поэтому рассматриваемое произведение делится на 5^{24} и не делится на 5^{25}. Ясно также, что оно делится на 2^{24}.

4. Пусть r — данный радиус, R и O — радиус и центр данной окружности. Центр искомой окружности лежит на окружности S радиуса $|R \pm r|$ с центром O (рис. 30). С другой стороны, её центр лежит на прямой l, параллельной данной прямой и удалённой от неё на расстояние r; таких прямых две. Любая точка пересечения окружности S и прямой l может служить центром искомой окружности. Задача может иметь от 0 до 8 решений, за исключением 5 решений.

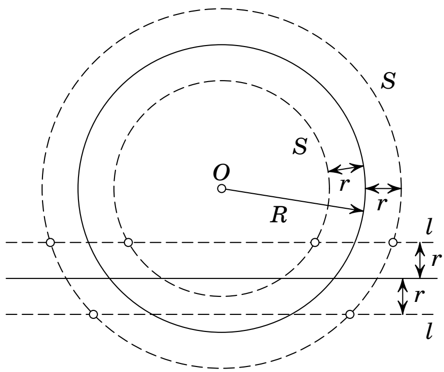


Рис. 30

Действительно, для конфигурации на рис. 30 получается 6 решений. Если мы будем постепенно приближать данную прямую к точке O, то сначала получится 7 решений (когда «внешняя» прямая l коснётся «внутренней» окружности S), а затем 8 решений. Наоборот, при удалении данной прямой от точки O после 6 решений сначала получится 4 решения, потому что обе пунктирные прямые одновременно коснутся пунктирных окружностей, затем обе точки касания одновременно исчезнут, и мы получим 2 решения. Затем будет одна точка касания (одно решение), а после этого пересечений уже не будет (решений нет).

Мы фактически разобрали случай, когда $R > r$. В случае, когда $R < r$, можно получить 3 решения (рис. 31), но 5 решений нельзя получить и в этом случае, потому что снова обе пунктирные прямые одновременно коснутся пунктирных окружностей. В случае, когда $R = r$, 5 решений тоже нельзя получить.

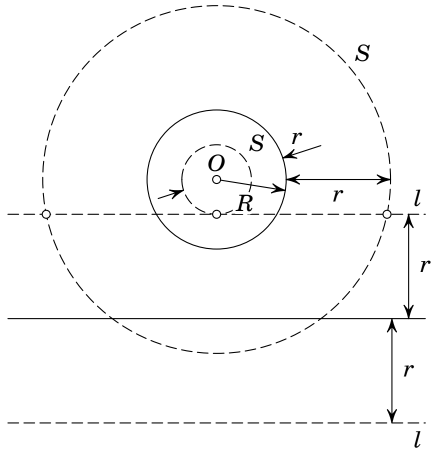


Рис. 31

9—10 класс

1. Пусть $xy = t$. Тогда $x^2 + y^2 = b^2 - 2t$ и $x^3 + y^3 = b(b^2 - 3t)$. Поэтому $b(b^2 - 2t)(b^2 - 3t) = 2b^5$. Если $b = 0$, то получаем решение $x = -y$. Если $b \neq 0$, то для t получаем квадратное уравнение $(b^2 - 2t)(b^2 - 3t) = 2b^4$. Решив его, находим $t_1 = b^2$, $t_2 = -b^2/6$. Ясно, что x и y являются корнями квадратного уравнения $X^2 - bX + t = 0$, поскольку $x + y = b$ и $xy = t$.

Для $t = b^2$ получаем $x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\,b$, $y = \dfrac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}\,b$.

Для $t = -b^2/6$ получаем $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5/3}}{2}\,b$, $y = \dfrac{1 \mp \sqrt{5/3}}{2}\,b$.

2. Имеется ровно 9 однозначных чисел, $99 - 9 = 90$ двузначных, $999 - 90 - 9 = 900$ трёхзначных, 9000 четырёхзначных и т. д. В выписанном ряду первые 9 мест займут однозначные числа, $90 \cdot 2 = 180$ мест — двузначные, $900 \cdot 3 = 2700$ мест — трёхзначные, $9000 \cdot 4 = 36\,000$ мест — четырёхзначные, $90000 \cdot 5 = 450\,000$ мест — пятизначные.

Поэтому интересующая нас цифра принадлежит пятизначному числу.

Цифры, принадлежащие не более чем четырёхзначным числам, имеют номера от 1 до $9+180+2700+36\,000=$ $=38\,889$. Разность $206\,788-38\,889=167\,899$ нужно разделить на 5 с остатком: $167\,899=5\cdot 33\,579+4$. Интересующая нас цифра принадлежит 33 580-му пятизначному числу, т. е. числу 43 579 (первое пятизначное число — это число 10 000). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 4-м месте.

3. Рассмотрим сначала случай, когда никакие три точки из набора A, B, C, D не лежат на одной прямой и ни одна из пар прямых AB и CD, AC и BD, AD и BC не является парой параллельных прямых. Пусть A, B, C, D — данные точки, S — искомая окружность. По одну сторону от S лежит k данных точек, по другую сторону лежит $4-k$ данных точек. Мы будем предполагать, что данные точки не лежат на одной окружности (иначе в качестве S можно взять любую окружность с тем же центром; получается бесконечно много решений). Из этого следует, что $k\neq 0$ и $k\neq 4$. Таким образом, $1\leqslant k\leqslant 3$. Мы получаем два существенно различных расположения точек по отношению к S: $2+2$ (по обе стороны от S лежит по две данные точки) и $1+3$ (по одну сторону от S лежит одна данная точка, а по другую три).

Пусть сначала точки A и B лежат по одну сторону от окружности S, а точки C и D — по другую. Центром окружности S является точка O пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и CD (рис. 32). Радиус окружности S равен среднему арифметическому длин отрезков OA и OC. Четыре точки можно разбить на пары тремя способами, поэтому мы получаем 3 решения.

Пусть теперь точки A, B и C лежат по одну сторону от окружности S, а точка D — по другую. Проведём через точки A, B и C окружность. Пусть O и R — её центр и ра-

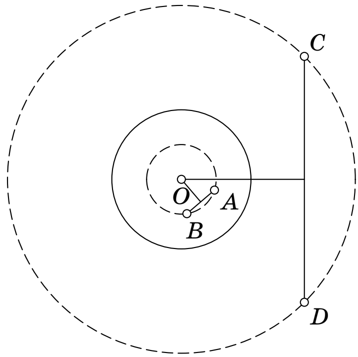


Рис. 32

диус. Точка O является центром искомой окружности, а радиус искомой окружности равен среднему арифметическому R и OD. Одну точку из четырёх можно выбрать четырьмя способами, поэтому мы получаем 4 решения. Построенные 7 окружностей различны, поскольку их центры попарно различны.

Если же какие-то три точки из набора A, B, C, D лежат на одной прямой или какая-то пара прямых AB и CD, AC и BD, AD и BC является парой параллельных прямых, то число решений будет меньше 7 — некоторые из окружностей вырождаются в прямые. Если $ABCD$ — трапеция, не являющаяся равнобокой, то задача имеет 6 решений. Если $ABCD$ — параллелограмм, не являющийся прямоугольником, то решений 5. Если точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка D на ней не лежит, то решений 6. Наконец, если точки A, B, C и D лежат на одной прямой в указанном порядке, причём $AB \neq CD$, то задача не имеет решений, а если $AB = CD$, то число решений бесконечно.

4. Пусть a — заданный отрезок. Пусть, далее, точки пересечения данных прямых l_1 и l_2 с прямыми, параллельными l_1 и l_2 и удалёнными от них на расстояние a, образуют прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$. Случай, когда $a = 0$ или $l_1 \parallel l_2$, очевиден. Покажем, что искомое ГМТ — это продолжения сторон полученного прямоугольника. Опустим из точки X перпендикуляры XA_1 и XA_2 на данные прямые l_1 и l_2. Пусть, например, $XA_1 - XA_2 = a$. Возьмём на луче A_1X такую точку B, что $A_1B = a$. Тогда $BX = XA_2$. Пусть M — точка пересечения прямой l_2 и прямой, проходящей через точку B параллельно прямой l_1 (M — это одна из точек M_1, M_2, M_3, M_4). Тогда MX — биссектриса угла BMA_2 (рис. 33).

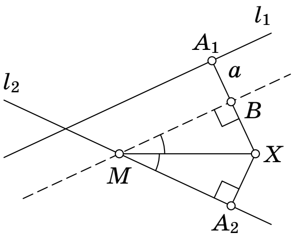


Рис. 33

5. Пусть $N = 100x + 10y + z$ — искомое число, для которого $N = x! + y! + z!$. Число $7! = 5040$ четырёхзначное, поэтому ни одна цифра числа N не превосходит 6. Значит, число N меньше 700. Но тогда ни одна цифра числа N не превосходит 5, поскольку $6! = 720$. Неравенство $3 \cdot 4! = 72 < 100$ показывает, что хотя бы одна цифра числа N равна 5. При этом $x \neq 5$, поскольку $3 \cdot 5! = 360 < 500$. Равенство $3 \cdot 5! = 360$ показывает также, что $x \leqslant 3$. Более того, $x \leqslant 2$, поскольку $3! + 2 \cdot 5! = 246 < 300$. Число 255 не удовлетворяет условию задачи, а если лишь одна цифра искомого числа равна 5, то $x \leqslant 1$, поскольку $2! + 5! + 4! = 146 < 200$. Так как $1! + 5! + 4! = 145 < 150$, получаем $y \leqslant 4$. Следовательно, $z = 5$. Учитывая, что $x = 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 4$, находим единственное решение $N = 145$.

Второй тур

7—8 класс

1. Пусть a — первая и вторая цифры, b — третья и четвёртая. Тогда данное число равно $11(b + 100a)$, поэтому $b + 100a = 11x^2$ для некоторого натурального числа x. Кроме того, $100 \leqslant b + 100a \leqslant 909$, а значит, $3 < x \leqslant 9$. Вычисляя квадраты чисел 44, 55, ..., 99, получаем, что ровно одно из них имеет требуемый вид: $88^2 = 7744$.

2. Прежде всего заметим, что $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$, поскольку эти углы опираются на одну и ту же дугу. Отложим на отрезке CD точку L так, чтобы треугольник ADL был правильным. Треугольники DAB и LAC равны по двум сторонам и углу между ними (рис. 34). Действительно, $\angle DAB = \angle LAC$, поскольку оба эти угла дополняют до 60° один и тот же угол $\angle BAL$. Поэтому $CL = DB$, а значит, $DC = DL + LC = AD + BD$.

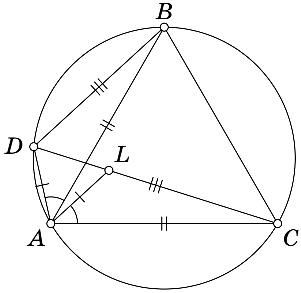


Рис. 34

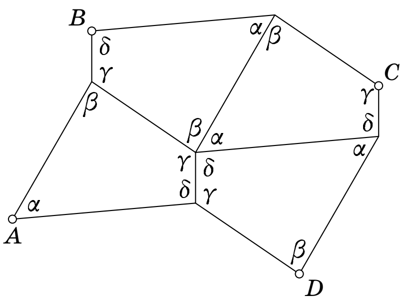


Рис. 35

3. Составим из четырёх экземпляров данного четырёхугольника фигуру, как показано на рис 35. При этом $ABCD$ — параллелограмм и при сдвигах на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ одна пара сторон фигуры переходит в другую пару сторон.

Очевидно, что параллелограммами можно замостить всю плоскость, поэтому полученными фигурами тоже можно замостить всю плоскость. Данное решение проходит и для невыпуклого четырёхугольника.

4. Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 7. Действительно, квадрат целого числа при делении на 7 даёт остатки 0, 1, 2 и 4. Количество целых чисел, заключённых между 1 и 1000 и делящихся на 7, равно 142. Поэтому искомое число равно $142^2 = 20164$.

9—10 класс

1. Разрежем конус по образующей, противоположной той, на которой лежит выбранная точка, и развернём его на плоскость. Рассмотрим на плоскости точки S и A, соответствующие вершине конуса и выбранной точке при развёртке конуса на эту плоскость. Если $\alpha \geqslant 180^\circ$, то самопересечений нет (рис. 36). В дальнейшем будем считать,

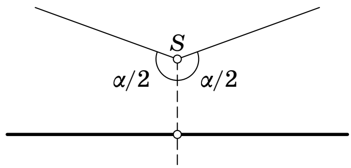


Рис. 36

что $\alpha < 180^\circ$. Восставим из точки A перпендикуляр к прямой SA и возьмём на этом перпендикуляре по одну сторону от прямой SA такие точки $B_1, \ldots, B_n$, что $\angle ASB_k = k\frac{\alpha}{2}$ (рис. 37). Аналогично по другую сторону от прямой SA возьмём такие точки $C_1, \ldots, C_n$, что $\angle ASC_k = k\frac{\alpha}{2}$. На конусе точка B_k совпадает с точкой C_k; других точек самопересечения проведённой линии нет.

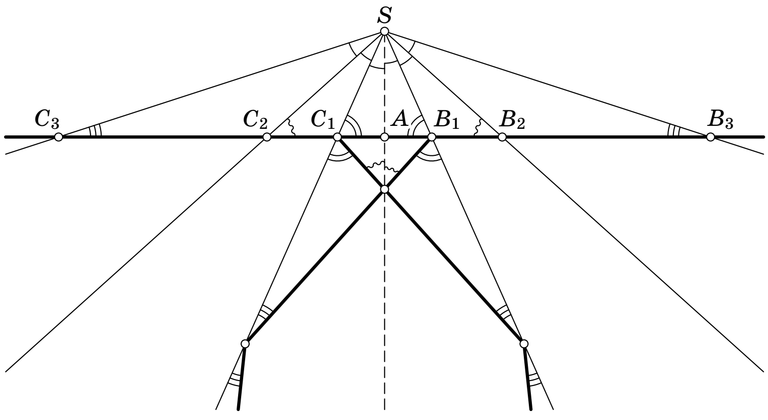


Рис. 37

2. Сначала докажем, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ для любого натурального n. Действительно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}<$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

поскольку при $n>1$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n}<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{n-2}{n}<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{n-3}{n}<\frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{2}.$$

Из доказанного неравенства следует, что

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}:\left(\frac{n}{3}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{3}<n+1.$$

Поэтому индукцией по n получаем неравенство $\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!$. Действительно, при $n=1$ это неравенство очевидно, а из неравенства $\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!$ следует, что

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}<(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n<(n+1)!\,.$$

Подставляя $n=300$ в неравенство $\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!$, получаем требуемое.

3. Пусть точки O_1, O_2 и O_3 симметричны точке O относительно сторон BC, CA и AB соответственно. Пусть, далее, A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB (рис. 38). Тогда $BC\parallel B_1C_1\parallel O_2O_3$ и $OA_1\perp BC$. Поэтому $OO_1\perp O_2O_3$. Аналогично $OO_2\perp O_1O_3$ и $OO_3\perp O_1O_2$. Таким образом, O — точка пересечения

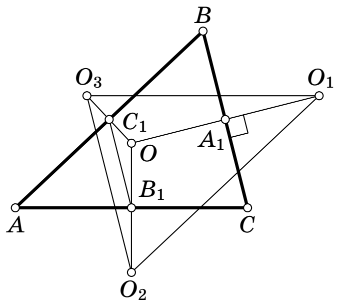


Рис. 38

высот треугольника $O_1O_2O_3$. Построив точку O, проводим серединные перпендикуляры к отрезкам OO_1, OO_2, OO_3. Эти прямые образуют треугольник ABC.

4. Числа $b_1 = a_1/a_2$, $b_2 = a_2/a_3$, $\ldots$, $b_n = a_n/a_1$ положительны и их произведение равно 1. Поэтому их среднее геометрическое равно 1. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим среднее арифметическое этих чисел не меньше 1, т. е. их сумма не меньше n.

5. Остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 повторяются с периодами 3 и 7, поэтому остатки от деления на 7 числа $2^x - x^2$ повторяются с периодом 21. Запишем таблицу остатков для чисел от 1 до 21:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^x	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4
x^2	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2

x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2^x	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1
x^2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0

Посмотрим, при каких x числа 2^x и x^2 дают одинаковые остатки от деления на 7. Из таблицы видно, что среди чисел от 1 до 21 этому условию удовлетворяют ровно шесть. Поэтому среди чисел от 1 до $9996 = 21 \cdot 476$ есть $476 \cdot 6 = 2856$ требуемых чисел. Непосредственная проверка показывает, что из оставшихся чисел 9997, 9998 и 9999 только число 9998 обладает требуемым свойством. Действительно, при делении на 21 эти числа дают соответственно остатки 1, 2 и 3, а для $1 \leqslant x \leqslant 3$, как показывает приведённая выше таблица, только $x = 2$ числа 2^x и x^2 дают равные остатки при делении на 7.

1941 год (VII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Пусть ABC — искомый треугольник, AH — высота, AM — медиана, R — радиус описанного круга, O — его центр. Построим прямоугольный треугольник AHM по катету AH и гипотенузе AM. Восставим из точки M перпендикуляр l к прямой MH. Точка O является точкой пересечения прямой l с окружностью радиуса R с центром A. Вершины B и C являются точками пересечения прямой MH с окружностью радиуса R с центром O.

Задача имеет 0, 1 или 2 решения в зависимости от длин трёх данных отрезков.

2. Полученное шестизначное число должно делиться на $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Поделим 523 000 на 504 с остатком:

$$523\,000 = 1037 \cdot 504 + 352.$$

Поскольку $504 - 352 = 152$, на 504 делятся числа 523 152 и $523\,152 + 504 = 523\,656$. Других чисел, делящихся на 504, среди чисел от 523 000 до 523 999 нет.

3. Воспользуемся тем, что средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна половине её длины. Рассматривая два треугольника, на которые диагональ разрезает четырёхугольник, получаем, что отрезки AD и CB параллельны одной из диагоналей, а их длина равна половине её длины. Аналогично отрезки DQ и BP параллельны одной из сторон четырёхугольника, а их длина равна половине её длины. Отрезки AQ и CP тоже параллельны стороне четырёхугольника и их длина равна половине длины этой стороны. Таким образом, треугольник BCP равен треугольнику ADQ по трём сторонам.

4. Пусть O — центр данной окружности, M — середина хорды, отсекаемой окружностью от прямой, проходящей через точку P. Тогда $\angle PMO = 90^\circ$. Поэтому искомое множество — часть окружности с диаметром OP, лежащая внутри данной окружности.

5. Попробуем подобрать многочлен $f(x)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (f(x)+1)^2,$$

т. е.

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = f(x)(f(x)+2).$$

Поскольку $x(x+3) = x^2+3x$ и $(x+1)(x+2) = x^2+3x+2$, можно положить $f(x) = x(x+3)$. Таким образом, для любого целого числа n число $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ является квадратом числа $n(n+3)+1$.

9—10 класс

1. См. решение задачи 2 для 7—8 классов.

2. Случай, когда углы параллелограмма прямые, очевиден, поэтому будем считать, что у параллелограмма есть острый угол. Пусть P, Q и R — центры квадратов, построенных на сторонах DA, AB и BC параллелограмма с острым углом α при вершине A (рис. 39). Тогда

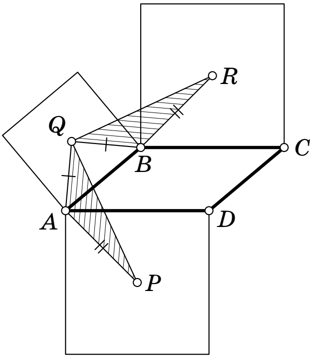


Рис. 39

$$\angle PAQ = \angle PAD + \angle DAB + \angle BAQ = \\ = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha$$

и

$$\angle RBQ = 360^\circ - \\ - \angle RBC - \angle CBA - \angle ABQ = \\ = 360^\circ - 45^\circ - (180^\circ - \alpha) - 45^\circ = \\ = 90^\circ + \alpha.$$

Следовательно, $\angle PAQ = \angle RBQ$, а значит, $\triangle PAQ = \triangle RBQ$.

Стороны AQ и BQ этих треугольников перпендикулярны, поэтому $PQ \perp QR$. Из равенства указанных треугольников следует также, что $PQ = QR$. Аналогично доказывается, что все стороны четырёхугольника с вершинами в центрах параллелограммов равны, а все углы прямые.

3. Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. По условию числа $a_n = P(0)$ и $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = P(1)$ нечётны. Если x — чётное число, то $P(x) \equiv a_n \pmod 2$. Если x — нечётное число, то $P(x) \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 2$. В обоих случаях получаем, что число $P(x)$ нечётно, поэтому оно не может быть равно нулю.

4. Точки M и N лежат на окружности с диаметром AB. Центр O этой окружности является точкой пересечения прямой AB и серединного перпендикуляра к отрезку NM, поэтому мы можем его построить. Точки A и B являются точками пересечения прямой AB и окружности с центром O, проходящей через точку M. Поэтому точки A и B можно построить. Точка C после этого строится как точка пересечения прямых AN и BM.

5. Если $x \geqslant 2$, получаем тождество.

Если $1 \leqslant x < 2$, получаем уравнение $4x = 8$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $0 \leqslant x < 1$, получаем уравнение $-2x = 2$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $-1 \leqslant x < 0$, получаем $0 = 2$, чего не может быть.

Если $x < -1$, получаем уравнение $-2x = 4$, которое имеет корень $x = -2$.

6. Прежде всего отметим, что число положительных корней равно числу отрицательных корней и ещё есть корень 0. Поэтому достаточно убедиться, что число положительных корней равно 31. Если $\sin x = x/100$, то $|x| = 100\,|\sin x| \leqslant 100$. Рассмотрим графики функций $y = x/100$

и $y=\sin x$. Целая часть числа $100/2\pi=15{,}915\ldots$ равна 15, поэтому участок оси Ox от 0 до 100 содержит 15 отрезков длиной 2π и один отрезок длиной меньше 2π. Рассматривая указанные графики, легко убедиться, что на первом отрезке длиной 2π есть один корень данного уравнения, а на каждом из остальных 14 отрезков длиной 2π есть по два корня. Действительно, на каждом из этих отрезков функция $y=\sin x$ сначала возрастает от 0 до 1, потом убывает от 1 до 0, а затем становится отрицательной. Поэтому из соображений непрерывности следует, что должны быть хотя бы две точки пересечения графиков. Больше двух точек пересечения быть не может, так как на первой половине отрезка функция $y=\sin x$ выпукла вверх, и поэтому не может иметь более двух общих точек с прямой, а на второй половине эта функция отрицательна. Вычисления показывают, что $100-30\pi>5{,}752>\pi$. Таким образом, длина последнего отрезка больше π, поэтому на нём тоже есть два корня. Действительно, пересечения рассматриваемых графиков над отрезком от $2k\pi$ до $(2k+1)\pi$ для натурального k происходят только над первой половиной этого отрезка, поскольку на второй половине отрезка синус отрицателен. Всего получаем 31 положительный корень.

Второй тур

7—8 класс

1. Предположим, что из нескольких попарно различных по величине квадратов сложен прямоугольник. Рассмотрим самый маленький квадрат Q. С одной из его сторон имеет общую часть сторона некоторого большего квадрата A. Сторона квадрата A выходит за пределы стороны квадрата Q. Образовавшийся угол должен быть заполнен некоторым квадратом B, сторона которого снова больше стороны квадрата Q. Получаем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом C, а затем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом D. При этом между квадратами A и D не может быть «колодца» (т. е. квадраты A и D должны иметь общую границу), поскольку иначе для заполнения «колодца» потребовался бы квадрат, который меньше самого маленького квадрата Q.

Итак, если из пяти попарно различных по величине квадратов можно сложить прямоугольник, то мы знаем, как они должны быть сложены: самый маленький квадрат находится в центре, а к нему примыкают четыре других квадрата, образуя конфигурацию, схематично изображённую на рис. 40 (или симметричную ей). Пусть q, a, b, c, d — длины сторон одноимённых квадратов. Тогда $a = b + q$, $b = c + q$, $c = d + q$, $d = a + q$. Сложив эти равенства, получим $4q = 0$. Это означает, что у нас не 5 квадратов, а 4, причём все они равны. Приходим к противоречию.

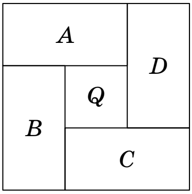


Рис. 40

Комментарий. Оказывается, что прямоугольник нельзя разрезать на 8 попарно различных квадратов, но можно разрезать на 9 попарно различных квадратов. Известно также, что квадрат можно разрезать на 24 попарно различных квадрата. Доказательство этих фактов можно найти в книге [12].

2. Разрежем треугольник ABC на три четырёхугольника, опустив перпендикуляры из центра вписанной окружности на стороны. Эти четырёхугольники симметричны относительно диагоналей, изображённых пунктиром на рис. 41. Поэтому, переворачивая четырёхугольники вокруг этих диагоналей, получаем исходный треугольник ABC.

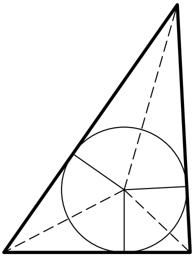


Рис. 41

Комментарий. Равнобедренный треугольник разрезать вообще не нужно; прямоугольный треугольник можно разрезать на две части, проведя медиану из вершины прямого угла. Докажем, что треугольник, вообще говоря, нельзя разрезать на две части, перевернув которые, можно сложить исходный треугольник.

Предварительно приведём примеры, показывающие, что так разрезать можно не только прямоугольные треугольники. Рисунок 42, *а*, показывает, как можно разрезать требуемым образом треугольник с углами $n\alpha$, $(n+2)\alpha$ и $\pi-(2n+2)\alpha$, а рисунок 42, *б*, показывает, как можно разрезать требуемым образом треугольник с углами $\pi-\alpha$, $\pi-n\alpha$ и $(n+1)\alpha-\pi$. В обоих случаях от треугольника отрезается выпуклый $(n+2)$-угольник (это следует из формулы для суммы углов выпуклого многоугольника).

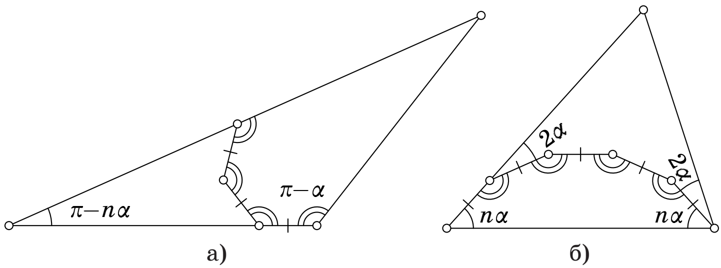


Рис. 42

Покажем, что если два угла α и β треугольника и число π линейно независимы над рациональными числами, т. е. равенство $a\alpha+b\beta+c\pi=0$ не может выполняться ни для каких целых чисел a, b и c, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то искомого разреза не существует. Предположим от противного, что ломаная $X_1X_2\ldots X_n$ разрезает треугольник ABC на две части P и Q требуемым образом. Тогда по условию существуют две такие скользящие симметрии p и q, что $ABC=pP\cup qQ$, причём pP и qQ пересекаются только по границе. Рассматривая малые окрестности точек ломаной $X_1X_2\ldots X_n$, нетрудно показать, что без ограничения общности можно считать, что либо $p(X_1X_2\ldots X_n)=X_n\ldots X_2X_1$, либо $p(X_1X_2\ldots X_n)=X_{n+1}X_n\ldots X_2$, где X_{n+1} — вершина одного из углов треугольника ABC. Из этого можно сделать вывод, что либо $p\circ q(X_1X_2\ldots X_n)=X_2X_3\ldots X_nX_{n+1}$, либо $p\circ q(X_1X_2\ldots X_n)=X_3\ldots X_nX_{n+1}X_{n+2}$, где точка X_{n+2} лежит на одной из сторон треугольника либо на её продолжении. Но $p\circ q$ — это поворот на некоторый угол φ. Продолжим рассматриваемую ломаную, добавив к ней точки $X_{n+2}=p\circ q(X_n)$, $X_0=p\circ q(X_2)$, $X_{-1}=p\circ q(X_1)$. Построенная ломаная содержит звенья или диагонали, параллельные всем трём сторонам треугольника ABC. Из этого следует, что все углы треугольника ABC выражаются в виде рациональной линейной комбинации чисел φ и π. В частности, $\alpha=m_1\varphi+n_1\pi$ и $\beta=m_2\varphi+n_2\pi$. При этом $m_1\neq 0$ и $m_2\neq 0$, поскольку иначе мы сразу получили бы рациональную линейную зависимость. Следовательно, мы можем выразить φ из первого равенства и подставить это выражение во второе равенство. В результате снова получаем рациональную зависимость, что приводит к противоречию.

3. Пусть A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3, A_4, B_4, ... — последовательные точки траектории, лежащие на сторонах треугольника ABC (рис. 43). Так как $A_1B_1 \parallel AB_2$, $B_1B_2 \parallel CA_1$ и $B_1C \parallel B_2C_2$, то треугольник AB_2C_2 получается из треугольника A_1B_1C параллельным переносом. Аналогично треугольник A_3BC_3 получается из AB_2C_2 параллельным переносом, а треугольник A_4B_4C — из треугольника A_3BC_3. Но треугольник A_1B_1C тоже получен из треугольника A_3BC_3 параллельным переносом. Поэтому $A_1 = A_4$, т. е. после семи шагов траектория замкнётся. (Если точка M лежит на одной из средних линий треугольника ABC, то траектория замкнётся после четырёх шагов.)

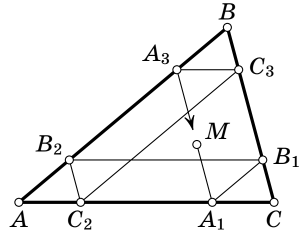


Рис. 43

4. Пусть $(x-a)(x-10)+1=(x+b)(x+c)$. Положив $x = -b$, получим $(b+a)(b+10)=-1$. Числа a и b целые, поэтому числа $b+a$ и $b+10$ тоже целые. Число -1 представляется в виде произведения двух множителей двумя способами. Соответственно получаем два варианта: 1) $b+10 = 1$ и $b+a=-1$; 2) $b+10=-1$ и $b+a=1$. Поэтому $a=8$ или $a=12$. В первом случае $(x-8)(x-10)+1=(x-9)^2$, а во втором случае $(x-12)(x-10)+1=(x-11)^2$.

5. Посмотрим, какие остатки может давать простое число $p>3$ при делении на 6. Оно не может давать остаток 2 или 4, поскольку иначе оно было бы чётно. Оно не может давать остаток 3, поскольку иначе оно делилось бы на 3. Значит, простое число $p>3$ при делении на 6 даёт остаток 1 или 5, т. е. оно имеет вид $6n \pm 1$; его квадрат имеет вид $36n^2 \pm 12n + 1$.

6. Пусть точки H_1, H_2 и H_3 симметричны точке пересечения высот H относительно сторон BC, CA и AB. Построение легко вытекает из следующего факта: если треугольник ABC остроугольный, то его вершины являются точками пересечения описанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$ с продолжениями его биссектрис, а если, например, угол A тупой, то из точки H_1 нужно снова провести биссектрису, а из точек H_2 и H_3 — биссектрисы внешних углов (рис. 44).

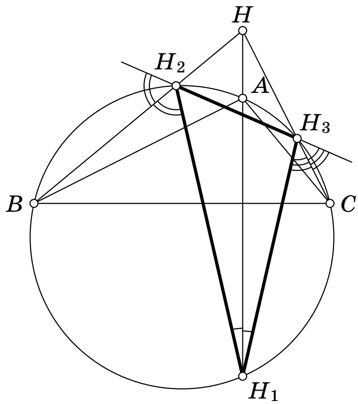


Рис. 44

Мы ограничимся разбором случая остроугольного треугольника ABC. Углы BHC и CAB имеют перпендикулярные стороны, поэтому они либо равны, либо составляют в сумме 180°. Для остроугольного треугольника они составляют в сумме 180°, потому что угол BHC тупой. Значит, $\angle BH_1C + \angle BAC = 180^\circ$, т. е. точка H_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точки H_2 и H_3 тоже лежат на описанной окружности треугольника ABC, поэтому описанные окружности треугольников ABC и $H_1H_2H_3$ совпадают. Далее, $\angle AH_1H_2 = \angle ACH_2 = \angle ACH_3 = \angle AH_1H_3$, поэтому H_1A — биссектриса треугольника $H_1H_2H_3$. Для H_2A и H_3A доказательство аналогично.

Случай тупоугольного треугольника ABC разбирается аналогично, а прямоугольным этот треугольник быть не может, потому что тогда две из трёх точек H_1, H_2, H_3 совпадают.

9—10 класс

1. Продолжим решение задачи 1 для 7—8 классов, пользуясь тем, что там уже доказано. Мы уже знаем, как должны быть расположены самый маленький квадрат и прилегающие к нему квадраты. Поэтому если из шести попарно различных квадратов можно сложить прямоугольник, то они должны быть расположены так, как схематично изображено на рис. 45. Но тогда у квадратов D и E есть общая сторона, поэтому они равны. А по условию все квадраты попарно различны.

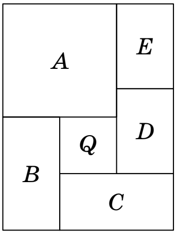


Рис. 45

2. Рассмотрим круг, содержащий все данные точки. Будем уменьшать радиус такого круга до тех пор, пока это возможно. Пусть R — радиус полученного круга. На границе этого круга лежат по крайней мере две данные точки. Рассмотрим сначала случай, когда на границе лежат ровно две точки A и B. Ясно, что они являются диаметрально противоположными точками круга. Возьмём третью данную точку C. Минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R, поэтому $R \leqslant 1$. Рассмотрим теперь случай, когда на границе лежат ровно три данные точки A, B и C. Тогда треугольник ABC остроугольный или прямоугольный, поскольку иначе можно было бы уменьшить радиус круга, содержащего все данные точки. Поэтому снова минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R. Рассмотрим, наконец, случай, когда на границе лежат по крайней мере четыре данные точки. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — угловые величины последовательных дуг, на которые данные точки разбивают границу круга. Если сумма угловых величин двух последовательных дуг не больше 180°, то сотрём их общую точку. Покажем, что при $n \geqslant 4$ такая пара последовательных дуг всегда найдётся. Предположим, что $\alpha_1 + \alpha_2 > 180^\circ$, $\alpha_2 + \alpha_3 > 180^\circ$, $\ldots$, $\alpha_n + \alpha_1 > 180^\circ$. Сложив эти неравенства, получим $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) > n \cdot 180^\circ$, а значит, $4 \cdot 180^\circ > n \cdot 180^\circ$. Получено противоречие. Таким образом, на границе полученного круга лежат либо две диаметрально противоположные данные точки, либо три данные точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника. Эти случаи мы уже разбирали.

3. Пусть $x(x-a)(x-b)(x-c)+1=P(x)Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Ясно, что $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены со старшим коэффициентом 1. При $x=0$, $x=a$, $x=b$ и $x=c$ имеет место равенство $P(x)Q(x)=1$, т. е. либо $P(x)=1$ и $Q(x)=1$, либо $P(x)=-1$ и $Q(x)=-1$. В обоих случаях $P(x)-Q(x)=0$. Степень многочлена $P(x)-Q(x)$, имеющего по крайней мере четыре различных корня (0, a, b, c), строго меньше четырёх, поэтому $P(x)=Q(x)$ для всех x. Таким образом,

$$x(x-a)(x-b)(x-c) = P^2(x)-1 = (P(x)+1)(P(x)-1).$$

Поэтому $P(x)\pm 1=x(x-a)$ и $P(x)\mp 1=(x-b)(x-c)$, т. е. $x(x-a)-(x-b)(x-c)=\pm 2$ (мы не различаем решения, отличающиеся лишь перестановкой чисел a, b, c). Следовательно, $a=b+c$ и $bc=\mp 2$. В результате получаем следующие наборы значений (a, b, c): $(3, 1, 2)$, $(-3, -1, -2)$, $(-1, 1, -2)$, $(1, 2, -1)$. Им соответствуют следующие разложения многочлена $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$: $(x^2-3x+1)^2$, $(x^2+3x+1)^2$, $(x^2+x-1)^2$, $(x^2-x-1)^2$.

4. *Первый способ.* Рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x:

$$x^2-(y+1)x+y^2-y=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2+6y+1$. Он отрицателен при $y\geqslant 3$ и при $y\leqslant -1$. Поэтому для y получаем три возможных значения: 0, 1, 2. Для каждого из этих значений получаем квадратное уравнение, которое легко решается.

Второй способ. Если $x+y=x^2-xy+y^2$, то

$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 = 2(x^2-xy+y^2-x-y) = 2.$$

Сумма квадратов целых чисел $x-y$, $x-1$, $y-1$ равна 2, поэтому одно из этих чисел равно 0. Если $x=y$, то получаем решения (2, 2) и (0, 0); если $x=1$, то получаем решения (1, 0) и (1, 2); если $y=1$, то получаем решения (0, 1) и (2, 1).

5. Пусть a — расстояние между данными прямыми, d — длина рассматриваемых отрезков. Выберем систему координат так, чтобы точки первой прямой имели координаты $(x, 0, 0)$, а точки второй прямой имели координаты $(0, y, a)$. Нас интересуют пары точек, для которых $x^2+a^2+y^2=d^2$, т. е. $x^2+y^2=d^2-a^2$. Середина отрезка с концами в точках с координатами $(x, 0, 0)$ и $(0, y, a)$ имеет координаты $(x/2, y/2, a/2)$, поэтому искомое множество — окружность радиуса $\sqrt{d^2-a^2}/2$ с центром $(0, 0, a/2)$, расположенная в плоскости $z=a/2$.

6. Пусть a и b — длины медиан, x и y — длины катетов. Тогда $\frac{x^2}{4}+y^2=a^2$ и $x^2+\frac{y^2}{4}=b^2$. Поэтому $x^2=\frac{16b^2-4a^2}{15}$ и $y^2=\frac{16a^2-4b^2}{15}$. Таким образом, x — это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $4b/\sqrt{15}$ и катетом $2a/\sqrt{15}$, а y — это катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $4a/\sqrt{15}$ и катетом $2b/\sqrt{15}$. Отрезок длиной $4b/\sqrt{15}$ и остальные отрезки можно построить, выбрав единицу измерения и построив отрезок длиной $\sqrt{15}$.

1945 год (VIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Если мы умножим $(a+b)(a^2+b^2)\ldots(a^{64}+b^{64})$ на $a-b$, то получим

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\ldots(a^{64}+b^{64}) &= \\ = (a^2-b^2)(a^2+b^2)\ldots(a^{64}+b^{64}) &= \ldots \\ \ldots = (a^{64}-b^{64})(a^{64}+b^{64}) &= a^{128}-b^{128}.\end{aligned}$$

2. Сложим $n-1$ неравенств $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, …, $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ и равенство $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$. В результате получим требуемое.

3. Пусть $10a+b$ — искомое число. По условию число $(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$ является квадратом некоторого числа k. Тогда k делится на 11, а значит, $a+b$ тоже делится на 11. Но $a+b \leqslant 18$, поэтому $a+b=11$. Ясно также, что если $a+b=11$, то $(10a+b)+(10b+a)=11^2$ — квадрат целого числа.

4. Ясно, что одним из концов отрезка должна быть вершина треугольника. Предположим, что отрезок CD разрезает разносторонний треугольник ABC на два равных треугольника ACD и BCD. Эти треугольники имеют, в частности, равные площади, поэтому $AD=BD$. Кроме того, сторона CD у них общая. Следовательно, оставшиеся стороны равны, т. е. $AC=BC$. Приходим к противоречию.

5. Пусть O — точка касания окружностей, A и D — точки касания с окружностями одной касательной, B и C — точки касания другой касательной (точки A и B лежат на одной окружности, C и D на другой: рис. 46). Проведём через точку O общую касательную к окружностям. Пусть она пересекает прямые BC и AD в точках P и Q. Две касательные, проведённые из одной точки к окружности, равны, поэтому $PB=PO=PC$ и $QA=QO=QD$. Из этого следует, что: 1) отрезок PQ является средней линией трапеции $ABCD$; 2) длина отрезка PQ равна полусумме длин сторон BC и AD. Остаётся заметить,

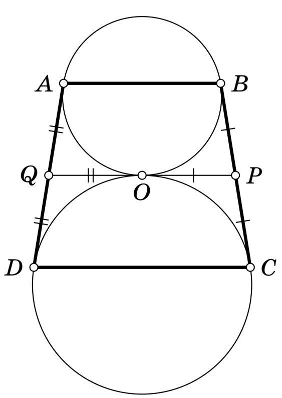


Рис. 46

что длина средней линии трапеции $ABCD$ равна полусумме длин её оснований AB и CD.

9—10 класс

1. Легко проверить, что если умножить $(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot \cdot \ldots \cdot (a^{2^{k-1}}+b^{2^{k-1}})$ на $a-b$, то получим $a^{2^k}-b^{2^k}$.

2. Пусть N — искомое число. Тогда $N^2-N=N(N-1)$ делится на 1000. Числа N и $N-1$ взаимно простые, поэтому одно из них делится на 8, а другое на 125. Пусть сначала $N=125k$. Тогда $k\leqslant 7$. Среди чисел $125k-1$, $k=1, \ldots, 7$, только число 624 делится на 8 (при вычислениях удобно воспользоваться тем, что число $125k-1$ при делении на 8 даёт такой же остаток, как и число $5k-1$). Пусть теперь $N-1=125k$. Тогда $N=125k+1$, поэтому $k\leqslant 7$. Среди чисел $125k+1$, $k=1, \ldots, 7$, только число 376 делится на 8.

Если $N^2-N=N(N-1)$ делится на 1000, то $N^k-N= =N(N^{k-1}-1)$ тоже делится на 1000, поскольку $N^{k-1}-1$ делится на $N-1$.

Комментарий. Для любого натурального числа n существуют ровно два натуральных числа, отличных от 1, которые не превосходят 10^n-1 и любая их степень оканчивается на n цифр, составляющих исходное число.

3. Из первого уравнения получаем $y=\pm x$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$(x-a)^2+x^2=1. \qquad (1)$$

Число решений системы уменьшается до трёх, только если одно из решений уравнения (1) обращается в нуль. Подставив в уравнение (1) $x=0$, получим $a^2=1$, т. е. $a=\pm 1$. Тогда уравнение (1) имеет два корня: 0 и a, поэтому система имеет три решения. Число решений системы уменьшается до двух, если уравнение (1) имеет единственный корень (т. е. два совпадающих корня). Приравнивая нулю дискриминант уравнения (1), получаем $a=\pm\sqrt{2}$.

4. Пусть O — вершина данного прямого угла. Точки O и A лежат на окружности с диаметром BC, поэтому $\angle AOB = \angle ACB = \angle C$ (рис. 47). Из этого следует, что точка A движется по прямой, образующей со стороной данного прямого угла угол, равный $\angle C$. В крайних положениях расстояния от точки A до точки O равны гипотенузе BC и наименьшему катету BA. Действительно, $OA = BC \sin\varphi$, где $\varphi = \angle OCA$. Ясно, что $\angle OCA = \angle OCB + \angle BCA = \angle OCB + \angle C$. Угол $\angle OCB$ изменяется от 0° до 90°, поэтому угол φ изменяется от $\angle C$ до $90^\circ + \angle C = 180^\circ - \angle B$. Следовательно, наибольшее значение $\sin\varphi$ равно 1, а наименьшее значение равно наименьшему из чисел $\sin C$ и $\sin B$. Таким образом, длина отрезка, по которому движется точка A, равна разности между длиной гипотенузы и длиной наименьшего катета прямоугольного треугольника ABC.

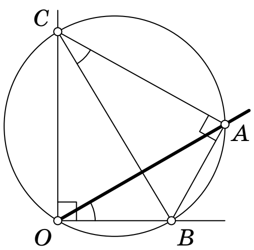


Рис. 47

Второй тур

7—8 класс

1. Будем отдельно подсчитывать сумму тысяч, сотен, десятков и единиц для рассматриваемых чисел. На первом месте может стоять любая из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Количество всех чисел с фиксированной первой цифрой равно $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$, поскольку на втором и третьем месте может стоять любая из шести цифр, а на четвёртом месте может стоять любая из трёх цифр 0, 2, 4 (мы рассматриваем только чётные числа). Поэтому сумма тысяч равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 108 \cdot 1000 = 1\,620\,000$. Количество чисел с фиксированной второй цифрой равно $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ (на первом месте стоит любая из пяти цифр). Поэтому сумма сотен равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 90 \cdot 100 = 135\,000$. Аналогично сумма десятков равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 90 \cdot 10 = 13\,500$, а сумма единиц равна $(2 + 4) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

2. Прежде всего заметим, что $\frac{1}{360}\cdot 25\frac{1}{2}=\frac{17}{240}$, причём числа 17 и 240 взаимно простые. Рассмотрим луч, идущий из «оси» в вершину первого многоугольника. Повороты этого луча вокруг «оси» на углы $k\cdot 25^\circ 30'$, где $k=1$, 2, ..., 240, различны. Действительно, если повороты луча на углы $k_1\cdot 25^\circ 30'$ и $k_2\cdot 25^\circ 30'$ совпадают, то число $\frac{(k_1-k_2)17}{240}$ целое, а значит, k_1-k_2 делится на 240. На каждом из этих 240 лучей есть вершина многоугольника, поэтому число сторон многоугольника не меньше 240. С другой стороны, при повороте правильного 240-угольника на угол $25^\circ 30'$ вокруг центра он совмещается сам с собой.

3. *Первый способ.* Треугольники AQP и CQB подобны, поэтому $\frac{AQ}{QC}=\frac{AP}{BC}=\frac{1}{n}$. Следовательно, $\frac{AQ}{AC}=\frac{AQ}{AQ+QC}=\frac{1}{n+1}$.

Второй способ. Разделим сторону BC на n равных частей и проведём через точки деления прямые, параллельные прямой BP. Они разделят диагональ AC на $n+1$ равных частей (рис. 48).

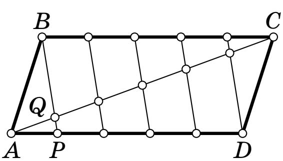


Рис. 48

4. Пусть A', B', C' — середины сторон BC, CA, AB. Середина отрезка AA_1 лежит на отрезке $B'C'$. Аналогично доказывается, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$.

Комментарий. Утверждение о том, что точки, лежащие на трёх сторонах треугольника, не могут лежать на одной прямой, является одной из аксиом геометрии, называемой аксиомой Паша.

9—10 класс

1. Рассматриваемое уравнение можно переписать в виде $(x-5)(y+3)=-18$. Его решения в целых числах соответствуют представлениям числа -18 в виде произведения двух целых чисел. Например, если $x-5=-18$ и $y+3=1$, то $x=-13$ и $y=-2$. Для остальных разложений x и y находятся аналогично.

2. Применим индукцию по n. При $n=1$ получаем очевидное тождество $2\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\pm\sqrt{2}$. Имеет место равенство

$$2\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}=$$
$$=a_1\frac{\pi}{2}+a_1\left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}=$$
$$=\pm\frac{\pi}{2}\pm\left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4},$$

где знак плюс соответствует $a_1=+1$, а знак минус соответствует $a_1=-1$. Это равенство показывает, что

$$\cos 2\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}=$$
$$=-\sin\left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}.$$

Воспользовавшись этой формулой и тождеством $2\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{2-2\cos\alpha}$, получим

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4}=$$
$$=\pm a_1\sqrt{2+2\sin\left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}}.$$

(Мы здесь дописали a_1, воспользовавшись тем, что $a_1=\pm1$.) Нетрудно также убедиться, что в действительности в полученной формуле всегда берётся знак плюс, поскольку знак числа $a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}$ совпадает со знаком числа a_1. Теперь, воспользовавшись предположением индукции, получаем требуемое тождество.

3. Обозначим угловую величину дуги, высекаемой сторонами данного правильного треугольника ABC, через α. Будем предполагать, что окружность касается стороны BC.

Рассмотрим дугу, высекаемую продолжениями сторон треугольника ABC на окружности, и обозначим её угловую величину через α' (рис. 49). Тогда по теореме об угле между двумя хордами $(\alpha+\alpha')/2 = \angle BAC = 60^\circ$. Но $\alpha = \alpha'$, так как эти дуги симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности параллельно стороне BC. Поэтому $\alpha = \alpha' = 60^\circ$.

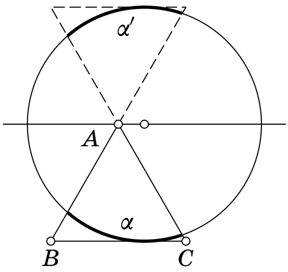


Рис. 49

1946 год (IX олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Поэтому выпуклый многоугольник не может иметь более трёх тупых внешних углов, т. е. он не может иметь более трёх острых внутренних углов. Три острых угла могут быть, например, в треугольнике.

2. При повороте на угол 60° вокруг точки B, переводящем точку C в точку A_1, точка C_1 переходит в точку A (рис. 50), поэтому отрезок CC_1 переходит в отрезок A_1A. Следовательно, точка N переходит в точку M.

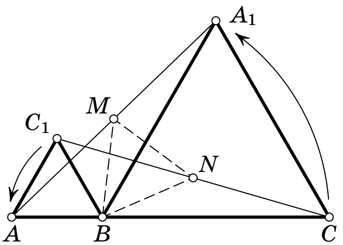


Рис. 50

3. Пусть N — искомое число. По условию $N = 131k + 112 = 132l + 98$, где k и l — натуральные числа. Кроме того, $N < 10\,000$, поэтому $l = \dfrac{N-98}{132} < \dfrac{10\,000-98}{132} < 76$. Далее, $131k + 112 = 132l + 98$, поэтому $131(k-l) = l - 14$. Следовательно, если $k \neq l$, то $|l-14| \geqslant 131$. Но $l < 76$, поэтому $k = l$ и $l-14=0$. Таким образом, $N = 131 \cdot 14 + 112 = 132 \cdot 14 + 98 = 1946$.

4. Сложив все уравнения, получим

$$3(x_1 + x_2 + \ldots + x_8) = 0.$$

Затем сложим первое уравнение, четвёртое и седьмое. В результате получим $2x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = 1$, а значит, $x_1 = 1$. Остальные неизвестные находятся аналогично.

5. Пусть

$$Q(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} + x^{100}).$$

Тогда

$$Q(-x) = (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{99} + x^{100}).$$

Поэтому рассматриваемое произведение является многочленом $P(x) = Q(x)Q(-x)$. Такой многочлен обладает следующим свойством: $P(-x) = P(x)$.

Пусть

$$P(x) = \sum a_n x^{2n} + \sum b_n x^{2n+1}.$$

Тогда

$$P(-x) = \sum a_n x^{2n} - \sum b_n x^{2n+1}.$$

Поэтому $P(x) - P(-x) = 2\sum b_n x^{2n+1}$. Мы выяснили, что многочлен $P(x) - P(-x)$ тождественно равен нулю при всех x, поэтому $b_n = 0$ для всех $n \geqslant 0$. Это означает, что у многочлена $P(x)$ нет членов, содержащих x в нечётной степени.

9—10 класс

1. Пусть l — прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку A. Отложим на прямой l отрезок AB длины 1. Пусть B' — проекция точки B на плоскость β, O — проекция точки B на линию пересечения плоскостей α и β. Тогда $\sin BAB' = BB' = OB \sin BOB'$. При этом

$\sin BOB'$ — синус угла между плоскостями α и β (этот угол фиксирован), и $OB \leqslant AB$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда точка O совпадает с A. Поэтому $\sin BAB'$ максимален, когда прямая l перпендикулярна линии пересечения данных плоскостей.

2. Пусть PQ — отрезок, который делится точкой A пополам, $P'Q'$ — другой отрезок, проходящий через точку A. Покажем, что отрезок $P'Q'$ отсекает треугольник большей площади, чем отрезок PQ. Пусть для определённости $P'A \geqslant Q'A$. Отложим на отрезке AP' отрезок $AP'' = AQ'$ (рис. 51). Треугольники APP'' и AQQ' равны, а треугольник APP' содержит треугольник APP''. Значит, площадь треугольника APP' больше площади треугольника AQQ'. Разность между площадями треугольников, отсекаемых отрезками $P'Q'$ и PQ, равна разности площадей треугольников APP' и AQQ'.

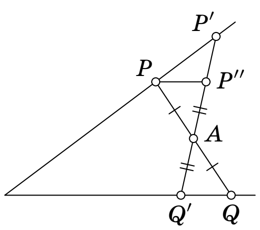


Рис. 51

Комментарий. Несложно доказать, что отрезок PQ, который делится точкой A пополам, всегда существует. Более того, этот отрезок легко построить. Для этого нужно сначала построить угол, симметричный данному углу относительно точки A. Тогда P и Q — точки пересечения сторон исходного угла и симметричного ему угла.

3. Заметим, что $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$. Если число n^2+3n+5 делится на 121, то число $(n+7)(n-4)$ делится на 11. Но $(n+7)-(n-4)=11$, поэтому оба множителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Следовательно, если число $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится на 121. Но тогда число $(n+7)(n-4)+33$ не может делиться на 121.

4. Ясно, что $n!\,2^n = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n$. Поэтому

$$n!\,2^n(2n-1)!! = (2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1) = (2n)!.$$

5. Возьмём на окружности радиуса 1 с центром O точки K, A и B так, что $\angle AOK=\alpha$ и $\angle BOK=\beta$ (рис. 52). Опустим из точки A перпендикуляр AH на прямую OK. Пусть C — точка пересечения этого перпендикуляра и прямой OB. Сравнение площадей сектора OAB и треугольника OAC показывает, что $\beta-\alpha<OH^2\cdot(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)$. Сравнение площадей сектора OAK и треугольника OAH показывает, что $\alpha>OH^2\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Из двух полученных неравенств следует, что $\frac{\beta-\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, т. е. $\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$.

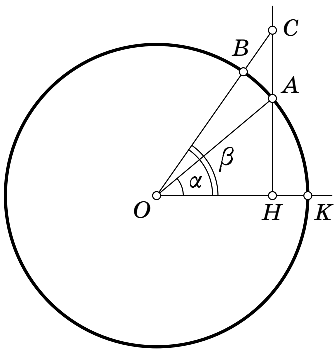


Рис. 52

Второй тур

7—8 класс

1. Пусть x — число восьмиклассников, y — число очков, набранных каждым восьмиклассником. В шахматном турнире с n участниками играется $\frac{n(n-1)}{2}$ партий. Поэтому, подсчитывая двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира, приходим к уравнению

$$xy+8=\frac{(x+2)(x+1)}{2},$$

т. е.

$$2y=\frac{(x+2)(x+1)-16}{x}=x+3-\frac{14}{x}.$$

Поэтому x принимает одно из значений 1, 2, 7, 14. Значения 1 и 2 отпадают, поскольку в этих случаях число y будет отрицательным. Задача имеет два ответа: $x=7$ и $x=14$. В каждом из случаев $x=7$ и $x=14$ нетрудно построить пример турнирной таблицы, удовлетворяющей условию.

2. Представим данное выражение в виде

$$(x+2y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+3y).$$

При $y \neq 0$ все пять сомножителей этого произведения попарно различны, а число 33 нельзя представить в виде произведения пяти целых попарно различных сомножителей (хотя и можно представить в виде произведения четырёх попарно различных сомножителей, два из которых равны 1 и -1). При $y=0$ рассматриваемое выражение превращается в x^5. Ни при каком целом x число x^5 не равно 33.

3. Пусть $AM' = BN' = \frac{OA - OB}{2}$ (тогда $OM' = ON'$). Возьмём произвольную из рассматриваемых точек $M \neq M'$ и покажем, что $MN > M'N'$. Пусть P — точка пересечения прямых $M'N'$ и MN. Продолжим отрезок $M'N'$ за точку M' и отложим на продолжении отрезок $M'Q = N'P$. Ясно, что $\angle MM'Q = \angle NN'P$, поэтому треугольники $MM'Q$ и $NN'P$ равны. Следовательно, $MN = MP + PN = MP + MQ > PQ = M'N'$.

4. Пусть a_n — дорога, выходящая из пункта A_n, α_n — угол, который образует дорога a_n с прямой MN, P_{mn} — перекрёсток дорог a_n и a_m.

1. Если машину a_m задержат на перекрёстке P_{nm}, то угол α_n ближе к 90°, чем угол α_m (дорога a_n *круче*, чем дорога a_m).

2. Пусть $m < n$. Тогда дороги a_m и a_n пересекаются, если $\alpha_m < \alpha_n$, и не пересекаются, если $\alpha_m \geqslant \alpha_n$.

3. Если все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n, то машину a_n нигде не задержат. Это следует из п. 1.

4. Пусть a_m — самая крутая из дорог, пересекающих a_n. Если a_m круче a_n, то машину a_m не могут задержать раньше перекрёстка P_{nm}. Действительно, предположим, что машину a_m задержат на перекрёстке P_{qm}, лежащем на от-

резке A_mP_{mn}. Тогда согласно п. 1 дорога a_q круче дороги a_m, а значит, по условию она не может пересекать a_n. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим сначала случай, когда точка A_q лежит вне отрезка A_nA_m. Прямая a_q пересекает сторону A_mP_{nm} треугольника $A_mP_{nm}A_n$ и не пересекает сторону A_mA_n, поэтому она пересекает сторону $P_{nm}A_n$, а этого не может быть. Рассмотрим теперь случай, когда точка A_q лежит внутри отрезка A_nA_m. Пусть сначала $n<q<m$. Дороги a_n и a_m, a_q и a_m пересекаются, а дороги a_q и a_n не пересекаются. Поэтому из п. 2 следует, что $\alpha_q \leqslant \alpha_n < \alpha_m$. Угол α_m ближе к 90°, чем угол α_n, поэтому неравенство $\alpha_n < \alpha_m$ возможно лишь при $\alpha_n < 90^\circ$. Но тогда из неравенства $\alpha_q \leqslant \alpha_n$ следует, что дорога a_q не более крута, чем дорога a_n, поэтому она менее крута, чем дорога a_m. Это противоречит тому, что машину a_m задержат на перекрёстке P_{qm}. Случай $n>q>m$ рассматривается аналогично.

5. Если машина a_n проходит через все перекрёстки, то все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n; это следует из п. 4 и 1.

Итак, из п. 3 и 5 следует, что машина a_n проходит через все перекрёстки тогда и только тогда, когда все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n. Теперь уже легко получить требуемый результат.

Комментарии. 1°. Приведённые выше рассуждения показывают, что ответ не зависит от расстояний между пунктами A_1, A_2, ..., A_{30} (эти расстояния не обязательно должны быть равными).

2°. Несмотря на то что формулировка этой задачи кажется довольно искусственной, она связана с практическими вопросами кристаллографии, когда тонкие кристаллы растут в случайных направлениях. Выросший кристалл запирает путь всем упирающимся в него кристаллам.

5. Докажем, что если выполняются указанные условия, то число остановок n на каждом маршруте и число маршрутов N связаны соотношением $N=n(n-1)+1$. Пусть a — один из маршрутов, B — остановка, через которую маршрут a не проходит. Каждый маршрут, проходящий через B, пересекает маршрут a. Поэтому через B проходит ровно n маршрутов. Аналогично доказывается, что через каждую остановку маршрута a проходит $n-1$ маршрутов, отличных от a. Всего получаем $n(n-1)$ разных маршрутов и ещё сам маршрут a.

Комментарии. 1°. Пример автобусной сети, обладающей требуемыми свойствами, приведён на рис. 53; автобусные маршруты — прямолинейные отрезки и пунктирная кривая.

2°. Если рассматривать автобусные остановки как точки, а автобусные маршруты как прямые, то мы получаем аксиомы проективной геометрии. Проективные геометрии с конечным числом точек достаточно подробно изучены; см., например, [11].

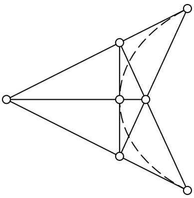


Рис. 53

9—10 класс

1. Пусть в турнире участвовало x девятиклассников. Тогда всего было $11x$ участников и они набрали $\frac{11x(11x-1)}{2}$ очков. По условию отношение числа очков, набранных девятиклассниками, к числу очков, набранных десятиклассниками, равно $1:4{,}5$. Поэтому девятиклассники набрали $x(11x-1)$ очков, а значит, каждый из девятиклассников выиграл все $11x-1$ партий, которые он сыграл. Но если бы среди участников турнира было два девятиклассника, то партию между собой они должны были оба выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовал один девятиклассник; он набрал 10 очков.

2. Заменим каждое из данных чисел его остатком от деления на 10000. Пусть $a_1=0$, a_2, ... — полученные в результате числа. Если нам известны числа a_k и a_{k+1}, то нам известно и a_{k-1}, поскольку в исходной последовательности $(k-1)$-й член равен разности $(k+1)$-го и k-го. Следовательно, если для некоторых k и n имеют место равенства $a_k=a_{k+n}$ и $a_{k+1}=a_{k+n+1}$, то тогда $a_{k-1}=a_{k+n-1}$, $a_{k-2}=a_{k+n-2}$, ..., $a_1=a_{n+1}$. Но $a_1=0$, поэтому $a_{n+1}=0$, т. е. в исходной последовательности чисел на $(n+1)$-м месте стоит число, оканчивающееся четырьмя нулями.

Остаётся доказать, что среди пар (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{10^8}, a_{10^8+1}), (a_{10^8+1}, a_{10^8+2}) найдутся две одинаковые пары. Но из чисел 0, 1, 2, ..., 9999 нельзя составить более 10^8 различных пар, а мы рассматриваем 10^8+1 пар.

3. Будем считать, что

$$\frac{AB}{PQ} \geqslant \frac{CD}{QR} \geqslant \frac{EF}{RP}.$$

Отложим на сторонах QR и PR отрезки $QD' = CD \cdot \frac{PQ}{AB}$ и $PE' = FE \cdot \frac{PQ}{AB}$. Тогда

$$S_{\triangle SCD} = \frac{CD}{QD'}\, S_{\triangle SQD'} = \frac{AB}{PQ}\, S_{\triangle SQD'},$$
$$S_{\triangle SEF} = \frac{EF}{E'P}\, S_{\triangle SE'P} = \frac{AB}{PQ}\, S_{\triangle SE'P},$$

поэтому

$$S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SEF} = \frac{AB}{PQ}\,(S_{\triangle SPQ} + S_{\triangle SQD'} + S_{\triangle SE'P}) = \\ = \frac{AB}{PQ}\,(S_{PQD'E'} \pm S_{\triangle SD'E'}).$$

В последнем выражении знак плюс берётся, если точка S лежит вне четырёхугольника $PQD'E'$, а знак минус — если внутри. Из полученной формулы следует, что для точек S искомого геометрического места площадь треугольника $SD'E'$ должна быть постоянной. Поэтому искомое ГМТ — отрезок прямой, параллельной $D'E'$ и проходящей через точку S_0.

В особом случае точки D' и E' совпадают с вершиной R, поэтому сумма площадей треугольников SAB, SCD, SEF одна и та же для всех точек S. Таким образом, искомое ГМТ — весь треугольник PQR.

4. Предположим, что на каком-то маршруте a есть n остановок. Возьмём остановку B, через которую не проходит маршрут a. Из B есть маршрут в каждую из n остановок маршрута a, причём такой маршрут ровно один, поскольку два разных маршрута не могут иметь двух общих остановок. Каждый маршрут, проходящий через B, пересекает маршрут a. Поэтому через B проходит ровно n маршрутов. Теперь ясно, что любой маршрут c, не проходящий через остановку B, имеет ровно n остановок. Действительно, через B проходит ровно n маршрутов, каждый из которых пересекает c в одной точке, два маршрута не могут пересекать c в одной и той же точке, и через каждую остановку маршрута c проходит один из этих маршрутов.

Пусть A — одна из остановок маршрута a. На маршруте, проходящем через остановки A и B, по условию есть ещё одна остановка C. Рассмотрим маршрут c, проходящий через остановку C и какую-нибудь остановку маршрута a, отличную от остановки A. Маршрут c не проходит через остановку B, поэтому на нём ровно n остановок. Маршрут c не проходит через остановку A, следовательно, через остановку A проходит n маршрутов. Таким образом, через каждую остановку маршрута a проходит $n-1$ маршрутов, отличных от самого a. Ясно также, что любой маршрут проходит хотя бы через одну остановку маршрута a. Всего получаем $n(n-1)$ разных маршрутов и ещё сам маршрут a. В нашем случае $n(n-1)+1=57$, поэтому $n=8$.

5. См. решение задачи 4 для 7—8 классов.

1947 год (X олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

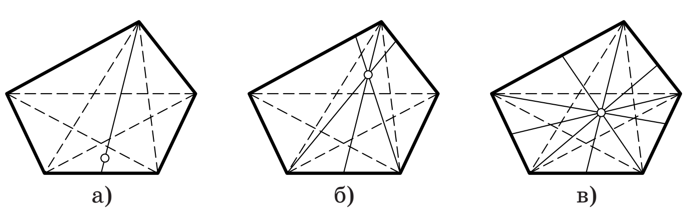
1. При раскрытии скобок получается сумма одночленов вида x^{5m+7n}. Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, т. е. в виде $5m+7n$, поэтому коэффициент при x^{18} будет равен нулю.

Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: $17=7+5+5$; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 выражений $1+x^5+x^7$ мы должны выбрать x^7, а в двух из 19 оставшихся таких выражений мы должны выбрать x^5. Поэтому коэффициент при x^{17} равен $20\cdot\frac{19\cdot18}{2}=3420$.

2. Пусть $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}=P(x)(x-1)+r$. При $x=1$ в правой части получаем r, а в левой части получаем 6. Таким образом, $r=6$.

3. Если $|k-l|\leqslant 4$ и $k\neq l$, то наибольший общий делитель чисел k и l не превосходит 4. Поэтому наибольший общий делитель любой пары выбранных чисел не превосходит 4. Из пяти последовательных чисел можно выбрать пару последовательных нечётных чисел. Из двух последовательных нечётных чисел по крайней мере одно не делится на 3. Это число взаимно просто с остальными четырьмя числами.

4. Проведём диагонали данного пятиугольника. Они разбивают его на 11 областей: один пятиугольник, 5 внутренних треугольников (сторонами которых служат части диагоналей) и 5 внешних треугольников (одной из сторон каждого из которых служит сторона пятиугольника). Если точка M принадлежит внешнему треугольнику, то число требуемых прямых равно 1 (рис. 54, а), если M принадлежит внутреннему треугольнику, то число прямых равно 3 (рис. 54, б), а если пятиугольнику, то число прямых равно 5 (рис. 54, в).



а) б) в)

Рис. 54

5. Покажем, что $\angle AOB = 180^\circ - \angle C$. Высоты, опущенные из вершин A и B, отсекают от угла C четырёхугольник с двумя прямыми углами (рис. 55), поэтому четвёртый угол равен $180^\circ - \angle C$. Но этот четвёртый угол равен углу $\angle AOB$.

Таким образом, $\sin\angle AOB = \sin\angle C$, поэтому радиус описанной окружности треугольника AOB равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle AOB} = \frac{AB}{2\sin\angle C} = R,$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Радиусы остальных рассматриваемых окружностей тоже равны R.

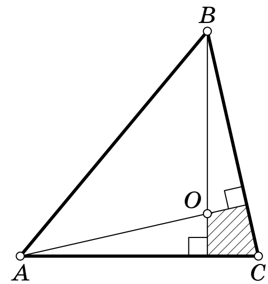


Рис. 55

9—10 класс

1. Пусть

$$P(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1000} \quad \text{и} \quad Q(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}.$$

Коэффициент при x^{20} у многочлена $P(x)$ такой же, как у многочлена $P(-x) = (1 - x^2 - x^3)^{1000}$, а у многочлена $Q(x)$ такой же, как у многочлена $Q(-x) = (1 + x^2 + x^3)^{1000}$. Ясно, что у многочлена $(1 + x^2 + x^3)^{1000}$ коэффициент при x^{20} больше, чем у многочлена $(1 - x^2 - x^3)^{1000}$. Действительно, у первого многочлена член $p_{20}x^{20}$ равен сумме нескольких членов вида $(x^2)^n(x^3)^m$, где $2n + 3m = 20$, а у второго многочлена член $q_{20}x^{20}$ равен сумме тех же самых членов, но со знаком $(-1)^{n+m}$. Во втором случае встречаются члены со знаком минус, например при $n = 1$, $m = 6$ или $n = 7$, $m = 2$.

2. Пусть

$$a = \left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{10^5}\right),$$
$$b = \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{10^{99}}\right).$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$0{,}89001+\frac{1}{10^6}<a<0{,}89001+\frac{2}{10^6}.$$

Ясно, что $b<1-\frac{1}{10^6}$. Кроме того, если $0<x,\ y<1$, то

$$(1-x)(1-y)>1-x-y.$$

Применяя несколько раз это неравенство, получаем

$$b>1-\frac{1}{10^6}-\frac{1}{10^7}-\ldots-\frac{1}{10^{99}}>1-\frac{2}{10^6}.$$

Следовательно,

$$ab<0{,}890012\cdot 0{,}999999<0{,}890012,$$
$$ab>0{,}890011\cdot 0{,}999998>0{,}890009.$$

3. Среди данных чисел есть 5 нечётных чисел. Рассмотрим остатки от деления этих пяти чисел на 3, 5 и 7. Среди остатков от деления на 3 нет трёх одинаковых. Действительно, это достаточно проверить для любых пяти последовательных натуральных чисел, например для чисел 1, 3, 5, 7, 9. В этом случае получаются остатки 1, 0, 2, 1, 0, среди которых нет трёх одинаковых. Аналогично доказывается, что среди остатков от деления на 5 и на 7 нет двух одинаковых. Поэтому среди указанных пяти чисел можно выбрать три числа, не делящихся на 3, а среди них выбрать число, не делящееся на 5 и на 7. Это число взаимно просто с остальными девятью числами.

4. См. решение задачи 4 для 7—8 классов.

5. Прямые, удалённые на расстояние d от прямой AB, — это в точности прямые, касающиеся указанного цилиндра. Если из этих прямых выбрать те, которые проходят через точку M, то получим указанное в ответе множество.

Второй тур

7—8 класс

1. Положим на чашечки весов по одному кубику. Возможны два случая.

Первый случай. При первом взвешивании один из кубиков оказался тяжелее.

В этом случае один выбранный кубик алюминиевый, а другой дюралевый. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем сравнивать с ними остальные кубики. А именно, оставшиеся 18 кубиков разбиваем на 9 пар и поочерёдно кладём их на другую чашечку. Каждый раз мы узнаём, сколько в паре дюралевых кубиков. Действительно, если эталонная пара легче, то мы положили два дюралевых кубика; если эталонная пара имеет тот же самый вес, то мы положили один алюминиевый и один дюралевый кубик; если эталонная пара тяжелее, то мы положили два алюминиевых кубика. Таким образом, в первом случае достаточно 10 взвешиваний.

Второй случай. При первом взвешивании кубики оказались равного веса.

В этом случае либо оба выбранных кубика алюминиевые, либо оба дюралевые. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем последовательно сравнивать с ними остальные кубики. Пусть первые k пар оказались того же самого веса, а $(k+1)$-я пара оказалась другого веса. (Если $k=9$, то все кубики одного веса, поэтому дюралевых кубиков нет.) Пусть для определённости $(k+1)$-я пара оказалась более тяжёлой. Тогда первые два кубика и кубики первых k пар алюминиевые. Положим на каждую чашечку весов по одному кубику $(k+1)$-й пары. Если эти кубики одного веса, то они оба дюралевые. Если кубики разного веса, то один алюминиевый, а другой дюралевый. В обоих случаях мы можем составить пару кубиков, один из которых алюминиевый, а другой дюралевый. Оставшиеся пары кубиков мы можем сравнивать с этой парой, как и в первом случае. Общее число взвешиваний во втором случае равно 11.

2. У выпуклого многоугольника с нечётным числом сторон есть сторона, не параллельная ни одной из остальных его сторон, поскольку параллельные стороны выпуклого многоугольника разбиваются на пары. А если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то для каждой его стороны найдётся сторона, ей параллельная. Действительно, к каждой стороне многоугольника примыкает параллелограмм, у которого есть сторона, параллельная этой стороне. К этой стороне примыкает другой параллелограмм, у которого тоже есть сторона, параллельная этой стороне, и т. д. После конечного числа шагов мы попадаем на сторону многоугольника, параллельную исходной стороне.

3. Рассмотрим наибольшие нечётные делители выбранных чисел. У чисел от 1 до 200 есть ровно 100 различных наибольших нечётных делителей (числа 1, 3, ..., 199). Итак, два из выбранных чисел имеют одинаковые наибольшие нечётные делители. Это означает, что два выбранных числа отличаются только тем, что простой множитель 2 входит в них в разных степенях. Большее из них делится на меньшее.

4. Требуемые расположения изображены на рис. 56. Всего получаем 6 различных вариантов. Чтобы найти все эти варианты, будем поочерёдно разбирать случаи, когда есть 1 отрезок одной длины и 5 отрезков другой длины, 2 отрезка одной длины и 4 отрезка другой длины, 3 отрезка одной длины и 3 отрезка другой длины. В первом

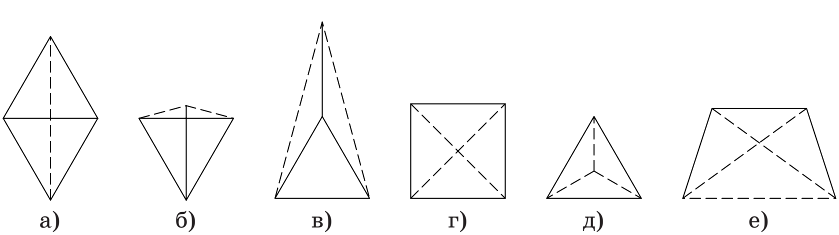


Рис. 56

случае мы получаем два правильных треугольника, приставленных друг к другу (рис. 56, а). Во втором случае отрезки равной длины могут либо иметь общую вершину (рис. 56, б и в), либо не иметь общих вершин (рис. 56, г). В третьем случае отрезки равной длины могут либо образовывать правильный треугольник (рис. 56, д), либо не образовывать правильный треугольник (рис. 56, е). Для варианта е) несложные вычисления с углами показывают, что искомые точки — это четыре из пяти вершин правильного пятиугольника.

9—10 класс

1. Пусть $ABCD$ — данная треугольная пирамида. Проведём через прямую AB плоскость, параллельную прямой CD. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на эту плоскость. Покажем, что прямая AB делит отрезок $C'D'$ пополам. Действительно, проекция тетраэдра $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную прямой AB, представляет собой равнобедренный треугольник, поскольку две его стороны равны высотам (равновеликих) треугольников ACB и ADC, опущенных из вершин C и D на сторону AB. Аналогично доказывается, что прямая CD делит пополам проекцию ребра AB на плоскость, проходящую через прямую CD параллельно прямой AB. Таким образом, $AC'BD'$ — параллелограмм. Из равенства $BC'=AD'$ следует равенство $BC=AD$. Равенства длин остальных пар противоположных рёбер доказываются аналогично.

2. Сначала докажем, что $p\leqslant 3$. Предположим, что $p\geqslant 4$. Возьмём треугольник $\triangle_1$. К его вершине A примыкает треугольник $\triangle_2$. К вершине $B\neq A$ треугольника $\triangle_2$ примыкают треугольники $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$; все они отличны от $\triangle_1$, поскольку иначе треугольники $\triangle_1$ и $\triangle_2$ имели бы две общие вершины. По условию каждый из треугольников $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$ имеет общую вершину с треугольником $\triangle_1$, причём эта вершина отлична от A. Но из этого следует, что два из треугольников $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$ имеют общую вершину, отличную от B.

Если $p=1$, то $k=1$ (если бы было хотя бы 2 треугольника, то они имели бы общую вершину, а тогда $p\geqslant 2$).

Пусть в каждой вершине сходятся $p\geqslant 2$ треугольников. Фиксируем один из треугольников. К каждой его вершине примыкает $p-1$ треугольников, т. е. всего к нему примыкает $3(p-1)$ треугольников. Все эти треугольники различны, и других треугольников нет, поскольку любые два треугольника должны иметь общую вершину. Значит, всего получаем $3(p-1)+1=3p-2$ треугольников.

Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k, p) = (4, 2)$, можно взять октаэдр и выбросить половину его граней, оставив только треугольники, не имеющие общих сторон. Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k, p)=(7, 3)$, можно взять тетраэдр, поместить внутрь него треугольник ABC и для каждой вершины треугольника ABC взять два треугольника, каждый из которых образован этой вершиной и одним из двух несмежных рёбер тетраэдра (для каждой вершины треугольника ABC берётся своя пара несмежных рёбер тетраэдра).

3. Выпишем в каждой строке, начиная с третьей, первые четыре числа, заменив каждое чётное число на 0, а нечётное — на 1:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0\\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Пятая выписанная строка совпала с первой, поэтому в дальнейшем первые четыре числа будут периодически повторяться. Остаётся заметить, что в каждой из первых пяти выписанных строк есть чётные числа.

4. Предположим, что из чисел 1, 2, 3, ..., 199, 200 мы выбрали 100 чисел так, что ни одно из них не делится на другое. Достаточно доказать, что среди выбранных чисел нет чисел, меньших 16. Рассмотрим наибольшие нечётные делители всех выбранных чисел. Если наибольшие нечётные делители двух чисел совпадают, то одно из них делится на другое. Поэтому наибольшие нечётные делители выбранных чисел — это в точности все числа 1, 3, 5, ..., 199. В частности, среди выбранных чисел есть числа с наибольшими нечётными делителями 1, 3, 9, 27 и 81. Ни одно из выбранных чисел не делится на другое, поэтому выбранное число с наибольшим нечётным делителем 27 делится на 2, с наибольшим нечётным делителем 9 делится на 2^2, с наибольшим нечётным делителем 3 делится на 2^3, с наибольшим нечётным делителем 1 делится на 2^4. Следовательно, среди выбранных чисел нет чисел 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 12, поскольку любое из этих чисел делит хотя бы одно из чисел 81, $54 = 27 \cdot 2$, $36 = 9 \cdot 4$, $24 = 3 \cdot 8$, 16. Рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 5, 15 и 45, убеждаемся, что среди выбранных чисел нет чисел 5, 10 и 15, поскольку любое из этих чисел делит хотя бы одно из чисел 45, $30 = 15 \cdot 2$, $20 = 5 \cdot 4$. Рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 7, 21 и 63, убеждаемся, что среди выбранных чисел нет чисел 7 и 14, поскольку каждое из этих чисел делит хотя бы одно из чисел 63, $42 = 21 \cdot 2$, $28 = 7 \cdot 4$. Рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 11 и 33, убеждаемся, что среди выбранных чисел нет числа 11. Рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 13 и 39, убеждаемся, что нет числа 13.

5. Предположим, что требуемого выпуклого пятиугольника нет. Проведём из точки A_9 лучи через точки A_5, A_6, A_7, A_8. Эти лучи разбивают плоскость на 4 угла, каждый из которых меньше 180°. Если внутри одного из этих углов лежат две из точек A_1, A_2, A_3, A_4, то мы немедленно получаем требуемый пятиугольник. Поэтому внутри каждого из этих углов лежит ровно одна из указанных точек. Но тогда внутри каждого из двух углов, образованных лучами A_9A_5 и A_9A_7, лежат две из указанных точек. Рассмотрев тот из углов, который меньше 180°, снова получаем требуемый пятиугольник.

1948 год (XI олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Пусть $x \leqslant y \leqslant z$ — натуральные числа и $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$. Тогда $x<4$, поскольку иначе $x,\ y,\ z\geqslant 4$ и $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqslant\dfrac{3}{4}<1$.

Если $x=2$, то $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$. Значит, $y\leqslant 4$ и мы находим два решения: $(2,\ 4,\ 4)$ и $(2,\ 3,\ 6)$.

Если $x=3$, то $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$. Значит, $y\leqslant 3$ и мы находим решение $(3,\ 3,\ 3)$.

2. Ясно, что $2^{100}=(1024)^{10}>1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет не менее 31 цифры. С другой стороны,

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}}<\left(\frac{1025}{1000}\right)^{10}=\left(\frac{41}{40}\right)^{10}<\frac{41}{40}\cdot\frac{40}{39}\cdot\frac{39}{38}\cdot\ldots\cdot\frac{32}{31}=\frac{41}{31}<10;$$

мы воспользовались тем, что при $n>1$ имеет место неравенство $\dfrac{n}{n-1}>\dfrac{n+1}{n}$, поскольку $n^2>n^2-1$. Таким образом, $2^{100}=(1024)^{10}<10\cdot 1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет менее 32 цифр.

3. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любой конфигурации из n прямых. Рассмотрим конфигурацию из $n+1$ прямых, выбросим одну прямую и раскрасим требуемым способом плоскость, разбитую оставшимися n прямыми. По одну сторону от выброшенной прямой эту раскраску мы сохраним, а по другую сторону — заменим на противоположную.

9—10 класс

1. Пусть $2^n-2=nm$. Тогда

$$\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}=2\frac{2^{2^n-2}-1}{2^n-1}=2\frac{2^{nm}-1}{2^n-1}=$$
$$=2(2^{n(m-1)}+2^{n(m-2)}+\ldots+2^n+1).$$

2. *Первый способ*. Учитывая, что $10>\pi^2$, получаем

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}=\log_\pi 2+\log_\pi 5=\log_\pi 10>\log_\pi\pi^2=2.$$

Второй способ. Пусть $\log_2\pi=a$ и $\log_5\pi=b$. Тогда $2^a=\pi$ и $5^b=\pi$, т. е. $\pi^{1/a}=2$ и $\pi^{1/b}=5$. Поэтому $\pi^{1/a+1/b}=2\cdot5=10$. Учитывая, что $\pi^2<10$, получаем требуемое.

3. Докажем сначала требуемое утверждение в случае, когда точка A' лежит на ребре AB. Ясно, что $\angle BA'C=\angle BAC+\angle ACA'$ и $\angle BA'D=\angle BAD+\angle ADA'$. Поэтому требуемое неравенство можно преобразовать к виду

$$\angle ACA'+\angle CA'D+\angle ADA'>\angle CAD.$$

Учитывая, что $\angle CA'D=180^\circ-\angle A'CD-\angle A'DC$ и $\angle CAD=180^\circ-\angle ACD-\angle ADC$, переходим к неравенству

$$\angle ACA'+\angle ACD+\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'CD+\angle A'DC.$$

Это неравенство следует из хорошо известных неравенств для трёхгранных углов: $\angle ACA'+\angle ACD>\angle A'CD$ и $\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'DC$.

Теперь требуемое неравенство легко доказывается и в общем случае. Для этого сначала рассмотрим точку A_1, в которой плоскость $A'CD$ пересекает ребро AB. Затем рассмотрим точку A_2, в которой прямая CA' пересекает отрезок A_1D. Применив доказанное неравенство последовательно к точкам A_1, A_2 и A', получим требуемое.

Второй тур

7—8 класс

1. Прежде всего заметим, что если $x=1$, то $y=1$ (и наоборот), но по условию $x\neq y$. В дальнейшем будем считать, что $x\neq 1$, $y\neq 1$. Из равенства $x^y=y^x$ следует, что простые делители чисел x и y одни и те же, т. е. $x=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_n^{a_n}$ и $y=p_1^{b_1}p_2^{b_2}\ldots p_n^{b_n}$, где числа a_1, ..., a_n и b_1, ..., b_n натуральные. То же самое равенство показывает, что $a_1y=b_1x$, ..., $a_ny=b_nx$. Пусть для определённости $x<y$. Тогда из записанных равенств следует, что $a_1<b_1$, ..., $a_n<b_n$, т. е. $y=kx$, где $k=p_1^{b_1-a_1}\ldots p_n^{b_n-a_n}$ — целое число. Подставляя равенство $y=kx$ в исходное равенство $x^y=y^x$, получаем $x^{kx}=(kx)^x$. Извлекая корень степени x, получаем $x^k=kx$, т. е. $x^{k-1}=k$. По предположению $y>x$, поэтому $k>1$, а значит, $x>1$. Ясно, что $2^{2-1}=2$. Легко также проверить, что если $x>2$ или $k>2$, то $x^{k-1}>k$. Покажем сначала по индукции, что если $k>2$ — натуральное число, то $2^{k-1}>k$. При $k=3$ получаем неравенство $4>3$, а если $2^{k-1}>k$ и $k>2$, то $2^k=2\cdot 2^{k-1}>2k>k+1$. Пусть теперь $x\geqslant 2$ и $k\geqslant 2$. Тогда $x^{k-1}\geqslant 2^{k-1}\geqslant k$, причём если $x>2$, то первое неравенство строгое, а если $k>2$, то второе неравенство строгое.

2. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-1/2$ описанная окружность S треугольника ABC переходит в описанную окружность S_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как окружность S_1 пересекает все стороны треугольника ABC, можно построить треугольник $A'B'C'$ со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC, для которого S_1 будет вписанной окружностью. Пусть r и r' — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и

$A'B'C'$; R и R_1 — радиусы окружностей S и S_1. Ясно, что $r \leqslant r' = R_1 = R/2$. Равенство достигается, если треугольники $A'B'C'$ и ABC совпадают, т. е. S_1 — вписанная окружность треугольника ABC. В этом случае $AB_1 = AC_1$, поэтому $AB = AC$. Аналогично $AB = BC$.

3. Прежде всего заметим, что если O_1 и O_2 — центры симметрии фигуры, то точка $O_3 = S_{O_2}(O_1)$ (т. е. точка, симметричная точке O_1 относительно точки O_2) тоже является центром симметрии. Это следует из равенства $S_{O_3} = S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$, которое легко проверяется. Действительно, пусть $A_1 = S_{O_2}(A)$, $A_2 = S_{O_1}(A_1)$, $A_3 = S_{O_2}(A_2)$. Тогда $AA_2A_1A_3$ — параллелограмм с центром O_2 (рис. 57). Точка O_1 является серединой стороны A_1A_2, поэтому точка O_3 является серединой отрезка AA_3, что и требовалось.

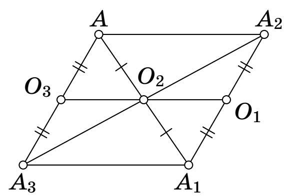


Рис. 57

Предположим, что фигура имеет более одного, но конечное число центров симметрии. Выберем прямую так, чтобы при проекции на неё не все центры симметрии отображались в одну точку. Пусть O_1 и O_2 — центры симметрии, проекции которых являются крайними точками (все остальные проекции центров симметрии заключены между ними). Тогда точка O_3, симметричная точке O_1 относительно точки O_2, не может быть центром симметрии. Приходим к противоречию.

9—10 класс

1. Рассмотрим сначала случай, когда $x < y$. Пусть $y = kx$. Тогда $x^{kx} = (kx)^x$. Извлекая корень степени x, а затем деля на x, получаем $x^{k-1} = k$. Таким образом, $x = k^{\frac{1}{k-1}}$ и $y = kk^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}$. Ясно, что $k > 1$, так как $x < y$. Число k рационально; пусть $\dfrac{1}{k-1} = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь, числитель и знаменатель которой положительны. Подставляя это выражение в формулы для x и y, получаем

$$x = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}} \quad \text{и} \quad y = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}.$$

Числа p и q взаимно просты, поэтому числа x и y могут быть рациональными лишь в том случае, когда корень степени q из целых чисел p и $p+q$ является целым. Но если $q \geqslant 2$ и $p = n^q$, то

$$n^q < p+q < (n+1)^q = n^q + qn^{q-1} + \frac{q(q-1)}{2}n^{q-2} + \ldots$$

Поэтому корень степени q из числа $p+q$ не является целым числом. Следовательно, $q=1$, а значит,

$$x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p} \quad \text{и} \quad y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1};$$

здесь p — произвольное натуральное число.

В случае, когда $x > y$, мы аналогично получаем

$$y = \left(\frac{r+1}{r}\right)^{r} \quad \text{и} \quad x = \left(\frac{r+1}{r}\right)^{r+1},$$

где r — произвольное натуральное число. Положив $p = -r - 1$, мы получаем прежние выражения

$$x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p} \quad \text{и} \quad y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1},$$

но теперь $p \leqslant -2$.

2. Пусть a — длина ребра куба. Сечение куба плоскостью, проходящей через его центр перпендикулярно одной из диагоналей, является правильным шестиугольником (рис. 58). Радиус вписанной окружности этого шестиугольника равен $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, поэтому в куб можно поместить окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Покажем, что

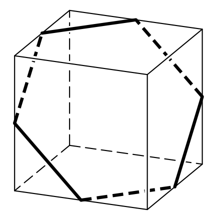


Рис. 58

окружность большего радиуса в куб поместить нельзя. Прежде всего заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением окружностей с центром в центре куба. Действительно, если окружность радиуса R содержится в кубе, то окружность, симметричная ей относительно центра куба, тоже содержится в кубе. Но тогда из выпуклости куба следует, что окружность радиуса R, центр которой совпадает с центром куба, лежащая в плоскости, параллельной плоскости исходной окружности, тоже содержится в кубе.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в центре куба и шар того же радиуса и с тем же центром. Нас интересует лишь случай, когда $R > a/2$ и рассматриваемая окружность лежит внутри куба. В этом случае вне куба находятся шесть шаровых сегментов. Радиусы окружностей, лежащих в их основаниях, равны $r = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$, поэтому r возрастает при возрастании R. Рассмотрим конусы, вершины которых находятся в центре куба, а основаниями служат окружности оснований шаровых сегментов. Если плоскость Π, содержащая рассматриваемую окружность, пересекает один из этих конусов, то часть окружности проходит по шаровому сегменту, а потому частично лежит вне куба. Таким образом, нужно доказать, что если $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$, то плоскость Π пересекает один из конусов. Плоскость Π разбивает лучи, выходящие из центра куба и направленные в центры граней, на две тройки (каждая тройка лежит по одну сторону от плоскости Π). Рассмотрим плоскость Π', которая проходит через центр куба перпендикулярно одной из диагоналей и разбивает эти лучи на те же самые две тройки.

В плоскости Π' есть окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, целиком лежащая внутри куба. Рассмотрим конусы, соответствующие окружности такого радиуса. Для них $r = \frac{a}{2\sqrt{2}}$, поэтому, как легко проверить, плоскость Π' касается трёх конусов (соответствующих тройке лучей, которые являются осями этих конусов) по трём лучам OX, OY, OZ (на рис. 59 изображено сечение одной из граней плоскостью Π' и конусом; сечение конусом — окружность радиуса $r=\frac{a}{2\sqrt{2}}$).

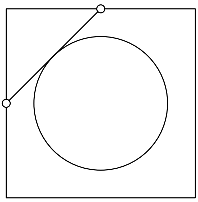


Рис. 59

Лучи OX, OY, OZ лежат строго внутри конусов, соответствующих окружности радиуса $R>\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Значит, эти лучи лежат по одну сторону от плоскости Π, поскольку оси соответствующих конусов лежат по одну сторону от этой плоскости. Плоскости Π и Π' имеют общую точку (центр куба), поэтому они пересекаются по некоторой прямой. Лучи OX, OY и OZ образуют друг с другом углы в 120°, поэтому никакая прямая не может разделить плоскость Π' так, чтобы эти лучи лежали в одной полуплоскости. Таким образом, плоскость Π' пересекает один из конусов, если $R>\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

3. Уравнения $|x|+|y|=0$, $|x|+|y|=1$, $|x|+|y|=2$, ..., $|x|+|y|=99$ имеют соответственно 1, 4, $4\cdot 2$, $4\cdot 3$, ..., $4\cdot 99$ целочисленных решений. Поэтому искомое число равно $1+4(1+2+3+\ldots+99)=1+4\frac{99\cdot 100}{2}=19801$.

К о м м е н т а р и й. Число решений можно также найти, воспользовавшись формулой Пика для квадрата $|x|+|y|\leqslant 100$.

4. Будем рассматривать вместо лучей векторы. Можно считать, что первый вектор имеет координаты $(1, 0, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_i<0$. Можно считать, что второй вектор имеет координаты $(x_2, 1, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_2x_i+y_i<0$. Числа x_2 и x_i отрицательные, поэтому $x_2x_i>0$, а значит, $y_i<0$. При $i, j>2$ имеет место неравенство $x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j<0$. Но $x_ix_j>0$ и $y_iy_j>0$, поэтому $z_iz_j<0$, т. е. числа z_i и z_j разного знака. Таких чисел не может быть больше двух. Поэтому помимо векторов $(1, 0, 0)$ и $(x_2, 1, 0)$ может быть ещё только два вектора.

Пример четвёрки лучей, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы, дают лучи, идущие из центра правильного тетраэдра в его вершины.

1949 год (XII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Заметим, что $26460=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7^2$. Представим число $A=27195^8-10887^8+10152^8$ в виде

$$27195^8-(10887^8-10152^8).$$

Это число делится на $5\cdot7^2$. Действительно,

$$27195=3\cdot5\cdot7^2\cdot37,$$

а разность $10887^8-10152^8$ делится на

$$10887-10152=735=3\cdot5\cdot7^2.$$

С другой стороны, представление

$$A=(27195^8-10887^8)+10152^8$$

показывает, что число A делится на $2^2\cdot3^3$. Действительно, $27195^8-10887^8$ делится на

$$27195-10887=16308=2^2\cdot3^3\cdot151,$$

а $10152=2^3\cdot3^3\cdot47$. Таким образом, число A делится на $5\cdot7^2$ и на $2^2\cdot3^3$, поэтому оно делится на $26460=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7^2$.

2. Любая ось симметрии многоугольника проходит через его центр масс (центр масс вершин многоугольника, в которые помещены одинаковые массы). Действительно, при симметрии относительно оси симметрии центр масс переходит сам в себя.

3. Предположим, что $x=2^mx_1$, $y=2^ny_1$, $z=2^kz_1$, где числа x_1, y_1, z_1 нечётны. Можно считать, что $m\leqslant n\leqslant k$. Тогда обе части уравнения можно сократить на $(2^m)^2$. В результате получим

$$x_1^2 + 2^{2(n-m)}y_1^2 + 2^{2(k-m)}z_1^2 = 2^{n+k-m+1}x_1y_1z_1,$$

где $n+k-m+1 \geqslant 1$.

Если $m=n=k$, то в левой части стоит нечётное число, а в правой чётное. Предположим теперь, что $k>m$. Квадрат нечётного числа при делении на 4 даёт остаток 1, поэтому при делении на 4 число в левой части даёт остаток 1 или 2, а число в правой части — остаток 0. Получено противоречие.

4. Возьмём на ломаной две точки A и B, делящие её периметр пополам. Тогда $AB \leqslant 1/2$. Докажем, что все точки ломаной лежат внутри круга радиуса $1/4$ в центром в точке O — середине отрезка AB. Пусть M — произвольная точка ломаной, а точка M_1 симметрична ей относительно точки O. Тогда $MO = \frac{M_1M}{2} \leqslant \frac{M_1A+AM}{2} = \frac{BM+AM}{2} \leqslant \frac{1}{4}$, так как $BM+AM$ не превосходит половины длины ломаной.

5. Пусть продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M; O — центр вписанной окружности, O_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC (рис. 60). Достаточно доказать, что $MO=MO_b$. Так как

$$\angle AOM = \angle BAO + \angle ABO = \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

и

$$\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = \\ = \frac{\angle A}{2} + \angle CBM = \frac{\angle A + \angle B}{2},$$

то $MA = MO$. Лучи AO и AO_b яв-

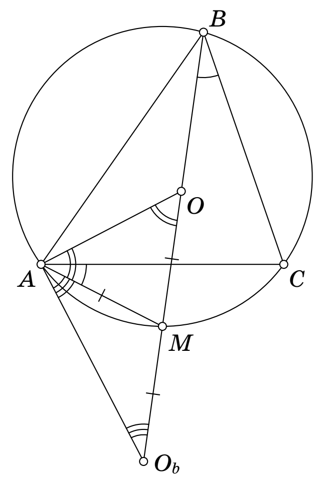


Рис. 60

ляются биссектрисами углов, составляющих в сумме 180°, поэтому треугольник OAO_b прямоугольный. Кроме того, как мы только что доказали, $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$. Следовательно, $\angle MAO_b = \angle MO_bA = 90^\circ - \varphi$, а значит, $MA = MO_b$.

9—10 класс

1. Число $x^2+y^2+z^2+v^2$ чётно, поэтому среди чисел x, y, z, v чётное число нечётных чисел. Легко проверить, что квадрат нечётного числа при делении на 4 даёт остаток 1.

Если все числа x, y, z, v нечётны, то $x^2+y^2+z^2+v^2 \equiv 0 \pmod 4$, но при этом $2xyzv$ не делится на 4.

Если ровно два из чисел x, y, z, v нечётны, то $x^2+y^2+ +z^2+v^2$ не делится на 4, а $2xyzv$ делится на 4.

Поэтому все числа x, y, z, v чётны, т. е. $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$, $v=2v_1$. Мы получаем уравнение $x_1^2+y_1^2+z_1^2+v_1^2= =8x_1y_1z_1v_1$. Теперь заметим, что $(2k+1)^2=4k(k+1)+1\equiv 1 \pmod 8$. Поэтому если все числа x_1, y_1, z_1, v_1 нечётны, то $x_1^2+y_1^2+z_1^2+v_1^2$ не делится на 8. А если ровно два из этих чисел нечётны, то $x_1^2+y_1^2+z_1^2+v_1^2$ не делится даже на 4. Значит, $x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$, $z_1=2z_2$, $v_1=2v_2$, и мы получаем уравнение $x_2^2+y_2^2+z_2^2+v_2^2=32x_2y_2z_2v_2$. Снова повторив те же самые рассуждения, получим, что x, y, z, v делятся на 2^n при всех n. Следовательно, $x=y=z=v=0$.

2. Оси вращения ограниченного тела пересекаются в его центре масс. Докажем, что если тело имеет две оси вращения, пересекающиеся в точке O, и точка A принадлежит телу, то телу принадлежит вся сфера радиуса OA с центром O. Предположим противное, т. е. что сфера содержит как точки, принадлежащие телу, так и точки, не принадлежащие ему. Тогда на этой сфере есть также граничные точки тела, т. е. такие точки, что в любом шаре с центром в этой точке есть как точки, принадлежащие телу, так и не принадлежащие ему. Пусть M — (непустое) множество граничных точек на сфере и x — произвольная точка этого множества. Проведём через точку x две окружности, лежащие на сфере: одну с центром на первой оси вращения и лежащую в плоскости, перпендикулярной первой оси вращения, а другую с центром на второй оси вращения и лежащую в плоскости, перпендикулярной второй оси. Несложно убедиться, что если эти две окружности не касаются друг друга в точке x, то x не может быть граничной точкой. Поэтому точка x принадлежит плоскости, содержащей обе оси вращения. Тогда множество M целиком содержится в этой плоскости. Но множество M переходит в себя при любом повороте вокруг любой из осей. Получено противоречие, поэтому множество M пусто, а значит, вся сфера принадлежит данному телу.

Таким образом, плоскостью симметрии является любая плоскость, проходящая через точку O. Ясно также, что любая плоскость симметрии ограниченного тела проходит через его центр масс.

3. Пусть $f(x)=x^2+2ax+\frac{1}{16}=(x+a)^2-a^2+\frac{1}{16}$ — левая часть данного уравнения. График функции $y=f(x)$ представляет собой параболу. Если $0<a<1/4$, то $f(x)>0$. Поэтому исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a\pm\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}. \qquad (1)$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой обратную функцию $f^{-1}(x)$. В самом деле, если $y^2+2ay+\frac{1}{16}=x$, то $y=-a\pm\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$.

Докажем, что исходное уравнение равносильно уравнению $f(x)=x$. Ясно, что любое решение уравнения $f(x)=x$ является решением исходного уравнения, поскольку исходное уравнение можно переписать в виде $f(x)=f^{-1}(x)$. Пусть теперь x_0 — решение исходного уравнения. Из положительности правой части получаем, что $x_0>0$. Но на интервале $[0, +\infty)$ при $a>0$ функция $y=f(x)$ монотонно возрастает. Поэтому если $f(x_0) \neq x_0$, то $f(x_0) > x_0 > f^{-1}(x_0)$, что противоречит исходному уравнению. Значит, $f(x_0) = x_0$. Таким образом, действительные корни данного уравнения являются в точности действительными корнями уравнения

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x.$$

Решив это уравнение, находим

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $x_{1,2} > 0$ при $0 < a < 1/4$, поэтому найденные корни будут решениями исходного уравнения.

4. Покажем, что среди данных чисел не может быть больше четырёх попарно различных чисел. Объединим равные числа в группы, выберем в каждой группе по одному числу и расположим выбранные числа в порядке убывания: $a > b > c > d > e > \ldots$ Числа a, b, c, d по условию образуют геометрическую прогрессию. Поэтому произведение двух из них равно произведению двух других, т. е. $ab = cd$, $ac = bd$ или $ad = bc$. Но $ab > cd$ и $ac > bd$, поэтому $ad = bc$, т. е. $d = bc/a$. Те же самые рассуждения показывают, что $e = bc/a$.

Таким образом, есть не более четырёх групп, состоящих из равных чисел, поэтому по крайней мере в одну из этих групп входит не менее n чисел.

5. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, удовлетворяющий условию задачи. Четырёхугольник $FBCE$ является равнобокой трапецией (или прямоугольником), поэтому прямая MM_1, соединяющая середины её оснований, перпендикулярна к ним и служит биссектрисой угла между диагоналями BE и FC. Точно так же доказываются аналогичные свойства прямых NN_1 и LL_1, соединяющих середины противоположных сторон шестиугольника. Эти три прямые (в невырожденном случае) являются биссектрисами углов треугольника, образованного диагоналями, поэтому они пересекаются в одной точке O. Точка O равноудалена от всех вершин шестиугольника, поскольку она лежит на всех серединных перпендикулярах к сторонам шестиугольника. Значит, вокруг шестиугольника можно описать окружность с центром O.

Второй тур

7—8 класс

1. Сделаем копии 12 полей и расположим их по кругу в следующем порядке: 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, 8. Рис. 61 показывает, что на новом круге фишки перехо-

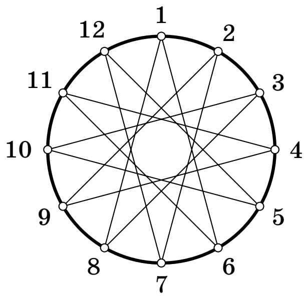


Рис. 61

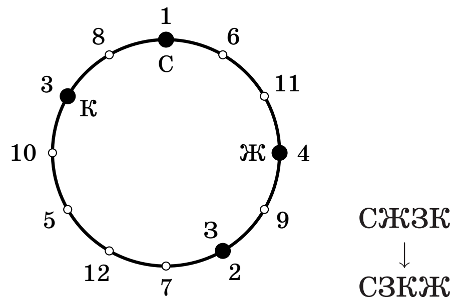


Рис. 62

дят просто на соседнее поле (справа или слева). Поэтому любое передвижение, при котором фишки меняются местами, представляет собой перемещение по новому кругу в одном направлении. На круге с четырьмя полями с номерами 1, 4, 2, 3 (рис. 62) происходит циклическая перестановка, поэтому из набора КСЖЗ мы получаем наборы СЖЗК, ЖЗКС, ЗКСЖ. Вернувшись к исходной нумерации 1, 2, 3, 4, получим наборы СЗКЖ, ЖКСЗ, ЗСЖК.

2. Решим задачу в более общем виде, когда вместо двух треугольников взяты выпуклые n_1-угольник и n_2-угольник. Сначала докажем, что полученная фигура выпукла. Пусть A_1 и A_2 — точки этой фигуры. Тогда существуют параллелограммы $OB_1A_1C_1$ и $OB_2A_2C_2$ с вершинами B_1 и B_2, принадлежащими n_1-угольнику, и вершинами C_1 и C_2, принадлежащими n_2-угольнику. Покажем, что если мы построим соответствующие точки для всех пар точек отрезков B_1B_2 и C_1C_2, то в результате получим параллелограмм со сторонами, параллельными B_1B_2 и C_1C_2, и с диагональю A_1A_2. Для доказательства удобнее рассматривать не вершины параллелограммов, а их центры, т. е. вместо точки A мы будем брать точку A' (рис. 63); при этом фигура заменяется на гомотетичную ей с центром в точке O. На рис. 64 центры параллелограммов соответствуют серединам отрезков, соединяющих точки отрезка B_1B_2 с точками отрезка C_1C_2; они заметают заштрихованный пареллелограмм. В частности, мы получаем, что отрезок A_1A_2 принадлежит полученной фигуре, поэтому она выпукла.

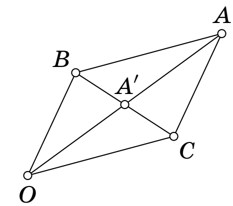


Рис. 63

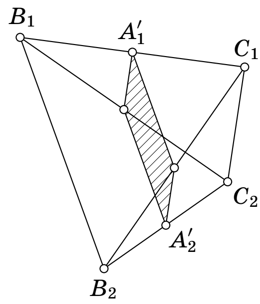


Рис. 64

Возьмём на плоскости произвольную ось координат Ox. *Опорным множеством* многоугольника, соответствующим оси Ox, назовём множество точек многоугольника, проекции которых на ось Ox имеют наибольшее значение (опорное множество — это вершина или сторона многоугольника). Выпуклый многоугольник задаётся своими опорными множествами для всех возможных осей Ox. Если опорными множествами исходных n_1-угольника и n_2-угольника являются отрезки длины a_1 и a_2, то опорным множеством полученной фигуры будет отрезок длины $a_1 + a_2$. Тем самым, утверждение про периметр доказано. Число сторон полученного многоугольника может быть любым числом, заключённым между $n_1 + n_2$ и наибольшим из чисел n_1 и n_2. Оно равно $n_1 + n_2$ лишь в том случае, когда для любой оси Ox одно из опорных множеств исходных многоугольников имеет нулевую длину, т. е. все векторы единичных внешних нормалей для данных многоугольников различны. Если какие-то векторы внешних нормалей у данных многоугольников совпадают, то число сторон полученного многоугольника уменьшается.

Комментарий. Многоугольник, который заметают середины отрезков, соединяющих точки двух данных многоугольников, называют *суммой Минковского* этих многоугольников. Сумма Минковского играет важную роль в геометрии выпуклых фигур.

3. Сначала докажем, что все гири весят либо чётное, либо нечётное число граммов. Пусть 12 гирь разложены на две чашки весов по 6 гирь так, что наступило равновесие. Предположим, что отложена гиря весом a г, а одна из гирь, лежащих на чашках, весит b г, причём числа a и b разной чётности. Заменим гирю a гирей b и снова разложим гири так, чтобы наступило равновесие. Если вес остальных гирь равен x, то сначала вес гирь на каждой чашке был равен $\frac{x+b}{2}$, а затем он стал равен $\frac{x+a}{2}$. Таким образом, вес гирь на каждой чашке весов изменился на $\frac{1}{2}|a-b|$, а согласно предположению это число не целое. Получено противоречие, поэтому число $|a-b|$ чётно.

Предположим, что не все гири одинаковые. Вычтем из каждой гири вес наименьшей гири. В результате получим набор гирь, который снова удовлетворяют условию задачи (по крайней мере одна из полученных гирь имеет нулевой вес). Все новые гири имеют чётный вес, строго меньший веса первоначальных гирь. Поделив вес каждой гири пополам (в том числе и гири с нулевым весом), мы снова получим набор гирь, удовлетворяющий условию задачи. Если при этом мы не получили гири нечётного веса, то снова поделим веса всех гирь пополам и т. д. В конце концов получим набор гирь, который удовлетворяет условию задачи и в котором есть как гири чётного (нулевого) веса, так и гири нечётного веса. Но мы уже доказали, что такого быть не может.

Комментарий. Утверждение задачи остаётся верным и без предположения о том, что каждая гиря весит целое число граммов. В таком виде эта задача сводится к предыдущей следующим образом. Рассмотрим линейное пространство над полем рациональных чисел, порождённое данными числами, и выберем в нём базис. Разложим данные числа по этому базису. Тогда для каждой координаты мы получим предыдующую задачу (после домножения рациональных координат на наименьшее общее кратное их знаменателей).

4. Точкой пересечения медиан каждого из рассматриваемых треугольников служит центр масс шестиугольника (т. е. центр масс шести вершин шестиугольника, в которые помещены одинаковые массы). Действительно, сгруппируем массы, расположенные в вершинах шестиугольника $ABCDEF$. Сначала рассмотрим центры масс для пар точек (A, B), (C, D) и (E, F). Эти центры масс — вершины первого треугольника, поэтому центр масс шестиугольника совпадает с центром масс первого треугольника. Затем рассмотрим центры масс для пар точек (B, C), (D, E) и (F, A). Эти центры масс — вершины второго треугольника. Поэтому центр масс шестиугольника совпадает с центром масс второго треугольника.

5. Пусть $a_1, \ldots, a_{100}$ — данные числа. Рассмотрим суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. Если какая-либо сумма S_k делится на 100, то эта сумма искомая. Если же ни одна из этих сумм не делится на 100, то числа $S_1, \ldots, S_{100}$ дают не более 99 различных остатков при делении на 100. Поэтому найдутся числа S_n и S_m $(n > m)$, дающие одинаковые остатки при делении на 100. Но тогда число $S_n - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$ делится на 100.

6. Пусть $ABCD \ldots YZ$ — указанная замкнутая ломаная, t_A, t_B, ..., t_Z — длины касательных к окружности, прове-

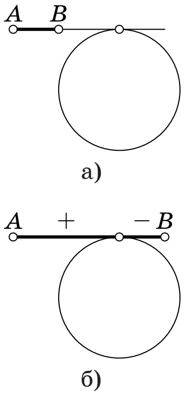


Рис. 65

дённых из вершин ломаной. Легко проверить, что в соответствии с соглашением о знаках алгебраическая длина участка пути от A к B равна $t_A - t_B$. Для этого нужно рассмотреть два случая: точки A и B могут быть расположены по одну сторону от точки касания (рис. 65, а) и по разные стороны от точки касания (рис. 65, б). Таким образом, алгебраическая сумма длин участков пути с указанными знаками равна

$$(t_A - t_B) + (t_B - t_C) + \ldots$$
$$\ldots + (t_Y - t_Z) + (t_Z - t_A) = 0.$$

9—10 класс

1. См. решение задачи 1 для 7—8 классов.

2. Разрежем куб на 8 кубиков. Возьмём один из этих кубиков и приложим к нему три соседних кубика. Куб можно составить из двух таких (невыпуклых) фигур, каждая из которых составлена из четырёх кубиков (рис. 66). Возьмём одну из этих фигур и отрежем от неё три ребра исходного куба, проведя три плоскости, проходящие через диагонали граней маленьких кубиков параллельно

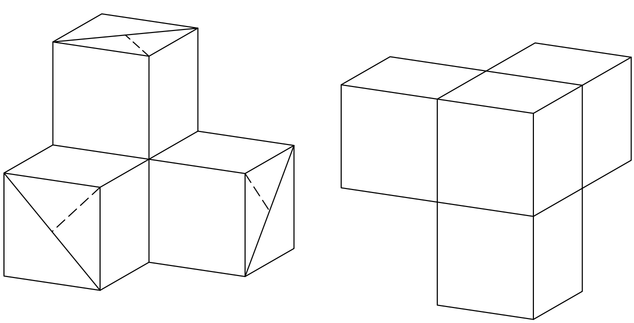


Рис. 66

рёбрам исходного куба; на рис. 66 эти диагонали изображены сплошными линиями. (Вместе с рёбрами мы отрезаем три треугольные призмы; эти призмы пересекаются.) В результате получим невыпуклую фигуру, которую легко можно разрезать на три кирпичика; разрезы нужно провести по пунктирным линиям на рис. 66. Из двух таких фигур составляется выпуклая фигура, которая получается при отрезании от исходного куба шести рёбер (точнее говоря, шести пересекающихся призм).

3. См. решение задачи 3 для 7—8 классов.

4. Пусть O — центр симметрии многоугольника M, расположенного внутри треугольника T, $S(T)$ — образ треугольника T при симметрии относительно точки O. Тогда M лежит и в T, и в $S(T)$. Поэтому среди всех центрально-симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в T, наибольшую площадь имеет пересечение T и $S(T)$. Точка O лежит внутри треугольника T, так как пересечением T и $S(T)$ является выпуклый многоугольник, а выпуклый многоугольник всегда содержит свой центр симметрии.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника $T = ABC$. Предположим сначала, что точка O лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда пересечением T и $S(T)$ является шестиугольник. Пусть сторона AB делится двумя сторонами треугольника $S(T)$ в отношении $x:y:z$, где $x+y+z=1$. Тогда отношение суммы площадей треугольников, прилегающих к вершинам A, B, C, к площади треугольника ABC равно $x^2+y^2+z^2$ (поскольку каждый из этих треугольников подобен треугольнику ABC); нужно минимизировать это выражение. Так как $1=(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2)-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2$, то $x^2+y^2+z^2 \geqslant 1/3$, причём равенство достигается только при $x=y=z$; последнее равенство означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Рассмотрим теперь другой случай: точка O лежит внутри одного из треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, например внутри AB_1C_1. В этом случае пересечением T и $S(T)$ является параллелограмм, причём если мы заменим точку O точкой пересечения прямых AO и B_1C_1, то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. Если же точка O лежит на стороне B_1C_1, то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить $x=0$).

Искомым многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна 2/3 площади треугольника.

5. Пусть A — данное натуральное число. Покажем, что натуральное число n можно выбрать так, что $10^m A < 2^n < 10^m(A+1)$ для некоторого натурального m, т. е. $m + \lg A < n \lg 2 < m + \lg(A+1)$. Эквивалентное условие таково: существуют натуральные числа m и n, для которых $\lg A < n \lg 2 - m < \lg(A+1)$. Число $\lg 2$ иррационально. Действительно, предположим, что $\lg 2 = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда $10^{p/q} = 2$, т. е. $10^p = 2^q$. Этого не может быть.

Пусть $\alpha = \lg 2$, $a = \lg A$ и $b = \lg(A+1)$. Положим $\Delta = b - a$. Легко проверить, что $0 < \Delta < \alpha < 1$. Для каждого натурального числа n можно выбрать натуральное число m так, что $0 \leqslant n\alpha - m \leqslant 1$. Для $n = 1, 2, \ldots$ получаем числа $\alpha - m_1$, $2\alpha - m_2$, ... Разделим отрезок $[0, 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше Δ. Пусть количество этих отрезков равно k. Тогда среди чисел $\alpha - m_1$, $2\alpha - m_2$, ..., $(k+1)\alpha - m_{k+1}$ есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Вычтем из большего числа меньшее: $p\alpha - m_p - (q\alpha - m_q) = t$. Ясно, что $0 \leqslant t < \Delta$. Более того, $t \neq 0$, поскольку иначе $\alpha = \dfrac{m_p - m_q}{p - q}$ — рациональное число. Ясно также, что $t = s\alpha - r$, где s и r — целые числа. Предположим сначала, что число s натуральное; тогда число r тоже натуральное (действительно, из неравенства $s\alpha - r < \alpha$ следует, что $r > (s-1)\alpha \geqslant 0$). Рассмотрим числа вида Nt, где N — натуральное число. Каждое из этих чисел имеет вид $n\alpha - m$, где числа n и m натуральные. А из того, что $0 < t < \Delta$, следует, что хотя бы одно из этих чисел расположено строго между a и b.

Предположим теперь, что мы получили число $t = s\alpha - r$, где s и r — отрицательные числа. Те же самые рассуждения, что и раньше, показывают, что существует такое число $t_1 = s_1\alpha - r_1$, что $0 < t_1 < t$, причём s_1 и r_1 — целые числа; более того, таких чисел бесконечно много. Если хотя бы для одного из этих чисел $s_1 > 0$, то доказательство завершено. В противном случае найдётся число $t_1 = s_1\alpha - r_1$, для которого $s_1 < s < 0$. Рассмотрим число $t' = t - t_1 = s'\alpha - r'$. Ясно, что $s' > s - s_1 > 0$ и $0 < t' < t$. Поэтому мы получаем число, обладающее требуемыми свойствами.

К о м м е н т а р и й. Более подробно о решении этой задачи можно прочитать в статье [1].

6. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат, $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат с тем же центром, стороны которого параллельны сторонам исходного квадрата и имеют вдвое большую длину. Для определённости будем считать, что сторона исходного квадрата равна 2. Тогда периметр квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равен 16. Поэтому достаточно доказать, что длина части периметра квадрата $A_1B_1C_1D_1$, высекаемой приложенным квадратом, не может быть меньше 2. Если сторона приложенного квадрата имеет общий отрезок со стороной исходного квадрата, то он высекает либо отрезок длины 2, либо два отрезка длины 1, образующих прямой угол, и ещё какой-то отрезок на продолжении одного из этих отрезков. В дальнейшем будем считать, что у приложенного квадрата и исходного нет общих отрезков (они имеют только одну общую точку). Рассмотрим два возможных случая расположения исходного квадрата $ABCD$ и приложенного к нему квадрата: I) вершина приложенного квадрата попадает на границу исходного; II) вершина исходного квадрата лежит внутри стороны приложенного. Разберём сначала случай I. Рассмотрим два возможных варианта расположения квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и приложенного квадрата.

1. Ни одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ не попадает внутрь приложенного квадрата. В этом случае рассматриваемая часть периметра является некоторым отрезком PQ. Пусть α — угол между стороной исходного квадрата и стороной приложенного квадрата. Если $30^\circ < \alpha < 60^\circ$, то внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежит только одна вершина приложенного квадрата (та, которая примыкает к исходному квадрату); в этом случае длина отрезка PQ равна $\operatorname{tg}\alpha + 1/\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2$. Если $\alpha < 30^\circ$ или $\alpha > 60^\circ$, то внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежат две вершины приложенного квадрата; в этом случае отрезок PQ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетом 2.

2. Одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ попадает внутрь приложенного квадрата. Тогда длина рассматриваемой части периметра равна $a + \operatorname{tg}\alpha + 1 - a\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 67). Требуется доказать, что $a + \operatorname{tg}\alpha + 1 - a\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2$, т. е. $(a-1)\operatorname{tg}\alpha \leqslant (a-1)$. Но $a \geqslant 1$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1$.

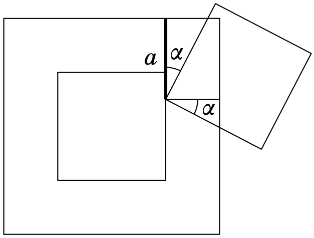


Рис. 67

Тем самым, случай I полностью разобран. Рассмотрим теперь случай II. Здесь возможны следующие два варианта расположения.

3. Сторона приложенного квадрата, содержащая вершину исходного, не пересекает границу квадрата $A_1B_1C_1D_1$. В этом случае рассматриваемая часть периметра представляет собой ломаную, соединяющую противоположные стороны приложенного квадрата. Её длина не меньше, чем расстояние между этими противоположными сторонами, т. е. не меньше 2.

4. Сторона приложенного квадрата, содержащая вершину исходного, пересекает также и границу квадрата $A_1B_1C_1D_1$. В этом случае приложенный квадрат можно сдвинуть параллельно этой стороне так, чтобы вершина приложенного квадрата совпала с вершиной исходного, а рассматриваемая часть периметра не увеличилась (рис. 68). Тем самым, этот случай сводится к уже разобранному случаю I.

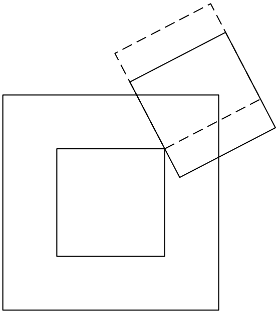


Рис. 68

1950 год (XIII олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Если окружность не пересекает границы клеток (т. е. либо не имеет с ними общих точек, либо касается их), то эта окружность целиком лежит внутри одной клетки, поэтому её радиус не превосходит $1/2$. Ниже будут приведены примеры окружностей большего радиуса, целиком лежащих на чёрном. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемая окружность пересекает границу хотя бы одной клетки. Окружность S, целиком лежащая на чёрном, может пересекать границу клетки только в вершине (иначе она частично лежала бы на белом). Пусть окружность S проходит через две вершины A и B чёрной клетки. Рассмотрим сначала случай, когда вершины A и B соседние. Возьмём вершину A и рассмотрим другую чёрную клетку с вершиной A. Окружность S проходит либо через соседнюю (а именно, ту, которая не лежит на прямой AB), либо через противоположную вершину этой клетки. В первом случае радиус окружности S равен $\sqrt{2}/2$, а во втором — $\sqrt{10}/2$. Рассмотрим теперь случай, когда вершины A и B противоположные. Снова возьмём вершину A и рассмотрим другую чёрную клетку с вершиной A. Теперь окружность S обязательно проходит через соседнюю с A вершину другой клетки (если бы она проходила через противоположную вершину, то мы получили бы прямую, а не окружность). Радиус такой окружности равен $\sqrt{10}/2$. В итоге получаем, что наибольший радиус имеет следующая окружность S. Возьмём чёрную клетку и рассмотрим прилегающие к ней белые клетки. Окружность S проходит через 8 вершин этих белых клеток, отличных от вершин исходной чёрной клетки (рис. 69).

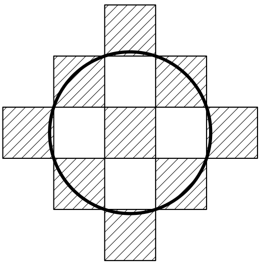


Рис. 69

2. Девять гирь весом n, $n+1$, ..., $n+8$ можно разложить на три равные по весу кучи: 1) n, $n+4$, $n+8$; 2) $n+1$, $n+5$, $n+6$; 3) $n+2$, $n+3$, $n+7$. Это позволяет разложить на три равные по весу кучи гири весом 1, 2, ..., $549=61\cdot 9$. Оставшиеся шесть гирь весом 550, 551, ..., 555 можно разложить на три равные по весу кучи следующим образом: 1) 550 и 555; 2) 551 и 554; 3) 552 и 553.

3. Чтобы не разбирать разные варианты расположения окружностей, воспользуемся свойствами ориентированного угла между прямыми. Будем обозначать через $\angle(AB, CD)$ ориентированный угол между прямыми AB и CD. Тогда $\angle(A_3O, A_3B_1)+\angle(A_3B_3, A_3O)=\angle(A_1O, A_1B_1)+$ $+\angle(A_2B_3, A_2O)=\angle(A_1O, A_1B_2)+\angle(A_2B_2, A_2O)=0^\circ$, поэтому точки A_3, B_1 и B_3 лежат на одной прямой. Значит, $B_4=B_1$.

4. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, поэтому

$$(A-B)(a-b)\geqslant 0, \quad (B-C)(b-c)\geqslant 0, \quad (C-A)(c-a)\geqslant 0.$$

Сложив эти неравенства, получаем требуемое.

5. Пусть v — скорость пешехода, V — скорость машины, T — время ожидания машины. (Скорость будем измерять в км/час, а время — в часах.) Если идти пешком, то на дорогу в 1, 2 и 3 км понадобится соответственно $\frac{1}{v}$, $\frac{2}{v}$ и $\frac{3}{v}$ часов, а если ехать на машине, то $T+\frac{1}{V}$, $T+\frac{2}{V}$ и $T+\frac{3}{V}$ часов. Предположим, что 2 км не медленнее пройти пешком, чем ехать на машине, т. е. $T+\frac{2}{V}\geqslant\frac{2}{v}$. Тогда $T+\frac{1}{V}\geqslant\frac{T}{2}+\frac{1}{V}\geqslant\frac{1}{v}$, т. е. 1 км тем более можно пройти пешком. Но если можно пройти пешком 1 км и 2 км, то тогда затраченное на 2 км время ровно в 2 раза больше, чем затраченное на 1 км, а по условию это не так. Поэтому $T+\frac{2}{V}<\frac{2}{v}$, а значит, $T+\frac{3}{V}\leqslant\frac{3}{2}\left(T+\frac{2}{V}\right)<\frac{3}{v}$ и $T+\frac{6}{V}\leqslant 3\left(T+\frac{2}{V}\right)<3\cdot\frac{2}{v}=\frac{6}{v}$. Поэтому 6 км (так же, как и 2 км, и 3 км) быстрее можно проехать на машине. Тогда на дорогу понадобится

$$T+\frac{6}{V}=4\left(T+\frac{3}{V}\right)-3\left(T+\frac{2}{V}\right)=4\cdot 17\frac{1}{2}-3\cdot 15=25 \text{ мин.}$$

9—10 класс

1. По условию $\cos B\cos C>0$. Кроме того,

$$\sin B\sin C+\cos B\cos C=\cos(B-C)\leqslant 1$$

и $\cos A\leqslant 1$. Поэтому

$$\sin B\sin C\leqslant 1-\cos B\cos C\leqslant 1-\cos A\cos B\cos C$$

и, так как по условию $\sin B\sin C>0$,

$$0<\frac{\sin B\sin C}{1-\cos A\cos B\cos C}\leqslant 1.$$

2. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду с основанием BCD и вершиной A. Пусть длина стороны основания равна ε, а длина бокового ребра равна 1. Возьмём на стороне AD такую точку D', что $AD'=\varepsilon$. Если ε мало, то сумма длин рёбер пирамиды $ABCD$ близка к 3, а сумма длин рёбер пирамиды $ABCD'$ близка к 4. Основание ABC у этих двух пирамид общее.

Комментарий. Можно доказать, что сумма рёбер внутренней пирамиды не превосходит 4/3 суммы рёбер внешней пирамиды. Обсуждение разных доказательств этого факта содержится в статье [10].

3. Разложим девять гирь весом n^2, $(n+1)^2$, ..., $(n+8)^2$ на три кучи следующим образом: 1) n^2, $(n+5)^2$, $(n+7)^2$; 2) $(n+1)^2$, $(n+3)^2$, $(n+8)^2$; 3) $(n+2)^2$, $(n+4)^2$, $(n+6)^2$. Первые две кучи весят одинаково, а вес третьей кучи на 18 г меньше. Поэтому 27 гирь весом n^2, $(n+1)^2$, ..., $(n+26)^2$ можно разложить на 9 куч следующего веса: x, x, $x-18$, y, y, $y-18$, z, z, $z-18$. Из этих девяти куч можно сложить три кучи весом $x+y+z-18$. Таким образом, $27k$ гирь весом 1^2, 2^2, 3^2, ..., $(27k)^2$ можно разложить на три равные по весу кучи. При $k=3$ получаем требуемое утверждение.

4. Заметим, что

$$x+3-4\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-2)^2,$$
$$x+8-6\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-3)^2.$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1$$

(все квадратные корни мы считаем положительными). Рассмотрим по очереди все возможные случаи.

1. $\sqrt{x-1}-2\geqslant 0$ и $\sqrt{x-1}-3\geqslant 0$, т. е. $x\geqslant 10$. В этом случае уравнение имеет единственное решение $x=10$.

2. $\sqrt{x-1}-2\geqslant 0$ и $\sqrt{x-1}-3\leqslant 0$, т. е. $5\leqslant x\leqslant 10$. В этом случае получаем тождество, т. е. если $5\leqslant x\leqslant 10$, то x является корнем данного уравнения.

3. $\sqrt{x-1}-2\leqslant 0$ и $\sqrt{x-1}-3\leqslant 0$, т. е. $x\leqslant 5$. Уравнение имеет единственное решение $x=5$.

Случай, когда $\sqrt{x-1}-2\leqslant 0$ и $\sqrt{x-1}-3\geqslant 0$, очевидно, невозможен.

5. Чтобы не разбирать разные случаи взаимного расположения окружностей, воспользуемся свойствами ориентируемых углов. Будем обозначать через $\angle(AB, CD)$ ориентированный угол между прямыми AB и CD (он измеряется с точностью до 180°). Тогда

$$\angle(B_nA_n, A_nO) = \angle(B_nA_{n-1}, A_{n-1}O) = \angle(B_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}O).$$

Аналогично получаем

$$\angle(B_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}O) = \angle(B_{n-2}A_{n-2}, A_{n-2}O) = \ldots$$
$$\ldots = \angle(B_1A_1, A_1O).$$

Наконец, $\angle(B_1A_1, A_1O) = \angle(B_1A_n, A_nO)$. В итоге получаем $\angle(B_nA_n, A_nO) = \angle(B_1A_n, A_nO)$. Это означает, что точки A_n, B_1 и B_n лежат на одной прямой. Следовательно, $B_{n+1} = B_n$.

Второй тур

7—8 класс

1. Из каждой вершины исходного 13-угольника выходит не более двух диагоналей, которые являются сторонами рассматриваемого многоугольника. Каждой диагонали соответствуют две вершины, поэтому число сторон рассматриваемого многоугольника не превосходит 13. Пример правильного 13-угольника показывает, что число сторон полученного при разрезании многоугольника может быть равно 13.

Комментарий. Аналогично можно доказать, что для любого нечётного $n \geqslant 5$ наибольшее число сторон, которое может иметь многоугольник, полученный при разрезании выпуклого n-угольника на части его диагоналями, равно n.

2. Пусть $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$ и $B = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99}$. Ясно, что $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$, $\ldots$, $\frac{98}{99} > \frac{97}{98}$, $1 > \frac{99}{100}$. Следовательно, $B > A$. Ясно также, что $AB = \frac{1}{100}$. Поэтому $A^2 < AB = \frac{1}{100}$.

3. Если сторона треугольника содержит сторону квадрата или её часть, то требуемое утверждение легко проверяется. Поэтому в дальнейшем будем считать, что точки касания окружности со сторонами треугольника и со сторонами квадрата различны. Треугольник касается вписанной окружности в трёх точках, а квадрат касается её в четырёх точках. Поэтому между некоторыми двумя точками касания треугольника с окружностью лежат две точки касания квадрата с окружностью. Следовательно, внутри треугольника лежит по крайней мере один «уголок» квадрата (т. е. вершина квадрата вместе с половинами выходящих из неё сторон квадрата). Если таких уголков будет два, то мы сразу получаем, что внутри треугольника лежит по крайней мере половина периметра квадрата. Предположим, что такой уголок только один, т. е. три остальных уголка хотя бы частично лежат вне треугольника (тогда соответствующие вершины квадрата тоже лежат вне треугольника). Покажем, что не менее трети периметра каждого из этих трёх уголков лежит внутри треугольника. Вне треугольника лежит часть уголка, представляющая собой прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Внутри треугольника лежат отрезки $1-a$ и $1-b$ (мы предполагаем, что длина стороны квадрата равна 2). Ясно, что $(1-a)+(1-b)=c$, $a<c$ и $b<c$. Поэтому $a+b<2c=4-2(a+b)$, т. е. $a+b<4/3$. Это означает, что вне треугольника лежит не более $2/3$ периметра уголка. Итак, внутри треугольника лежит фигура, периметр которой меньше $2+3\cdot\frac{2}{3}=4$, а периметр всего квадрата равен 8.

4. Пусть a_n — количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами. Ясно, что $a_1=1$ и $a_2=2$. Покажем, что

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}a_1+a_{n-3}a_2+\ldots+a_1a_{n-2}+a_{n-1}.$$

Фиксируем одну из данных $2n$ точек. Хорда, выходящая из неё, делит окружность на две дуги, причём на каждой дуге расположено чётное число данных точек от 0 до $2n-2$. Если на одной дуге расположено $2k$ точек, то на другой дуге расположено $2(n-k-1)$ точек; эти точки можно соединить непересекающимися хордами (не пересекающими хорду, выходящую из фиксированной точки) $a_{n-k-1}a_k$ способами.

Таким образом, $a_3=a_2+a_1^2+a_2=5$, $a_4=14$, $a_5=42$, $a_6=$ $=132$, $a_7=429$, $a_8=1430$, $a_9=4862$ и $a_{10}=16796$.

Комментарий. Можно доказать, что

$$a_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

Эти числа называют числами Каталана.

9—10 класс

1. Предположим сначала, что из вершины A_1 выходят две диагонали A_1A_p и A_1A_q, ограничивающие полученный многоугольник. Тогда A_p и A_q — соседние вершины, поскольку иначе внутри угла $A_pA_1A_q$ была бы диагональ, исходящая из вершины A_1, разрезающая полученный многоугольник. Изменив при необходимости направление нумерации вершин, можно считать, что $q=p+1$ и $p\leqslant 1950/2=975$. Если исключить диагональ A_1A_{p+1}, то любая другая диагональ, ограничивающая полученный многоугольник, соединяет одну из вершин с номером от 2 до p с некоторой вершиной. Вершин с номерами от 2 до p не более 974, причём из каждой из них выходит не более двух диагоналей, ограничивающих полученный многоугольник. Поэтому всего у полученного многоугольника может быть не более $1+974\cdot 2=1949$ сторон.

Чтобы получить пример 1950-угольника, при разрезании которого получается 1949-угольник, можно взять правильный 1949-угольник и отрезать от него маленький треугольник, т. е. вместо вершины A_1 взять две вершины A_1' и A_{1950}, расположенные на сторонах A_1A_2 и A_1A_{1949} вблизи вершины A_1.

Если же из каждой вершины исходного 1950-угольника выходит не более одной диагонали, ограничивающей полученный многоугольник, то полученный многоугольник может иметь не более $1950/2 = 975$ сторон.

Комментарий. Аналогично можно доказать, что для любого чётного $n \geqslant 4$ наибольшее число сторон, которое может иметь многоугольник, полученный при разрезании выпуклого n-угольника на части его диагоналями, равно $n-1$.

2. Докажем, что любая последовательность из $mn+1$ попарно различных чисел содержит либо возрастающую последовательность из $m+1$ чисел, либо убывающую последовательность из $n+1$ чисел. Сопоставим члену a_k данной последовательности два числа x_k и y_k, где x_k — наибольшая длина возрастающей последовательности, начинающейся с a_k, y_k — наибольшая длина убывающей последовательности, начинающейся с a_k. Предположим, что $x_k \leqslant m$ и $y_k \leqslant n$ для всех k. Тогда количество всех различных пар (x_k, y_k) не превосходит mn. Поэтому $x_k = x_l$ и $y_k = y_l$ для некоторых номеров $k \neq l$. Но этого не может быть. Действительно, пусть для определённости $k < l$. Тогда если $a_k < a_l$, то $x_k > x_l$, а если $a_k > a_l$, то $y_k > y_l$.

3. Пусть сфера касается сторон AB, BC, CA и AD в точках K, L, M и N соответственно. Тогда $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ и $DM = DN$. Поэтому

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} = 1. \qquad (1)$$

Точки A и D лежат по разные стороны от плоскости KLM, поскольку точки A и B, B и C, C и D лежат по разные стороны от этой плоскости.

Рассмотрим точку N', в которой плоскость KLM пересекает прямую DA. Покажем, что

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN'}{AN'} = 1.$$

Для этого рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную плоскости KLM. Точки K, L, M и N' при этом проецируются в одну и ту же точку X. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции точек A, B, C, D. Отношения отрезков, лежащих на одной прямой, при проекции сохраняются, поэтому

$$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN'}{AN'}=\frac{A_1X}{B_1X}\cdot\frac{B_1X}{C_1X}\cdot\frac{C_1X}{D_1X}\cdot\frac{D_1X}{A_1X}=1. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $DN:AN=DN':AN'$. Кроме того, обе точки N и N' лежат на отрезке AD: для точки N это следует непосредственно из её определения, а для точки N' — из того, что точки A и D лежат по разные стороны от плоскости KLM. Поэтому $N=N'$.

4. Проведём 10 попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Пусть маршруты проходят по этим прямым, а остановками служат точки пересечения прямых. Любые 9 маршрутов проходят через все остановки, поскольку через каждую остановку, лежащую на оставшейся прямой, проходит одна из 9 прямых, соответствующих этим маршрутам. Любые 8 маршрутов не проходят через остановку, которая является точкой пересечения оставшихся двух маршрутов.

1951 год (XIV олимпиада)

Первый тур

7—8 класс

1. Если $x\leqslant 0$, то x^{12}, $-x^9$, x^4, $-x\geqslant 0$. Если $0<x<1$, то $x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x)>0$. Если $x\geqslant 1$, то $x^9(x^3-1)+$ $+x(x^3-1)+1>0$.

2. По теореме косинусов $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, поэтому если длины сторон a и b фиксированы, то длина стороны c увеличивается при увеличении угла γ.

Рассмотрим треугольники BAD и $B'A'D'$. По условию $BA=B'A'$, $AD=A'D'$ и $\angle A>\angle A'$. Из этого следует, что

$BD > B'D'$. Рассмотрев теперь треугольники BCD и $B'C'D'$ и воспользовавшись неравенством $BD > B'D'$, получим $\angle C > \angle C'$.

Рассмотрим теперь другие две пары треугольников: ABC и $A'B'C'$, ADC и $A'D'C'$. Если бы имело место неравенство $AC \geqslant A'C'$, то мы получили бы неравенства $\angle B \geqslant \angle B'$ и $\angle D \geqslant \angle D'$. А тогда оказалось бы, что сумма углов четырёхугольника $ABCD$ больше суммы углов четырёхугольника $A'B'C'D'$, чего быть не может. Следовательно, $AC < A'C'$, поэтому $\angle B < \angle B'$ и $\angle D < \angle D'$.

3. Пусть $a = 1{,}00000000004$ и $b = 1{,}00000000002$. Тогда рассматриваемые выражения равны $\frac{1+a}{1+a+a^2}$ и $\frac{1+b}{1+b+b^2}$, причём $a > b$. Остаётся заметить, что

$$\frac{1+b}{1+b+b^2} - \frac{1+a}{1+a+a^2} = \frac{(a-b)(a+b+ab)}{(1+a+a^2)(1+b+b^2)} > 0.$$

4. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (AB и CD — её основания), P — данная точка. Приложим к трапеции $ABCD$ равную ей трапецию $A'B'C'D'$ так, чтобы вершина C' совместилась с вершиной A, а вершина B' — с вершиной D (рис. 70). Одна из этих трапеций получается из другой параллельным переносом на вектор средней линии и симметрией относительно средней линии. Пусть P' — точка трапеции $A'B'C'D'$, соответствующая точке P. Тогда четырёхугольник $PAP'D$ искомый: он вписан в трапецию, одна боковая сторона которой проходит через точку P парал-

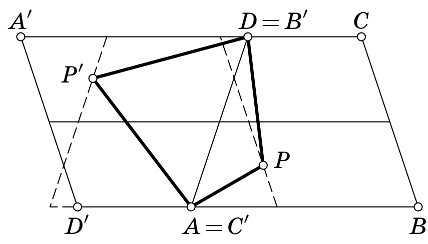


Рис. 70

лельно BC, а другая — через точку P' параллельно AD. Эта трапеция равна исходной трапеции. Действительно, композиция параллельного переноса на вектор средней линии и симметрии относительно средней линии переводит точку P в точку P', поэтому она переводит одну пунктирную линию на рис. 70 в другую.

5. Выясним, при каком наибольшем n достаточно расковать k звеньев n-звенной цепи, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до n. А именно, докажем, что $n = 2^{k+1}(k+1) - 1$. Покажем сначала, как нужно расковывать цепочку длины $n = 2^{k+1}(k+1) - 1$. Её нужно разделить на части, состоящие соответственно из $k+1$, $2(k+1)$, ..., $2^k(k+1)$ звеньев (сами раскованные звенья здесь не учитываются). Тогда, очевидно, можно получить любой вес m от 1 до n: для этого достаточно представить его в виде $m = (2^k a_0 + 2^{k-1} a_1 + \ldots + a_k)(k+1) + r$, где $a_i = 0$ или 1 и $0 \leqslant r \leqslant k$. Докажем теперь, что цепочку длины $n = 2^{k+1}(k+1)$ нельзя расковать требуемым образом. Действительно, предположим, что мы расковали эту цепочку, расковав k звеньев. Тогда мы получим не более $k+1$ части и k отдельных звеньев. Посчитаем, какое максимальное число весов мы можем получить. Каждую из частей цепочки можно либо брать в сумму, либо не брать, а кроме того, можно взять от 0 до k отдельных звеньев. Всего получаем $2^{k+1}(k+1) - 1$ вариантов, потому что мы обязаны взять хотя бы одно звено или одну часть. А всего разных весов от 1 до n получается $2^{k+1}(k+1)$, поэтому мы можем получить заведомо не все веса. Следовательно, максимальное n равно $2^{k+1}(k+1)$. В частности, если $n = 60$, то $k = 3$. Пусть полученные при расковке четыре части цепи состоят из 4, 8, 16 и 29 звеньев. Тогда с помощью частей из 4, 8, 16 звеньев и раскованных звеньев можно составить все веса от 1 до 31, а если использовать последнее звено, то можно составить все веса от 29 до 60. Поэтому достаточно расковать 3 звена.

9—10 класс

1. Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1 \ldots A_n$ со стороной $A_1A_n = a$, обладающий указанным свойством. Если $n \geqslant 4$, то этот n-угольник можно заменить на $(n-1)$-угольник $A_1 \ldots A_{n-3}A'_{n-2}A'_{n-1}$, где $A'_{n-1} = A_n$ и A'_{n-2} — точка пересечения лучей $A_{n-3}A_{n-2}$ и A_nA_{n-1} (эти лучи пересекаются, потому что сумма внешних углов при вершинах A_{n-2} и A_{n-1} меньше 180°). Новый многоугольник имеет строго бо́льшую площадь. Поэтому достаточно рассмотреть случай треугольника. У рассматриваемых треугольников фиксирована сторона $BC = a$ и противолежащий угол $\angle A$ (он равен 60°). Точка A расположена на дуге окружности, из которой отрезок BC виден под углом 60°. Поэтому площадь нашего многоугольника не превосходит площади правильного треугольника.

2. Пусть $a = 0{,}1234\ldots5051$ и $b = 0{,}5150\ldots321$. Требуется доказать, что $0{,}239b \leqslant a < 0{,}24b$. Но $0{,}515 < b < 0{,}516$, поэтому

$$0{,}239b < 0{,}239 \cdot 0{,}516 = 0{,}123324 < a$$

и

$$0{,}24b > 0{,}24 \cdot 0{,}515 = 0{,}1236 > a.$$

3. Чтобы получилась развёртка пирамиды, необходимо, чтобы выполнялись два условия: 1) длины двух сторон звёздчатого многоугольника, выходящих из одной вершины описанного многоугольника, равны; 2) сумма углов звёздчатого многоугольника при вершинах, лежащих на большей окружности, меньше 360°. Первое условие выполняется всегда (это следует из равенства треугольников с общей вершиной в центре окружностей). Посмотрим, когда выполняется второе условие. Сравним угол при вершине, лежащей на большей окружности, с углом, под которым видна соответствующая сторона описанного многоугольника из центра окружности. Эти углы равны, если $r = R - r$. Если $r < R - r$, то первый угол меньше второго, а если $r > R - r$, то первый угол больше второго. Остаётся заметить, что сумма углов, под которыми видны стороны описанного многоугольника из центра окружности, равна 360°.

Докажем теперь, что условие $r < R - r$ является достаточным для того, чтобы получилась развёртка пирамиды. Действительно, в качестве основания этой пирамиды можно взять описанный многоугольник, а в качестве вершины — точку, расположенную на высоте $\sqrt{(R-r)^2 - r^2}$ над общим центром двух окружностей.

4. Согласно решению задачи 5 для 7—8 классов (см. с. 231), если $2^k k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}(k+1) - 1$, то есть надежда обойтись k разрывами и точно нельзя обойтись $k-1$ разрывами. В частности, если $n = 150$, то $k = 4$. Из решения указанной задачи видно, что желательно, чтобы полученные при расковке пять частей цепи состояли из 5, 10, 20, 40 и 71 звеньев. Тогда с помощью частей из 5, 10, 20, 40 звеньев и раскованных звеньев можно составить все веса от 1 до 79, а если использовать последнее звено, то можно составить все веса от 71 до 150. Поэтому достаточно расковать 4 звена.

5. Пусть некоторая прямая пересекает данные прямые в точках O_1, O_2, O_3. Введём на данных прямых координаты x, y, z с началами координат в точках O_1, O_2, O_3 (единица длины одна и та же и направления осей одни и те же). Положим $R = 10^x$ (т. е. точке с координатой x мы сопоставляем сопротивление $R = 10^x$), $V = 10^{2y}$ и $I = 10^z$. Точки с координатами x, y, z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $2y = x + z$, т. е. $10^{2y} = 10^x \cdot 10^z$. Это означает, что $V = I \cdot R$.

Комментарий. Утверждение этой задачи допускает значительное обобщение. Оно остаётся справедливым также для конфигурации, состоящей из трёх непараллельных прямых, и даже из окружности и прямой, т. е. приводимой кривой третьей степени. Его можно обобщить и на произвольную кривую, заданную уравнением третьей степени.

Второй тур

7—8 класс

1. Рассматриваемое число равно $10^{150}+5\cdot 10^{100}+1$. Оно больше $(10^{50}+1)^3=10^{150}+3\cdot 10^{100}+3\cdot 10^{50}+1$, но меньше $(10^{50}+2)^3=10^{150}+6\cdot 10^{100}+12\cdot 10^{50}+8$.

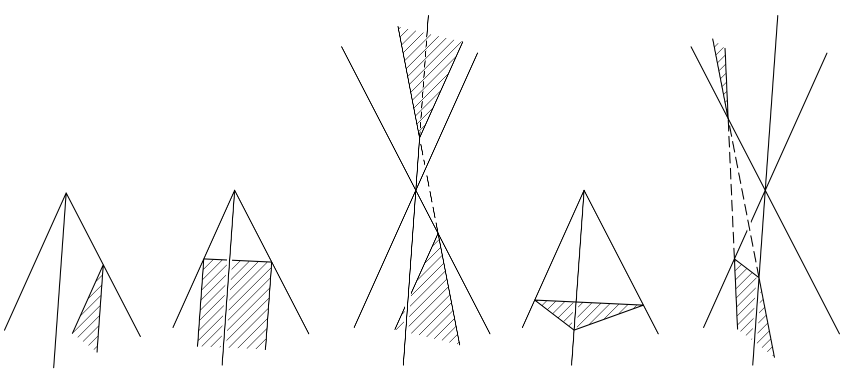
2. Если требуемая точка O существует, то она должны лежать внутри треугольника ABC (если точка O лежит на стороне, то один из углов AOB, BOC, COA развёрнутый, а если она лежит вне треугольника, то сумма этих углов меньше 360°). В таком случае должны выполняться неравенства $\angle D>\angle C$, $\angle E>\angle A$, $\angle F>\angle B$. Мы будем предполагать, что эти неравенства выполняются.

Построим внешним образом на стороне AB треугольника ABC треугольник ABC_1 так, что $\angle C_1AB=180^\circ-\angle E$ и $\angle C_1BA=180^\circ-\angle F$. Аналогично построим точки A_1 и B_1 так, что $\angle A_1BC=180^\circ-\angle F$, $\angle A_1CB=180^\circ-\angle D$, $\angle B_1CA=180^\circ-\angle D$ и $\angle B_1AC=180^\circ-\angle E$. Покажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, причём эта точка — искомая точка O.

Пусть O_1 — отличная от C точка пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C и A_1BC. Тогда $\angle AO_1C=\angle F$ и $\angle BO_1C=\angle E$. Из этого легко выводится, что описанная окружность треугольника ABC_1 тоже проходит через точку O_1 и $\angle AO_1B=D$. Значит, $\angle AO_1B_1=\angle ACB_1=180^\circ-\angle D=\angle BCA_1=\angle BO_1A_1$. Аналогично $\angle BO_1C_1=180^\circ-\angle E=\angle CO_1B_1$ и $\angle CO_1A_1=180^\circ-\angle F=\angle AO_1C_1$, причём сумма углов $180^\circ-\angle D$, $180^\circ-\angle E$ и $180^\circ-\angle F$ равна 180°. Поэтому прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O_1. Уже проведённые вычисления углов показывают, что O_1 — это искомая точка O.

3. Начнём разбор задач с того, что произвольный школьник расскажет одну из решённых им задач. Пусть этот школьник решил задачи a_1 и a_2, а рассказал задачу a_1. Тогда есть ровно один школьник, который тоже решил задачу a_2 (и ещё задачу a_3). Этот школьник расскажет задачу a_2. Затем школьник, который решил задачи a_3 и a_4, расскажет задачу a_3 и т. д. Так мы дойдём до n-го школьника, который решил задачи a_n и a_k, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Нужно понять, что делать, если $n < 20$. Ясно, что $k = 1$. Действительно, задачу a_k, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, решили два школьника с номерами $k-1$ и k. Пусть n-й школьник расскажет задачу a_n. Для оставшихся школьников и оставшихся задач выполняется то же самое условие: каждый из школьников решил две задачи, и каждую задачу решили два школьника. Поэтому можно повторить то же самое и т. д.

4. Пусть ABC — данный треугольник. Рассмотрим полный трёхгранный угол $OABC$ с вершиной O, состоящий из двух трёхгранных углов (рёбрами одного угла являются лучи OA, OB, OC, а рёбрами другого — их продолжения). Проекция треугольника ABC на плоскость P совпадает с пересечением плоскости P и полного трёхгранного угла $OABC$ (т. е. трёхгранного угла $OABC$ вместе с трёхгранным углом, симметричным ему относительно вершины O). В зависимости от взаимного расположения плоскости и трёхгранного угла возникают следующие варианты.



а) б) в) г) д)

Рис. 71

1. Плоскость P параллельна двум рёбрам и пересекает третье. В проекции получается угол (рис. 71, а).

2. Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём оба — с одной стороны от вершины O. В проекции получается полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми и пересекающей их третьей прямой (рис. 71, б).

3. Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём по разные стороны от вершины O. В проекции получаются два угла, у которых сторона одного служит продолжением стороны другого, а две другие стороны параллельны и противоположно направлены (рис. 71, в).

4. Плоскость P пересекает все три ребра, причём все три — с одной стороны от вершины O. В проекции получается треугольник (рис. 71, г).

5. Плоскость P пересекает все три ребра, причём два — с одной стороны от вершины O, а одно — с другой. В проекции получается фигура, состоящая из угла и бесконечной фигуры, которая ограничена продолжениями сторон этого угла и прямой, их пересекающей (рис. 71, д).

5. Равенства

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=(x^2+1)(x^2+x+1)$$

и

$$x^{12}-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$

показывают, что

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=\frac{x^{12}-1}{(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)}=$$
$$=\frac{x^{12}-1}{x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1}.$$

Поэтому поделить многочлен $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+$ $+1$ — это то же самое, что сначала поделить его на $x^{12}-1$, а потом умножить на $x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1$. Заметим, что поделить многочлен $p(x)$ на многочлен $q(x)$ — это то же самое, что представить дробь $\frac{p(x)}{q(x)}$ в виде суммы многочлена и правильной дроби. При делении 1951 на 12 в остатке получаем 7, поэтому

$$\frac{x^{1951}-1}{x^{12}-1} = x^{1939} + x^{1927} + x^{1915} + \ldots + x^{19} + x^7 + \frac{x^7-1}{x^{12}-1},$$

следовательно, искомый коэффициент равен коэффициенту при x^{14} в произведении

$$\left(x^{1939} + \ldots + x^{19} + x^7 + \frac{x^7-1}{x^{12}-1}\right) \cdot \\ \cdot (x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1)$$

после его представления в виде суммы многочлена и правильной дроби. Этот коэффициент такой же, как в произведении

$$x^7(x^8 - x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1) = \\ = x^{15} - x^{14} - x^{13} + 2x^{12} - 2x^{10} + x^9 + x^8 - x^7,$$

поскольку

$$\frac{(x^7-1)(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)}{x^{12}-1} = \frac{x^7-1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$$

можно представить в виде многочлена степени 3 и правильной дроби.

9—10 класс

1. Проекция тетраэдра может быть треугольником или четырёхугольником. В первом случае она является проекцией одной из граней, поэтому её площадь не превосходит $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Во втором случае диагонали четырёхугольника являются проекциями рёбер тетраэдра, поэтому площадь ортогональной проекции, равная половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, не превосходит $\frac{a^2}{2}$; равенство достигается, когда пара противоположных рёбер тетраэдра параллельна данной плоскости. Остаётся заметить, что $\frac{\sqrt{3}a^2}{4} < \frac{a^2}{2}$.

2. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — данные числа. Количество членов ряда 1, 2, 3, ..., 1951, делящихся на a_k, равно $\left[\frac{1951}{a_k}\right]$. По условию наименьшее общее кратное любых двух из чисел $a_1, \ldots, a_n$ больше 1951, поэтому среди чисел 1, 2, ..., 1951 нет ни одного числа, делящегося одновременно на два из чисел $a_1, \ldots, a_n$. Поэтому число членов последовательности 1, 2, ..., 1951, делящихся хотя бы на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$, равно

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right] + \left[\frac{1951}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{1951}{a_n}\right].$$

Но в последовательности 1, 2, ..., 1951 всего 1951 членов, поэтому

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right] + \left[\frac{1951}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{1951}{a_n}\right] \leqslant 1951.$$

Учитывая, что $\left[\frac{1951}{a_k}\right] > \frac{1951}{a_k} - 1$, получаем

$$\left(\frac{1951}{a_1} - 1\right) + \left(\frac{1951}{a_2} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{1951}{a_n} - 1\right) < 1951,$$

т. е.

$$\frac{1951}{a_1} + \frac{1951}{a_2} + \frac{1951}{a_3} + \ldots + \frac{1951}{a_n} < 1951 + n < 2 \cdot 1951.$$

Сокращая обе части на 1951, получаем требуемое.

Комментарий. Число 1951 можно заменить на любое другое натуральное число $N \geqslant 4$. (При $N < 4$ требуемых наборов чисел не существует.)

3. а) Будем учитывать только тех пассажиров, которые находятся в автобусе, когда он едет от 7-й остановки до 8-й. Это будут в точности те пассажиры, которые едут от остановки с номером $i \leqslant 7$ до остановки с номером $j \geqslant 8$. Возьмём квадрат 7×7, строки которого занумерованы числами 1, ..., 7, а столбцы — числами 8, ..., 14. Если в автобусе есть пассажир, едущий от остановки с номером $i \leqslant 7$ до остановки с номером $j \geqslant 8$, то отметим в квадрате клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца. Количество отмеченных клеток по условию не больше 25, поэтому есть по крайней мере $24 = 4 \cdot 6$ непомеченные клетки.

Докажем, что в указанном квадрате 7×7 можно выделить строки A_1, ..., A_4 и столбцы B_1, ..., B_4 так, что на пересечении строки A_i и столбца B_i стоит неотмеченная клетка при всех $i = 1, 2, 3, 4$. Сначала докажем, что можно выделить одну строку и один столбец так, что на их пересечении стоит неотмеченная клетка, а после их вычёркивания останется не менее $15 = 3 \cdot 5$ неотмеченных клеток. Если в каждом столбце и в каждой строке не более 5 неотмеченных клеток, то можно взять любую неотмеченную клетку и выделить содержащие её строку и столбец. Действительно, в этом случае выделенные строка и столбец содержат не более 9 неотмеченных клеток. Если в какой-то строке (столбце) стоит 6 неотмеченных клеток, то среди столбцов (строк), проходящих через неотмеченные клетки этой строки (столбца), найдётся столбец (строка), в котором стоит не более 4 отмеченных точек. Можно выделить эти строку и столбец. Если в какой-то строке (столбце) все 7 клеток неотмеченные, то найдётся столбец (строка), в котором стоит не более 3 отмеченных точек. Можно выделить эти строку и столбец.

Аналогично можно доказать, что в полученном квадрате 6×6 можно выделить строку и столбец, на пересечении которых стоит неотмеченная клетка, так, чтобы после их вычёркивания осталось не менее $8 = 2 \cdot 4$ неотмеченных клеток. Затем в полученном квадрате 5×5 можно выделить строку и столбец, на пересечении которых стоит неотмеченная клетка, так, чтобы после их вычёркивания осталось не менее $3 = 1 \cdot 3$ неотмеченных клеток (нам достаточно, чтобы осталась одна неотмеченная клетка).

б) Пусть от каждой остановки с номерами 1, 2, ..., 10 до каждой другой остановки с этими номерами едет ровно один пассажир, а дальше автобус едет пустым. Посчитаем, сколько пассажиров находится в автобусе, когда он едет от остановки с номером k до остановки с номером $k+1$, где $1 \leqslant k \leqslant 9$. Это будут в точности те пассажиры, которые вошли на остановках с номерами 1, 2, ..., k и выйдут на остановках с номерами $k+1$, $k+2$, ..., $10=k+(10-k)$. Всего таких пассажиров будет $k(10-k)$. Ясно, что $k(10-k) \leqslant 25$ (больше всего пассажиров в автобусе будет, когда он едет от остановки 5 до остановки 6). Если нам задано 10 различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5, то остановки с номерами 11, 12, 13, 14 могут входить не более чем в 4 пары (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), (A_4, B_4) этих остановок; в пятую пару (A_5, B_5) входят только остановки с номерами 1, 2, ..., 10, а для любой такой пары остановок найдётся пассажир, который едет от одной остановки до другой.

4. Возьмём окружность, радиус которой равен стороне правильного треугольника, отрежем от неё два сегмента, хорды которых стягивают угол 120°. Сложим из этих двух сегментов фигуру, приложив друг к другу их хорды. Граница этой фигуры обладает требуемым свойством. Действительно, поместим правильный треугольник в эту фигуру так, как показано на рис. 72. Затем будем поворачивать треугольник по часовой стрелке вокруг точки O_1. После поворота на 60° будем поворачивать треугольник по часовой стрелке вокруг точки O_2 и т. д. После шести таких поворотов (трёх пар поворотов вокруг O_1 и O_2) треугольник вернётся в исходное положение, причём каждая его вершина опишет всю кривую; на рис. 73 выделены дуги, которые заметает вершина A при каждом из шести поворотов.

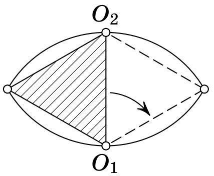


Рис. 72

1952 год (XV олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. *Первый способ.* Пусть точки L, M и N лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Треугольники BNL и CLM равнобедренные; углы при их основаниях равны $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$ и $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle C)$. Поэтому

$$\angle NLM = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \\ = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) < 90^\circ.$$

Аналогично доказывается, что остальные углы треугольника NLM острые.

Второй способ. Пусть точки L, M и N лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Угол между касательной AM и хордой MN равен половине дуги MN, на которую опирается угол MLN, поэтому $\angle MLN = \angle AMN$, но последний угол острый, поскольку он является углом при основании MN равнобедренного треугольника MAN.

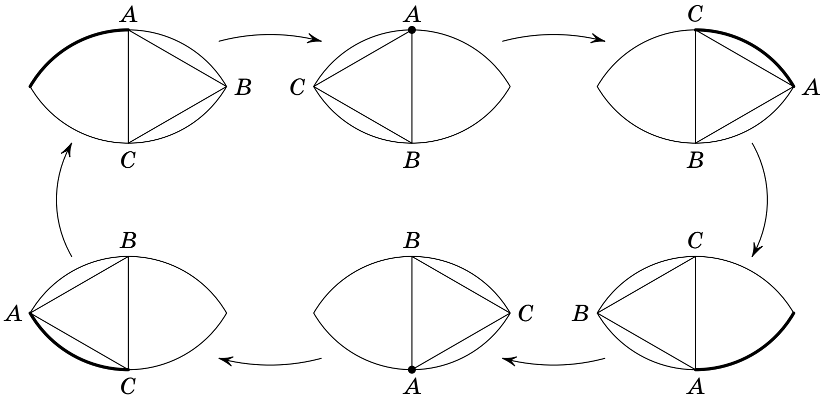


Рис. 73

2. Легко проверить, что оба выражения равны

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)+2(xy+yz+zx)(ab+bc+ca).$$

Для этого достаточно сравнить коэффициенты при x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx.

3. Пусть из вершины параллелепипеда выходят рёбра длиной a, b, c. Тогда одна грань является параллелограммом со сторонами a и b, а другая грань — параллелограммом со сторонами b и c. Эти параллелограммы равны, поэтому $a=c$. Аналогично доказывается, что $a=b=c$.

4. Чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x и проехать на велосипеде одно и то же расстояние $15-x$. Тогда C до встречи с B тоже должен пройти пешком расстояние x. Поэтому C до встречи с A проедет на велосипеде $15-2x$, а после этого A проедет на велосипеде $15-x$. Всего A и C вместе проедут на велосипеде $(15-x)+(15-2x)=30-3x$. За это же время B пройдёт пешком расстояние x, поэтому

$$\frac{30-3x}{15}=\frac{x}{6},$$

т. е. $x=60/11$. Следовательно, B до встречи с C едет

$$\frac{15-x}{15}=\frac{1}{15}\cdot\frac{105}{11}=\frac{7}{11}\text{ ч},$$

а C до встречи с B идёт

$$\frac{x}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{60}{11}=\frac{10}{11}\text{ ч},$$

поэтому C должен выйти из M за $\frac{3}{11}$ ч до того, как A и B отправятся в путь из M.

8 класс

1. Пусть H — точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. По условию $A_1H\cdot BH=B_1H\cdot AH$. С другой стороны, так как точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB, то $A_1H\cdot AH=B_1H\cdot BH$. Следовательно, $AH=BH$ и $A_1H=B_1H$. Таким образом, высоты AA_1 и BB_1 равны, а значит, $AC=BC$. Аналогично $BC=AC$.

2. Легко проверить, что оба выражения равны

$$(x^2+y^2+z^2+u^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)+$$
$$+2(xy+yz+zu+ux)(ab+bc+cd+da)+4(xz+yu)(ac+bd).$$

Для этого достаточно сравнить коэффициенты при x^2, y^2, z^2, u^2, xy, yz, zu, ux, xz, yu.

3. См. решение задачи 3 для 7 класса.

4. Чтобы A и B затратили на дорогу наименьшее время, они должны прибыть в N одновременно, т. е. они должны пройти пешком одинаковые расстояния. Действительно, пусть A проходит пешком расстояние x и проезжает на велосипеде $15-x$, а B проходит y и проезжает $15-y$. Тогда время, затраченное A, равно

$$\frac{x}{6}+\frac{15-x}{15}=1+\frac{x}{10},$$

а время, затраченное B, равно $1+\frac{y}{10}$. Нас интересует большее из этих чисел; оно должно быть наименьшим. За то же самое время, за которое A проходит пешком расстояние x, B и C успевают проехать на велосипеде расстояние $(15-y)+(15-y-x)$. Поэтому

$$\frac{30-x-2y}{15}=\frac{x}{6},$$

т. е. $7x+4y=60$. Прямая $x=y$ пересекает прямую $7x+4y=60$ в точке $\left(\frac{11}{10},\frac{11}{10}\right)$. Для любой другой точки прямой $7x+4y=60$ координата x или координата y будет больше.

Задача о том, когда должен выйти C, чтобы A и B прибыли одновременно, — это в точности задача 4 для 7 класса.

9 класс

1. Каждый член геометрической прогрессии представляется в виде aq^n, $n \geqslant 0$. Случай, когда $q=1$, очевиден, поэтому будем считать, что $q \neq 1$. Предположим, что существуют различные целые неотрицательные числа k_1, k_2, ..., k_{m+1} $(m \geqslant 2)$, для которых

$$aq^{k_1} + aq^{k_2} + \ldots + aq^{k_m} = aq^{k_{m+1}}. \qquad (1)$$

Пусть $l_1 < l_2 < \ldots < l_{m+1}$ — это числа k_1, k_2, ..., k_{m+1}, записанные в порядке возрастания. Перепишем равенство (1) в виде

$$aq^{l_1} = \pm aq^{l_2} \pm \ldots \pm aq^{l_{m+1}}.$$

После сокращения на aq^{l_1} получим

$$1 = q^{l_2-l_1}(1 + q^{l_3-l_2} + \ldots + q^{l_{m+1}-l_2}).$$

Левая часть равенства равна 1, а правая часть делится на целое число $q^{l_2-l_1}$, абсолютная величина которого строго больше 1. Получено противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда сумма членов прогрессии равна одному из слагаемых, т. е. k_{m+1} — это одно из чисел $k_1, \ldots, k_m$. Пусть для определённости $k_{m+1} = k_1$. Тогда мы получаем равенство $q^{k+2} + \ldots + q^{k_m} = 0$ и можем снова воспользоваться теми же самыми рассуждениями.

2. Пусть $a' \perp b$ и $a' \perp c$, $b' \perp c$ и $b' \perp a$, $c' \perp a$ и $c' \perp b$. Тогда $a \perp b'$ и $a \perp c'$, $b \perp c'$ и $b \perp a'$, $c \perp a'$ и $c \perp b'$.

3. По условию $1-x>0$, $1+x>0$, $1-y>0$ и $1+y>0$. Поэтому $(1-x)(1+y)>0$ и $(1+x)(1-y)>0$, т. е. $1-x+y-xy>0$ и $1+x-y-xy>0$. Следовательно, $1-xy>x-y$ и $1-xy>y-x$. Кроме того, $1-xy=|1-xy|$. Таким образом, $|1-xy|>|x-y|$.

4. Пусть r, r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, ABD и BCD, p, p_1 и p_2 — их полупериметры, S, S_1 и S_2 — их площади. Тогда $S = S_1 + S_2$, $S = pr$, $S_1 = p_1r_1$ и $S_2 = p_2r_2$. Поэтому $r = \frac{p_1}{p}r_1 + \frac{p_2}{p}r_2$. Но $BD < BC + CD$, поэтому $p_1 < p$; аналогично $p_2 < p$. Следовательно, $r < r_1 + r_2$.

5. Прежде всего заметим, что $a_2 \leqslant 9^2 \cdot 3 = 243$, а значит, $a_3 \leqslant 2^2 + 9^2 \cdot 2 = 166$. Если $100 \leqslant a_3 \leqslant 166$, то $a_4 \leqslant 1 + 6^2 + 9^2 = 118$, а если $100 \leqslant a_4 \leqslant 118$, то $a_5 \leqslant 2 + 81 < 100$. Поэтому достаточно проверить требуемое утверждение лишь для последовательности, начинающейся с числа, не превосходящего 99. Это делается непосредственной проверкой. Мы будем выписывать последовательность, до тех пор пока не встретится 1, 4 или число, уже встречавшееся ранее. При этом мы будем учитывать, что перестановка цифр и добавление (удаление) нуля не влияет на дальнейшие члены последовательности. В результате получим следующие последовательности:

2, 4; 3, 9, 81, 65, 61, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4;

5, 25, 29, 85 (получается перестановкой цифр из числа 58);

6, 36, 45, 41, 17, 50; 7, 49, 97, 130, 10;

8, 64, 52; 11, 2; 12, 5; 15, 26, 40, 16; 19, 82, 68, 100;

22, 8; 23, 13; 27, 53, 34, 25; 33, 18; 35, 34; 38, 73;

39, 90; 44, 32; 47, 65; 48, 80; 55, 50; 57, 74;

59, 106; 66, 72; 67, 85; 69, 117, 51; 77, 98;

78, 113, 11; 88, 128, 69; 99, 162, 41.

Комментарий. Перебор удобно организовать следующим образом. Нарисуем таблицу 10×10 и будем последовательно вписывать в её клетки члены наших последовательностей: число $\overline{ab}$ записываем в клетку (a, b) и одновременно записываем число $\overline{ba}$ в клетку (b, a). Каждую новую последовательность будем начинать с числа $\overline{ab}$, для которого клетка (a, b) свободна. Таким образом, в конце вся таблица будет заполнена и мы точно будем знать, что рассмотрели все двузначные числа.

10 класс

1. Пусть $\arcsin\cos\arcsin x = \alpha$ и $\arccos\sin\arccos x = \beta$. Тогда $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$. Действительно, $0 \leqslant \cos\arcsin x \leqslant 1$, поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $0 \leqslant \sin\arccos x \leqslant 1$, поскольку $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Далее, $\sin\alpha = \cos\arcsin x$, поэтому $\arcsin x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, и $x = \sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm\cos\alpha$; $\cos\beta = \sin\arccos x$, поэтому $\arccos x = \frac{\pi}{2} \mp \beta$ и $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm\sin\beta$. Из того, что $\cos\alpha = \sin\beta\, (= \pm x)$, следует, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

2. Применим индукцию по n. При $n = 2$ получаем

$$(1-x)^2 + (1+x)^2 = 2(1+x^2) < 4.$$

Предположим теперь, что $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$. Тогда

$$\begin{aligned}(1-x)^{n+1} &+ (1+x)^{n+1} < \\ &< ((1-x)^n + (1+x)^n)((1-x) + (1+x)) < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.\end{aligned}$$

3. Пусть A, B и C — точки касания сферы с гранями. Радиус OA перпендикулярен касательной SA, поэтому $\angle SAO = 90^\circ$. Аналогично $\angle SBO = \angle SCO = 90^\circ$. В прямоугольных треугольниках SAO, SBO и SCO с общей гипотенузой SO катеты AO, BO и CO равны (они равны радиусу сферы), поэтому равны и сами треугольники. Следовательно, проекции вершин A, B и C на гипотенузу SO совпадают. Но это как раз и означает, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC.

4. Предположим, что $a > 0$. Тогда при больших положительных p дискриминант $D = b^2 - 4ac - 4ap$ отрицателен, поэтому данное уравнение вообще не имеет действительных корней. Предположим, что $a < 0$. Тогда при больших положительных p произведение корней, равное $\frac{c+p}{a}$, отрицательно.

Второй тур

7 класс

1. Ясно, что $x_2 \neq 0$, поэтому из первого и второго уравнений получаем $x_1 = \dfrac{1}{x_2} = x_3$. Из второго и третьего уравнений получаем $x_2 = x_4$ и т. д. Кроме того, из первого и последнего уравнений получаем $x_{15} = x_2$. В итоге получаем $x_1 = x_3 = \ldots = x_{15} = x_2 = x_4 = \ldots = x_{14}$. Поэтому из первого уравнения получаем $x_1^2 = 1$, т. е. $x_1 = \pm 1$. Очевидно, что оба указанных в ответе набора неизвестных действительно являются решениями системы.

2. Пусть K и L — точки касания со стороной AC окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC. Тогда $2AK = AB + AC - BC$ и $2AL = AD + AC - DC$. Поэтому из равенства $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AK = AL$, т. е. точки K и L совпадают.

3. Если $0 < a < 1$, то $0 < a^2 < a < 1$. По условию $1 > a^2 \geqslant 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{100}$. Поэтому $1 > a > 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{100}$ (предполагается, что число a положительно).

4. Возьмём окружность S с диаметром AB и проведём в точках A и B касательные l_A и l_B к этой окружности. Искомые точки лежат строго внутри полосы, ограниченной прямыми l_A и l_B, и строго вне окружности S (рис. 74).

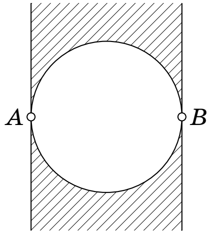


Рис. 74

8 класс

1. Если $0 < a < 1$, то $0 < a < \sqrt{a} < 1$. По условию $a = 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{60}$. Поэтому $1 > \sqrt{a} > 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{60}$. Значит, $\sqrt{a} = 0{,}\underbrace{9\ldots9}_{60}\ldots$

2. Прямоугольные треугольники NBD и NAE, NBF и NAD подобны, поскольку $\angle NBD = \angle NAE$ и $\angle NBF = \angle NAD$.

Следовательно, $NB:NA=ND:NE$ и $NB:NA=NF:ND$, а значит, $ND:NE=NF:ND$, т. е. $ND^2=NE\cdot NF$.

3. Пусть a и b — семизначные числа, составленные посредством этих жетонов. Предположим, что a делится на b и $a\neq b$. Тогда $a-b$ тоже делится на b. Ясно, что $\frac{a-b}{b}\leqslant 7$. С другой стороны, $a-b$ делится на 9, а b не делится на 9. Поэтому $\frac{a-b}{b}$ делится на 9.

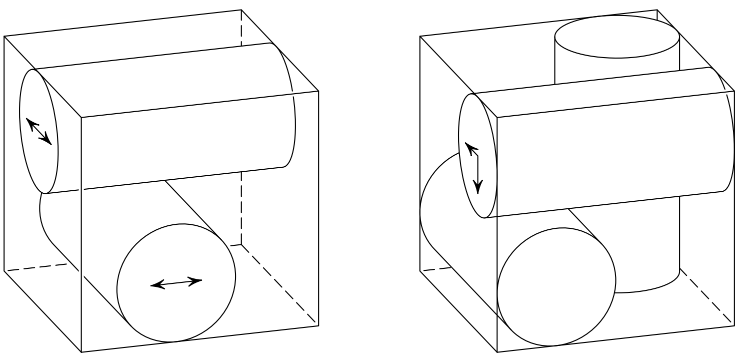
4. Сначала докажем, что если среди данных m прямых есть три прямые, пересекающиеся в трёх различных точках, то эти m прямых разбивают плоскость по крайней мере на $2m+1$ частей. База индукции: $m=3$; далее мы пользуемся тем, что каждая новая прямая пересекает одну из старых прямых, поэтому после того, как она проведена, добавляются по крайней мере две новые части.

Обращаясь к условию задачи, мы видим, что нас интересуют только конфигурации прямых, среди которых нет троек прямых, пересекающихся в трёх разных точках, потому что иначе мы получим по крайней мере $2\cdot 99+1=199$ частей. Таким образом, либо все 99 прямых параллельны, либо все 99 прямых пересекаются в одной точке, либо 98 прямых параллельны и одна прямая их пересекает. Первая конфигурация разбивает плоскость на 100 частей, а две другие — на 198 частей.

9 класс

1. Для нечётного n решение фактически приведено в решении задачи 1 для 7 класса. При чётном n точно так же получаем $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}$, $x_2=x_4=\ldots=x_{n-2}$ и $x_2=x_n$. Очевидно, что указанные в ответе наборы неизвестных являются решениями данной системы уравнений.

2. Если основания цилиндра лежат на гранях куба, то направление оси цилиндра будет неизменным при всех его перемещениях внутри куба. Поместим теперь в куб два цилиндра так, чтобы их оси были параллельны двум перпендикулярным рёбрам куба. Радиусы цилиндров равны $a/4$, поэтому расстояние между их осями не может быть меньше $a/2$. С другой стороны, они расположены внутри полосы толщиной a между двумя параллельными плоскостями. Поэтому расстояние между осями не может быть больше $a/2$. Следовательно, ось каждого цилиндра может перемещаться лишь в направлении оси другого цилиндра (рис. 75, а).



а) б)

Рис. 75

Переместим эти два цилиндра так, чтобы они касались куба боковыми поверхностями, и в образовавшийся зазор вставим третий цилиндр, ось которого перпендикулярна осям двух первых цилиндров. Новый цилиндр не сможет перемещаться, поскольку первый цилиндр позволяет двигаться его оси только в одном направлении, а второй цилиндр — только в перпендикулярном направлении (рис. 75, б). Аналогично доказывается, что первые два цилиндра теперь тоже не смогут перемещаться.

3. См. решение задачи 3 для 8 класса.

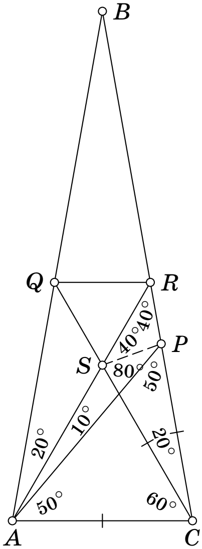


Рис. 76

4. Выберем на стороне BC точку R так, что $\angle CAR = 60^\circ$. Пусть S — точка пересечения прямых CQ и AR (рис. 76). Достаточно доказать, что QP — биссектриса угла SQR, равного 60°. Простые вычисления углов показывают, что

$$\angle APC = 180^\circ - \angle PCA - \angle PAC = \\ = 180^\circ - 80^\circ - 50^\circ = 50^\circ.$$

Поэтому треугольник ACP равнобедренный, а значит, $PC = AC = SC$. Угол при вершине C равнобедренного треугольника PCS нам известен: он равен 20°, поэтому $\angle SPC = 80^\circ$. Из этого следует, что

$$\angle RSP = 180^\circ - \angle ASC - \angle PSC = \\ = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ.$$

Остаётся заметить, что $\angle SRP = 40^\circ$, а треугольник QSR правильный.

5. Пусть A — самый низкий среди высоких, а B — самый высокий среди низких. Пусть C стоит на пересечении продольного ряда, в котором стоит A, и поперечного ряда, в котором стоит B. Тогда A не ниже C и C не ниже B, поэтому A не ниже B. (Если A и B разного роста, то A выше B.)

10 класс

1. Предположим, что сумма

$$\cos 32x + a_{31} \cos 31x + a_{30} \cos 30x + \ldots + a_1 \cos x$$

принимает только положительные значения при всех x. Заменив x на $x + \pi$, получим, что выражение

$$\cos 32x - a_{31} \cos 31x + a_{30} \cos 30x - \ldots + a_2 \cos 2x - a_1 \cos x$$

принимает положительные значения при всех x. Сложив эти выражения, получим, что сумма

$$\cos 32x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_4\cos 4x + a_2\cos 2x$$

принимает положительные значения при всех x. Затем повторим те же самые рассуждения, последовательно заменяя x на $x+\frac{\pi}{2}$, $x+\frac{\pi}{4}$, $x+\frac{\pi}{8}$, $x+\frac{\pi}{16}$. В результате получим, что $\cos 32x$ принимает положительные значения при всех x. Но при $x=\pi/32$ выражение $\cos 32x$ принимает значение -1. Получено противоречие.

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. Предположим, что многочлен $3x^{2n}+Ax^n+2$ делится на многочлен $2x^{2m}+Ax^m+3$. Тогда любой корень многочлена $2x^{2m}+Ax^m+3$ является также корнем многочлена $3x^{2n}+Ax^n+2$. Если x_i — корень многочлена $2x^{2m}+Ax^m+3$, то $x_i^m=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-24}}{4}=\alpha_{1,2}$. Можно считать, что $x_1^m=\alpha_1$ и $x_2^m=\alpha_2$. Пусть $\beta_{1,2}=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-24}}{6}$ — корни квадратного трёхчлена $3x^2+Ax+2$.

Первый случай. $A^2-24>0$.

В этом случае $|\alpha_1|\neq|\alpha_2|$, поэтому $x_1^n=\beta_1$ и $x_2^n=\beta_2$. С одной стороны, $|x_1x_2|=\sqrt[n]{|\beta_1\beta_2|}=\sqrt[n]{2/3}<1$, а с другой стороны, $|x_1x_2|=\sqrt[m]{|\alpha_1\alpha_2|}=\sqrt[m]{3/2}>1$. Приходим к противоречию.

Второй случай. $A^2-24\leqslant 0$.

В этом случае числа α_1 и α_2 комплексно сопряжённые, поэтому $|\alpha_1|=|\alpha_2|=\sqrt{3/2}$ и $|\beta_1|=|\beta_2|=\sqrt{2/3}$. Таким образом, с одной стороны, $|x_1|=\sqrt[m]{|\alpha_1|}=\sqrt[2m]{3/2}>1$, а с другой стороны, $|x_1|=\sqrt[n]{|\beta_1|}=\sqrt[2n]{2/3}<1$. Снова приходим к противоречию.

Комментарий. При доказательстве мы не пользовались тем, что число A целое.

4. См. решение задачи 4 для 9 класса.

5. См. решение задачи 5 для 9 класса.

1953 год (XVI олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Разрежем трапецию на параллелограмм, одной из сторон которого служит меньшее основание трапеции, и треугольник. Сумма углов при большем основании трапеции равна сумме двух углов этого треугольника, поэтому она меньше 180°. Значит, сумма углов при меньшем основании больше 180°.

2. Число $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ делится на $\underbrace{33\ldots3}_{100}$ тогда и только тогда, когда n делится на 3 и a_n делится на a_{100}. Покажем, что a_n делится на a_m тогда и только тогда, когда n делится на m. Ясно, что $9a_n = 10^n - 1$. Поэтому a_n делится на a_m тогда и только тогда, когда $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$. Пусть $n = dm + r$, где $0 \leqslant r < m$. Тогда

$$10^n - 1 = (10^{n-m} + 10^{n-2m} + \ldots + 10^{n-dm})(10^m - 1) + 10^r - 1.$$

Значит, $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$ тогда и только тогда, когда $r = 0$, т. е. когда n делится на m. Таким образом, необходимо и достаточно, чтобы n делилось на 3 и на 100, т. е. делилось на 300.

3. Восставим перпендикуляр l к AB в точке A; отметим на нем точки C и D. Восставим далее перпендикуляр l' к AB в точке B, а затем проведём перпендикуляры к прямой l в точках C и D до их пересечения с l' соответственно в точках C' и D'. Обозначим через X точку пересечения прямых AD' и BD и через Y — точку пересечения прямых

AC' и BC. Тогда прямая XY пересекает отрезок AB в его середине.

4. Достаточно заметить, что $n^2+8n+15=(n+4)^2-1$.

8 класс

1. Пусть A, B, C — точки касания, A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей, причём точки A, B и C лежат на отрезках B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 (или на их продолжениях) соответственно. Тогда $A_1B=A_1C$, $B_1A=B_1C$ и $C_1A=C_1B$. Из этого следует, что A, B и C — точки касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ с его сторонами (или точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон). Действительно, пусть $A_1B=A_1C=x$, $B_1A=$ $=B_1C=y$ и $C_1A=C_1B=z$. Тогда, например, в случае вписанной окружности $x=\frac{A_1B_1+A_1C_1-B_1C_1}{2}$ и для точек касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 такое соотношение тоже выполняется. В случае вневписанной окружности рассуждения аналогичны. В результате получаем, что радиусы A_1B, B_1C и C_1A данных окружностей касаются описанной окружности треугольника ABC.

2. См. решение задачи 2 для 7 класса.

3. См. решение задачи 3 для 7 класса.

4. Пусть $a=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1}$. Тогда

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n}=\sqrt{2+a}.$$

Таким образом, требуется доказать, что

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}.$$

Индукцией по n легко доказать, что $a<2$. База индукции: $\sqrt{2}<2$. Шаг индукции: если $a<2$, то $\sqrt{2+a}<2$. Поэтому следующие неравенства эквивалентны требуемому:

$$8-4\sqrt{2+a} > 2-a,$$
$$6+a > 4\sqrt{2+a}.$$

После возведения в квадрат получаем неравенство $36+$ $+12a+a^2>32+16a$, т. е. $(a-2)^2>0$.

9 класс

1. Синус обращается в нуль в точках $k\pi$, где k — целое число. Поэтому искомое геометрическое место точек — семейство прямых, заданных уравнениями вида $x+y=k\pi$, где k — произвольное целое число.

2. Сложим равенства

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A_1}$$

и

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1B_1}.$$

Учитывая, что $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1B_1}=\vec{0}$, получим

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}).$$

Из этого требуемое неравенство следует очевидным образом, поскольку прямые AA_1 и BB_1 не могут быть параллельны.

3. Предположим, что существуют многочлены

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

и

$$g(y) = b_0y^m + b_1y^{m-1} + \ldots + b_m,$$

для которых $f(x)g(y) = x^{200}y^{200} + 1$. Положив $x = 0$, получим $a_n g(y) = 1$, т. е. $g(y) = 1/a_n$ при всех y. Положив $y = 0$, аналогично получим, что $f(x) = 1/b_m$ при всех x. Таким образом, $f(x)g(y) = \frac{1}{a_n b_m}$ — константа, а функция $x^{200}y^{200} + 1$, очевидно, не является константой.

4. Ясно, что $AB \parallel EC$ и $AC \parallel EF$. Поэтому четырёхугольник $ACEF$ — параллелограмм. В частности, $S_{EFA} = S_{ACE}$. Далее, $S_{ABB_1CC_1DED_1} = S_{ACE} - S_{AED_1} + S_{ABB_1} + S_{EDC_1}$ и $S_{AD_1EF} = S_{EFA} + S_{AED_1}$ (рис. 77). Но $S_{AED_1} = S_{ABB_1} = S_{EDC_1}$, поскольку треугольники AED_1, ABB_1 и EDC_1 равны. Поэтому $S_{ACE} - S_{AED_1} + S_{ABB_1} + S_{EDC_1} = S_{ACE} + S_{AED_1} = S_{EFA} + S_{AED_1} = S_{AD_1EF}$.

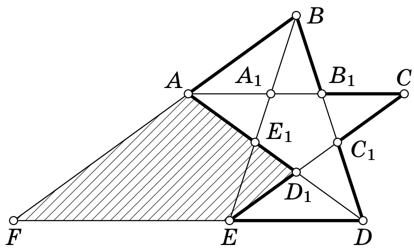


Рис. 77

5. См. решение задачи 4 для 8 класса.

10 класс

1. См. решение задачи 1 для 9 класса.

2. Рассмотрим симметрию относительно середины отрезка OS, где S — вершина данного конуса. Один из двух конусов с вершиной X, равных данному конусу и оси которых параллельны его оси, содержит точку O тогда и только тогда, когда образ этого конуса содержит точку S, т. е. при этой симметрии точка X попадает внутрь данного конуса или дополнительного к нему.

3. См. решение задачи 3 для 9 класса.

4. См. решение задачи 4 для 9 класса.

Второй тур

7 класс

1. В наименьшее общее кратное чисел a и b входят только те простые делители, которые входят в a и b. Только они и могут входить в наибольший общий делитель суммы и наименьшего общего кратного. Поэтому достаточно проследить за степенью каждого простого множителя отдельно. Пусть $a=p^{\alpha}\cdot\ldots$ и $b=p^{\beta}\cdot\ldots$, причём $\alpha\leqslant\beta$. Тогда сумма чисел a и b имеет вид $p^{\alpha}\cdot\ldots$, а их наименьшее общее кратное имеет вид $p^{\beta}\cdot\ldots$ Поэтому рассматриваемый наибольший общий делитель имеет вид $p^{\alpha}\cdot\ldots$ Наибольший общий делитель самих чисел a и b имеет такой же вид.

2. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром O. Если диагональ AC проходит через точку O, то прямая AC является осью симметрии четырёхугольника, поэтому $AB=AD$ и $CB=CD$. А если диагональ BD проходит через точку O, то $BA=BC$ и $DA=DC$.

3. Соседние колёса должны вращаться в противоположных направлениях. Поэтому колёса с номерами 1 и 11 должны вращаться в одном направлении (все колёса с нечётными номерами вращаются в одном направлении, а с чётными — в противоположном). С другой стороны, колёса с номерами 1 и 11 соседние, поэтому они должны вращаться в противоположных направлениях.

4. Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов 1000-угольника и ещё 500 углов 360°, соответствующих 500 внутренним точкам. Значит, сумма углов треугольников равна

$$998\cdot 180^\circ + 500\cdot 360^\circ = (998+2\cdot 500)\cdot 180^\circ.$$

Поэтому количество полученных треугольников равно $998 + 2 \cdot 500 = 1998$.

5. Запишем сначала первое уравнение, потом второе, из которого вычтено первое, потом третье, из которого вычтено второе, и т. д.:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + 2x_5 = 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 = 1. \end{cases}$$

Теперь можно последовательно найти x_5, x_4, x_3, x_2, x_1.

Очевидно, что новая система является следствием старой. Наоборот, каждое уравнение старой системы получается сложением нескольких первых уравнений новой системы, поэтому старая система является следствием новой. Значит, две рассматриваемые системы являются равносильными.

8 класс

1. Разрежем четырёхугольник на два треугольника со сторонами a и d, b и c. В результате (воспользовавшись тем, что площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними) получим $2S \leqslant ad + bc$. Остаётся доказать неравенство $2S \leqslant ac + bd$. Для этого поступим следующим образом. Отрежем треугольник со сторонами c и d, перевернём его и приложим к треугольнику со сторонами a и b так, чтобы получился четырёхугольник с последовательными сторонами a, b, d и c. Полученный четырёхугольник можно разрезать на два треугольника со сторонами a и c, b и d. Поэтому $2S \leqslant ac + bd$.

2. Мы докажем требуемое утверждение, заменив 1953 на произвольное натуральное число n, делящееся на 3.

Пусть число $x = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} = a_0 + 10a$ делится на 27. Достаточно доказать, что тогда число $y = a_1 + a_2 \cdot 10 + \ldots + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + a_0 \cdot 10^{n-1} = a + 10^{n-1}a_0$ тоже делится на 27. Для этого достаточно проверить, что их разность $9a + (1 - 10^{n-1})a_0$ делится на 27. Число $x - y$ делится на 27 тогда и только тогда, когда число $10(x - y) = 90a + (10 - 10^n)a_0 = 9x + (1 - 10^n)a_0$ делится на 27. Но если n делится на 3, то число $10^n - 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n}$ делится на 27.

3. Каждому многоугольнику, не содержащему точку A_1, можно сопоставить многоугольник, содержащий точку A_1, просто добавив A_1 к его вершинам. Обратная операция (отбрасывание вершины A_1) возможна лишь для многоугольников, число вершин которых не меньше 4.

4. См. решение задачи 3 для 7 класса.

5. Решение аналогично решению задачи 5 для 7 класса.

9 класс

1. См. решение задачи 2 для 8 класса.

2. *Первый способ*. Введём на плоскости систему координат, выбрав прямую l в качестве оси x. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) — координаты вершин A_1, A_1, A_3. Прямая A_2A_3 задаётся уравнением

$$\frac{x - a_2}{a_3 - a_2} = \frac{y - b_2}{b_3 - b_2}.$$

Прямая, проведённая через вершину A_1, задаётся уравнением, в котором отношение коэффициентов при x и y то же самое по абсолютной величине, но имеет противоположный знак. Таким образом, эта прямая задаётся уравнением

$$\frac{x - a_1}{a_3 - a_2} + \frac{y - b_1}{b_3 - b_2} = 0.$$

Напишем аналогично уравнения прямых, проведённых через вершины A_2 и A_3:

$$\frac{x-a_2}{a_1-a_3}+\frac{y-b_2}{b_1-b_3}=0, \qquad \frac{x-a_3}{a_2-a_1}+\frac{y-b_3}{b_2-b_1}=0.$$

Умножим левые части этих уравнений на $(a_3-a_2)(b_3-b_2)$, $(a_1-a_3)(b_1-b_3)$, $(a_2-a_1)(b_2-b_1)$ соответственно и сложим их. Легко проверить, что указанная сумма тождественно равна нулю. Из этого следует, что прямые, заданные этими уравнениями, пересекаются в одной точке.

Второй способ. Пусть l_1, l_2 и l_3 — прямые, которые мы проводим через точки A_1, A_2 и A_3. Тогда угол между прямыми l_i и A_iA_l равен $\alpha_i-\alpha_k$, где k — тот из индексов 1, 2, 3, который отличен от i и l. Из теоремы Чевы в тригонометрической форме следует, что прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке, поскольку

$$\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\cdot\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\frac{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}=1.$$

3. При $x=x_1$ и при $x=x_2$ трёхчлен $\frac{a}{2}x^2+bx+c$ принимает значения

$$-\frac{ax_1^2}{2}+(ax_1^2+bx_1+c)=-\frac{ax_1^2}{2}$$

и

$$\frac{3ax_2^2}{2}+(-ax_2^2+bx_2+c)=\frac{3ax_2^2}{2}.$$

Эти значения имеют разные знаки, поэтому один из корней трёхчлена расположен между x_1 и x_2.

4. *Первый способ*. Рассмотрим лист клетчатой бумаги размером 100×199 клеток, вершинами клеток которого служат центры клеток исходного листа. На новом листе бумаги отражение происходит по правилу отражения луча света. Каждый раз, когда луч доходит до края листа, будем спрямлять его, отражая лист симметрично относительно соответствующего края. В квадрате со стороной 19 900 луч идёт по диагонали; концы диагонали соответствуют угловым клеткам.

Второй способ. Предположим, что мы никогда не попадём в угловую клетку. Тогда мы должны в одной из клеток побывать два раза, причём проходить её в одном и том же направлении (поскольку клеток конечное число). Но тогда *вся* наша траектория будет периодической, а это невозможно, так как мы начали из угловой клетки.

Комментарий. Похожие задачи предлагались на втором туре Московской математической олимпиады в 1965 г. (задачи 2 для 8 и 9 класса и задача 3 для 10 класса).

5. В качестве вершины пирамид можно взять вершину A куба, а в качестве их оснований — три грани $A'B'C'D'$, $BCC'B'$ и $CDD'C'$, не содержащих эту вершину (рис. 78). Эти пирамиды отрезаются от куба плоскостями, каждая из которых проходит через диагональ куба AC' и одну из диагоналей AC, AB' и AD' граней (для каждой пирамиды берутся две таких плоскости из трёх). Пирамиды равны, потому что они получаются друг из друга поворотом вокруг диагонали AC'.

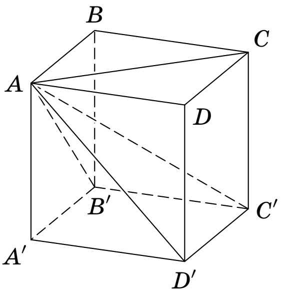


Рис. 78

10 класс

1. Если $x=k$ — натуральное число, не превосходящее n, то выражение в левой части сводится к

$$1-\frac{k}{1}+\frac{k(k-1)}{2!}-\ldots+(-1)^k\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{k!},$$

потому что все остальные слагаемые обращаются в нуль. Заметим теперь, что $\frac{k(k-1)\ldots(k-s+1)}{s!}=\frac{k!}{s!(k-s)!}$ — биномиальные коэффициент. Поэтому имеет место равенство

$$1-\frac{k}{1}+\frac{k(k-1)}{2!}-\ldots+(-1)^k\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{k!}=(1-1)^k=0,$$

которое показывает, что числа $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ являются корнями данного уравнения. Больше n корней это уравнение иметь не может, поскольку его степень равна n.

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. Все числа x_n рациональны, поэтому из равенства

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

следует, что $x_n - \sqrt{2} > 0$. Кроме того, поскольку $\frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1}} < 1$, получаем

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1}} < \frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{2}, \tag{1}$$

а учитывая, что $x_{n-1} > 1$, получаем

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \sqrt{2})^2 < \frac{(x_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2}. \tag{2}$$

Из неравенства (1) следует, что $x_n - \sqrt{2} < \frac{x_0}{2^n}$. В частности,

$$x_{30} - \sqrt{2} < \frac{10^9}{2^{30}} = \left(\frac{10^3}{2^{10}}\right)^3 = \left(\frac{1000}{1024}\right)^3 < 1.$$

Теперь, воспользовавшись неравенством (2), получим

$$\begin{array}{lll} x_{31} - \sqrt{2} < 1/2, & x_{33} - \sqrt{2} < 1/2^7, & x_{35} - \sqrt{2} < 1/2^{31}, \\ x_{32} - \sqrt{2} < 1/2^3, & x_{34} - \sqrt{2} < 1/2^{15}, & x_{36} - \sqrt{2} < 1/2^{63}. \end{array}$$

Поэтому $x_{36} - \sqrt{2} < 1/2^{63} < 1/2^{30} < 1/10^9$.

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. Пусть для определённости конь стоит на чёрной клетке. Все клетки, куда он может попасть за 2 хода, изображены на рис. 79. Случай $n = 1$ исключительный. При $n > 1$ множество клеток, куда может попасть конь за $2n$ ходов, устроено следующим образом. Возьмём квадрат со стороной $8n + 1$ (конь стоит в центре этого квадрата). Отрежем

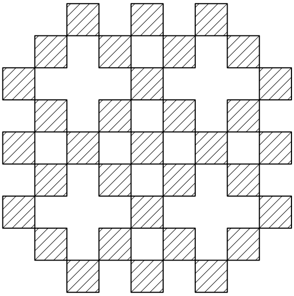


Рис. 79

от этого квадрата четыре уголка со стороной $2n$ (на рис. 80 соответствующая фигура изображена для $n=2$). За $2n$ ходов конь может попасть в точности во все чёрные клетки полученной фигуры.

Докажем это. Прежде всего заметим, что после нечётного числа ходов конь попадает на белую клетку, а после чётного — на чёрную. Индукцией по m несложно доказать, что если $m \geqslant 3$, то за m ходов конь попадает в любую клетку соответствующего цвета (чёрного при чётном m и белого при нечётном m) фигуры, которая получается при отрезании от квадрата со стороной $4m+1$ четырёх уголков со стороной m. При $m=3$ это легко проверяется, а шаг индукции очевиден.

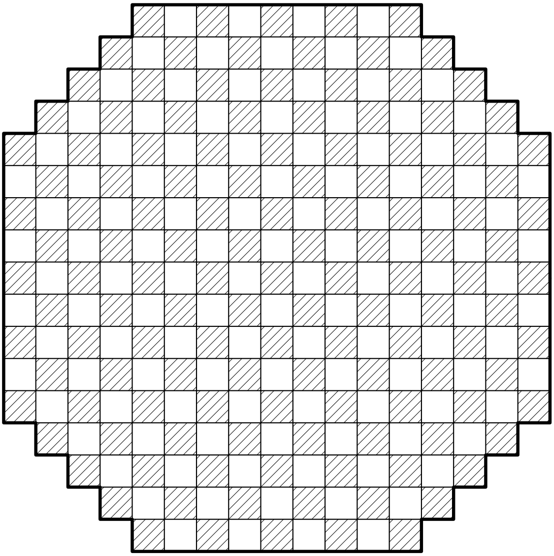


Рис. 80

1954 год (XVII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. См. рис. 81.

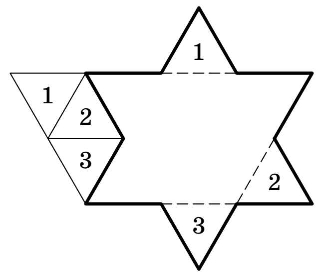


Рис. 81

2. Применим индукцию по n. При $n=3$ имеем два треугольника, у которых соответственные стороны равны. Рассмотрим теперь два n-угольника, где $n\geqslant 4$. По условию у них есть пара равных соответственных углов. Отрежем от каждого многоугольника треугольник, две стороны которого заключают данный угол. Эти треугольники равны, поэтому к оставшимся $(n-1)$-угольникам можно применить предположение индукции. Действительно, отрезая от равных углов равные углы, мы получаем равные углы.

3. Вторая схема деления может быть только такой:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1\times\times\times & \times \\ \cline{2-2}
\times & \times\times\times \\ \cline{1-1}
-\,1\times & \\
\times & \\ \cline{1-1}
-\,\times\times & \\
\times\times & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Если данное число равно $\overline{1abc}$, то согласно второй схеме деления $10+a-x=1$, где число x не превосходит 9. Поэтому $a=x-9\leqslant 0$. Таким образом, $a=0$ и $x=9$. Из этого можно сделать следующие выводы. В первой схеме деление производится на 2 или на 5. Во второй схеме деление производится на делитель числа x, отличный от 1, т. е. на 3 или на 9.

Число $10b+c$ делится на число, на которое производится деление в первой схеме, причём эта схема показывает, что $b \geqslant 1$. Число $\overline{1abc}=\overline{10bc}$ должно делиться на 3, поэтому если в первой схеме деление производится на 2, то число равно 1014, а если деление производится на 5, то число равно 1020 или 1035. Несложная проверка показывает, что числа 1014 и 1035 нам подходят, а число 1020 не подходит.

4. Предположим, что $n^2-m^2=1954$. Если одно из чисел m и n чётно, а другое нечётно, то число n^2-m^2 нечётно. Поэтому числа m и n либо оба чётны, либо оба нечётны. Легко проверить, что тогда число n^2-m^2 делится на 4. А число 1954 на 4 не делится.

5. Сумма цифр трёхзначного числа $100a+10b+c$ равна $a+b+c$. Ясно, что $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \leqslant 100$. Кроме того, для числа 100 указанное отношение равно 100.

8 класс

1. Если мы возьмём квадрат со стороной 1, приложим к нему 4 квадрата со стороной 1 и к каждой из противоположных сторон этих четырёх квадратов приложим равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 1, то в результате получим фигуру, которая представляет собой требуемую развёртку (рис. 82). Эту фигуру можно вырезать из квадрата со стороной $2\sqrt{2}<3$.

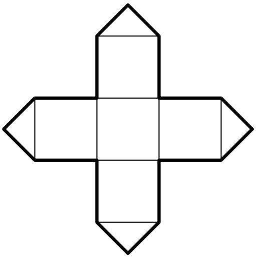


Рис. 82

2. Если мы повернём указанные векторы на 90° и умножим их на 2, то они превратятся в векторы сторон многоугольника. Сумма векторов сторон многоугольника равна $\vec{0}$, поэтому сумма исходных векторов тоже равна $\vec{0}$.

3. См. решение задачи 3 для 7 класса.

4. См. решение задачи 4 для 7 класса.

5. Докажем, что указанная бесконечная система уравнений эквивалентна системе двух уравнений:

$$x + y + z = 0,$$
$$4x + 2y + z = 0.$$

Во-первых, если мы вычтем из первого уравнения новой системы второе уравнение, умноженное на $\frac{1}{2^{n+2}}$, то получим n-е уравнение исходной системы. Во-вторых, уже из первых двух уравнений исходной системы

$$x\left(1 - \frac{1}{2}\right) + y\left(1 - \frac{1}{4}\right) + z\left(1 - \frac{1}{8}\right) = 0,$$
$$x\left(1 - \frac{1}{4}\right) + y\left(1 - \frac{1}{8}\right) + z\left(1 - \frac{1}{16}\right) = 0$$

следуют указанные два уравнения. Действительно, вычтя из второго уравнения первое, получим $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{16} = 0$. Прибавив это уравнение ко второму уравнению, получим $x + y + z = 0$.

9 класс

1. *Первый способ.* Пусть $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. По условию $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Следовательно, x_0 — двукратный корень многочлена $f(x)$, т. е. многочлен $f(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.

Второй способ. Пусть

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = \\ = (x - x_0)^4 + b_1(x - x_0)^3 + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0) + b_4.$$

Тогда

$$(x + x_0)^4 + a_1(x + x_0)^3 + a_2(x + x_0)^2 + a_3(x + x_0) + a_4 = \\ = x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим $b_4=x_0^4+a_1x_0^3+a_2x_0^2+a_3x_0+a_4=0$ и $b_3=4x_0^3+3a_1x_0^2+$ $+2a_2x_0+a_3=0$. Следовательно, $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ делится на $(x-x_0)^2$.

2. При вычёркивании из данного числа 100 цифр мы всегда будем получать числа с одним и тем же числом знаков, поэтому нужно, чтобы первые цифры были наибольшими возможными. Сначала вычеркнем первые 8 цифр, оставим после них цифру 9; затем вычеркнем следующие 19 цифр, оставив после них цифру 9, и т. д., до тех пор пока мы не вычеркнем 84 цифры (последняя из них — цифра 4 в числе 49) так, чтобы получилось число

$$999995051\ldots5758596061\ldots99100.$$

Мы должны вычеркнуть ещё 16 цифр. Чтобы следующей за 99999 цифрой была цифра 9, нужно вычеркнуть 19 цифр; мы этого сделать не можем. Оставить цифру 8 мы тоже не можем: для этого нужно вычеркнуть 17 цифр. Но мы можем оставить цифру 7, вычёркивая 15 цифр 505152535455565. После этого осталось вычеркнуть лишь одну цифру; это должна быть цифра 5 числа 58.

3. Сложим все эти неравенства. Коэффициент при каждом числе a_k окажется равным $1-3+2=0$. Таким образом, у нас есть набор неотрицательных чисел $a_1-3a_2+2a_3$, $a_2-3a_3+2a_4$, ..., сумма которых равна 0. Значит, каждое из чисел равно 0, т. е. в действительности у нас есть система не неравенств, а уравнений. Эти уравнения удобно переписать в виде

$$\begin{gathered}(a_1-a_2)+2(a_3-a_2)=0,\\ (a_2-a_3)+2(a_4-a_3)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_{100}-a_1)+2(a_2-a_1)=0.\end{gathered}$$

Из этих уравнений последовательно получаем

$$a_2 - a_3 = (a_1 - a_2)/2,$$
$$a_3 - a_4 = (a_2 - a_3)/2 = (a_1 - a_2)/2^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_1 - a_2 = (a_{100} - a_1)/2 = (a_1 - a_2)/2^{100}.$$

Последнее равенство возможно лишь при $a_1 = a_2$. Но тогда $a_2 = a_3$, $a_3 = a_4$, ..., $a_{100} = a_1$.

4. Рассмотрим сначала случай неостроугольного треугольника. Пусть, например, угол C неострый. Тогда в четырёхугольниках AB_1SC_1 и C_1SA_1B углы при вершинах B_1 и A_1 тупые, и по крайней мере в одном из этих четырёхугольников угол при вершине C_1 неострый.

В дальнейшем будем считать, что треугольник ABC остроугольный. Предположим, что в каждом из полученных четырёхугольников AB_1SC_1, C_1SA_1B, A_1SB_1C по крайней мере один из углов при каждой паре вершин C_1 и B_1, C_1 и A_1, A_1 и B_1 острый. Пусть, например, в четырёхугольнике AB_1SC_1 угол при вершине C_1 острый. Тогда в четырёхугольнике C_1SA_1B угол при вершине C_1 тупой, поэтому угол при вершине A_1 должен быть острым. Тогда в четырёхугольнике A_1SB_1C угол при вершине A_1 тупой, поэтому угол при вершине B_1 должен быть острым.

Пусть A_2, B_2, C_2 — основания высот, опущенных из вершин A, B, C на стороны треугольника. Тогда точка C_1 должна лежать внутри отрезка BC_2, точка A_1 — внутри отрезка CA_2, точка B_1 — внутри отрезка AB_2 (рис. 83). Но в таком случае отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не могут пересекаться в одной точке, поскольку отрезки AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (точке пересечения высот). Приходим к противоречию.

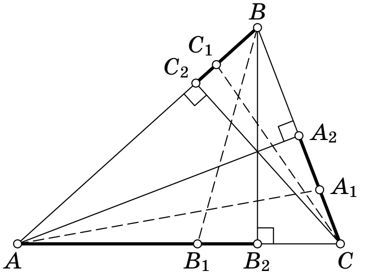


Рис. 83

5. *Первый способ.* Неравенство $8^2+10^2<13^2$ показывает, что треугольник ABC тупоугольный. Покажем, что если все грани тетраэдра $ABCD$ равны, то треугольник ABC должен быть остроугольным. Любому тетраэдру можно сопоставить параллелепипед, проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Если исходный тетраэдр равногранный, то грани полученного параллелепипеда являются параллелограммами с равными диагоналями, т. е. прямоугольниками. Таким образом, равногранному тетраэдру соответствует прямоугольный параллелепипед. Если длины рёбер этого параллелепипеда равны a, b, c, то квадраты длин рёбер исходного тетраэдра равны a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+a^2. Неравенства $(a^2+b^2)+(b^2+c^2)>c^2+a^2$ и т. п. показывают, что грани исходного тетраэдра являются остроугольными треугольниками.

Второй способ. Предположим, что в пространстве существуют искомые четыре точки. Неравенство $AB^2+AC^2<$ $<BC^2$ показывает, что $\angle BAC>90^\circ$. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCM$. В этом параллелограмме угол при вершине A тупой, поэтому $AM<BC$. Проведём в треугольнике BMC высоту MH. Из равенства треугольников BMC и BDC следует, что DH — высота треугольника BDC. Таким образом, плоскость DHM перпендикулярна прямой BC, и точка D лежит в этой плоскости на окружности радиуса HM с центром H. Легко проверить, что M — наиболее удалённая от точки A точка этой окружности, поэтому $AD<AM<BC$. Получено противоречие.

10 класс

1. Данное уравнение можно переписать в виде

$$(x+\sin(xy))^2=-1+\sin^2(xy).$$

Если это уравнение имеет решение, то $\sin^2(xy)\geqslant 1$, т. е. $\sin(xy)=\pm 1$. Если $\sin(xy)=\pm 1$, то рассматриваемое уравнение принимает вид $(x \pm 1)^2 = 0$. Его решения имеют вид $x = \mp 1$. Наконец, если $\sin(\mp y) = \pm 1$, то $\sin y = -1$.

2. См. решение задачи 2 для 3 класса.

3. Аналогично решению задачи 3 для 9 класса.

4. См. решение задачи 4 для 9 класса.

5. См. решение задачи 5 для 9 класса.

Второй тур

7 класс

1. Эти буквы нужно расставить в шахматном порядке.

2. Машины проезжают перекрёстки в разные моменты времени, поэтому они могли бы встретиться только на некоторой улице, двигаясь навстречу друг другу. Но на каждой улице направление движения этих машин определено однозначно (рис. 84); двигаться по одной улице в разных направлениях они не могут.

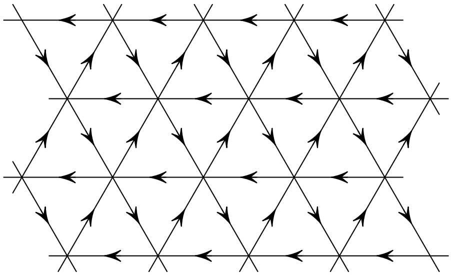


Рис. 84

3. Запишем уравнения рассматриваемой системы в виде $\sum\limits_{i=1}^{7} a_{ij}x_i = 0$. Коэффициенты a_{ij} обладают следующим свойством: $|a_{jj}| > \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$ для каждого j. Пусть $x_1, \ldots, x_7$ — решение рассматриваемой системы. Предположим, что хотя бы одно из чисел x_1, ..., x_7 отлично от нуля. Пусть x_k — наибольшее по абсолютной величине из этих чисел. Тогда $|a_{kk}x_k| > \left|\sum\limits_{i\neq k} a_{ik}x_i\right|$, поэтому равенство $\sum\limits_{i=1}^{7} a_{ik}x_i = 0$ не может выполняться. Приходим к противоречию.

Ясно также, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 0$ — решение данной системы.

8 класс

1. Рассмотрим всевозможные пары клеток, симметричных относительно центра квадрата. Количество таких пар равно $(17^2-1)/2 = 144$. Сумма чисел, написанных в двух клетках, может быть равна 2, 3, ..., 140. Поэтому найдутся две пары клеток, симметричных относительно центра квадрата, с равными суммами написанных чисел. В качестве точек A и C возьмём центры одной пары клеток, а в качестве точек B и D — центры другой пары.

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. Будем называть «чётным» делитель, который разлагается на чётное число простых сомножителей (1 относится к «чётным» делителям), а «нечётным» — делитель, который разлагается на нечётное число простых сомножителей. Докажем индукцией по k, что число $N_k = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot p_k$ (произведение первых k простых чисел) имеет 2^{k-1} «чётных» делителей и 2^{k-1} «нечётных» делителей. (Тогда для числа N_k рассматриваемая сумма равна $2^{k-1} - 2^{k-1} = 0$.)

Для числа $N_1 = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для N_k. Число N_{k+1} имеет 2^{k-1} «чётных» делителей и 2^{k-1} «нечётных» делителей, не делящихся на p_{k+1} (все эти делители являются делителями числа N_k). Помимо этих делителей оно имеет делители, делящиеся на p_{k+1}, а именно 2^{k-1} «чётных» делителей, соответствующих «нечётным» делителям числа N_k, и 2^{k-1}

«нечётных» делителей, соответствующих «чётным» делителям числа N_k. В итоге получаем $2^{k-1}+2^{k-1}=2^k$ «чётных» делителей и 2^k «нечётных» делителей.

4. См. решение задачи 3 для 7 класса.

5. Ось симметрии семиугольника обязательно проходит через одну из его вершин (остальные вершины разбиваются на пары симметричных вершин). Пусть у семиугольника есть ось симметрии. Тогда у него есть три пары равных углов и три пары равных сторон. Вторая ось симметрии может быть расположена тремя существенно различными (не симметричными) способами. Легко проверить, что в каждом из этих трёх случаев все стороны семиугольника оказываются равными и все углы тоже. Таким образом, если у семиугольника есть хотя бы две оси симметрии, то он правильный, поэтому у него 7 осей симметрии.

9 класс

1. Построим на луче l_1 точку C так, что $\frac{OC}{OB_1}=\frac{OA_2}{OB_2}$. Тогда $CA_2 \parallel B_1B_2$, поэтому $A_1S=A_1A_2\cdot\frac{A_1B_1}{A_1C}$. Точка A_2 перемещается по окружности ω с центром в точке O радиуса OA_2, поэтому искомое ГМТ получается из окружности ω гомотетией с центром в точке A_1 и коэффициентом $\frac{A_1B_1}{A_1C}$. Это ГМТ является окружностью ω' с центром O', лежащим на прямой l_1.

2. *Первый способ.* Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$. Выразим эти векторы через $e_1=\vec{a}$ и $e_2=\vec{d}$. В результате получим

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= e_1+\lambda_1e_2,\\
\vec{c} &= \vec{b}-\lambda_2e_1=(1-\lambda_2)e_1+\lambda_1e_2,\\
e_2 &= \vec{c}-\lambda_3\vec{b}=(1-\lambda_2-\lambda_3)e_1+(\lambda_1-\lambda_1\lambda_3)e_2.
\end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекают соотношения $1-\lambda_2=\lambda_3$ и $\lambda_1-\lambda_1\lambda_3=1$. Наконец, пусть $-\mu e_1=\overrightarrow{OB}$. Тогда $-\mu e_1=e_2-\lambda_4\vec{c}=-\lambda_4(1-\lambda_2)e_1+(1-\lambda_4\lambda_1)e_2$, поэтому $\mu=\lambda_4(1-\lambda_2)$ и $\lambda_4\lambda_1=1$. Учитывая все эти соотношения, получаем

$$\mu=\lambda_4(1-\lambda_2)=\lambda_4\lambda_3=\frac{\lambda_3}{\lambda_1}=\lambda_3(1-\lambda_3)\leqslant\frac{1}{4}.$$

Второй способ. Пусть

$$\alpha=\angle A_1OA_2,\ \ \beta=\angle A_2OA_3,\ \ \gamma=\angle A_3OA_4,\ \delta=\angle A_4OA_1.$$

Записывая теорему синусов для каждого из треугольников A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4 и A_4OA_1, получаем

$$\frac{OB}{OA_1}=\frac{\sin\alpha\ \sin\beta\ \sin\gamma\ \sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\beta+\gamma)\ \sin(\gamma+\delta)\ \sin(\delta+\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\frac{OB}{OA_1}\leqslant\frac{1}{4}\frac{(\sin\alpha\ \sin\beta+\sin\gamma\ \sin\delta)^2}{(\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\beta+\gamma))^2}=\frac{1}{4};$$

последнее равенство следует, например, из теоремы Птолемея, применённой к вписанному четырёхугольнику, вершины которого делят окружность на дуги 2α, 2β, 2γ и 2δ.

3. Можно считать, что $C_1\geqslant C_2\geqslant\ldots\geqslant C_{100}>0$. Если $C_1\geqslant 100$, то $C_1+C_2+C_3>100$. Поэтому будем считать, что $C_1<100$. Тогда $100-C_1>0$, $100-C_2>0$, $C_2-C_3\geqslant 0$ и $C_1-C_3\geqslant 0$, поэтому

$$\begin{aligned}100(C_1+C_2+C_3)\geqslant 100(C_1+C_2+C_3)-(100-C_1)(C_1-C_3)-\\-(100-C_2)(C_2-C_3)=\\=C_1^2+C_2^2+C_3(300-C_1-C_2)>\\>C_1^2+C_2^2+C_3(C_3+C_4+\ldots+C_{100})\geqslant\\\geqslant C_1^2+C_2^2+C_3^2+\ldots+C_{100}^2>10000.\end{aligned}$$

Следовательно, $C_1+C_2+C_3>100$.

4. Предположим, что требуемый ряд чисел a_i существует. Число b_i полностью задаётся числом a_i и рядом (1) как множеством чисел. Поэтому при перестановке чисел a_i числа b_i переставляются точно так же. Кроме того, если числа a_i расположены в порядке возрастания, то числа b_i тоже расположены в порядке возрастания. Пусть α_1, ..., α_{15} — это числа a_1, ..., a_{15}, расположенные в порядке возрастания, а β_1, ..., β_{15} — числа b_1, ..., b_{15}, расположенные в порядке возрастания, т. е. β_1, ..., β_{15} — это последовательность

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 13, 13.$$

Из того, что $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2$, $\beta_4 = 3$, $\beta_5 = 4$, $\beta_6 = 5$ и $\beta_7 = 5$, следует, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6 = \alpha_7$. В таком случае если $\alpha_7 = \alpha_8$, то $\beta_8 = 5$, а если $\alpha_7 < \alpha_8$, то $\beta_8 = 7$. А у нас $\beta_8 = 6$. Приходим к противоречию.

5. При проведении пяти отрезков из конца отрезка появляются 5 новых свободных концов и пропадает один старый. В результате число свободных концов увеличивается на 4. Поэтому если пятёрки отрезков проведены k раз, то число свободных концов равно $4k + 1$. При $k = 250$ получаем нужное число свободных концов.

10 класс

1. Плоскость симметрии треугольной пирамиды $ABCD$ обязательно содержит две её вершины. Действительно, если бы были две пары вершин, симметричных относительно одной плоскости, то все четыре вершины пирамиды лежали бы в одной плоскости. Поэтому плоскость симметрии однозначно задаётся парой вершин C и D, лежащих в ней. При этом $AC = BC$ и $AD = BD$.

Предположим, что есть две плоскости симметрии. Рёбра, через которые они проходят (на рисунках они выделены), могут либо иметь общую вершину (рис. 85, а), либо не иметь (рис. 85, б). В первом случае мы получаем правильную пирамиду, которая имеет либо 3 плоскости симметрии, либо 6 (когда длина бокового ребра равна длине ребра основания, т. е. в случае правильного тетраэдра). Во втором случае пирамида имеет либо 2 плоскости симметрии, либо 6 (если $c = b \neq a$, то новых плоскостей симметрии не возникает).

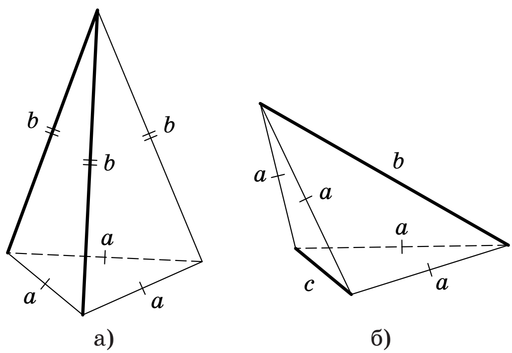


Рис. 85

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. См. решение задачи 3 для 9 класса.

4. Пусть $|x| \geqslant 1$. Тогда $x^2 + Ax + B > 0$ и $x^2 + Cx + D > 0$. Поэтому $x^2 + \frac{A+C}{2}x + \frac{B+D}{2} > 0$.

5. Отнесём к первому классу все числа, в записи которых встречается чётное число двоек, а ко второму классу — все числа, в записи которых встречается нечётное число двоек. Два числа одного класса либо содержат одинаковое число двоек, либо в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом. Если два числа различны, то на каком-то месте в одном числе стоит 1, а в другом числе стоит 2; если же двоек у этих чисел одинаковое количество, то таких мест по крайней мере два. Если в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом, то по крайней мере двум двойкам в записи одного числа соответствуют единицы в записи другого числа.

1955 год (XVIII олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. См. решение задачи 1 для 9 класса при $k=7$.

2. Точка K делит AD пополам, поэтому $AB=BD$. Точка B лежит на окружности с диаметром AC, поэтому $BD=$ $=DC=DA$. Таким образом, $AC=2AB$. Поэтому $\angle BAC=60^\circ$ и $\angle BCA=30^\circ$.

3. Фиксируем точку D. На стороне BC есть две точки E_1 и E_2, для которых $AE_1=AE_2=CD$, а именно точки, для которых $BE_1=AD$ и $CE_2=AD$. Отрезки AE_2 и CD пересекаются в точке, лежащей на высоте BH треугольника ABC. Отрезок CD получается из отрезка AE_1 поворотом на 120° вокруг центра треугольника ABC. Поэтому из точки пересечения отрезков CD и AE_1 сторона AC видна под углом 120°.

4. Число n^2+n при делении на 5 даёт в остатке либо 0, либо 1, либо 2. Поэтому n^2+n+1 не делится на 5, а значит, n^2+n+1 не делится на 1955.

5. Квадраты, на которые разрезан прямоугольник, по условию равны. Поэтому каждая сторона прямоугольника разбита на равные части: одна сторона на m частей, а другая на n. Общее число квадратов равно mn, поэтому $mn=13$. Но число 13 простое, поэтому одно из чисел m и n равно 1, а другое равно 13.

8 класс

1. Поскольку $2^4=16$, число 2^{4k} оканчивается на 6. Соответственно, числа 2^{4k+1}, 2^{4k+2}, 2^{4k+3} оканчиваются на 2, 4, 8. Для чисел вида 2^{4k} требуемое утверждение очевидно, поскольку $b=6$. Заметим также, что число b всегда чётно. Поэтому достаточно проверить, что числа $2^{4k+1}-2$, $2^{4k+2}-4$, $2^{4k+3}-8$ делятся на 3, иными словами, достаточно проверить, что $2^{4k}-1$ делится на 3. Число $2^4=16$ при делении на 3 даёт остаток 1, поэтому число 2^{4k} тоже даёт остаток 1 при делении на 3.

2. Выберем из сторон BA и BC меньшую и отложим на большей стороне от точки B отрезок, равный меньшей стороне. Например, если $BC<BA$, как на рис. 86, то мы отложим отрезок BA', равный отрезку BC. Затем проведём через вершину B прямую, параллельную прямой $A'C$. Прямая KL расположена в полосе, ограниченной прямой $A'C$ и проведённой прямой. Аналогично строится полоса, в которой заключена прямая MN.

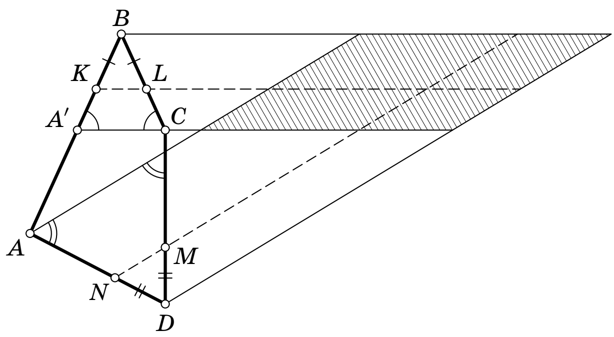


Рис. 86

3. См. решение задачи 1 для 10 класса при $n=7$.

4. Если выпуклая фигура содержит прямую l и точку A, то она содержит и полосу, заключённую между прямой l и прямой, проходящей через точку A параллельно прямой l. Если по обе стороны от данной прямой есть сколь угодно далёкие от неё точки, то мы получаем плоскость; если такие точки есть только по одну сторону от данной прямой, то мы получаем полуплоскость; если все расстояния от точек данной выпуклой фигуры до точек данной прямой не превосходят некоторого числа, то мы получаем полосу.

5. Пусть точки пересечения окружностей обозначены так, как на рис. 87. Воспользуемся свойствами ориентированных углов между прямыми:

$$\begin{aligned}\angle(B_1A_1, A_1D_1) &= \angle(B_1A_1, A_1A) + \angle(AA_1, A_1D_1) = \\ &= \angle(B_1B, BA) + \angle(AD, DD_1),\\ \angle(B_1C_1, C_1D_1) &= \angle(B_1C_1, C_1C) + \angle(CC_1, C_1D_1) = \\ &= \angle(B_1B, BC) + \angle(CD, DD_1).\end{aligned}$$

Поэтому равенство $\angle(B_1A_1, A_1D_1) = \angle(B_1C_1, C_1D_1)$, которое означало бы, что точка A_1 лежит на окружности, проходящей через точки B_1, C_1 и D_1, эквивалентно равенству

$$\angle(B_1B, BA) + \angle(AD, DD_1) = \angle(B_1B, BC) + \angle(CD, DD_1).$$

Чтобы доказать последнее равенство, воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned}\angle(AB, BB_1) + \angle(BB_1, BC) = \angle(AB, BC) = \angle(AD, DC) = \\ = \angle(AD, DD_1) + \angle(DD_1, DC).\end{aligned}$$

Учитывая, что $\angle(AB, BB_1) = -\angle(BB_1, AB)$ и $\angle(DD_1, DC) = -\angle(DC, DD_1)$, получаем требуемое.

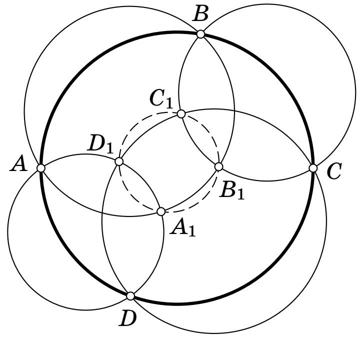


Рис. 87

9 класс

1. Запишем данную таблицу в виде

$$\begin{array}{cccc} k\cdot 0+1, & k\cdot 0+2, & \ldots, & k\cdot 0+k,\\ k\cdot 1+1, & k\cdot 1+2, & \ldots, & k\cdot 1+k,\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ (k-1)k+1, & (k-1)k+2, & \ldots, & (k-1)k+k. \end{array}$$

Каждое число таблицы представлено в виде $ka+b$, где $0\leqslant a\leqslant k-1$ и $1\leqslant b\leqslant k$. Будем отдельно суммировать слагаемые ka и слагаемые b. Из каждой строки выписано в точности одно число, поэтому будут присутствовать слагаемые ka для каждого $a=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$. Из каждого столбца выписано в точности одно число, поэтому будут присутствовать слагаемые b для каждого $b=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Таким образом, искомая сумма равна

$$k(0+1+2+\ldots+(k-1))+(1+2+\ldots+k)=\\ =k\cdot\frac{k(k-1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k^2+1)}{2}.$$

2. Пусть S_1 и S_2 — данные окружности, O_1 и O_2 — их центры. Рассмотрим окружность S_2', которая получается из окружности S_2 переносом на вектор $\overrightarrow{O_2O_1}$; центр этой окружности совпадает с центром окружности S_1. Пусть A_1 — точка окружности S_1, A_2 и A_2' — точки окружностей S_2 и S_2', соответствующие друг другу. Если M — середина отрезка A_1A_2, а M' — середина отрезка A_1A_2', то $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_2'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{O_2O_1}$ (рис. 88). Поэтому можно рассмотреть случай, когда даны две концентрические окружности: полученное ГМТ нужно просто сдвинуть на вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2}$.

Пусть O — общий центр двух окружностей радиусов R и r, причём $R>r$. Фиксируем на окружности радиуса r точку A и рассмотрим середины всех отрезков AB, где точка B перемещается по окружности радиуса R. Они образуют окружность, гомотетичную окружности радиуса R с

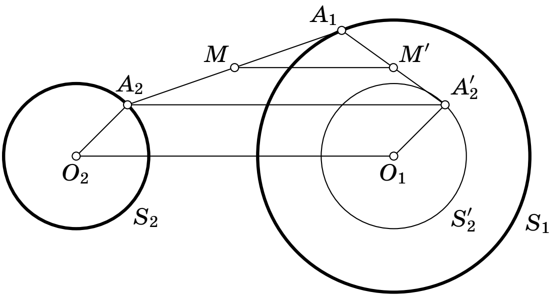


Рис. 88

центром гомотетии A и коэффициентом гомотетии $1/2$. Самая близкая к O точка полученной окружности находится на расстоянии $\frac{R-r}{2}$, а самая далёкая — на расстоянии $\frac{R+r}{2}$. Действительно, введём систему координат с началом в точке O, направив ось Ox по лучу OA (рис. 89). Точка A имеет координату r, а самая близкая к ней точка B_1 и самая далёкая от неё точка B_2 окружности радиуса R имеют координаты R и $-R$ соответственно. Поэтому середины отрезков AB_1 и AB_2 имеют координаты $\frac{R+r}{2}$ и $\frac{-R+r}{2}$.

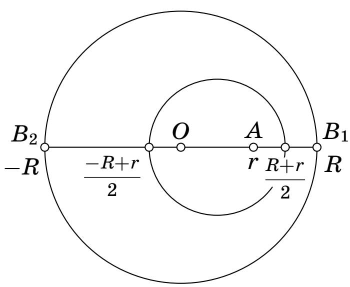


Рис. 89

Если точка A будет двигаться по всей окружности, то мы получим кольцо с внутренним радиусом $\frac{R-r}{2}$ и внешним радиусом $\frac{R+r}{2}$.

3. Если $x=0$ или ± 1, то $y=\pm 1$ или 0. Ясно также, что $x\neq -1$ и $y\neq -1$. Поэтому решений такого вида ровно два: $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=0$. Покажем, что других решений нет.

Нас интересует случай, когда $0 < |x|, |y| < 1$. В таком случае $|x|^3 + |y|^3 > x^4 + y^4 = 1$. Поэтому если числа x и y оба положительны, то решений нет. Если оба эти числа отрицательны, то решений тоже нет. Пусть теперь, например, $x > 0$ и $y < 0$. Тогда $x^3 + y^3 < x^3 < 1$. В этом случае решений тоже нет.

4. Числа $a_1, \ldots, a_p$ простые, причём все они строго больше p, поэтому ни одно из них не делится на p. Рассмотрим остатки от деления этих чисел на p. В результате мы получили p остатков, отличных от 0. Следовательно, есть два числа a_i и a_j, дающие одинаковые остатки при делении на p. Поэтому их разность делится на p. Но $a_i - a_j = (i-j)d$, где d — разность прогрессии. Число $|i-j|$ строго меньше p, поэтому на p должно делиться число d.

5. Отрезок CE пересекает отрезок AD или отрезок BD; пусть для определённости он пересекает отрезок AD в точке P (рис. 90). Тогда $AP + PC > AC$ и $EP + PD > ED$, поэтому $DA + EC = (DP + PA) + (EP + PC) = (AP + PC) + (EP + PD) > AC + ED$. Следовательно, $EC - ED > AC - DA > 1$. Аналогично если отрезок CE пересекает отрезок BD, то $EC - ED > BC - DB > 1$.

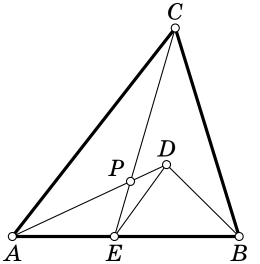


Рис. 90

10 класс

1. Таблица симметрична относительно диагонали, поэтому каждому числу, расположенному вне диагонали, соответствует равное ему число на симметричном месте. Значит, вне диагонали расположено чётное число единиц, чётное число двоек и т. д. По условию в каждой строке встречаются все числа от 1 до n. Поэтому в каждой строке любое число от 1 до n встречается ровно один раз, а всего в таблице оно встречается ровно n раз, причём вне диагонали оно встречается чётное число раз. Число n нечётно, поэтому каждое число от 1 до n встречается на диагонали нечётное число раз; в частности, каждое число от 1 до n встречается на диагонали по крайней мере один раз. Но на диагонали всего n мест, поэтому каждое число от 1 до n встречается на диагонали ровно один раз.

2. См. решение задачи 3 для 9 класса.

3. Пусть данные прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O. Проведём через точку O перпендикуляр к прямой l_1 (рис. 91). При сжатии в направлении прямой l_1 с коэффициентом $1/2$ каждая точка этого перпендикуляра перемещается параллельно прямой l_1, поэтому расстояние от неё до точки O увеличивается.

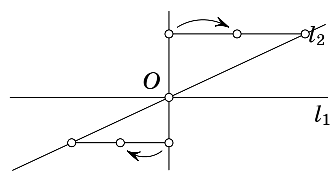


Рис. 91

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. Выберем точки A, B, C на одном расстоянии от точки O. Тогда все указанные углы будут углами при основаниях равнобедренных треугольников, а угол при основании равнобедренного треугольника обязательно острый.

Второй тур

7 класс

1. Пусть $x^3-2y^3-4z^3=0$, где x, y, z — целые числа. Тогда число x чётно. После замены $x=2x_1$ получаем уравнение $8x_1^3-2y^3-4z^3=0$. Сократим на 2: $4x_1^3-y^3-2z^3=0$. Значит, число y чётно. После замены $y=2y_1$ получаем уравнение $4x_1^3-8y_1^3-2z^3=0$. Снова сократим на 2: $2x_1^3-4y_1^3-z^3=0$. Значит, число z чётно. После замены $z=2z_1$ получаем уравнение $x_1^3-2y_1^3-4z_1^3=0$, которое имеет такой же вид, как и исходное уравнение. Поэтому снова можно доказать, что числа x_1, y_1, z_1 чётны и т. д. Но это возможно лишь в том случае, когда $x=y=z=0$.

2. Ясно, что $a \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Рассмотрим значения x, равные 1, 2, ..., n. Если одно из чисел a и b отлично от нуля, то трёхчлен ax^2+bx+c при таких x принимает по крайней мере $n/2$ различных значений. Эти значения заключены между 0 и $an^2+|b|n+c$. Количество различных точных четвёртых степеней, заключённых между 0 и $an^2+|b|n+c$, не превосходит $\sqrt[4]{an^2+|b|n+c}+1$. Поэтому $\sqrt[4]{an^2+|b|n+c}+1 \geqslant n/2$, т. е. $an^2+|b|n+c \geqslant (n/2-1)^4$. При очень больших n такое неравенство выполняться не может, поскольку $(n/2)^4$ будет гораздо больше, чем an^2.

3. Центр O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC, является точкой пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C. Поэтому

$$\angle O_1CB = \frac{180^\circ - \angle C}{2} \quad \text{и} \quad \angle O_1BC = \frac{180^\circ - \angle B}{2}.$$

Следовательно,

$$\angle O_3O_1O_2 = \angle BO_1C = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle C}{2} - \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \\ = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{180^\circ - \angle A}{2} < 90^\circ.$$

Аналогично доказывается, что $\angle O_1O_2O_3 < 90^\circ$ и $\angle O_1O_3O_2 < < 90^\circ$.

4. Вместо шахматистов будем рассматривать различные числа и будем искать среди них самое большое и следующее за ним по величине. Решим задачу для n различных чисел.

Докажем, что два самых больших числа можно найти, сравнив $n+m-2$ пары чисел, где целое число m определяется неравенствами $m-1 < \log_2 n \leqslant m$. В нашем случае $m=5$, поэтому $n+m-2=28$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Есть набор из $n \geqslant 2$ чисел. На первом шаге он делится примерно пополам, т. е. если n чётно, то он делится на два набора из $n/2$ чисел, а если n нечётно, то на два набора из $(n-1)/2$ и $(n+1)/2$ чисел. На втором шаге с каждым набором, в котором есть по крайней мере два числа, повторяется то же самое и т. д. Пусть процесс останавливается после m-го шага, когда в каждом наборе остаётся ровно одно число. Тогда число m определяется неравенствами $m-1 < \log_2 n \leqslant m$.*

Доказательство. Индукцией по m легко доказать, что для набора из $2^{m-1}+1$ чисел процесс останавливается после m шагов, поскольку после первого шага бо́льший из наборов содержит $2^{m-2}+1$ чисел. Ясно также, что для набора из 2^m чисел процесс тоже останавливается после m шагов.

Таким образом, для набора из n чисел процесс останавливается после m шагов тогда и только тогда, когда $2^{m-1}+1 \leqslant n \leqslant 2^m$, т. е. $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$. Логарифмируя эти неравенства, получаем требуемое.

Будем последовательно делить набор из n чисел примерно пополам, как это описано в лемме. Согласно лемме процесс останавливается после m шагов. Группы, полученные на $(m-1)$-м шаге, состоят из пар чисел и отдельных чисел. В каждой такой группе сравним числа и найдём среди них наибольшее (отдельные числа пока ни с чем не сравниваются). Затем аналогично найдём наибольшее число в каждой группе, полученной на $(m-2)$-м шаге, и т. д. В результате найдём наибольшее число. При этом будет сделано $n-1$ сравнений. Действительно, при каждом сравнении отсеивается один кандидат на звание наибольшего числа, причём в результате будет отсеяно $n-1$ число.

Займёмся теперь поиском второго по величине числа. Ясно, что оно выбыло из дальнейшей борьбы в результате сравнения с наибольшим числом, поскольку оно больше любого другого числа. Таким образом, второе по величине число нужно искать среди тех чисел, которые сравнивались непосредственно с самым большим числом. Таких чисел m. Выбрать из них наибольшее можно за $m-1$ сравнений (после каждого сравнения мы оставляем большее число, а меньшее число в дальнейшем уже не рассматриваем).

Докажем, что сравнением менее $n+m-2$ пар чисел в общем случае обойтись нельзя.

Будем говорить, что число *проигрывает* сравнение, если оно оказывается меньше числа, с которым оно сравнивается. Пусть k_i — количество чисел, проигравших не менее i сравнений (косвенные проигрыши, когда из неравенств $a<b$ и $b<c$ делается вывод, что $a<c$, не учитываются; количество всех проигрышей равно количеству всех сравнений). Тогда сумма всех чисел k_i равна количеству всех сравнений, поскольку после каждого сравнения ровно одно из чисел k_i увеличивается на 1. Действительно, пусть при очередном сравнении проигрывает число, которое уже проиграло j сравнений. Тогда k_{j+1} увеличивается на 1, а остальные числа k_i не изменяются.

Количество всех сравнений не меньше k_1+k_2, поэтому достаточно доказать, что при любом алгоритме сравнений может получиться так, что после того, как удалось выявить наибольшее число и следующее за ним, будет выполняться неравенство $k_1+k_2 \geqslant n+m-2$. Прежде всего заметим, что после того, как алгоритм закончит работу, будет выполняться неравенство $k_1 \geqslant n-1$, поскольку все числа, кроме одного, должны были кому-то проиграть (если бы два числа никому не проиграли, то мы не знали бы, какое из них больше). Остаётся доказать, что при неудачных исходах может выполняться неравенство $k_2 \geqslant m-1$.

На каждом шаге работы алгоритма будем называть *лидером* число, которое пока никому не проиграло. Покажем, что неравенство $k_2 \geqslant m-1$ выполняется, если исходы сравнений следующие:

1) при сравнении двух не лидеров результат произвольный;

2) при сравнении лидера с не лидером всегда выигрывает лидер;

3) при сравнении двух лидеров выигрывает тот, у кого было больше выигрышей (если выигрышей было поровну, то результат произвольный).

Такие исходы сравнений возможны потому, что на лидера нет никаких ограничений сверху: если его увеличить, то результат предыдущих сравнений не изменится.

Введём теперь понятие *подчинения* лидеру. Первоначально все числа подчинены только самим себе. При сравнениях типа 1 и 2 подчинение лидерам не изменяется. При сравнении типа 3 проигравший и все его подчинённые переподчиняются новому лидеру.

Покажем индукцией по k, что если лидер выиграл k сравнений, то ему подчинено (вместе с ним самим) не более 2^k чисел. При $k=0$ лидеру подчинён только он сам. Пусть лидер, выигравший k сравнений, выигрывает у кого-то в очередной раз. Тот, у кого он выиграл, по нашему соглашению выиграл не более k сравнений. Поэтому как выигравшему, так и проигравшему подчинено не более 2^k чисел; при объединении этих двух групп получается не более 2^{k+1} чисел, что и требовалось.

Итак, наибольшее число выиграло по крайней мере m сравнений, поскольку ему в итоге будут подчинены все n чисел. Среди m чисел, проигравших наибольшему числу, есть только одно число, которое больше никому не проиграло (иначе мы не будем знать второе по величине число). Следовательно, $k_2 \geqslant m-1$.

8 класс

1. Пусть $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Тогда

$$f(x+1)-f(x) = \frac{(f(x+1))^2-(f(x))^2}{f(x+1)+f(x)} = \frac{a(2x+1)+b}{f(x+1)+f(x)},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))=\sqrt{a}$. При целом x число $f(x+1)-f(x)$ является целым, поэтому $\sqrt{a}=d$, где d — целое число. Кроме того, при целых $x\geqslant x_0$, где x_0 — достаточно большое число, разность $f(x+1)-f(x)$ должна быть равна своему предельному значению d. Положим $y=x_0+n$. Тогда $f(y)=f(x_0)+nd$ при всех натуральных n. Таким образом,

$$ay^2+by+c=(f(x_0)+nd)^2=(dy-dx_0+f(x_0))^2$$

для всех $y=x_0+n$, где n натуральное. Но тогда такое равенство имеет место для всех y. Итак, $d=\sqrt{a}$ и $e=f(x_0)-dx_0$, где x_0 — любое целое число.

2. *Первый способ*. Пусть O_1 и O_2 — центры первых двух окружностей, O — центр третьей окружности, A и B — точки пересечения третьей окружности с внешней касательной, P — середина дуги AB (точки P и O_1 лежат по разные стороны от прямой AB). Проведём из точки P касательную PQ к окружности с центром O_1. Докажем, что $PQ=PA$. Пусть M и N — точки касания окружности с центром O_1 с прямой AB и с третьей окружностью (рис. 92).

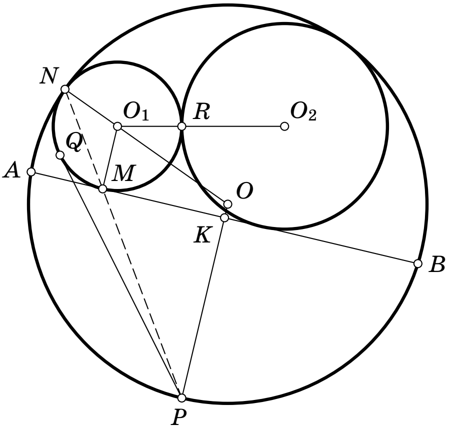


Рис. 92

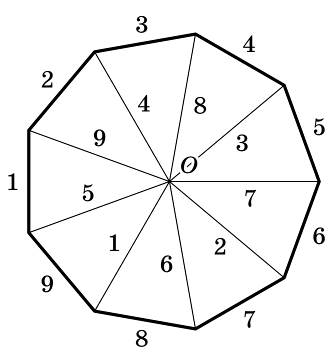


Рис. 93

Треугольники NO_1M и NOP равнобедренные, причём $\angle NO_1M = \angle NOP$, потому что прямые O_1M и OP параллельны (они обе перпендикулярны прямой AB). Поэтому прямая MN проходит через точку P. Следовательно,

$$PQ^2 = PM \cdot PN = PM \cdot (PM + MN) = PM^2 + PM \cdot MN = \\ = PM^2 + AM \cdot MB.$$

Пусть K — середина отрезка AB. Тогда $PM^2 = PK^2 + KM^2$ и $AM \cdot MB = AK^2 - KM^2$, поэтому

$$PQ^2 = (PK^2 + KM^2) + (AK^2 - KM^2) = PK^2 + AK^2 = AP^2.$$

Таким образом, $PO_1^2 = PQ^2 + QO_1^2 = PA^2 + r_1^2$, где r_1 — радиус окружности с центром O_1. Аналогично доказывается, что $PO_2^2 = PA^2 + r_2^2$, где r_2 — радиус окружности с центром O_2.

Пусть R — точка касания первых двух окружностей (она лежит на отрезке O_1O_2). Тогда $PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = RO_1^2 - RO_2^2$. Из этого следует, что $PR \perp O_1O_2$, а значит, PR — общая внешняя касательная к первым двум окружностям. (Тот факт, что множество точек X, для которых $XO_1^2 - XO_2^2 = \text{const}$, представляет собой прямую, перпендикулярную прямой O_1O_2, легко доказать методом координат или вывести из теоремы Пифагора.)

Второй способ. Сделаем инверсию с центром в точке P и радиусом AP. Тогда третья окружность и прямая AB поменяются местами. Поэтому первая и вторая окружности перейдут каждая сама в себя. Следовательно, точка R, в которой они касаются, останется неподвижной. Таким образом, обе окружности касаются прямой PR в точке R. Это означает, что PR — общая касательная.

3. а) См. рис. 93.

б) Сумма всех номеров сторон треугольников A_1OA_2, ..., A_nOA_1 равна $3(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$. Если для каждого из n треугольников сумма номеров сторон одна и та же, то она равна $\frac{3(n+1)}{2}$. Но для $n = 10$ число $\frac{3(n+1)}{2}$ не целое.

4. Положим $a=b=1$, $c=2$. Тогда требуемое неравенство примет вид

$$2AB+4AC+4BC > 2AB+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AC,$$

т. е. $\frac{7}{2}AC+\frac{7}{2}BC>0$. Это неравенство выполняется для всех положительных A, B, C.

Комментарий. Из отрезков a, b, c всегда можно составить вырожденный треугольник. Чтобы доказать это, положим $A=B=1$, $C=\varepsilon$. Тогда

$$a(b+\varepsilon c)+b(\varepsilon c+a)+\varepsilon c(a+b) > \frac{1}{2}(c^2+\varepsilon a^2+\varepsilon b^2). \qquad (*)$$

Должно выполняться неравенство $2ab\geqslant\frac{1}{2}c^2$, поскольку иначе неравенство (*) не выполнялось бы при малых ε. Значит, $c^2\leqslant 4ab\leqslant(a+b)^2$. Числа a, b, c положительны, поэтому $c\leqslant a+b$. Неравенства $a\leqslant b+c$ и $b\leqslant a+c$ доказываются аналогично.

5. Числа $[x]$ и $[y]$ различны тогда и только тогда, когда числа $[-x]$ и $[-y]$ различны. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $a>0$. Если $a<\frac{N-1}{N}$, то среди чисел $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ есть совпадающие, поскольку эти N чисел содержатся среди $N-1$ чисел 0, 1, ..., $N-2$. Поэтому $a\geqslant\frac{N-1}{N}$. Те же самые рассуждения для числа $1/a$ показывают, что $\frac{1}{a}\geqslant\frac{M-1}{M}$, т. е. $a\leqslant\frac{M}{M-1}$.

Покажем, что если $\frac{N-1}{N}\leqslant a\leqslant\frac{M}{M-1}$, то все числа $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ различны. Действительно, если $a\geqslant 1$, то вообще все числа $[a]$, $[2a]$, $[3a]$, ... различны, а если $a<1$, то $1-\frac{1}{N}\leqslant a<1$, $2-\frac{2}{N}\leqslant 2a<2$, ..., $N-1\leqslant Na<N$, поэтому $[ka]=k-1$ для $k=1, 2, \ldots, N$. Для чисел $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, ..., $\left[\frac{M}{a}\right]$ рассуждения аналогичны.

9 класс

1. Пусть $(n+1)\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $(n+1)\vec{b}=\overrightarrow{CA}$, $(n+1)\vec{c}=\overrightarrow{AB}$ (рис. 94). Тогда $\overrightarrow{A_2C_1}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{n+1}(n\vec{b}+\vec{c})$, $\overrightarrow{C_1B}=n\vec{c}$, $\overrightarrow{BA_1}=\vec{a}$

и $\overrightarrow{A_1C_2}=\frac{n}{n+1}\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{n}{n+1}(n\vec{a}+\vec{b})$. Поэтому

$$\overrightarrow{A_2C_2}=\frac{1}{n+1}(n\vec{b}+\vec{c})+n\vec{c}+\vec{a}+ \\ +\frac{n}{n+1}(n\vec{a}+\vec{b}).$$

В полученном выражении коэффициенты при $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равны (они равны $1+\frac{n^2}{n+1}$). Кроме того, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, поэтому вектор $\overrightarrow{A_2C_2}$ пропорционален $\vec{b}$, т. е. $A_2C_2 \parallel AC$. Для остальных прямых доказательство аналогично.

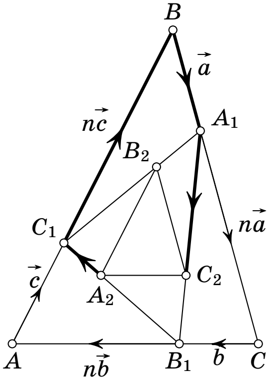


Рис. 94

Комментарий. Это доказательство можно также провести с помощью понятия центра масс.

2. Возьмём на положительной полуоси отрезки $[1, 2]$, $\left[2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right]$, $\left[3\frac{3}{4}, 4\frac{3}{4}\right]$, …, промежутки между которыми имеют длину $1/2$, $1/4$, $1/8$, … (рис. 95). На отрицательной полуоси возьмём симметричные им отрезки. Докажем, что эта система отрезков обладает требуемым свойством.

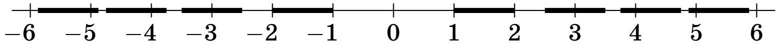


Рис. 95

Рассмотрим арифметическую прогрессию $\{a_n\}$ с положительной разностью d. Предположим, что все числа a_n попадают в промежутки между выбранными отрезками. Пусть N — некоторое положительное число. Выберем n так, что $a_n > N$. Между a_n и a_{n+1} расположены выбранные нами отрезки с общей длиной x и промежутки между ними с общей длиной y (возможно, $x=0$ или $y=0$). Согласно предположению a_n и a_{n+1} попадают в промежутки между выбранными отрезками, поэтому число x целое и $y>0$.

Пусть d_1 — наибольшее целое число, строго меньшее d, а $d_2 = d - d_1$. Ясно, что $0 < d_2 \leqslant 1$. Если N достаточно велико, то общая длина промежутков между выбранными отрезками, лежащих правее N, меньше d_2. В таком случае $y < d_2$. Ясно также, что $x \leqslant d_1$. Поэтому $d = x + y < d_1 + d_2 = d$. Полученное противоречие показывает, что a_n или a_{n+1} попадает в выбранный отрезок.

Если $d < 0$, то аналогичные рассуждения можно применить к отрезкам на отрицательной полуоси.

3. Перепишем данное уравнение в виде

$$1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}.$$

При $x > 0$ функция $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ монотонно убывает, поэтому она не может принимать значение 1 при двух различных положительных значениях x.

К о м м е н т а р и й. Сформулированное в условии задачи утверждение представляет собой частный случай правила знаков Декарта, позволяющего оценивать число корней многочлена на данном интервале.

4. См. решение задачи 2 для 8 класса.

5. Посмотрим сначала, с кем играл 1-й. Можно считать, что 1-й и 2-й сыграли против 3-го и 4-го, а 1-й и 5-й сыграли против 2-го и 3-го (этого можно добиться, поменяв местами 3-го и 4-го). 3-й игрок уже был два раза противником 1-го, поэтому против 1-го и 4-го играют 2-й и 5-й. После этого 2-й не может играть против 1-го, поэтому против 1-го и 3-го играют 4-й и 5-й. Остаётся последняя партия: 2-й и 4-й играют против 3-го и 5-го.

10 класс

1. Многочлен $f(x)$ делится на $x - \frac{p}{q}$, поэтому

$$f(x) = g(x)\left(x - \frac{p}{q}\right).$$

Пусть $g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$. Тогда

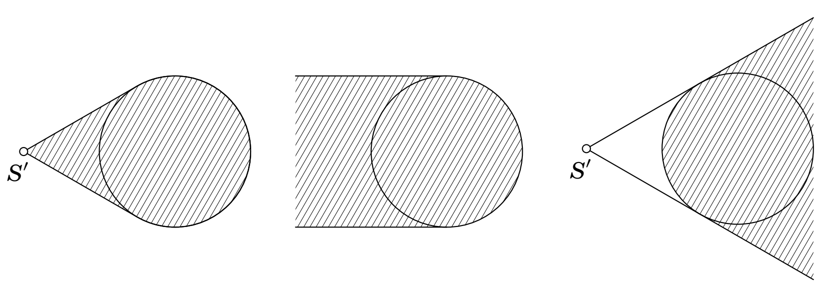
$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 - b_0\frac{p}{q}, \quad a_2 = b_2 - b_1\frac{p}{q}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}\frac{p}{q}, \quad a_n = -b_{n-1}\frac{p}{q}.$$

Число $b_0 = a_0$ целое. Равенство $qa_1 = qb_1 - pb_0$ показывает, что число qb_1 целое. Равенство $q^2a_2 = q^2b_2 - qb_1p$ показывает, что число q^2b_2 целое, и т. д. Таким образом, многочлен $q^{n-1}g(x)$ имеет целые коэффициенты.

Равенство $q^nf(k) = q^{n-1}g(k)(qk-p)$ показывает, что число $q^nf(k)$ делится на $qk-p$. Числа q и p взаимно простые, поэтому числа q^n и $qk-p$ тоже взаимно простые. Следовательно, число $f(k)$ делится на $qk-p$.

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. Пусть S — вершина конуса, S' — точка пересечения плоскости основания конуса с прямой, проходящей через точку S и источник света. Если точка S' принадлежит основанию конуса, то тень от конуса совпадает с его основанием. В дальнейшем будем считать, что точка S' не принадлежит основанию конуса. Рассмотрим сначала случай, когда $H > h$. Покажем, что тень от конуса представляет собой фигуру, заштрихованную на рис. 96, а). Действительно, если A — точка основания конуса, то тень отрезка



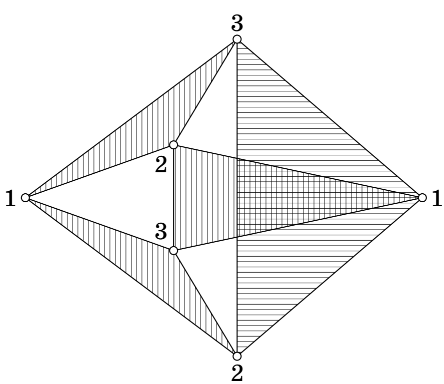
а) б) в)

Рис. 96

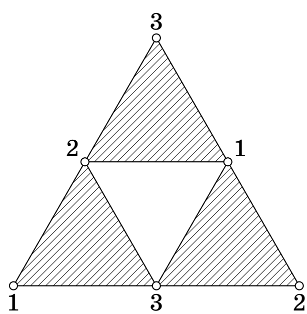
SA — это отрезок $S'A$. Аналогичные рассуждения показывают, что если $H = h$, то тень — это множество, изображённое на рис. 96, б), а если $H < h$, то тень — это множество, изображённое на рис. 96, в).

Несложные вычисления с подобными треугольниками показывают, что расстояние от точки S' до центра основания конуса равно $\left|\frac{h}{H-h}\right| = s$. Пусть $\alpha = \arcsin(r/R)$ и $\beta = \arcsin(r/s)$. При $H > h$ отношение освещённой дуги ко всей окружности радиуса R равно $\frac{\pi - \beta + \alpha}{\pi}$, если $s > R$ (если же $s \leqslant R$, то освещена вся окружность); при $H = h$ это отношение равно $\frac{\pi - \alpha}{\pi}$; при $H < h$ оно равно $\frac{\pi - \alpha - \beta}{\pi}$.

4. Предположим, что есть две пары троек, у которых общие точки разные. Если все четыре тройки, входящие в эти пары, разные, то получаем конфигурацию, изображённую на рис. 97, а). На этом рисунке заштрихованы треугольники, натянутые на тройки точек, а пометки 1, 2, 3 точек этой конфигурации выбраны так, что любая пара точек с разными пометками входит в одну из троек. Если же одна тройка является общей для этих двух пар, то получаем конфигурацию, изображённую на рис. 97, б).



а)



б)

Рис. 97

Из точек, входящих в эти конфигурации, больше нельзя составить ни одной дополнительной тройки так, чтобы выполнялось требуемое условие. Если в тройку входит какая-либо другая точка, то в эту тройку должны входить две точки конфигурации, помеченные одинаковыми цифрами. Поэтому дополнительных троек не может быть больше трёх (иначе появятся тройки, имеющие не одну, а две общие точки). В результате мы получаем гораздо меньше 977 троек.

5. То, что треугольник ABC содержится в треугольнике $A_1B_1C_1$, очевидно.

Покажем, что точки A_2, B_2, C_2 являются точками пересечения сторон треугольника $A_1B_1C_1$ с прямыми A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1. Поместим в точки A_0, B_0, C_0 массы $1+k^{-3}$, k^{-1}, k^{-2}. Центр масс этой системы точек можно найти как центр масс системы, состоящей из двух точек: центра масс точек A_0 и B_0 с массами 1 и k^{-1} (в эту точку помещается масса $1+k^{-1}$) и центра масс точек A_0 и C_0 с массами k^{-3} и k^{-2} (в эту точку помещается масса $k^{-3}+k^{-2}$); точка A_0 встречается здесь дважды, поэтому помещённая в неё масса разбивается на две части. Центром масс рассматриваемой системы является точка пересечения отрезков A_0A_1 и B_1C_1. Действительно, точка C_1 — центр масс точек A_0 и B_0 с массами 1 и k^{-1}, B_1 — центр масс точек A_0 и C_0 с массами k^{-3} и k^{-2}, A_1 — центр масс точек B_0 и C_0 с массами k^{-1} и k^{-2}. Таким образом, если A' — точка пересечения отрезков A_0A_1 и B_1C_1, то $B_1A' : A'C_1 = (1+k^{-1}) : (k^{-2}+k^{-3}) = k^2$, поэтому $A' = A_2$. Для точек B_2 и C_2 доказательство аналогично.

Доказанный результат означает следующее. Для треугольника $A_1B_1C_1$ мы делаем то же самое, что и для треугольника $A_0B_0C_0$, лишь с заменой коэффициента k на $1/k^2$; треугольник ABC при этом остаётся тем же самым. Полученный треугольник $A_2B_2C_2$ снова содержит треугольник ABC и т. д.

1956 год (XIX олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Мы предполагаем, что никакие три из четырёх данных точек не лежат на одной прямой. Возможны два различных расположения четырёх точек на плоскости.

Случай 1. Точки A, B, C и D являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Сумма углов четырёхугольника равна 360°, поэтому не все его углы острые. Возьмём не острый угол четырёхугольника; ему соответствует не остроугольный треугольник.

Случай 2. Точки A, B, C и D не являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Тогда одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в остальных точках. Пусть для определённости точка D лежит внутри треугольника ABC. Сумма трёх углов с вершиной D равна 360°, поэтому один из них не меньше 120°. Значит, угол при вершине D в одном из треугольников BCD, CDA, DAB не острый.

2. По условию сумма цифр числа a и числа $9a$ одна и та же. Поэтому согласно признаку делимости на 9 число a делится на 9. Двузначные числа, делящиеся на 9, следующие: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 и 99. Из них числа 27, 36, 54, 63, 72 и 81 не обладают требуемым свойством; в этом можно убедиться, умножая их соответственно на 7, 8, 7, 3, 4 и 9. Оставшиеся числа требуемым свойством обладают.

3. Через точку самопересечения проходят ровно два звена ломаной (если бы проходили три звена, то каждое из них ломаная пересекала бы по крайней мере два раза). Кроме того, на каждом звене лежит ровно одна точка самопересечения. Поэтому, сопоставив точке самопересечения пару пересекающихся в ней звеньев, мы получим разбиение звеньев на пары.

4. Для вычисления НОД$(5l+6, 8l+7)$ воспользуемся тем, что НОД$(a, b)=$ НОД$(a-b, b)$. В результате получим НОД$(5l+6, 8l+7)=$ НОД$(5l+6, 3l+1)=$ НОД$(2l+5, 3l+1)=$ $=$ НОД$(2l+5, l-4)=$ НОД$(l+9, l-4)=$ НОД$(13, l-4)$. Число 13 простое, поэтому данная дробь может быть сократима только на 13. При $l=4$ мы получаем дробь $\frac{26}{39}$, которая действительно сократима на 13.

5. Пусть A — одна из выбранных точек, B и C — выбранные точки, удалённые от неё на расстояния 1 и 2 соответственно. Расположение в порядке ABC невозможно, поскольку в таком случае для точки B есть две выбранные точки на расстоянии 1. Поэтому точки расположены в таком порядке: C_AB (или BA_C). Пусть D — точка, удалённая от C на расстояние 1. Расположение $CDAB$, очевидно, невозможно. Поэтому расположение такое: DC_AB. Пусть, далее, E — точка, удалённая от B на расстояние 2. Она расположена следующим образом: DC_AB_E. Продолжая эти рассуждения, мы увидим, что окружность длины 1956 окажется разбитой на $1956/3=652$ дуги длины 3 (концами этих дуг служат точки D, A, E, ...). На каждой дуге лежит одна точка. Всего получаем $2\cdot 652=1304$ точки. Все эти точки обязательно должны присутствовать.

8 класс

1. Пусть X — середина отрезка DE, M — середина отрезка AC. Достроим треугольники ADX и CEX до параллелограммов $ADXA'$ и $CEXC'$ (рис. 98). Точка X является серединой отрезка DE, поэтому отрезки AA' и $C'C$ равны. Ясно также, что эти отрезки параллельны, а значит, $AA'CC'$ — параллелограмм. Поэтому точка M — середина отрезка $A'C'$. Из равенства отрезков AD и CE следует, что треугольник $A'XC'$ равнобедренный. Поэтому его медиана XM является также и биссектрисой. Следовательно, прямая XM параллельна биссектрисе угла B треугольника ABC. Таким образом, точка X лежит на фиксированной

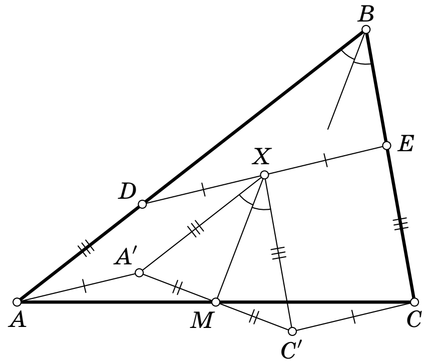


Рис. 98

прямой, проходящей через точку M. Искомое ГМТ — отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника ABC.

2. Пусть $\alpha = \frac{n}{100} + \alpha_1$, где n — целое число и $0 \leqslant \alpha_1 < \frac{1}{100}$. Пусть, далее,

$$\frac{1}{\alpha}\frac{n}{100} = \frac{m}{100} + \alpha_2,$$

где m — целое число и $0 \leqslant \alpha_2 < \frac{1}{100}$. Нас интересует число $\frac{m}{100}$. Ясно, что $100\alpha = n + 100\alpha_1$, поэтому

$$\frac{n}{100\alpha} = \frac{n}{n + 100\alpha_1} \leqslant 1.$$

Если $n = 0$, то $\frac{m}{100} = 0$. Если же $n > 0$, то $\frac{n}{n + 100\alpha_1} > \frac{1}{2}$, поскольку $100\alpha_1 < 1$. Дробь $\frac{n}{n + 100\alpha_1}$ может принимать все значения от $1/2$ до 1. Действительно, положим $n = 1$. При изменении α_1 от 0 до $\frac{1}{100}$ число $\frac{1}{1 + 100\alpha_1}$ изменяется от 1 до $1/2$.

3. Из решения задачи 5 для 7 класса следует, что минимальное число выбранных точек равно 10. Кроме того, система выбранных точек состоит из нескольких наборов таких десяток точек.

4. Пусть $al+b=km$ и $cl+d=kn$. Умножим первое уравнение на $-c$, а второе на a. Сложив эти уравнения, получим $ad-bc=k(na-mc)$. Следовательно, $ad-bc$ делится на k.

5. Предположим, что наибольшее число a в выбранном куске стоит не с края. Тогда все четыре соседних с ним числа a_1, a_2, a_3, a_4 тоже принадлежат этому куску, поэтому $a>a_1$, $a>a_2$, $a>a_3$, $a>a_4$, а значит, $a>\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$. С другой стороны, по условию $a=(a_1+a_2+a_3+a_4)/4$. Приходим к противоречию.

9 класс

1. Указанные прямые пересекаются в центре масс четырёхугольника $ABCD$, т. е. в центре масс системы точек A, B, C, D с одинаковыми массами. Действительно, точка K является центром масс точек A, B, C с единичными массами, а точка L является центром масс точек B, C, D с единичными массами, поэтому середина отрезка KL является центром масс точек A, B, C, D с массами 1, 2, 2, 1. Аналогично середина отрезка MN является центром масс точек A, B, C, D с массами 2, 1, 1, 2. Поэтому середина отрезка, соединяющего середины сторон KL и MN, является центром масс точек A, B, C, D с массами 3, 3, 3, 3. Середина отрезка, соединяющего середины сторон LM и NK, тоже является центром масс тех же точек с теми же массами.

2. Аналогично решению задачи 2 для 8 класса.

3. См. решение задачи 5 для 8 класса.

4. Чтобы высота, опущенная из вершины D, была равна h, точка D должна лежать в одной из двух плоскостей Π_1 и Π_2, параллельных плоскости ABC. Чтобы площадь грани ACD была равна s_1, точка D должна лежать на цилиндре с осью AC, а чтобы площадь грани BCD была равна s_2, точка D должна лежать на цилиндре с осью BC. Пересечение плоскости Π_1 с первым цилиндром — это либо пара прямых, либо одна прямая, либо пустое множество, причём прямые должны быть параллельны AC. Для второго цилиндра получаются прямые, параллельные прямой BC, которая пересекает прямую AC. Поэтому при пересечении цилиндров плоскостью Π_1 получается либо пустое множество, либо пара пересекающихся прямых, либо прямая, пересекающая пару параллельных прямых, либо пара параллельных прямых, пересекающая другую пару параллельных прямых. Количество точек, принадлежащих обоим цилиндрам и плоскости, равно соответственно 0, 1, 2 и 4. Столько же точек пересечения получаем и для плоскости Π_2.

5. См. решение задачи 4 для 8 класса.

10 класс

1. Пусть две вершины рассматриваемого квадрата лежат на стороне AB. Окружность S_1, вписанная в этот квадрат, касается стороны AB и расположена строго внутри данного треугольника ABC (она заведомо не касается сторон AC и BC). Поэтому существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности S_1, а сам он расположен внутри треугольника ABC, причём не совпадает с ним. Следовательно, радиус окружности S_1 меньше r. Но сторона квадрата равна удвоенному радиусу окружности S_1.

Рассмотрим теперь окружность S_2, описанную вокруг квадрата. Она имеет общую точку с каждой стороной треугольника ABC, причём по крайней мере стороны AB она не касается. Поэтому существует треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности S_2, а сам он содержит треугольник ABC, причём не совпадает с ним. Следовательно, радиус окружности S_2 больше r. Но сторона квадрата равна радиусу окружности S_2, умноженному на $\sqrt{2}$.

2. Аналогично решению задачи 2 для 8 класса.

3. См. решение задачи 4 для 8 класса.

4. Рассмотрим проекцию на прямую, ортогональную плоскости сечения. Все точки B_1, ..., B_n проецируются в одну и ту же точку B. Пусть A'_1, ..., A'_n — проекции точек A_1, ..., A_n. Тогда

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\ldots\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=\frac{A'_1B}{BA'_2}\cdot\frac{A'_2B}{BA'_3}\ldots\frac{A'_nB}{BA'_1}=1.$$

5. Если $a \geqslant 0$, то запишем первое уравнение в виде $x_1 = x_2 + a$, а если $a < 0$, то запишем его в виде $x_2 = x_1 - a$. Во втором случае сделаем замену $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_1$. Таким образом, можно считать, что $x_1 = x_2 + |a|$. Аналогично можно считать, что $x_3 = x_4 + |b|$. Поэтому если данная система имеет положительное решение, то $1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_2 + 2x_4 + |a| + |b| > |a| + |b|$.

Предположим теперь, что $a + b < 1$, причём числа a и b неотрицательные. Тогда можно положить $x_2 = x_4 = \frac{1-a-b}{4}$, $x_1 = x_2 + a$, $x_3 = x_4 + b$. В результате получим положительное решение данной системы.

Второй тур

7 класс

1. Пусть A_2, B_2, C_2 — середины сторон CB, BA, AC соответственно. Ясно, что $OA_2 \perp BC$ и $BC \parallel B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Поэтому $OA_1 \perp B_1C_1$, т. е. прямая OA_1 содержит высоту треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что прямые OB_1 и OC_1 тоже содержат высоты.

Ясно также, что $B_1C_1 = 2B_2C_2 = BC$, поэтому BCB_1C_1 — параллелограмм. Это означает, что отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P, которая является их серединой. Аналогично доказывается, что точка P является серединой отрезка AA_1. Таким образом, при симметрии относительно точки P треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. При этой симметрии точка O, которая является центром описанной окружности треугольника ABC и точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$, переходит в точку, которая является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и точкой пересечения высот треугольника ABC.

2. Пусть B_2, B_3, …, B_7 — основания перпендикуляров, опущенных на l_6, l_5, …, l_1; $x_1 = A_2B_1$, $x_2 = A_1B_2$, $x_3 = A_6B_3$, …, $x_7 = A_2B_7$. Тогда $x_{k+1} = \frac{1}{2}(1 + x_k)$. По условию $x_1 = x_7$. Но

$$x_7 = \frac{1}{2}(1 + x_6) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + x_5)\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + x_4)\right)\right) = \ldots,$$

поэтому

$$x_7 = \frac{1}{2} + \frac{x_6}{2} = \frac{3}{4} + \frac{x_5}{4} = \frac{7}{8} + \frac{x_4}{8} = \ldots = \frac{63}{64} + \frac{x_1}{64}.$$

Таким образом, получаем уравнение $\frac{63}{64} + \frac{x_1}{64} = x_1$, откуда находим $x_1 = 1$. Ясно также, что $B_1A_1 = 1 + x$.

3. Будем подчёркивать положительные числа одной чертой, а отрицательные числа, сумма которых со следующим числом положительна, двумя чертами. Ясно, что после каждого подчёркнутого двумя чертами числа a стоит число b, подчёркнутое одной чертой, причём $a + b > 0$. Подчёркнутые числа разбиваются на следующие группы: пары, состоящие из подчёркнутого двумя чертами числа и следующего за ним числа, и все остальные подчёркнутые числа. Сумма чисел в каждой группе положительна.

4. Предположим, что сумма чисел в некотором столбце равна $S \geqslant 1035$. Рассмотрим строку, симметричную этому столбцу относительно выделенной диагонали. Сумма чисел в этой строке тоже равна S, а сумма всех чисел, стоящих в этом столбце и этой строке, равна $2S - s$, где s — число, стоящее на их пересечении. Число s стоит на выделенной диагонали, поэтому $s \leqslant 112$. Следовательно, $2S - s \geqslant 2 \cdot 1035 - 112 = 1958 > 1956$. Приходим к противоречию.

5. Докажем сначала, что если n журналов покрывают площадь S, то можно убрать один журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь не менее $(n-1)S/n$. Действительно, если есть журнал, для которого площадь, покрытая только им, не превосходит S/n, то можно убрать его. А такой журнал обязательно найдётся, потому что иначе в сумме журналы покрывают площадь больше $(S/n) \cdot n = S$, что противоречит выбору S.

Пусть 15 журналов покрывают площадь S. Тогда можно убрать один журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь $S_1 \geqslant \frac{14}{15}S$. Затем можно убрать второй журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь $S_2 \geqslant \frac{13}{14}S_1 \geqslant \frac{13}{15}S$, и т. д. После того как мы уберём седьмой журнал, оставшиеся журналы будут покрывать площадь $S_7 \geqslant \frac{8}{9}S_6 \geqslant \frac{8}{15}S$.

8 класс

1. Выделим 8 машин и будем последовательно их грузить, причём каждый раз тот ящик, который уже нельзя погрузить, будем ставить рядом с машиной. Погруженные ящики вместе с ящиками, стоящими рядом с машинами, весят более $8 \cdot 1{,}5 = 12$ т, поэтому оставшиеся ящики весят менее 1,5 т; их можно увезти на одной полуторатонке. Поскольку $4 \cdot 350 = 1400 < 1500$, на одной машине можно увезти любые 4 ящика. Значит, 8 ящиков, стоящих рядом с машинами, можно увезти на двух оставшихся полуторатонках.

2. Предположим, что сумма чисел в некоторой строке равна $S \geqslant 518$. Рассмотрим два столбца, симметричных этой строке относительно двух диагоналей, и ещё строку, симметричную этим столбцам. Число 8 чётно, поэтому мы получим два разных столбца и две разных строки. На пересечениях этих строк и столбцов стоят 4 числа, сумма которых равна $s \leqslant 112$. Сумма всех чисел, стоящих в этих двух строках и двух столбцах, равна $4S - s \geqslant 4 \cdot 518 - 112 = 1960 > 1956$. Приходим к противоречию.

3. Если A' — проекция точки A на прямую, проходящую через точку O, то $\angle OA'A = 90^\circ$, поэтому точка A' лежит на окружности с диаметром OA (мы предполагаем, что прямые проводятся на плоскости). Рассмотрим две окружности с диаметрами OA и OB. Искомое ГМТ состоит из точек, лежащих внутри одной из этих окружностей, но вне другой (рис. 99).

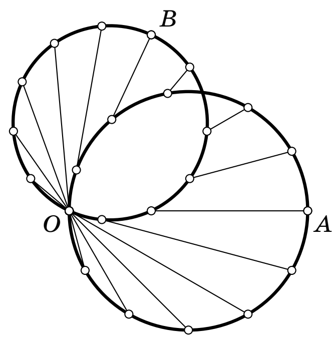


Рис. 99

4. Будем подчёркивать числа следующим образом: 1) положительные числа одной чертой; 2) отрицательные числа, сумма которых со следующим числом положительна, двумя чертами; 3) отрицательные числа, для которых сумма со следующим числом неположительна, но сумма со следующими двумя числами положительна, тремя чертами. После каждого подчёркнутого двумя чертами числа a стоит число b, подчёркнутое одной чертой, причём $a + b > 0$. После каждого подчёркнутого тремя чертами числа a стоит число b, подчёркнутое двумя чертами, а за ним стоит число c, подчёркнутое одной чертой. При этом $a+b+c>0$. Подчёркнутые числа разобьём на группы следующим образом. Сначала возьмём все тройки, состоящие из числа, подчёркнутого тремя чертами, и двух следующих за ним чисел. Среди оставшихся подчёркнутых чисел возьмём пары, состоящие из подчёркнутого двумя чертами числа и следующего за ним числа. После этого возьмём все остальные подчёркнутые числа. Сумма чисел в каждой группе положительна.

5. Предположим, что площадь общей части любых двух прямоугольников меньше 1/9. Покажем, что тогда они занимают площадь больше 5. Занумеруем прямоугольники произвольным образом. Первый прямоугольник занимает площадь 1. Добавим второй прямоугольник. Площадь общей части первого и второго прямоугольников меньше 1/9, поэтому добавится площадь больше 8/9. Добавим третий прямоугольник. Площадь общей части третьего прямоугольника с первым и вторым меньше 2/9, поэтому добавится площадь больше 7/9, и т. д. В результате получим, что все девять прямоугольников занимают площадь больше
$$1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}=5.$$

9 класс

1. См. решение задачи 1 для 8 класса.

2. Разрежем данный куб на $13^3=2197$ кубиков с ребром 1. Если бы *внутри* каждого из этих кубиков была выбранная точка, то количество выбранных точек было бы не меньше 2197, что противоречит условию. Следовательно, внутри по крайней мере одного из этих кубиков не лежит ни одной выбранной точки.

3. Числа x_n, y_n, z_n неотрицательны, поэтому числа x, y, z тоже неотрицательны. Если бы все числа x, y, z были положительны, то наибольшее из чисел x_1, y_1, z_1 было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z, а тогда и наибольшее из чисел x_n, y_n, z_n было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z. Поэтому среди чисел x, y, z есть 0. Аналогично доказывается, что среди чисел x_1, y_1, z_1 есть 0 (при $n=1$ доказывать ничего не нужно, потому что тогда $x_1=x$, $y_1=y$, $z_1=z$). Это означает, что два из чисел x, y, z равны. В итоге получаем, что неупорядоченный набор чисел x, y, z может быть равен либо 0, 0, 1, либо 0, 1, 1. Очевидно, что первый набор не обладает требуемым свойством.

4. При решении этой задачи удобно считать, что четырёхугольник составлен из двух треугольников, поэтому введём следующие обозначения: $ACBC'$ — данный четырёхугольник, A_1 и B_1 — точки касания со сторонами BC и AC, A_1' и B_1' — точки касания со сторонами BC' и AC', C_1 и C_1' — точки, в которых прямые A_1B_1 и $A_1'B_1'$ пересекают прямую AB (точки C_1 и C_1' определены лишь в том случае, когда соответствующие прямые не параллельны).

Если $A_1B_1 \parallel AB$, то $AB_1 : BA_1 = B_1C : A_1C = 1$. Поэтому $AB_1 = BA_1$, а значит, $AB_1' = BA_1'$, поскольку $AB_1 = AB_1'$ и $BA_1 = BA_1'$. Таким образом, $A_1'B_1' \parallel AB$.

Будем теперь считать, что точки C_1 и C_1' определены; нужно доказать, что они совпадают. Согласно теореме Менелая

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Учитывая, что $A_1C = B_1C$, получаем $AC_1 : C_1B = AB_1 : A_1B$. Аналогично $AC_1' : C_1'B = AB_1' : A_1'B$. Но $AB_1 = AB_1'$ и $BA_1 = BA_1'$. Поэтому $AC_1 : C_1B = AC_1' : C_1'B$, а значит, $C_1 = C_1'$, поскольку обе эти точки лежат вне отрезка AB.

5. Рассмотрим наименьший прямоугольник со сторонами, идущими по линиям клетчатой бумаги, содержащий треугольник ABC. Ни одна из вершин A, B, C не может оказаться внутри этого прямоугольника, поскольку иначе угол при этой вершине был бы тупым. Поэтому мы можем построить прямоугольник со сторонами, идущими по линиям клетчатой бумаги, так, чтобы вершины A, B, C лежали на его сторонах. По крайней мере одна из точек A, B, C лежит на стороне прямоугольника, а не в его вершине, поскольку иначе треугольник ABC был бы прямоугольным. Пусть для определённости вершина A лежит на стороне прямоугольника. Введём на плоскости координаты, выбрав точку A в качестве начала координат, а эту сторону прямоугольника — в качестве оси Ox. Ось Oy направим так, чтобы прямоугольник лежал в полуплоскости $y \geqslant 0$. Вершины B и C лежат по разные стороны от оси Oy, поскольку точка A лежит на стороне прямоугольника, а не в его вершине. Кроме того, ни одна из вершин B и C не лежит на оси Ox, поскольку иначе угол при вершине A был бы тупым. Таким образом, если точки B и C имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то $y_1, y_2 \geqslant 1$, а числа x_1 и x_2 имеют разные знаки. Поэтому точка с координатами $(0, 1)$ лежит внутри треугольника ABC или на его стороне BC.

10 класс

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа. Положительное число a_i подчеркнём одной чертой, а отрицательное число a_i подчеркнём $k+1$ чертами, где k — наименьшее число, для которого $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+k} > 0$. Ясно, что если число a_i подчёркнуто $k+1$ чертами, то числа a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_{i+k} подчёркнуты соответственно k, $k-1$, ..., 2, 1 чертами. Подчёркнутые числа разобьём на группы следующим образом. Сначала возьмём числа, подчёркнутые наибольшим числом черт (пусть это число черт равно K), и следующие за каждым из них $K-1$ чисел. Затем среди оставшихся чисел возьмём числа, подчёркнутые $K-1$ чертами, и следующие за каждым из них $K-2$ чисел, и т. д. Сумма чисел в каждой группе положительна. Следовательно, сумма всех подчёркнутых чисел тоже положительна.

2. Аналогично решению задачи 5 для 8 класса.

3. См. решение задачи 3 для 9 класса.

4. Рассмотрим развёртку данной пирамиды. Она представляет собой треугольник ABC, к которому приложены треугольники ABD_C, BCD_A, CAD_B. Из условия следует, что следующие 4 величины равны: суммы троек углов при вершинах A, B и C и сумма углов при вершинах D_A, D_B, D_C. Значит, каждая из этих сумм равна $180°$, поскольку сумма всех 12 рассматриваемых углов представляет собой сумму углов четырёх треугольников. Следовательно, точка A лежит на отрезке D_BD_C, точка B лежит на отрезке D_CD_A, а точка C лежит на отрезке D_AD_B (рис. 100). Кроме того, $AD_B = AD_C$, $BD_A = BD_C$ и $CD_A = CD_B$. В итоге получаем, что развёртка представляет собой треугольник, в котором проведены три средние линии.

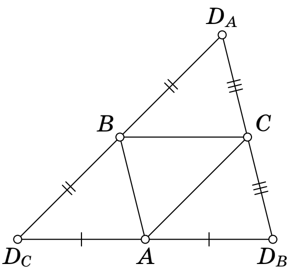


Рис. 100

Средние линии разбивают треугольник на 4 равных треугольника, поэтому грани пирамиды равны.

5. Пусть $x_k = A_{k+1}B_k$ при $k \leqslant n-1$ и $x_n = A_1B_n$, α — внешний угол правильного n-угольника, a — длина его стороны. Тогда

$$x_1 = (a + x_2)\cos\alpha,\ x_2 = (a + x_3)\cos\alpha,\ \ldots,\ x_n = (a + x_1)\cos\alpha.$$

Таким образом, $x_1 = a_1 + b_1x_2 = a_2 + b_2x_3 = \ldots = a_n + b_nx_1$, где $b_n = (\cos\alpha)^n \neq 1$, а a_n — некоторое число, зависящее только от α и a. Поэтому x_1 (а также и x_k для любого k) определено однозначно. Ясно также, что мы получим решение, если положим $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$, где $x = (a + x)\cos\alpha$, т. е. $x : a = \cos\alpha : (1 - \cos\alpha)$. Теперь построение точек B_i очевидно.

1957 год (XX олимпиада)

Первый тур

7 класс

1. Пусть $ABCD$ — равнобочная трапеция с основаниями AD и BC, причём $AD > BC$. Предположим, что диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника ABC и ADC. Неравенства $AC > AB$ и $AC > BC$ показывают, что AC — основание равнобедренного треугольника ABC. Ясно также, что в треугольнике ADC сторона DC наименьшая, поэтому $AC = AD$. Если α и β — углы при основаниях равнобедренных треугольников ABC и ADC, то $\alpha + 2\beta = \pi$ и $\pi - 2\alpha + \beta = \pi$, поэтому $\alpha = \pi/5$ и $\beta = 2\pi/5$. Таким образом, $ABCD$ — трапеция, которую отсекает от правильного пятиугольника его диагональ.

2. Подставив $x = 0$, получим, что d делится на 5. Учитывая это и подставляя $x = \pm 1$, получим, что $a + b + c$ и $-a + b - c$ делятся на 5. Следовательно, $2b$ и $2a + 2c$ делятся на 5, а значит, b и $a + c$ делятся на 5. Подставив $x = 2$, получим, что $2(4a + c) + 4b + d$ делится на 5. Значит, $4a + c$ делится на 5, и $3a = (4a + c) - (a + c)$ тоже делится на 5. Поэтому c тоже делится на 5.

3. Пусть до возвращения в исходный пункт улитка a_1 пятнадцатиминуток ползла вперёд (по сравнению с направлением движения из исходного пункта), a_2 назад, b_1 направо и b_2 налево. Тогда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ (поскольку улитка вернулась в исходный пункт), а кроме того, $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ (поскольку через каждые 15 минут улитка поворачивает). Следовательно, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2$. Поэтому улитка вернулась в исходный пункт через $4a_1$ пятнадцатиминуток, т. е. через a_1 часов.

4. *Первый способ*. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — суммы чисел в строках, $y_1, \ldots, y_m$ — суммы чисел в столбцах. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число x_iy_j. Поэтому сумма чисел в i-й строке равна $x_iy_1 + x_iy_2 + \ldots + x_iy_m$. С другой стороны, эта сумма равна x_i. Таким образом, $x_i = x_i(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)$. Число x_i положительно; в частности, оно отлично от нуля, поэтому $y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1$. Но сумма $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ — это как раз и есть сумма всех чисел в таблице.

Второй способ. Пусть a_{ji} — число, стоящее на пересечении i-го столбца и j-й строки. По условию

$$a_{ji} = \left(\sum_{p=1}^{m} a_{pi}\right)\left(\sum_{q=1}^{n} a_{jq}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j} a_{ji} = \sum_{i,j}\left(\sum_{p=1}^{m} a_{pi}\right)\left(\sum_{q=1}^{n} a_{jq}\right) = \left(\sum_{i,j} a_{ji}\right)^2.$$

Для числа $S = \sum\limits_{i,j} a_{ji}$ мы получили уравнение $S^2 = S$. Но $S > 0$, поэтому $S = 1$.

5. Предположим, что на километровом столбе написано $\boxed{\overline{abc}}\boxed{\overline{a_1b_1c_1}}$. Тогда $\overline{abc} + \overline{a_1b_1c_1} = 999$, поэтому $a_1 = 9 - a$, $b_1 = 9 - b$ и $c_1 = 9 - c$. Если $a = b = c$, то требуемое условие выполняется. Таких столбов будет ровно 10. Пусть теперь среди цифр a, b, c есть ровно две различных. Среди цифр a_1, b_1, c_1 будут в точности те же самые две цифры тогда и только тогда, когда эти две цифры в сумме дают 9 (случай $a = 0$ нужно рассмотреть отдельно, потому что начальные цифры чисел $\overline{abc}$ и $\overline{a_1b_1c_1}$ на столбах не пишутся). Таких пар цифр ровно 5: $(0, 9)$, $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ и $(4, 5)$. Трёхзначных чисел, записывающихся двумя данными цифрами, ровно шесть: три из них записываются двумя цифрами a и одной цифрой b (которая стоит на одном из трёх мест), а ещё три записываются одной цифрой a и двумя цифрами b. Так мы получаем ещё $5 \cdot 6 = 30$ столбов, а всего получаем $10 + 30 = 40$ столбов.

8 класс

1. Пусть вершины A, B и D прямоугольника $ABCD$ лежат на двух концентрических окружностях. Возможны следующие три варианта.

1) Две соседние вершины вершины лежат на одной окружности, а третья вершина — на второй. Тогда четвёртая вершина тоже лежит на второй окружности. В результате получаем исходные окружности.

2) Противоположные вершины B и D лежат на большей окружности, а вершина A — на меньшей. Пусть O — общий центр окружностей. Тогда $OA = r$, $OB = OD = R$. Поэтому $OC = \sqrt{OB^2 + OD^2 - OA^2} = \sqrt{2R^2 - r^2}$; равенство $OB^2 - OA^2 = OC^2 - OD^2$ легко проверяется с помощью теоремы Пифагора.

3) Противоположные вершины B и D лежат на меньшей окружности, а вершина A — на большей. Рассуждая аналогично случаю 2, получаем $OC = \sqrt{2r^2 - R^2}$. Этот случай возможен при $r^2 > R^2/2$.

2. См. решение задачи 3 для 7 класса.

3. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, α — острый (или прямой) угол между его сторонами, S — площадь, d — бóльшая диагональ. Тогда $d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$ и $ab\sin\alpha = S$. Поэтому $d^2 \geqslant a^2 + b^2$ и $ab \geqslant S$, причём в обоих случаях равенство достигается лишь при $\alpha = 90^\circ$. Далее, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, поэтому $d^2 \geqslant 2S$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда $a = b$ и $\alpha = 90^\circ$, т. е. когда параллелограмм является квадратом.

4. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — суммы чисел в строках, $y_1, \ldots, y_m$ — суммы чисел в столбцах. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число $x_i y_j$. Поэтому сумма чисел в i-й строке равна $x_i y_1 + x_i y_2 + \ldots + +x_i y_m$. С другой стороны, эта сумма равна x_i. Таким образом, $x_i = x_i(y_1 + y_2 + \ldots + y_m)$. Сумма $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ — это как раз сумма всех чисел в таблице.

Если она не равна 1, то $x_i = 0$. Аналогично доказывается, что в таком случае все числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ равны 0. Но тогда и все числа $x_i y_j$ равны 0.

5. Подставив $x=0$, получим, что e делится на 7. Учитывая это и подставляя $x=\pm 1$, получим, что числа $a \pm b + c \pm d$ делятся на 7. Поэтому $2(a+c)$ и $2(b+d)$ делятся на 7, а значит, $a+c$ и $b+d$ делятся на 7. Подставляя $x=\pm 2$ и учитывая, что e делится на 7, получаем, что числа $2(8a \pm 4b + 2c \pm d)$ делятся на 7. Поэтому $4a+c$ и $4b+d$ делятся на 7. Следовательно, $3a = (4a+c)-(a+c)$ делится на 7. Поэтому a делится на 7, а значит, c делится на 7. Аналогично доказывается, что b и d делятся на 7.

9 класс

1. См. решение задачи 1 для 8 класса.

2. Пусть $[x]=n$ и $x=n+\alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 1$. Данное уравнение записывается в виде $x^3 - x + \alpha = 3$. Неравенство $0 \leqslant \alpha < 1$ показывает, что $2 < x^3 - x \leqslant 3$. Если $x \geqslant 2$, то $x(x^2-1) \geqslant 2 \cdot 3 = 6$, поэтому в этом случае неравенство $x^3 - x \leqslant 3$ не выполняется. Если $x < -1$, то $x(x^2-1) < 0$, поэтому неравенство $2 < x^3 - x$ не выполняется. Таким образом, нас интересует случай, когда $-1 \leqslant x < 2$, т. е. $[x] = -1$, 0 или 1. Соответственно получаем уравнения $x^3 + 1 = 3$, $x^3 = 3$, $x^3 - 1 = 3$. Находим их решения: $x=\sqrt[3]{2}$, $x=\sqrt[3]{3}$, $x=\sqrt[3]{4}$. При этом $[\sqrt[3]{2}] \neq -1$, $[\sqrt[3]{3}] \neq 0$ и $[\sqrt[3]{4}] = 1$, поэтому решением исходного уравнения является только $\sqrt[3]{4}$.

3. Если точки M и N совпадают, то $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому будем предполагать, что точки M и N различны. Предположим, что прямые AD и BC не параллельны. Пусть M'', K, N'' — середины сторон AB, BC, CD соответственно. Если $MN \parallel BC$, то $BC \parallel AD$, так как $AM = MC$ и $BN = ND$. Поэтому будем считать, что прямые MN и BC не параллельны, т. е. $M' \neq M''$ и $N' \neq N''$. Ясно, что

$\overrightarrow{M''M} = \overrightarrow{BC}/2 = \overrightarrow{NN''}$ и $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{NN'}$. Поэтому $M'M'' \parallel N'N''$. Следовательно, $KM \parallel AB \parallel CD \parallel KN$, т. е. $M = N$. Получено противоречие.

4. Школьник едет обратно, имея 50 коп. мелочью; будем предполагать, что других денег у него нет. Поменяем имеющиеся у школьника монеты следующим образом: две монеты по 1 коп. заменим на одну монету 2 коп., монету 1 коп. и монету 2 коп. заменим на монету 3 коп., одну монету 1 коп. и три монеты 3 коп. заменим на одну монету 10 коп. Ясно, что если школьник сможет заплатить за проезд новыми монетами, то он заведомо мог заплатить за проезд исходными монетами. Докажем, что после этого обмена монет у школьника не осталось монет 1 коп. Действительно, предположим, что осталась ровно одна монета 1 коп. (а больше одной монеты 1 коп. остаться не могло, поскольку две монеты 1 коп. меняются на одну монету 2 коп.). Тогда монет 2 коп. не осталось, поскольку монеты 1 коп. и 2 коп. меняются на монету 3 коп. Количество монет 3 коп. не превосходит 2, поскольку монета 1 коп. и три монеты 1 коп. меняются на монету 10 коп. Таким образом, если не считать монет, достоинство которых делится на 5, то у школьника есть 1, $1+3=4$ или $1+6=7$ коп. Ни одно из этих чисел не делится на 5, а в сумме с числом, делящимся на 5, это число должно давать 50. Приходим к противоречию, поэтому монет 1 коп. не осталось.

Заменим, далее, монету 2 коп. и монету 3 коп. на монету 5 коп., а пять монет 2 коп. заменим на монету 10 коп. Докажем, что после этого не осталось монет 2 коп. Действительно, если осталась хотя бы одна монета 2 коп., то монет 3 коп. не осталось. Поэтому количество оставшихся монет 2 коп. равно 1, 2, 3 или 4; в сумме они составляют 2, 4, 6 или 8 коп. Ни одно из этих чисел не делится на 5, поэтому мы снова приходим к противоречию. Итак, можно считать, что у школьника нет монет 1 коп. и 2 коп. Но тогда можно считать, что у него нет монет 3 коп., потому что количество монет 3 коп. делится на 5, а каждые пять монет 3 коп. можно заменить на монету 15 коп.

Если у школьника есть монета 20 коп., то он может заплатить за проезд всеми остальными деньгами. Если у него есть две монеты 10 коп. или монета 5 коп. и монета 15 коп., то он тоже может заплатить за проезд. Заменим каждые две монеты 5 коп. одной монетой 10 коп. После этого можно считать, что у школьника есть не более одной монеты 5 коп. и не более одной монеты 10 коп. Тогда у него должны быть монеты 15 коп., а потому не должно быть монет 5 коп. Одними монетами по 15 коп. нельзя составить в сумме ни 50 коп., ни 40 коп., поэтому у школьника должны быть две монеты 10 коп., и он может заплатить за проезд.

5. Пусть a — наибольшая сторона данного многоугольника (если наибольших сторон несколько, то мы выбираем любую из них). Рассмотрим часть многоугольника, которая остаётся после выбрасывания стороны a, и возьмём точку, которая делит пополам периметр этой части. Если эта точка является вершиной многоугольника, то мы очевидным образом деформируем этот многоугольник в равнобедренный треугольник. Предположим теперь, что эта точка лежит на стороне b, а периметры частей многоугольника, заключённых между сторонами a и b, равны x и y. Тогда $x+b\geqslant y$ и $y+b\geqslant x$. Если, например, $x=0$, то мы можем составить треугольник из отрезков a, b, y. Поэтому будем считать, что $x, y\neq 0$. Предположим, что треугольник нельзя составить ни из отрезков a, x, $y+b$, ни из отрезков a, y, $x+b$. Отрезок короче соединяющей его концы ломаной, поэтому $a<x+y+b$. Кроме того, выполняются неравенства $x+b\geqslant y$ и $y+b\geqslant x$. Поэтому, чтобы треугольники нельзя было составить, должны выполняться неравенства $a+x\leqslant y+b$ и $a+y\leqslant x+b$. Но по предположению $a\geqslant b$, поэтому $0\leqslant a-b\leqslant y-x$ и $0\leqslant a-b\leqslant x-y$. Следовательно, $x=y$ и $a=b$. По условию число сторон многоуголь-

ника больше 4. Поэтому одна из ломаных длины x состоит из двух частей периметра x_1 и x_2. Легко проверить, что из отрезков длины x, $a+x_1$, $a+x_2$, где $x_1+x_2=x$, можно составить треугольник.

10 класс

1. Прежде всего заметим, что $323=17\cdot 19$, поэтому число делится на 323 тогда и только тогда, когда оно делится на 17 и на 19. Число 20^n-3^n делится на $20-3=17$. Далее, $16^n\equiv(-1)^n \pmod{17}$, поэтому число 16^n-1 делится на 17 тогда и только тогда, когда n чётно. Что касается делимости на 19, то 20^n-1 делится на $20-1=19$ при любом n, а при $n=2m$ число 16^n-3^n делится на $16^2-3^2=13\cdot 19$, поэтому оно делится на 19.

2. Пусть e_1, e_2, e_3 — векторы трёх последовательных звеньев данной ломаной. После векторов e_2, e_3 должен идти перпендикулярный им вектор, т. е. вектор $\pm e_1$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что последовательность векторов звеньев имеет вид e_1, e_2, e_3, $\pm e_1$, $\pm e_2$, $\pm e_3$, ... Поэтому число звеньев ломаной делится на 3. Ясно также, что количество звеньев e_1 должно быть равно количеству звеньев $-e_1$. То же самое верно для e_2 и e_3. Поэтому число звеньев чётно.

3. См. решение задачи 3 для 9 класса.

4. Точно так же, как и при решении задачи 4 для 9 класса, можно поменять монеты так, чтобы монет 1, 2 и 3 коп. не осталось. Если есть монета 20 коп., то помимо неё есть 50 коп., а тогда заплатить за проезд в трамвае можно, как показано в решении задачи 4 для 9 класса. Если у школьника есть две монеты 10 коп., то он тоже может заплатить за проезд. Заменим каждые две монеты 5 коп. одной монетой 10 коп. После этого можно считать, что у школьника есть не более одной монеты 5 коп. и не более одной монеты 10 коп. Тогда у него должны быть две монеты 15 коп., которыми он может заплатить за проезд.

5. Аналогично решению задачи 5 для 9 класса.

Второй тур

7 класс

1. Искомое ГМТ симметрично относительно прямых OA и OB, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда OA и OB — оси координат, а точка M имеет неотрицательные координаты (x, y). Покажем, что эта часть ГМТ задаётся неравенствами $x+y>1$, $x^2+y^2\leqslant 1$.

Пусть (x_i, y_i) — векторы звеньев ломаной OM. Данные условия означают, что $\sum\sqrt{x_i^2+y_i^2}=1$ и все координаты x_i, y_i положительны. Действительно, если координаты x_i и x_{i+1} разных знаков, то найдётся прямая, параллельная OB, которая пересекает ломаную по крайней мере в двух точках. Гипотенуза прямоугольного треугольника меньше суммы катетов, поэтому $\sqrt{x_i^2+y_i^2}<x_i+y_i$, а значит,

$$1=\sum\sqrt{x_i^2+y_i^2}<\sum(x_i+y_i)=x+y.$$

Ясно также, что расстояние между концами ломаной не превосходит её длины, поэтому $x^2+y^2\leqslant 1$.

Мы доказали, что координаты точки M удовлетворяют неравенствам $x+y>1$ и $x^2+y^2\leqslant 1$. Покажем, что для любой точки M с такими координатами найдётся требуемая ломаная. Если точка M лежит на дуге AB и отлична от A и B, то в качестве ломаной можно взять радиус OM. Будем теперь считать, что $x^2+y^2<1$. Рассмотрим окружность радиуса y с центром M и окружность радиуса $1-y$ с центром O. Эти окружности пересекаются, потому что $OM>y$, $OM>x>1-y$ и $OM<1=y+(1-y)$. Если P — ближайшая к прямой OA точка пересечения рассматриваемых окружностей, то OPM — требуемая ломаная.

Всё ГМТ задаётся неравенствами $|x|+|y|>1$, $x^2+y^2\leqslant 1$.

2. Занумеруем контакты лампы по порядку, а отверстия штепселя — в противоположном порядке. Тогда контакт с номером k попадает в отверстие с номером $a-k$, где a — фиксированное число. (Точнее говоря, речь идёт не о самих номерах, а об их остатках от деления на 7, но номера совпадают тогда и только тогда, когда совпадают остатки.) Нам нужно выбрать k так, чтобы числа k и $a-k$ давали одинаковые остатки при делении на 7, т. е. число $2k$ давало такой же остаток, как и a. Легко убедиться, что, когда k пробегает все остатки при делении на 7, число $2k$ тоже пробегает все остатки.

3. Пусть для определённости $a \geqslant b$. Рассмотрим полуокружность радиуса a. Пусть C — центр этой полуокружности, A — точка на диаметре, для которой $AC = b$ (рис. 101). Вершина B расположена на этой полуокружности. Наибольшая сторона треугольника — это a или c, поэтому наибольший угол — это A или C. Выберем вершину B так, чтобы она лежала на серединном перпендикуляре к отрезку AC (это эквивалентно тому, что $a = c$). Если вершина B смещается по полуокружности из этого положения, то увеличивается либо угол A, либо угол C (в зависимости от того, в какую сторону она смещается).

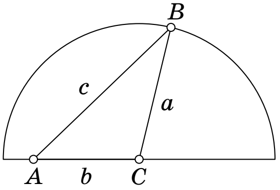


Рис. 101

4. Пусть вписанная окружность касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1. Треугольники A_1BC_1 и A_1CB_1 равнобедренные; их углы при основаниях равны $\frac{\pi-\angle B}{2}$ и $\frac{\pi-\angle C}{2}$. Следовательно, $\angle A_1 = \frac{\angle B+\angle C}{2}$. Аналогично $\angle B_1 = \frac{\angle A+\angle C}{2}$ и $\angle C_1 = \frac{\angle A+\angle B}{2}$. Аналогичные вычисления для второго треугольника показывают, что $\angle A_2 = \frac{\angle B_1+\angle C_1}{2} = \frac{2\angle A+\angle B+\angle C}{4}$, $\angle B_2 = \frac{2\angle B+\angle A+\angle C}{4}$ и $\angle C_2 = \frac{2\angle C+\angle A+\angle B}{4}$.

Пусть для определённости $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$. Тогда $\angle A_2 \leqslant \leqslant \angle B_2 \leqslant \angle C_2$. Таким образом, из данного условия следует, что $\angle A = \angle A_2$, т. е. $2\angle A = \angle B + \angle C$. Учитывая неравенство $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, получаем $\angle A = \angle B = \angle C$.

5. Прежде всего заметим, что все члены последовательности положительные. Пусть $S = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{k+8}$ — сумма восьми идущих подряд членов последовательности. Достаточно доказать, что $a_{k+9} < S < a_{k+10}$. Первое неравенство очевидно: $S > a_{k+7} + a_{k+8} = a_{k+9}$. Докажем теперь второе неравенство. Ясно, что

$$\begin{aligned} a_{k+10} &= a_{k+8} + a_{k+9} = a_{k+8} + a_{k+7} + a_{k+8} = \\ &= a_{k+6} + a_{k+7} + a_{k+7} + a_{k+8} = \\ &= a_{k+5} + a_{k+6} + a_{k+6} + a_{k+7} + a_{k+8} = \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= a_{k+1} + 2a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_{k+8}. \end{aligned}$$

Последнее выражение, очевидно, больше S.

8 класс

1. Пусть для определённости $a \geqslant b$. Тогда наименьший угол треугольника — это угол B или угол C. Рассмотрим полуокружность S радиуса b. Пусть C — центр этой полуокружности, а B — точка на продолжении диаметра, для которой $CB = a$ (рис. 102). Проведём из точки B касательную BA_1 к полуокружности S. Если $\angle A_1CB \geqslant \angle A_1BC$, то наименьший угол треугольника будет наибольшим, если вершина A занимает положение A_1. Действительно, угол B всегда не превосходит угла A_1BC. Неравенство $\angle A_1CB \geqslant \angle A_1BC$ эквивалентно тому, что $b \leqslant c = \sqrt{a^2 - b^2}$, т. е. $a \geqslant \sqrt{2}b$. Таким образом, если $a \geqslant \geqslant \sqrt{2}b$, то третья сторона должна быть равна $\sqrt{a^2 - b^2}$.

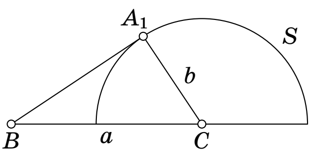


Рис. 102

Предположим теперь, что $a<\sqrt{2}b$. Тогда, в частности, $a<2b$, поэтому серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает полуокружность в некоторой точке A_2. Наименьший угол треугольника будет наибольшим, если вершина A занимает положение A_2. Действительно, предположим сначала, что точка A движется по полуокружности из положения A_2 так, что её проекция на BC движется к точке B. Тогда наименьшим будет угол C, и он будет убывать. Предположим теперь, что точка A движется так, что что её проекция движется от точки B. Тогда наименьшим будет угол B, и он будет тоже убывать. (Это следует из того, что в рассматриваемой ситуации $\angle CBA_2 \leqslant \angle CBA_1$; в противном случае угол B сначала возрастает, пока точка A не дойдёт до положения A_1.) Таким образом, если $b\leqslant a<\sqrt{2}b$, то третья сторона должна быть равна b.

2. См. решение задачи 4 для 10 класса.

3. Опустим из точки O перпендикуляры OA_1, OB_1 и OC_1 на стороны треугольника. Из точки G тоже опустим перпендикуляры GA_2, GB_2 и GC_2 на стороны треугольника. Ясно, что

$$\frac{OA'}{GA'}+\frac{OB'}{GB'}+\frac{OC'}{GC'}=\frac{OA_1}{GA_2}+\frac{OB_1}{GB_2}+\frac{OC_1}{GC_2}$$

и $GA_2=GB_2=GC_2=x$. Остаётся доказать, что OA_1+OB_1+ $+OC_1=3x$.

Пусть a — сторона равностороннего треугольника ABC, S — его площадь. Тогда $a(OA_1+OB_1+OC_1)=2S$. Поэтому сумма $OA_1+OB_1+OC_1$ одна и та же для любой точки O внутри треугольника ABC. Но если O совпадает с G, то эта сумма равна $3x$.

4. Легко проверить, что если одно из чисел x_1, x_2, x_3 равно нулю, то остальные числа тоже равны нулю. Поэтому будем считать, что $x_1x_2x_3\neq 0$. Тогда данную систему уравнений можно записать в виде

$$\frac{2}{x_2}=1+\frac{1}{x_1^2},\quad \frac{2}{x_3}=1+\frac{1}{x_2^2},\quad \frac{2}{x_1}=1+\frac{1}{x_3^2}.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{x_3}\right)^2=0.$$

При действительных x_1, x_2, x_3 это равенство может выполняться лишь в том случае, когда $1-\frac{1}{x_1}=1-\frac{1}{x_2}=1-\frac{1}{x_3}=0$, т. е. $x_1=x_2=x_3=1$.

5. Пусть $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ — углы данного треугольника. По условию этот треугольник неравносторонний, поэтому $\gamma-\alpha>0$. Как видно из решения задачи 4 для 7 класса, углы второго полученного треугольника равны $\frac{\beta+\gamma}{2}\geqslant\frac{\alpha+\gamma}{2}\geqslant\frac{\alpha+\beta}{2}$. Для него разность между наибольшим и наименьшим углами равна $\frac{\gamma-\alpha}{2}$. Аналогично для n-го треугольника разность между наибольшим и наименьшим углом равна $\frac{\gamma-\alpha}{2^{n-1}}$. При разных n эти величины разные, а у подобных треугольников они должны быть одинаковыми.

9 класс

1. Поступательное перемещение прямоугольника можно представить в виде композиции нескольких перемещений вдоль одной его стороны и вдоль другой стороны. Несколько перемещений могут понадобиться, потому что для переноса на вектор $\overrightarrow{XY}$ (рис. 103) нам придётся двигаться по «лесенке», чтобы не нарушилось условие, что прямоугольники пересекаются в восьми точках. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда прямоугольник перемещается вдоль одной из своих сторон (рис. 104). Ясно, что $S_{AB_2CD_2}-S_{AB_1CD_1}=S_{CB_1B_2}+S_{CD_1D_2}-$

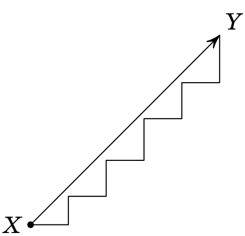


Рис. 103

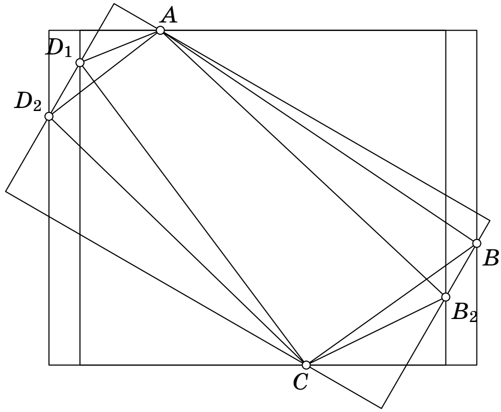


Рис. 104

$-S_{AB_1B_2}-S_{AD_1D_2}$. Отрезки B_1B_2 и D_1D_2 равны, поэтому $S_{AB_1B_2}+S_{AD_1D_2}=\frac{1}{2}ab$, где $a=B_1B_2=D_1D_2$ и b — сторона прямоугольника. Аналогично $S_{CB_1B_2}+S_{CD_1D_2}=\frac{1}{2}ab$.

2. См. решение задачи 2 для 10 класса.

3. Предположим, что при каждом повороте (при котором напротив числа, написанного на одном диске, стоит число, написанное на другом диске) найдутся два одинаковых числа, стоящих друг напротив друга. Тогда при каждом повороте есть ровно одна пара одинаковых чисел, стоящих друг напротив друга. Действительно, поворотов у нас всего 20, поэтому если бы хотя бы для одного поворота совпали две пары чисел, то количество чисел должно было бы быть не менее 21.

Пусть в исходном положении против числа i стоит число $\sigma(i)$. Вычислим двумя способами сумму $\sum\limits_{i=1}^{20}(i-\sigma(i))$ (mod 20). С одной стороны, $\sum\limits_{i=1}^{20}(i-\sigma(i))=\sum\limits_{i=1}^{20}i-\sum\limits_{i=1}^{20}\sigma(i)=0$. С другой стороны, поскольку при каждом повороте есть ровно одна пара одинаковых чисел, стоящих напротив друг друга, каждый из остатков $(i-\sigma(i)) \pmod{20}$ встречается ровно один раз, когда i пробегает числа от 1 до 20. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{20}(i-\sigma(i)) \equiv (0+1+2+3+\ldots+19) \pmod{20}$. Но число $1+2+3+\ldots+19=\frac{19\cdot 20}{2}=190$ не делится на 20. Получено противоречие, поэтому всегда можно повернуть один диск относительно другого так, чтобы никакие два одинаковых числа не стояли друг против друга.

4. Пусть b и a — наибольшее и наименьшее слагаемые в рассматриваемой сумме. Если $b \geqslant a+2$, то $b-1 \geqslant a+1$, следовательно, $a!(b-1)!\,b \geqslant a!(b-1)!(a+1)$, а значит, $a!\,b! \geqslant (a+1)!(b-1)!$. Поэтому b и a можно заменить на $b-1$ и $a+1$. После нескольких таких операций разность между наибольшим и наименьшим слагаемых будет не больше 1. Таким образом, можно считать, что число 1957 представлено в виде $1957=m\cdot(a+1)+(12-m)\cdot a=12a+m$, где $0\leqslant m\leqslant 12$. Число 1957 не делится на 12, поэтому m — остаток от деления 1957 на 12, т. е. $m=1$; при этом $a=163$.

5. Пусть окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке A. Пусть, далее, O_1 и O_2 — их центры, R_1 и R_2 — их радиусы. Докажем, что длина касательной, проведённой из точки B окружности S_1 к окружности S_2, равна $AB\sqrt{\frac{R_1+R_2}{R_1}}$. Действительно, пусть X — вторая точка пересечения прямой AB с окружностью S_2. Тогда квадрат длины касательной равен $BX\cdot BA$. Ясно, что $AB:BX=O_1A:O_1O_2$, поэтому

$$BX\cdot BA=\frac{AB^2\cdot O_1O_2}{O_1A}=AB^2\frac{R_1+R_2}{R_1}.$$

Ясно, что точки касания трёх равных окружностей с четвёртой окружностью образуют правильный треугольник. Поэтому остаётся доказать, что одно из расстояний от произвольной точки описанной окружности правильного треугольника до его вершины равно сумме двух других расстояний. Это в точности задача 2 для 7–8 классов 2 тура олимпиады 1940 года, см. с. 16.

10 класс

1. Возьмём на прямых AB и CD точки E и F так, чтобы прямые BF и CE имели заданные направления. Рассмотрим всевозможные прямоугольники $PQRS$ с заданными направлениями сторон, вершины P и R которых лежат на лучах BA и CD, а вершина Q — на стороне BC (рис. 105). Докажем, что геометрическим местом вершин S является отрезок EF. В самом деле, $\frac{SR}{EC}=\frac{PQ}{EC}=\frac{BQ}{BC}=\frac{FR}{FC}$, т. е. точка S лежит на отрезке EF. Обратно, если точка S' лежит на отрезке EF, то проведём $S'P' \parallel BF$, $P'Q' \parallel EC$ и $Q'R' \parallel BF$ (P', Q', R' — точки на прямых AB, BC, CD). Тогда $\frac{S'P'}{BF}=\frac{P'E}{BE}=\frac{Q'C}{BC}=\frac{Q'R'}{BF}$, т. е. $S'P'=Q'R'$ и $P'Q'R'S'$ — прямоугольник.

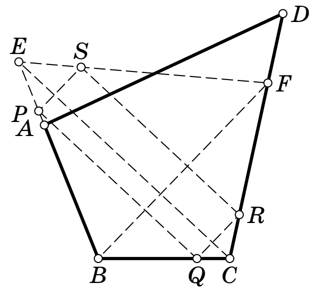


Рис. 105

Из этого вытекает следующее построение. Строим сначала точки E и F. Вершина S является точкой пересечения отрезков AD и EF (если отрезки AD и EF не пересекаются, то решений нет). Дальнейшее построение очевидно.

2. Пусть $\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ — корни уравнения $1-x^2=x$. Тогда $x_1=\ldots=x_n=\alpha_1$ и $x_1=\ldots=x_n=\alpha_2$ — решения системы. Если $n=2k$ — чётное число, то $x_{2l}=0$, $x_{2l-1}=1$ и $x_{2l}=1$, $x_{2l-1}=0$ ($l=1, \ldots, k$) — тоже решения системы. Покажем, что других действительных решений нет.

Рассмотрим отдельно интервалы, на которые точки $\alpha_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, 0, $\alpha_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и 1 разбивают числовую ось. Рас-

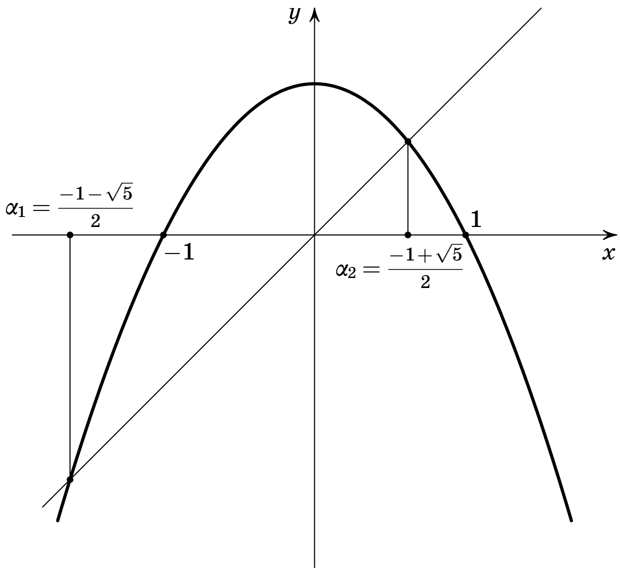


Рис. 106

смотрим функцию $f(x) = 1 - x^2$ и положим

$$f^{(n)}(x) = f(f(\dots f(x)\dots)) \quad (n \text{ раз}).$$

Достаточно проверить, что ни на одном из интервалов $(-\infty, \alpha_1)$, $(\alpha_1, 0)$, $(0, \alpha_2)$, $(\alpha_2, 1)$, $(1, +\infty)$ уравнение $f^{(n)}(x) = x$ не имеет решений. Из неравенства $f(x) \leqslant 1$ следует, что на интервале $(1, +\infty)$ решений нет. Заметим, далее, что на интервалах $(-\infty, \alpha_1)$, $(0, \alpha_2)$ и $(1, +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) < x$, а на интервалах $(\alpha_1, 0)$ и $(\alpha_2, 1)$ выполняется неравенство $f(x) > x$ (рис. 106). В частности, функция $f(x)$ переводит интервал $(-\infty, \alpha_1)$ в себя. Но на этом интервале $f(x) < x$, а значит, на этом интервале $f^{(n)}(x) < x$. Следовательно, на интервале $(-\infty, \alpha_1)$ решений нет. Рассмотрим теперь интервал $(\alpha_1, 0)$. Если $x_1 \in (\alpha_1, 0)$, то $x_2 = f(x_1) \in (\alpha_1, 0) \cup [0, 1]$. Если $x_2 \in [0, 1]$, то и $f^{(n-1)}(x_2) \in [0, 1]$, так как функция f переводит отрезок $[0, 1]$ в себя. Но $f^{(n-1)}(x_2) = x_1 \in (\alpha_1, 0)$. Получено противоречие, поэтому $x_2 \in (\alpha_1, 0)$. Аналогично $x_3, \ldots, x_n \in (\alpha_1, 0)$. Но $f(x) > x$ на интервале $(\alpha_1, 0)$, поэтому $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < f(x_n) = x_1$. Полученное противоречие показывает, что на интервале $(\alpha_1, 0)$ решений нет. Пусть теперь $x_1 \in (0, 1)$. Функция f отображает интервал $(0, \alpha_2)$ в интервал $(\alpha_2, 1)$, а интервал $(\alpha_2, 1)$ — в интервал $(0, \alpha_2)$, поэтому число n должно быть чётным. Заметим теперь, что на интервале $(0, \alpha_2)$ выполняется неравенство $f(f(x)) < x$, а на интервале $(\alpha_2, 1)$ выполняется неравенство $f(f(x)) > x$. Поэтому ни на одном из интервалов $(0, \alpha_2)$ и $(\alpha_2, 1)$ у нашей системы решений нет.

3. Опустим из точки O перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1 и OD_1 на грани. Из точки G тоже опустим перпендикуляры GA_2, GB_2, GC_2 и GD_2 на грани. Ясно, что

$$\frac{OA'}{GA'} + \frac{OB'}{GB'} + \frac{OC'}{GC'} + \frac{OD'}{GD'} = \frac{OA_1}{GA_2} + \frac{OB_1}{GB_2} + \frac{OC_1}{GC_2} + \frac{OD_1}{GD_2}$$

и $GA_2 = GB_2 = GC_2 = GD_2 = x$. Остаётся доказать, что $OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 = 4x$.

Пусть S — площадь грани правильного тетраэдра $ABCD$, V — объём тетраэдра. Тогда

$$S \cdot (OA_1 + OB_1 + OC_1) = 3V.$$

Поэтому сумма $OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1$ одна и та же для всех точек O внутри тетраэдра $ABCD$. Но если O совпадает с G, то эта сумма равна $4x$.

4. Сопоставим цифре числа из первой последовательности нуль числа из второй последовательности следующим образом. Напишем после данной цифры нуль. В результате получим число из второй последовательности с отмеченным нулём. Нашей цифре мы сопоставляем именно этот нуль. Наоборот, нулю числа из второй последовательности сопоставим цифру числа из первой последовательности следующим образом. Отметим цифру, которая стоит перед данным нулём, и после этого нуль вычеркнем. В результате получим число из первой последовательности с отмеченной цифрой. Нашему нулю мы сопоставляем именно эту цифру. Эти операции взаимно обратны, поэтому мы получаем взаимно однозначное соответствие между цифрами числа первой последовательности и нулями чисел второй последовательности.

5. Отнесём к одной группе число a_n, а к другой — число a_{n-1}. Затем будем последовательно относить числа a_{n-2}, a_{n-3}, ..., a_1 к той группе, в которой сумма чисел меньше (если суммы равные, то число можно относить к любой группе). Пусть $\Delta_k \geqslant 0$ — разность между суммами чисел в группах, полученных после отнесения к ним a_k. Покажем, что $\Delta_k \leqslant a_k$. Действительно, $\Delta_{n-1} = a_n - a_{n-1} \leqslant 2a_{n-1} - a_{n-1} = a_{n-1}$. Ясно также, что если $\Delta_k \leqslant a_k$, то $\Delta_{k-1} = |\Delta_k - a_{k-1}|$ и $-a_{k-1} \leqslant \Delta_k - a_{k-1} \leqslant a_k - a_{k-1} \leqslant 2a_{k-1} - a_{k-1} = a_{k-1}$.

После того как мы распределим по двум группам все числа, получим группы с суммами чисел S_1 и S_2, причём $|S_1 - S_2| \leqslant a_1 = 1$. По условию число $S_1 + S_2$ чётное, поэтому $S_1 = S_2$.

Основные факты

В настоящий раздел собраны понятия и теоремы, которые наиболее часто встречались в решениях задач данной книги. Эти понятия и теоремы мы для краткости назвали *фактами*. Мы старались не включать факты, имеющиеся в большинстве школьных учебников.

Этот раздел не претендует на полноту и не заменяет систематических учебных пособий (см. список литературы).

Комбинаторика

1°. Число комбинаций

Пусть нужно выбрать k предметов, причём первый предмет можно выбрать из n_1 предметов $a_1, \ldots, a_{n_1}$, второй — из n_2 предметов $b_1, \ldots, b_{n_2}$, k-й — из n_k предметов $x_1, \ldots, x_{n_k}$. Тогда общее число всех разных способов выбрать эти предметы равно $n_1 n_2 \ldots n_k$. Действительно, рассмотрим сначала случай $k=2$. Составим из пар выбранных элементов прямоугольную таблицу с n_1 строками и n_2 столбцами, расположив пару (a_i, b_j) на пересечении i-й строки и j-го столбца. Каждая пара встречается в этой таблице ровно один раз, поэтому мы получаем $n_1 n_2$ пар. При $k=3$ будем рассматривать пару (a_i, b_j) как элемент нового типа. Тогда каждую тройку (a_i, b_j, c_l) можно рассматривать как пару, состоящую из элемента (a_i, b_j) и элемента c_l. Следовательно, количество всех троек равно $n_1 n_2 n_3$. Для произвольного k требуемое утверждение доказывается по индукции.

Задачи: 35.С.1, 35.С.2, 36.4, 45.2.7–8.1, 57.1.7.5.

2°. Число сочетаний

Пусть есть n разных предметов, из которых нужно выбрать k предметов, причём две выборки считаются разными, если они состоят из разных предметов (т. е. порядок, в котором выбираются элементы, не учитывается). Тогда количество всех возможных выборок равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Действительно, если мы будем выбирать предметы с учётом порядка, то получим $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ различных выборок, поскольку первый предмет выбирается из n предметов, второй — из оставшихся $n-1$, третий — из оставшихся $n-2$ и т. д. Если теперь забыть про порядок, в котором выбирались предметы, то каждая выборка встретится у нас $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)k$ раз. Действительно, первый выбранный предмет может быть любым из k предметов, второй — любым из оставшихся $k-1$ предметов, третий — любым из оставшихся $k-2$ предметов и т. д.

Количество способов выбрать k элементов из n обозначается C_n^k.

Задачи: 35.С.2, 37.2.3, 47.1.7–8.1.

3°. Бином Ньютона

Для вычисления $(a+b)^n$, где n — натуральное число, можно воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n,$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ — количество способов выбрать k элементов из n. Действительно, каждое слагаемое a^kb^{n-k} получается, когда при раскрытии скобок мы выбираем k из n сомножителей $a+b$ и берём в них a, а в остальных сомножителях берём b.

Задачи: 40.2.9–10.2, 48.2.9–10.1, 53.2.10.1.

4°. Формула включений и исключений

Формула включений и исключений для двух множеств позволяет вычислить количество элементов множества $A\cup B$, если известны количества элементов множеств A, B и $A\cap B$. Другими словами, она позволяет найти количество предметов, которые обладают по крайней мере одним из некоторых двух свойств, если известно количество предметов, обладающих первым свойством, вторым свойством и обоими свойствами одновременно. Если обозначить через $|X|$ количество элементов в множестве X, то эта формула выглядит следующим образом:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Действительно, если мы возьмём сумму $|A| + |B|$, то все элементы множества $A \cap B$ посчитаем дважды.

Отметим, что для n множеств A_1, ..., A_n тоже есть формула включений и исключений:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} N_k,$$

где $N_k = \sum |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$. (В этой книге формула для $n > 2$ не используется.)

Задачи: 38.2.4.

5°. Числа Каталана

Во многих задачах комбинаторики встречаются так называемые числа Каталана $c_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. Эти числа задаются рекуррентным соотношением

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} c_0$$

и начальным условием $c_0 = 1$.

Можно доказать, что количество различных способов разрезать выпуклый n-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями равно c_{n-2}; количество различных способов расставить n пар круглых скобок в слове, состоящем из $n+1$ букв, так, чтобы внутри каждой пары скобок стояли либо две соседние буквы, либо буква и соседнее выражение в скобках, либо два соседних выражения в скобках, равно c_n.

Задачи: 50.2.7–8.4.

Литература: [7].

6°. Принцип Дирихле

В простейшем виде его выражают так: «Если десять кроликов сидят в девяти клетках, то в некоторой клетке сидит не меньше двух кроликов». Более общая форма принципа Дирихле: *если рассадить более чем kd кроликов по k клеткам, то обязательно найдется клетка, в которой будет по крайней мере $d+1$ кролик.* Для непрерывных величин принцип Дирихле выглядит так: если кашу объема v разделить между n людьми, то кто-то получит не меньше v/n и кто-то получит не больше v/n.

Задачи: 46.2.9–10.2, 47.1.9–10.3, 47.2.7–8.3, 47.2.9–10.5, 49.2.7–8.5, 49.2.9–10.5, 50.2.9–10.2, 51.2.9–10.3, 54.2.8.1, 55.1.9.4, 55.2.8.5, 56.2.9.1.

Теория чисел

7°. Делимость

Говорят, что целое число a *делится* на целое число b (или *кратно* числу b), если найдется такое целое число c, что $a=bc$. В этом случае также говорят, что b *делит* a. (Например, «2 делит 6» или «6 делится на 2», «-1 делит -5».) Обозначение: $b\,|\,a$.

Свойства:

а) Любое число делится на ±1 и на себя; 0 делится на любое число, но никакое ненулевое число не делится на 0.

б) Если $d\,|\,a$ и $d\,|\,b$, то $d\,|\,a\pm b$; кроме того, $d\,|\,ac$ для любого целого c; если $c\,|\,b$ и $b\,|\,a$, то $c\,|\,a$.

в) Если $b\,|\,a$, то $|b|\leqslant|a|$ или $a=0$.

г) Если $d\,|\,a$ и $d\,|\,b$, k и l — целые числа, то $d\,|\,ka+lb$; более общо, если каждое из чисел a_1, a_2, …, a_n делится на d, а k_i — целые числа, то $d\,|\,k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n$.

Наибольший общий делитель чисел a и b мы обозначаем НОД(a, b). Числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД$(a, b)=1$ (иначе говоря, числа взаимно просты, если из того, что $d\,|\,a$ и $d\,|\,b$, следует, что $d=\pm1$).

Для вычисления наибольшего общего делителя иногда бывает полезно соотношение НОД$(a, b) = $НОД$(a-b, b)$ (см., например, задачу 56.1.7.4).

Задачи: 51.2.9–10.2, 53.2.7.1, 56.1.7.4.
Литература: [2, гл. 1].

8°. Деление с остатком

Пусть a и b — целые числа, причем $b \neq 0$. Тогда найдутся единственные целые q и r, для которых: а) $a = qb + r$; б) $0 \leqslant r < |b|$. При этом q и r называются *частным* и *остатком* от деления a на b соответственно.

Пусть $b > 0$. Остатками при делении на b могут быть числа $0, 1, \ldots, b-1$. Число дает остаток r при делении на b тогда и только тогда, когда оно имеет вид $qb + r$, где q целое. При этом все числа разбиваются на b (бесконечных) арифметических прогрессий. Например, при $b = 2$ это прогрессии $2n$ и $2n+1$, при $b = 3$ — прогрессии $3n$, $3n+1$ и $3n+2$ и т. д.

Число делится на b тогда и только тогда, когда его остаток от деления на b равен нулю.

Остатки суммы (произведения) однозначно определяются остатками слагаемых (сомножителей). Например, если числа a и b дают остатки 3 и 6 при делении на 7, то $a + b$ дает остаток $2 = 3 + 6 - 7$, число $a - b$ — остаток $4 = 3 - 6 + 7$, а ab — остаток $4 = 3 \cdot 6 - 14$ при делении на 7.

Точное утверждение таково: если остаток от деления a_1 на b равен r_1, а остаток от деления a_2 на b равен r_2, то остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b, а остаток от деления a_1a_2 на b равен остатку от деления r_1r_2 на b.

Квадрат любого целого числа при делении на 3 или на 4 даёт в остатке 0 или 1. Этот факт используется при решении задач 36.3, 49.1.7–8.3 и 54.1.7.4.

Последовательность остатков от деления чисел a, a^2, a^3, a^4, ... на фиксированное число периодична. Этот факт используется при решении задач 40.2.9–10.5 и 55.1.8.1.

Перебирая все возможные остатки от деления на 7, несложно проверить, что сумма двух квадратов целых чисел делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа делятся на 7. Этот факт используется при решении задачи 40.2.7–8.4.

Задачи: 36.3, 39.2.4, 40.2.7–8.4, 40.2.9–10.5, 41.2.7–8.5, 42.1.9–10.2, 49.1.7–8.3, 49.2.7–8.5, 53.1.7.2, 54.1.7.4, 55.1.8.1, 57.2.9.3, 57.2.9.4.
Литература: [2, гл. 1] и [4, §2].

9°. Разложение на простые множители

Число $p > 1$ называется *простым*, если оно делится лишь на $\pm p$ и ± 1. Остальные натуральные числа, бо́льшие единицы, называются *составными*. Каждое составное число может быть представлено в виде произведения простых. Иногда бывает удобно сгруппировать одинаковые простые и записать это произведение в виде

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k},$$

где p_1, p_2, ..., p_k — различные простые числа, n_1, n_2, ..., n_k — натуральные числа.

Основная теорема арифметики. *Разложение числа на простые множители единственно* (*с точностью до порядка множителей*).

Задачи: 35.С.3, 47.2.7–8.3, 47.2.9–10.4, 48.2.7–8.1.
Литература: [2, гл. 1], [4].

10°. *Пусть m/n и p/q — несократимые дроби, причём число $(m/n)^{p/q}$ рациональное. Тогда числа $m^{1/q}$ и $n^{1/q}$ целые.*

Доказательство. Пусть $\sqrt[q]{\frac{m^p}{n^p}} = \frac{m_1}{n_1}$ — несократимая дробь, причём $n_1 > 0$. Тогда из равенства $\frac{m^p}{n^p} = \frac{m_1^q}{n_1^q}$ следует, что $m^p = m_1^q$ и $n^p = n_1^q$. Из равенства $m^p = m_1^q$ следует, что набор простых делителей у чисел m и m_1 один и тот же. Пусть a — один из этих простых делителей, причём в m и в m_1 он входит в степенях x и y соответственно. Тогда $px = qy$, поэтому x делится на q. Таким образом, степень, в которой каждый простой делитель входит в число m, делится на q. Для числа m утверждение доказано; для числа n доказательство аналогично.

Задачи: 48.2.9–10.1.

Геометрия

11°. Вневписанные окружности

Вневписанной окружностью треугольника ABC называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Таким образом, у каждого треугольника имеется три вневписанных окружности (рис. 107).

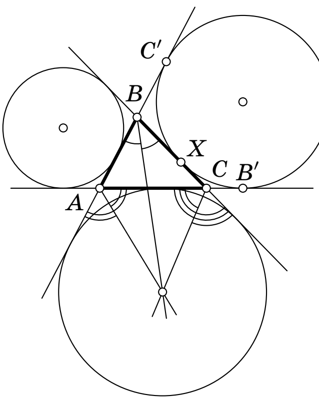


Рис. 107

Центр вневписанной окружности есть точка пересечения биссектрисы одного из углов треугольника и двух биссектрис внешних углов треугольника. Таким образом, эти три биссектрисы пересекаются в одной точке.

12°. *Расстояние от вершины A треугольника ABC до расположенной вне отрезка AB точки C' касания вневписанной окружности с лучом AB равно полупериметру.*

Доказательство. Пусть лучи AB и AC касаются вневписанной окружности в точках C' и B', а сторона BC касается вневписанной окружности в точке X. Тогда $BC' = BX$ и $CB' = CX$. Поэтому $AB' = AC + CB' = AC + CX$ и $AC' = AB + BC' = AB + BX$. Учитывая, что $AB' = AC'$, получаем

$$AB' = AC' = \frac{AB' + AC'}{2} = \frac{AC + CX + AB + BX}{2} = \frac{AB + AC + BC}{2}.$$

Доказательство завершено.

Задачи: 36.2.

Для вписанной окружности имеет место аналогичное свойство: расстояние от вершины A треугольника ABC до точки касания вписанной окружности с выходящей из неё стороной равно $\frac{AB+AC-BC}{2}$; доказательство аналогично предыдущему случаю.

Задачи: 52.2.7.2, 53.1.8.1.

13°. *Высоты треугольника пересекаются в одной точке*.

В любом треугольнике высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

По поводу доказательства см. [6, задача 5.51 или 7.42].

Задачи: 52.1.8.1, 54.1.9.4.

14°. *Сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулю*.

Доказательство. При любом повороте, переводящем данный правильный многоугольник в себя, рассматриваемая сумма векторов тоже должна переходить в себя, но таким свойством обладает только нулевой вектор.

Задачи: 39.1.2.

15°. *Множество точек X, для которых $XA^2-XB^2=$ $=\mathrm{const}$, представляет собой прямую, перпендикулярную прямой AB*.

По поводу доказательства см. [6, задача 7.6].

Задачи: 55.2.8.2.

16°. Ориентированные углы

Величины вписанных углов, опирающихся на одну хорду, могут быть равны, а могут составлять в сумме $180°$. Для того чтобы не рассматривать различные варианты расположения точек на окружности, введём понятие ориентированного угла между прямыми. *Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD* (обозначение: $\angle(AB, CD)$) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на $n\cdot 180°$, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме 180° или, что по нашему соглашению то же самое, 0°).

Легко проверить следующие свойства ориентированных углов:

а) $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$;

б) $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$;

в) точки A, B, C, D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$ (для доказательства этого свойства нужно рассмотреть два случая: точки B и D лежат по одну сторону от AC; B и D лежат по разные стороны от AC).

Задачи: 37.2.1, 50.1.7–8.3, 50.1.9–10.5, 55.1.8.5.

Литература: [6, гл. 2].

17°. Центр масс

Пусть на плоскости задана система точек с приписанными им массами, т. е. имеется набор пар (X_i, m_i), где X_i — точка плоскости, а m_i — положительное число. *Центром масс* системы точек $X_1, \ldots, X_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n$ называют точку O, для которой выполняется равенство

$$m_1\overrightarrow{OX_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{OX_n} = \vec{0}.$$

Центр масс любой системы точек существует, причём только один.

Важнейшим свойством центра масс, на котором основаны почти все его применения, является **теорема о группировке масс:** *центр масс системы точек останется прежним, если часть точек заменить одной точкой, которая расположена в их центре масс и которой приписана масса, равная сумме их масс*. С помощью группировки масс решаются задачи 49.2.7–8.4, 55.2.10.5, 56.1.9.1.

Если система точек имеет ось симметрии, то центр масс системы переходит в себя при симметрии относительно этой оси.

Оси вращения ограниченного тела пересекаются в его центре масс. Этот факт используется при решении задачи 49.1.9–10.2.

Задачи: 49.1.7–8.2, 49.1.9–10.2, 49.2.7–8.4, 55.2.10.5, 56.1.9.1.

Литература: [6, гл. 14].

18°. *Если сумма линейных уравнений* $a_i x + b_i y = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$*, задающих три прямые, равна нулю, то эти прямые пересекаются в одной точке или параллельны.*

Доказательство. Пусть прямые заданы уравнениями $a_i x + b_i y = c_i$, где $i = 1, 2, 3$. Предположим, что не все эти прямые параллельны друг другу; для определённости можно считать, что прямые $a_1 x + b_1 y = c_1$ и $a_2 x + b_2 y = c_2$ пересекаются в точке (x_0, y_0), т. е. $a_1 x_0 + b_1 y_0 = c_1$ и $a_2 x_0 + b_2 y_0 = c_2$. Складывая эти уравнения, получаем $a_3 x_0 + b_3 y_0 = c_3$. Это означает, что третья прямая тоже проходит через точку (x_0, y_0).

Задачи: 53.2.9.2.

19°. Теоремы Менелая и Чевы

Пусть на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (или на их продолжениях) взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1,$$

причём на сторонах (а не на их продолжениях) треугольника ABC лежит нечётное число точек (*теорема Менелая*). Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной и той же точке тогда и только тогда, когда выполняется то же самое соотношение, но на сторонах треугольника ABC лежит чётное число точек (*теорема Чевы*). Теорема Менелая применяется при решении задачи 56.2.9.4.

Если на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA}.$$

Это равенство позволяет использовать теоремы Менелая и Чевы в тригонометрической форме. Теорему Чевы в тригонометрической форме можно применить для решения задачи 53.2.9.2.

Задачи: 53.2.9.2, 56.2.9.4.
Литература: [6, гл. 5].

20°. Теорема Птолемея

Для вписанного четырёхугольника $ABCD$ выполняется равенство $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

Задачи: 54.2.9.2.
Литература: [6, гл. 6].

21°. Достраивание тетраэдра

Иногда бывает полезно рассмотреть параллелепипед, который получается при проведении через каждое ребро тетраэдра плоскости, параллельной противолежащему ребру. Этим параллелепипедом можно воспользоваться при решении задачи 37.1.3.

22°. Отношение площадей проекций

Площадь ортогональной проекции фигуры равна площади исходной фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью, в которой расположена фигура, и плоскостью проекции.

Задачи: 51.2.9–10.1.
Литература: [8, гл. 2].

Геометрические преобразования

23°. Параллельный перенос

Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AB}$ называют преобразование, переводящее точку X в такую точку X', что $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{AB}$.

Композиция (т. е последовательное выполнение) двух параллельных переносов является параллельным переносом.

Задачи: 41.2.7–8.3, 55.1.9.2.
Литература: [6, гл. 15].

24°. Центральная симметрия

Центральной симметрией относительно точки A называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что A — середина отрезка XX'. Если фигура переходит в себя при симметрии относительно точки A, то A называют *центром симметрии* этой фигуры.

Композиция двух центральных симметрий с центрами A и B является параллельным переносом на вектор $2\overrightarrow{AB}$. Этот факт используется при решении задачи 38.2.1.

Задачи: 38.2.1, 46.1.9–10.2, 48.2.7–8.3, 49.1.7–8.4,
49.2.9–10.4, 53.1.10.2, 54.2.8.1.
Литература: [6, гл. 16].

25°. Осевая симметрия

Симметрией относительно прямой l (обозначение: S_l) называют преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что l — серединный перпендикуляр к отрезку XX'. Это преобразование называют также *осевой симметрией*, а l — осью симметрии.

Скользящей симметрией называют композицию симметрии относительно некоторой прямой l и переноса на вектор, параллельный l. Скользящая симметрия используется при решении задачи 51.1.7–8.4.

Задачи: 37.1.2, 38.2.3, 51.1.7–8.4.
Литература: [6, гл. 17].

26°. Поворот

Поворот относительно точки O на угол φ — это преобразование плоскости, переводящее точку X в такую точку X', что:

а) $OX' = OX$;

б) угол поворота от вектора $\overrightarrow{OX}$ к вектору $\overrightarrow{OX'}$ равен φ.

Задачи: 54.1.8.2 (поворот на 90°),
55.1.7.3 (поворот на 120°).
Литература: [6, гл. 18].

27°. Гомотетия

Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X', обладающую тем свойством, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точку O называют *центром гомотетии*, а число k — *коэффициентом гомотетии*.

Задачи: 36.5, 48.2.7–8.2, 54.2.9.1.

Литература: [6, гл. 19].

28°. Инверсия

Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R. *Инверсией относительно окружности S* называют преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A^*, лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O.

Сформулируем важнейшие свойства инверсии, применяемые при решении задач. При инверсии с центром O:

а) прямая l, не содержащая O, переходит в окружность, проходящую через O;

б) окружность с центром C, проходящая через O, переходит в прямую, перпендикулярную OC;

в) окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O;

г) касание окружностей и прямых сохраняется, если только точка касания не совпадает с центром инверсии; в последнем случае получается пара параллельных прямых.

Задачи: 55.2.8.4.

Литература: [6, гл. 28].

Многочлены

29°. Деление многочленов и теорема Безу

Многочлены с рациональными коэффициентами можно делить с остатком, как и целые числа:

Теорема. *Пусть f и g — многочлены, причем $g \neq 0$. Тогда найдутся единственные многочлены q и r, для которых* а) $f = qg + r$; б) *степень r меньше степени g.*

При этом q и r называются *частным* и *остатком* от деления f на g соответственно. Аналогичная теорема верна для многочленов с действительными коэффициентами. Мы считаем, что степень нулевого многочлена меньше степени любого ненулевого многочлена.

Например, частное от деления x^4+1 на x^2+x равно x^2-x+1, а остаток равен $1-x$.

Теорема Безу. а) *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ равен $f(a)$.*

б) *многочлен $f(x)$ делится на $x-a$ тогда и только тогда, когда a — корень многочлена $f(x)$.*

Задачи: 47.1.7–8.2, 51.2.7–8.5 (деление многочленов), 55.2.10.1 (теорема Безу).

Литература: [9].

30°. Корни многочлена

Теорема. *Многочлен степени n имеет не более n корней.*

Эта теорема используется при решении задачи 53.2.10.1. Непосредственно из этой теоремы следует, что если многочлен $P(x)$ тождественно равен нулю при всех x, то все его коэффициенты равны нулю. Этот факт используется при решении задачи 46.1.7–8.5.

Литература: [9].

31°. *Если в произведении двух многочленов с целыми коэффициентами каждый коэффициент заменить на его остаток от деления на 2, то результат будет такой же, как если бы мы сначала в каждом из двух исходных многочленов заменили коэффициенты на их остатки от деления на 2, а затем в полученном произведении снова заменили коэффициенты на остатки от деления на 2.* Действительно, коэффициент при x^k в произведении многочленов $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ и $b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0$ равен $a_kb_0+a_{k-1}b_1+\ldots+a_0b_k$, поэтому достаточно заметить, что при вычислении остатка от деления на 2 как суммы, так и произведения двух (а значит, и нескольких) целых чисел можно сложить или перемножить их остатки, а потом взять остаток полученного числа.

Задачи: 39.2.2, 46.1.7–8.5, 47.1.7–8.2, 51.2.7–8.5, 53.2.10.1, 55.2.10.1.

Разные факты

32°. Индукция, полная индукция

Математическая индукция — это метод доказательства утверждений типа: «Для каждого натурального n верно, что...». Такое утверждение можно рассматривать как цепочку утверждений: «Для $n=1$ верно, что...», «Для $n=2$ верно, что...» и т. д.

Первое утверждение цепочки называется *базой* (или *основанием*) индукции. Его обычно легко проверить. Затем доказывается *индуктивный переход* (или *шаг индукции*): «Если верно утверждение с номером n, то верно утверждение с номером $n+1$». Индуктивный переход также можно рассматривать как цепочку переходов: «Если верно утверждение 1, то верно утверждение 2», «Если верно утверждение 2, то верно утверждение 3» и т. д.

Если верна база индукции и верен индуктивный переход, то все утверждения верны (это и есть *принцип математической индукции*).

Иногда для доказательства очередного утверждения цепочки надо опираться на *все* предыдущие утверждения. Тогда индуктивный переход звучит так: «Если верны все утверждения с номерами от 1 до n, то верно и утверждение с номером $n+1$».

Иногда удобен *индуктивный спуск*, или *обратная индукция*: если утверждение с номером $n>1$ можно свести к одному или нескольким утверждениям с меньшими номерами и утверждение 1 верно, то все утверждения верны.

Часто спуск оформляется следующим образом: рассуждают от противного, рассматривают наименьшее n, для которого утверждение с номером n неверно, и доказывают, что найдется такое $m < n$, что утверждение с номером m неверно.

Метод математической индукции применяется в весьма различных ситуациях. Для доказательства неравенств он применяется в задачах 40.2.9–10.2, 52.1.10.2; для доказательства тригонометрического тождества — в задаче 45.2.9–10.2; для вычисления сумм — в задаче 35.2.В.3. Метод математической индукции применяется также и в геометрии, но в задачах олимпиад, содержащихся в этой книге, все такие применения так или иначе связаны с разрезаниями: см. задачи 38.2.2, 39.2.6, 48.1.7–8.3, 52.2.8.4.

Задачи: 35.2.В.3, 38.2.2, 39.2.6, 40.2.9–10.2,
45.2.9–10.2, 48.1.7–8.3, 52.1.10.2, 52.2.8.4.

Литература: [5].

33°. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

Для неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Это неравенство используется при решении задачи 35.В.1. Положив $a = x$, $b = 1 - x$, мы получаем неравенство $x(1-x) \leqslant 1/4$, которое используется при решении задачи 54.2.9.2.

Для n неотрицательных чисел x_1, ..., x_n выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Задачи: 35.В.1, 40.2.9–10.4 (для n чисел), 54.2.9.2.

Литература: [7, гл. 8].

34°. Правило крайнего

При решении некоторых задач бывает полезно рассмотреть наибольшее или наименьшее число, наибольшее или наименьшее расстояние и т.п. Основанный на этом способ решения задач часто называют правилом крайнего.

Задачи: 41.2.7–8.1, 41.2.9–10.1, 41.2.9–10.2, 48.2.7–8.3,
49.2.7–8.3, 52.1.9.1, 54.2.7.3, 57.2.7.4.

35°. Монотонность

Функцию $f(x)$ называют *монотонно возрастающей* на интервале $[a, b]$, если для любых двух точек x_1, x_2 из этого интервала из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функцию $f(x)$ называют *монотонно убывающей*. При $x > 0$ функция $f(x) = 1/x^n$ монотонно убывающая для любого натурального n. Если $c > 0$, а функция $f(x)$ монотонно убывающая, то функция $cf(x)$ тоже монотонно убывающая. Ясно также, что сумма двух или нескольких монотонно убывающих функций является монотонно убывающей функцией.

Задачи: 55.2.9.3.

36°. Предел последовательностей

Говорят, что бесконечная последовательность a_n имеет *предел* L (*стремится к* L, когда n стремится к бесконечности), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что для всякого $n > k$ выполняется неравенство $|a_n - L| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Это определение есть формализация утверждения «a_n очень близко к L, если n очень велико». Равносильное определение: каждый интервал, содержащий L, содержит все члены последовательности a_n за исключением, быть может, конечного числа.

Задачи: 55.2.8.1.
Литература: [3, гл. 3].

37°. *Пусть n и m — натуральные числа, причём $n > m$. Тогда если c_1 и c_2 — положительные числа, то c_1x^n растёт быстрее c_2x^m, т. е. $c_1x^n > c_2x^m$ при достаточно больших x.*

Действительно, указанное неравенство можно переписать в виде $x^{n-m} > c_2/c_1$, а последнее неравенство выполняется при достаточно больших x, поскольку $n - m > 0$.

Задачи: 55.2.7.2.

38°. Кратные корни и производная

Если $f(x_0)=f'(x_0)=0$, *то* x_0 — *кратный корень многочлена* f, *т. е. многочлен* $f(x)$ *делится на* $(x-x_0)^2$.

Действительно, запишем многочлен $f(x)$ в виде

$$f(x) = (x-x_0)^m g(x),$$

где $g(x_0)\neq 0$, а m — некоторое целое неотрицательное число. Из равенства $f(x_0)=0$ следует, что $m\geqslant 1$. Поэтому из равенства $f'(x)=mx(x-x_0)^{m-1}g(x)+(x-x_0)^m g'(x)$ следует, что $f'(x_0)=mx(x-x_0)^{m-1}g(x_0)$, поэтому если $f'(x_0)=0$, то $m\geqslant 2$.

Задачи: 54.1.9.1.

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Статистика первых цифр степеней двойки и передел мира // Квант. — 1998. — №1. — С. 2—4.

[2] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М. : Наука, 1981.

[3] Зорич В. А. Математический анализ : в 2 т. — М. : МЦНМО, 2002.

[4] Калужин Л. А. Основная теорема арифметики. — М. : Наука, 1969. — (Популярные лекции по математике, вып. 47).

[5] Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. — М. : МЦНМО, 2004.

[6] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М. : МЦНМО, 2006.

[7] Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М. : МЦНМО, 2007.

[8] Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М. : Наука, 1989.

[9] Табачников С. Л. Многочлены. — М. : Фазис, 1996.

[10] Тихомиров В. М. Об одной олимпиадной задаче // Квант. — 1983. — №1. — С. 22—25.

[11] Холл М. Комбинаторика. — М. : Мир, 1970.

[12] Яглом И. М. Как разрезать квадрат? — М. : Наука, 1968.

Оглавление