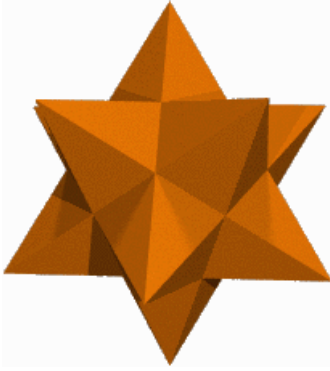


## Mathematik



griechisch: μαθημα, mathema = "Wissenschaft"  
... ursprüngliche Bezeichnung für Wissenschaft überhaupt  
... entstand aus praktischen Problemen des Zählens, Messens, Rechnens und geometrischen Zeichnens

*"Merkwürdig ist es immer, dass alle diejenigen, die diese Wissenschaft ernstlich studieren, eine Art Leidenschaft dafür fassen."  
Gauß 1808 an Bolyai*

Auch heute ist es noch eine wichtige Aufgabe der Mathematik, mathematische Modelle zur Beschreibung von natur-, wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Erscheinungen bereitzustellen, die der numerischen Berechnung durch Computer zugänglich sind

### **"Hochtechnologie ist im wesentlichen mathematische Technologie."**

Enquete-Kommission der US-amerikanischen Akademie der Wissenschaften

"Mathematik ist eine Tätigkeit, die von Tätigkeit handelt. Sie ist nicht an ihr Ende gelangt - ja, sie hat noch kaum begonnen, auch wenn ihre Werke den Glanz von Monumenten haben mögen."  
(Robert Kaplan)

### **Entwicklung der Mathematik**

... das mathematische Denken dürfte einerseits aus dem Zählen von Gegenständen (Finger, Hände), andererseits aus praktischen geometrischen Aufgaben (Landvermessung, Häuserbau) entstanden sein. Älteste Urkunde ist das Rechenbuch des Ahmes (1800 v.Chr.) in Ägypten.

*Hinter der Mathematik stecken die Zahlen. Wenn mich jemand fragen würde, was mich richtig glücklich macht, dann würde ich antworten: die Zahlen. Schnee und Eis und Zahlen. Und weißt Du warum? Weil das Zahlensystem wie das Menschenleben ist.*

*Zu Anfang hat man die natürlichen Zahlen. Das sind die ganzen und positiven. Die Zahlen des Kindes. Doch das menschliche Bewusstsein expandiert. Das Kind entdeckt die Sehnsucht, und weißt Du, was der mathematische Ausdruck für die Sehnsucht ist?*

*Es sind die negativen Zahlen. Die Formalisierung des Gefühls, dass einem etwas abgeht. Und das Bewusstsein erweitert sich immer noch und wächst, das Kind entdeckt die Zwischenräume. Zwischen den Steinen, den Moosen auf den Steinen, zwischen den Menschen. Und zwischen den Zahlen. Und weißt Du, wohin das führt?*

*Zu den Brüchen. Die ganzen Zahlen plus die Brüche ergeben die rationalen Zahlen. Aber das Bewusstsein macht dort nicht halt. Es will die Vernunft überschreiten. Es fügt eine so absurde Operation wie das Wurzelziehen hinzu.*

*Und erhält die irrationalen Zahlen. Es ist eine Art Wahnsinn. Denn die irrationalen Zahlen sind endlos. Man kann sie nicht schreiben. Sie zwingen das Bewusstsein ins Grenzenlose hinaus.*

*Und wenn man die irrationalen Zahlen mit den rationalen Zahlen zusammenlegt, hat man die reellen Zahlen. Es hört nicht auf. Es hört nie auf.*

*Denn jetzt gleich, auf der Stelle erweitern wir die reellen Zahlen um die imaginären, um die Quadratwurzeln der negativen Zahlen. Das sind Zahlen, die wir uns nicht vorstellen können. Zahlen, die das Normalbewusstsein nicht fassen kann.*

*Und wenn wir die imaginären Zahlen zu den reellen Zahlen dazurechnen, haben wir das komplexe Zahlensystem. Das erste Zahlensystem, das eine erschöpfende Darstellung der Eiskristallbildung ermöglicht.*

*Es ist wie eine große, offene Landschaft. Die Horizonte. Man zieht ihnen entgegen, und sie ziehen sich immer wieder zurück.*

(aus: "Fräulein Smillas Gespür für Schnee", Peter Høeg)

### **Teilgebiete der Mathematik**

*„Mathematik ist kein starres Konstrukt aus Grundannahmen und Regeln. Sie hat ihren eigenen, lebendigen Geist. Die Ästhetik des Abstrakten, die Poesie der Fiktionen machen sie zur Lyrik der Wissenschaften“*

*„Abenteuer Mathematik“ Pierre Basieux*

**Mathematische Logik** ... formalisiert die Sprache, in der mathematische Aussagen gemacht werden, stellt Regeln auf, um von Aussagen auf neue schließen zu können, analysiert Aussageformen und entwickelt Beweisverfahren.

**Mengenlehre** ... präzisiert den Mengenbegriff und behandelt die Verknüpfung von Mengen

**Algebra** ... untersucht algebraische Strukturen (Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, ...). Es werden Lösungsmethoden für Gleichungen und Gleichungssystem bereitgestellt. Im Rahmen der linearen Algebra werden Matrizen und Determinanten eingeführt. Mit der Galoistheorie können geometrische Probleme algebraisch untersucht werden.

Abbildung: Titelbild des grundlegenden Algebra-Werkes von al-Hwarizmi



**Zahlentheorie** ... beschäftigt sich mit Teilbarkeitsfragen im Ring der ganzen Zahlen und in algebraischen Zahlkörpern

**Topologie** ... untersucht topologische Strukturen

**Geometrie** ... widmet sich der Untersuchung der Form und Größe von Figuren

**Analytische Geometrie** ... benutzt zur Untersuchung der Räume und Figuren den Vektorbegriff. Durch diesen und die Einführung von Koordinaten wird die Geometrie algebraisiert.

**Algebraische Topologie (analysis situs)** ... bedient sich algebraischer Hilfsmittel zur Beantwortung topologischer Fragen

**Graphentheorie** ... ist aus der Topologie hervorgegangen und untersucht Probleme, welche auf Ecken und verbindende Kanten zurückgeführt werden können

**Differenzial- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung)** ... benutzt den Grenzwertbegriff und kann somit besondere Eigenschaften von Funktionen und Kurven untersuchen

**Analysis** ... Zweig der Mathematik, der hauptsächlich Untersuchungen über Grenzwerte anstellt und die Infinitesimalrechnung nutzt. Der Begriff wurde erstmals von Euler 1748 in "Introductio in analysin infinitorum" verwendet

**Theorie der Differenzialgleichungen** ... stellt Methoden zur Verfügung, um solche Gleichungen zu lösen

**Funktionalanalysis** ... ist eine weitgehende Verallgemeinerung der Integralrechnung und wendet topologische Methoden auf Funktionen an

**Differenzialgeometrie** ... untersucht mit Mitteln der Infinitesimalrechnung geometrische Figuren

**Funktionentheorie** ... überträgt die Infinitesimalrechnung auf Funktionen im Zahlenbereich der komplexen Zahlen

**Kombinatorik** ... untersucht Anzahlprobleme endlicher Mengen

**Wahrscheinlichkeitsrechnung** ... trifft Aussagen über das Eintreten zufälliger Ereignisse und ist die Grundlage der Statistik

**Maßtheorie** ... untersucht, ob und wie man Punktmengen eine Zahl zuordnen kann

**Chaostheorie** ... die Chaostheorie untersucht das Verhalten dynamischer Systeme und fraktaler Strukturen

*Eine Sprache, die allgemeinverständlicher und einfacher, freier von Irrtümern und Verschwommenheiten... würdiger wäre, die unveränderlichen Beziehungen der natürlichen Dinge auszudrücken als die Mathematik, kann es nicht geben.*  
Joseph Fourier, 1822

### Top Ten der schönsten mathematischen Sätze

Nach einer Leserumfrage des "The Mathematical Intelligencer" von 1990 wurden die zehn schönsten mathematischen Sätze gewählt:

- Platz 1  $e^{i\pi} = -1$ , Euler 1748
- Platz 2 Polyederformel für ein konvexes Polyeder:  $E-K+F=2$ , Euler 1751
- Platz 3 Es gibt unendlich viele Primzahlen, Euklid ca. 300 v.Chr.
- Platz 4 Es gibt nur 5 reguläre Polyeder, die platonischen Körper, Theaitetos, gest. 396 v.Chr.
- Platz 5 Die Summe aller  $1/n^2$  ist gleich  $\pi^2/6$ , James Gregory 1675
- Platz 6 Jede stetige Abbildung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe in sich hat einen Fixpunkt,

Brouwer 1911

- Platz 7  $\sqrt{2}$  ist irrational, Euklid
- Platz 8  $\pi$  ist transzendent, Lindemann 1882
- Platz 9 Jede ebene Landkarte kann mit höchstens 4 Farben gefärbt werden, Appel, Haken 1976
- Platz 10 Jede Primzahl  $p$  der Form  $4n+1$  kann eindeutig als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden, Euler 1754

Eine heutige Umfrage würde den jetzt bewiesenen letzten Fermatschen Satz wahrscheinlich vor dem Vierfarbensatz rangieren lassen: Für  $n > 2$  hat  $X^n+Y^n = Z^n$  keine ganzzahligen Lösungen  $X, Y, Z$ , alle verschieden von 0. Wiles 1994

Weitere schöne Sätze

- Platz 11 Die Ordnung einer Untergruppe teilt die Gruppenordnung, Lagrange
- Platz 12 Fundamentalsatz der Algebra, Gauß 1797

### 10 bedeutendste Gleichungen aller Zeiten

Im Jahre 2001 führte Clifford Pickover eine Internet-Umfrage nach den bedeutendsten Gleichungen aller Zeiten durch. Dort wurde folgendes gewählt:

- Platz 1  $E = mc^2$ , Masse-Energie-Äquivalenz von Einstein
- Platz 2  $a^2 + b^2 = c^2$ , Satz des Pythagoras
- Platz 3  $\epsilon_0 \int E \rightarrow dA \rightarrow = \Sigma q$ , eine Maxwellsche Gleichung zur Beschreibung elektromagnetischer Felder
- Platz 4  $x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) / (2a)$ , Lösungsformel quadratischer Gleichungen
- Platz 5  $F \rightarrow = m a \rightarrow$ , zweites Newtonsches Gesetz
- Platz 6  $1 + e^{i\pi} = 0$ , Eulersche Beziehung
- Platz 7  $u = 2\pi r, A = \pi r^2$ , Umfang und Flächeninhalt des Kreises
- Platz 8  $F \rightarrow = G m_1 m_2 r \rightarrow / r^3$ , Newtonsches Gravitationsgesetz
- Platz 9  $f(x) = \Sigma c_n e^{inx/L}$ , eine Fourier-Reihe
- Platz 10  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , Eulers Identität von Exponential- und trigonometrischen Funktionen  
 $a^n + b^n = c^n, n \geq 2$ , großer Satz von Fermat

Auf den weiteren Plätzen folgten weitere mathematische Gleichungen: 11.  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2/2! \dots$  (Taylor-Entwicklung), 14.  $z \rightarrow z^2 + \mu$  (Definition der Mandelbrotmenge), 15.  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$  (Definition der Eulerschen Zahl), 16.  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  (Kosinussatz), 17.  $\int K dA = 2\pi \times \chi$  (Gauß-Bonnet-Beziehung), 18.  $d/dx \int f(t)/dt = f(x)$  (Zusammenhang Integration-Differenziation), 19.  $1/(2\pi i) \int f(z)/(z-a) dz = f(a)$  (Cauchysche Integralformel), 20.  $dy/dx = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x))/h$  (Differenzialquotient).

Nach Aussage Pickovers gehört jeder, der 5 der ersten 10 Gleichungen identifizieren kann, zu dem 1% von Menschen auf diesem Planeten, die etwas Ahnung von Mathematik haben.

### Griechisches Alphabet

A,α	Alpha	B,β	Beta	Γ,γ	Gamma	Δ,δ	Delta	E,ε	Epsilon	Z,ζ	Zeta
H,η	Eta	Θ,θ,ϑ	Theta	I,ι	Jota	Κ,κ	Kappa	Λ,λ	Lambda	Μ,μ	My
N,ν	Ny	Ξ,ξ	Xi	Ο,ο	Omikron	Π,π	Pi	Ρ,ρ	Rho	Σ,σ,ς	Sigma
T,τ	Tau	Υ,υ	Ypsilon	Φ,φ	Phi	Χ,χ	Chi	Ψ,ψ	Psi	Ω,ω	Omega

### Beispiele

- $\alpha, \beta, \chi$  sehr oft Winkelbezeichnung
- $\Delta$  Bezeichnung einer Differenz
- $\epsilon$  oft kleine positive Größen (z.B.  $\epsilon$ -Umgebung)
- $\theta$  Temperatursymbol
- $\lambda$  oft für die Wellenlänge oder als Zerfallskonstante
- $\mu$  oft für ein Millionstel
- $\pi$  Kreiszahl
- $\rho$  die Dichte eines Stoffes, Inkreisradius
- $\omega$  Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit
- $\Sigma$  sehr oft als Summenbezeichnung

### Zahl

... grundlegender Begriff der Mathematik.

Der abstrakte Zahlenbegriff in seiner heutigen Fassung in das Ergebnis eines jahrtausendelangen Entwicklungsprozesses.

Die natürlichen Zahlen entstanden aus dem praktischen Bedürfnis, Gegenstände zu zählen. Sie bedeuten Anzahlen von Gegenständen, die zum Zählen in geeigneter Weise angeordnet und mit den Elementen einer bekannten anderen Menge verglichen wurden.

Das Zählen gehörte bereits zu den Bedürfnissen der Menschen auf einer sehr frühen Entwicklungsstufe.

Die Zahlen, mit denen man zählen und abzählen kann, d.h. die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., sind folglich

sehr alt. Deshalb gehören Zahlwörter zu den ältesten Bestandteilen der Sprachen. Diese Zahlen im ursprünglichen Sinne, die sich ganz natürlich ergeben, sind die natürlichen Zahlen.



Abbildung: Briefmarke zum Internationalen Mathematikerkongress

### **Kardinalzahl, Grundzahl**

Mengentheoretisch gibt die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge ihre Kardinalzahl oder Grundzahl an. Durch Zählen wird einer Menge ihre Kardinalzahl zugeordnet.

### **Ordinalzahl**

während die Bezeichnung der Stelle, die ein Element in einer geordneten Menge einnimmt, durch eine Ordinalzahl bezeichnet wird.

### **Zahlensystem**

... System von Zahlzeichen oder Ziffern, durch die sich nach gewissen Regeln alle natürlichen Zahlen darstellen lassen.

### **Ziffer, Zahlzeichen**

... arabische Ziffern = die jetzt üblichen, ursprünglich indischen Zeichen 1, 2, 3, ..., 9 und 0. Sie stellen gleichzeitig Zahlen dar (Einer), während alle anderen Zahlen durch Kombination mehrerer Ziffern zu einer Ziffernfolge gebildet werden. Dabei ist die Bedeutung der Ziffer durch ihren Platz (Stellenwert) in der Ziffernfolge bestimmt.

### **Positionssystem**

... eine natürliche Zahl  $B$  und eine Menge von  $B$  Symbolen.  $B$  ist die Basis; die Symbole sind die Ziffern des Positionssystems.

### **Darstellung einer Zahl $Z$ im Zahlensystem zur Basis $B$**

$$z_{(B)} = \sum z_i B^i; \text{ Summenbildung von } i = -m \text{ bis } n, B \in \mathbb{N}, B \geq 2$$

Das Positionssystem zur Basis 10 ist die Grundlage der modernen Zahldarstellung und wird Dezimalsystem genannt.

Das System zur Basis 2 wird Binärsystem, Dualsystem oder dyadisches System genannt.

Ein System zur Basis heißt ternär, zur Basis 4 quaternär, zur Basis 5 quinär, zur Basis 8 oktal, zur Basis 12 duodezimal, zur Basis 16 hexadezimal, zur Basis 20 vigesimal und zur Basis 60 sexagesimal.

Die Basis  $B$  muss nicht notwendigerweise eine natürliche Zahl sein. Es wurde nachgewiesen, dass sämtliche komplexen Zahlen mit Betrag größer 1 als Basis eines Stellenwertsystems verwendet werden können.

In einem Positionssystem bzw. Stellenwertsystem werden Zahlen mit Hilfe von Ziffern und gegebenenfalls Vorzeichen oder Trennzeichen, dargestellt. Der Wert einer Zahl ergibt sich dann aus der Anordnung der Zeichen.

Die Anzahl der vorhandenen Ziffern wird Basis  $b$  des Stellenwertsystems genannt. Man spricht von einem  $b$ -adischen Zahlensystem. Oft verwendete Basen sind:

$b=2$  das in der Digitaltechnik verwendete Dualsystem

$b=10$  unser vertrautes Dezimalsystem

$b=16$  das in der Datenverarbeitung wichtige Hexadezimalsystem.

### **Ziffernvorrat**

Bei einer  $b$ -adischen Zahldarstellung werden genau  $b$  verschiedene Ziffern verwendet. Die Ziffern stehen dabei für die natürlichen Zahlen 0 bis  $b-1$ .

Im Dualsystem werden die beiden Ziffern 0 und 1 verwendet und ihnen jeweils die Zahlen 0 und 1 zugeordnet. Im Hexadezimalsystem werden die sechzehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E und F verwendet und die Zahlen von 0 bis 15 in der natürlichen Reihenfolge zugeordnet.

### **Stellenwert**

Der Wert einer Zahl ergibt sich durch die Anordnung der Ziffern in einer Reihe. Jeder Stelle wird ein Stellenwert zugewiesen, der einer Potenz der Basis entspricht. Die Stelle mit der niedrigsten Bewertung steht dabei ganz rechts.

### **Additionssystem, additives Zahlensystem**

In einem Additionssystem wird eine Zahl als Summe der Werte ihrer Ziffern dargestellt. Dabei spielt die Position der einzelnen Ziffern keine Rolle.

Beispiele sind das Strichsystem (Unärsystem) und das System der römischen Zahlen.

**Gerade Zahl** ... natürliche Zahl, welche sich ohne Rest durch 2 teilen lässt

**Ungerade Zahl** ... natürliche Zahl, welche sich nicht ohne Rest durch 2 teilen lässt, also nicht gerade ist

## Anfänge des Zählens und Rechnens

... vor 12000 bis 15000 Jahren mit dem Beginn der Sesshaftigkeit und der Arbeitsteilung

... Herausbildung abstrakter Zahlwörter erfolgte in mehreren Stufen

Beispiel: Indianer West-Kanadas bezeichneten 3 Dinge mit "tcha", 3 Personen mit "tchane", 3mal mit "tchat", an 3 Stellen mit "tchatoen". Aber ! Ein abstraktes Wort für "3" existiert nicht.

... nach Entstehung erster abstrakter Zahlwörter sind diese auf kleine Werte beschränkt

Beispiel: der Indianerstamm der Yankos am Amazonas zählt nur bis 3 ("Poettarrarorincoaroc"). Höher Werte sind einfach "viel".

... das Volk der Mundurukú in einem autonomen Gebiet Brasiliens kennt nur Worte für die Zahlen 1 bis 5. De facto existieren sogar nur klare Begriffe für eins und zwei; die 3 benennen sie sinngemäß zwei plus eins, die 4 dann zwei plus eins plus eins, 5 ist eine Hand. Als eine Hand wird aber auch manchmal 6, 7, 8 oder 9 benannt. Die Mundurukú schätzen größere Zahlen und benennen sie mit Ausdrücken wie manche, viele, mehr als eine Hand, ...

... bei der Entstehung der Zahlssysteme wurden unterschiedliche Grundzahlen genutzt, meist aber 2, 5, 10, 20 oder 60.

Die Einwohner einer Inselgruppe in der Torresstraße südlich Neuguineas sowie eines südaustralischen Stamms rechnen im Zweiersystem; in der neuguinesischen Sprache Wedau ist die 5 die Grundzahl.

In der Tabelle sind die entsprechenden Zahlwörter genannt:

Zahl	Torresstraße	Wedau	Südaustralien
1	urapun	tagogi	enea
2	okosa	ruag'a	petcheval
3	okosa-urapun	tonug'a	petcheval-enea
4	okosa-okosa	riag'a-ma-ruag'a	
5	okosa-okosa-urapun	ura-i-ga	
6	okosa-okosa-okosa	ura-g'ela-tagogi (=5+1)	
11	-	ura-g'a-i-ga-au-ae-tagogi (= 5*2 +1)	

## Römische Zahlzeichen

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

## Regeln

Es wird links mit dem Symbol der größten Zahl begonnen. Die Symbole I, X und C werden höchstens dreimal hintereinander geschrieben, die Symbole V, L und D einmal.

Steht ein Symbol einer kleineren Zahl vor dem einer größeren, so wird sein Wert von dem folgenden größeren subtrahiert. Voranstellen darf man immer nur ein kleineres Grundsymbol. Ursprünglich schrieben die Römer (I) (abgeleitet von  $\phi$  ... phi) für die 1000. Das Symbol M kam erst im Mittelalter zur Verwendung.

Das Symbol D = 500 entstand aus dem hinteren Teil von (I). Die Zeichen L, X und V sind Ableitungen aus dem chalkidischen Alphabet. Ebenso schrieben die antiken Römer durchaus auch vier mal IIII hintereinander, wie mehrere Inschriften im Forum Romanum beweisen. Die Forderung, die 4 als IV zu schreiben, kam erst später auf.

Von evtl. mehreren möglichen Schreibweisen wählt man heute die kürzere: z.B. MXMVIII an Stelle von MCMXCVIII für 1998

Das römische Zahlensystem stellt mit seinen ungleichen Inkrementen eine unzuverlässige Seitenentwicklung der Zahlensysteme dar. Es ist zur Multiplikation, Potenzierung und allgemein zum Rechnen mit den in der Astronomie notwendigen großen Zahlen völlig ungeeignet.

Dies ist sicher der Hauptgrund, warum die ansonsten hochstehende Kultur der Römer keinerlei Entdeckungen auf dem Gebiet der Physik, Mathematik oder Astronomie hervorgebracht hat.

1	I	2	II	3	III	4	IV	5	V	6	VI
7	VII	8	VIII	9	IX	10	X	11	XI	12	XII
13	XIII	14	XIV	15	XV	16	XVI	17	XVII	18	XVIII
19	XIX	20	XX	21	XXI	22	XXII	23	XXIII	24	XXIV
25	XXV	26	XXVI	27	XXVII	28	XXVIII	29	XXIX	30	XXX

—	=	≡	ƚ	∏	ϕ	∩	∪	∩
ॐ	॑	॒	ॕ	ॖ	ॗ	क़	ख़	ग़
ज़	ड़	ढ़	फ़	य़	ॠ	ॡ	ॢ	ॣ
।	॥	०	१	२	३	४	५	६
७	८	९	०	१	२	३	४	५
१	२	३	४	५	६	७	८	९

## Entwicklung der arabischen Ziffern

1. Zeile: Brahmi-Schrift, 1. Jh. v. Chr.

2. Zeile: Hinduistisch, um 876

3. Zeile: Arabisch, um 970

4. Zeile: Indisch, 12. Jh.

5. Zeile: Europäisch, 12. Jh.

6. Zeile: älteste gedruckte Schrift um 1474

7. Zeile: heutige Schrift

**Arabische Zahlzeichen**

In der unteren Abbildung sind die aktuellen im arabischen Sprachraum verwendeten Zahlzeichen abgebildet. Im Iran und Afghanistan weichen einige Ziffern etwas ab. In Marokko werden die europäischen Zahlzeichen benutzt.

1/4	1/2	1	2	3	4
١/٤	١/٢	١	٢	٣	٤
5	6	7	8	9	10
٥	٦	٧	٨	٩	١٠
15	20	30	40	50	100
١٥	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	١٠٠
200	500	1000	5000		
٢٠٠	٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠٠		

**Arabische Zahlen**

Die erste Zahlenschrift mit der Basis Zehn wurde in Nordindien vor ca. 1500 Jahren erfunden. D.h. die heute allgemein "arabische" Zahlen oder Ziffern genannten Zeichen sind indischen Ursprungs. Durch wissenschaftliche Kontakte nach Indien übernahm der arabische Gelehrte Ibrahim al-Fassari in Bagdad um 773 n.Chr. die Zahlzeichen. Dieser übersetzte im Auftrage des Kalifen ein indische Astronomieabhandlung. Die Synthese griechischer und indischer Wissenschaft legte den Grundstein der arabischen Wissenschaft, die in der Zeit vom 8. bis zum 12. Jahrhundert die glänzendste Periode erlebte.



Das arabische Reich teilte sich im 13. Jahrhundert in zwei Teile - der ostarabische Teil mit seinem Zentrum Bagdad und Damaskus und der westarabische Teil mit seinem kulturellem Zentrum in Cordova. So nahmen auch die Zahlen zwei unterschiedliche Entwicklungen. Die westarabische Ausprägung und die ostarabische Ausprägung. Der deutsche Gelehrte Gerbert de Aurillac rechnete als erster mit arabischen Ziffern, die er in der spanischen Grenzmark kennengelernt hatte, d.h. mit den Zahlen "Westarabiens". Kurz nach der Übernahme durch Gerbert starb die westarabische Schreibweise der Ziffer aus. Erst einige Jahrhunderte später konnten

sich die Zahlen in Europa durchsetzen, abgeleitet nun von den ostarabischen Zeichen. Araber wundern sich oft, dass die "arabischen Ziffern" Europas sich so stark von den wirklichen arabischen Ziffern unterscheiden. Die Ursache liegt darin, dass die europäischen Zeichen vor allem von den westarabischen abgeleitet wurden. Die westarabischen Ziffern werden auch Gobar-Ziffern (arab. für Sand, Staub) genannt.

**Maya-Zahlzeichen**

Eine der faszinierendsten Kulturen in Amerika waren die Mayas. Sie besiedelten breite Gebiete des heutigen Guatemala, Belize, Honduras, El Salvador und Teile im Süden von Mexiko. Man fand die ersten Siedlungen der Maya an der karibischen und pazifischen Küste datiert auf 5000 v.Chr. Die klassischen Maya-Städte wurden später verlassen und im zehnten Jahrhundert von den Azteken übernommen.

Maya-Zahlzeichen	•    ••    •••    ••••    —	•    ••    •••    ••••    —	☉
	1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	0
Chinesische Zahlzeichen		⊥    ⊥⊥    ⊥⊥⊥    ⊥⊥⊥⊥    —	⊥    ⊥⊥    ⊥⊥⊥    ⊥⊥⊥⊥
	1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	20 50 60 90
Sumerische Zahlzeichen	▢    ▢▢    ▢▢▢    ▢▢▢▢    ▢▢▢▢▢	▢▢▢    ▢▢▢▢    ▢▢▢▢▢    ▢▢▢▢▢▢    ▢▢▢▢▢▢▢	▢    ▢▢    ▢▢▢    ▢▢▢▢
	1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	60 600 3600 36000
Ägyptische Zahlzeichen		n	☉    ☉☉    ☉☉☉
	1 2 3 4 5	6 7 8 9 10	100 1000 10000

1	2	3	5	10	20	21	50	100	500	1000	10000
⋮	⋮⋮	⋮⋮⋮	⋮⋮⋮⋮	<	<<	<<<	<<<<	⋮	⋮⋮⋮	⋮⋮⋮⋮	⋮
>	>>	>>>	>>>>	•	••	•••	••••	☉	☉☉☉	☉☉☉☉	☉
I	II	III	IIII	⋈	⋈⋈	⋈⋈⋈	⋈⋈⋈⋈	☉	☉☉☉	☉☉☉☉	☉
I	II	III	⋈	⋈	⋈		☉	☉	☉☉	☉☉☉	☉
I	II	III	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈	⋈
I	II	III	V	X	XX	XXI	L ↓	U, C, D, O	D, O	ds, (o)	(cb)
			⋈								

In der klassischen Periode der Maya (300 v.Chr. bis 300 n.Chr.) erfanden die Maya das Schreiben. Das Rechnen beherrschten sie bereits in der vorklassischen Periode. Das Maya-Zahlensystem basiert auf der Zahl 20. Dieses hochentwickelte Volk kannte mehr als 1000 Jahre vor den Europäern die Zahl Null. Insgesamt benutzten die Maya 3 verschiedene Zeichen, um daraus alle anderen Zahlen zu entwerfen, eine Muschel für die Null, einen Punkt für die Eins und einen Balken für die Zahl Fünf. Das Symbol für die Null variierte aber. Manchmal wurde die Null dargestellt mit Gesichtern, manchmal ganzen Figure, zuweilen eine halbe Blume, ein Schneckenhäuschen oder etwas, wofür wir keinen Namen haben.

**Entwicklung der Zahlenschreibweise**

- Babylonisch
- Ägyptisch
- Ägyptisch-Hieratisch
- Herodisch
- Altrömisch



### Zahlzeichen der Inka

... für die Ziffern und Zahlen 0 bis 11

Das Reich der Inka erstreckte sich im 15. Jahrhundert über die gesamten Anden in Südamerika.

### Ägyptische Hieroglyphen für die Zahlen

Für ihr dezimales Zahlensystem verwendeten die alten Ägypter 7 Hieroglyphen (griech: hiero = heilig, glyphen = Zeichen):

von links nach rechts:

**1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1 Million**



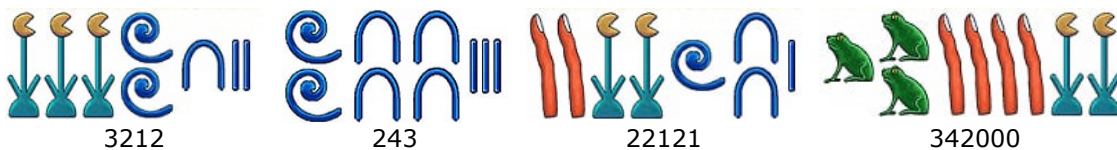
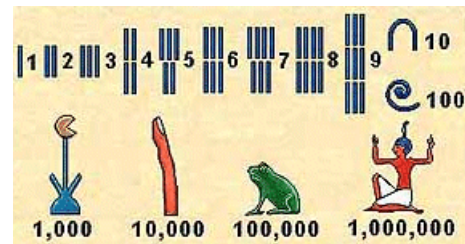
Jedem Zahlzeichen kommt eine besondere Bedeutung zu. So zeigt das Zeichen der Hundert eine Messleine, welche in 100 Teile geteilt war, die 1000 zeigt eine Lotusblume. Dass der Frosch für die 100000 steht, erklärt sich wohl dadurch, dass Frösche eine regelrechte Plage in Ägypten waren. Beliebige Zahlen wurden einfach durch Hintereinanderschreiben der Hieroglyphen dargestellt. In den Abbildungen finden sich Beispiele.

Beispiel: Eine Stele des Pharaos Sesostris III. aus der Festung Semna am zweiten Katarakt, der Grenze

zwischen dem von Ägypten besetzten Unternubien und dem Königreich von Kerma in Obernubien. Auf der Stele ist das Regierungsjahr des Herrschers angegeben:

"Im Jahr 16, im Wintermonat drei ..."

Das Zeichen für Zehn ist ein Bogen, das Zeichen für Eins ist ein I. Im Bild ist zu sehen, dass die Zahl Sechs durch sechs senkrechte Striche dargestellt wurde. Die Schreibweise erfolgte von rechts nach links, nur ausnahmsweise auch schon einmal rechtsläufig. Stellen hinter dem Komma waren den Ägyptern, da sie keine Null kannten, nicht bekannt. Sie schrieben deshalb Reste als Stammbrüche.



### Bruch-Hieroglyphen

Das antike Ägypten kannte keine gemeinen Brüche mit einem Zähler größer 1. Vielmehr wurden Stammbrüche zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt. Dabei wurde ein Bruch der Form a/b in eine Summe von Stammbrüchen umgewandelt. z.B.  $13/37 = 1/3 + 1/56 + 1/6216$

Die Bruchbezeichnung erfolgt durch eine Glyphe, die ein r = Teil bedeutete. Im Hieratischen wurde diese Glyphe durch einen Punkt ersetzt, der über die üblichen Zahlzeichen gesetzt wurde.

Durch diese Schreibweise war es nur möglich, Brüche zu schreiben deren Zähler 1 ist. Besondere Zeichen gab es nur bei 2/3 und 3/4.

Bruchsymbol	Symbol
1 / 2	
2 / 3	
1 / 3	
1 / 8	
1 / 10	
1 / 26	

1		10		100		1000	
2		20		200		2000	
3		30		300		3000	
4		40		400		4000	
5		50		500		5000	
6		60		600		6000	
7		70		700		7000	
8		80		800		8000	
9		90		900		9000	

### Hieratische Schriftzeichen

Mit dem Aufkommen des Papyrus wurde eine geeignetere Schrift entwickelt, die hieratische Schrift. Die hieratischen Zahlensymbole erlauben Zahlen sehr viel kompakter zu schreiben als mit den Hieroglyphen. Allerdings brauchten sie dafür 36 verschiedene Zahlenzeichen.

Mit diesem System können Zahlen mit wenigen Symbolen dargestellt werden. So lässt sich die Zahl 9999 mit 4 hieratischen Zahlzeichen anstatt mit 36 Hieroglyphen schreiben. Der Hauptunterschied zu unserem Zahlensystem liegt darin, dass das hieratische Zahlensystem kein Positionssystem, wie unseres, ist. Man kann die Zahlen also von links nach rechts oder auch von rechts nach links schreiben oder in beliebiger Anordnung.

Wie auch die Hieroglyphen wechselten die hieratischen Zahlzeichen im Laufe von 2 Jahrtausenden ihre Erscheinungsweise. Man unterscheidet 6 Perioden. Die abgebildeten Zahlzeichen wurden etwa 1800 v.Chr. genutzt.

Die Schreibweise mit Hieroglyphen und die hieratische Schreibweise von Zahlen benutzten die alten Ägypter 2000 Jahre lang nebeneinander.

## Zahlbereiche

### Natürliche Zahlen

... sind die Zahlen, mit denen wir zählen:

**1, 2, 3, 4, 5, ... sowie die 0**

Auf der Zahlengeraden bilden sie eine Abfolge von Punkten im Abstand 1, von 0 aus nach rechts gehend. Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet. Weiter verwendet man die Bezeichnung  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  für die natürlichen Zahlen ohne die Zahl 0.

Die natürlichen Zahlen können dazu verwendet werden, Objekte "durchzunummerieren". Dies führt zu den Begriffen der Abzählbarkeit und der Folge.

Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, und jede natürliche Zahl wird getroffen, wenn, von 0 ausgehend, von Nachfolger zu Nachfolger gesprungen wird. Diese Struktur ist sehr wichtig für viele Themen der modernen Mathematik, z.B. für die Methode des Induktionsbeweises.

Genau eine natürliche Zahl, die Null, ist nicht Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl, d.h., sie besitzt keinen Vorgänger.

### Achtung:

In manchen Lehrbüchern wird die Null nicht zu den natürlichen Zahlen hinzugenommen und als "Menge der natürlichen Zahlen"  $\mathbb{N}$  das bezeichnet, was oben  $\mathbb{N}^+$  genannt wurde. Dies kann zwar historisch begründet werden (Originalaxiome des Peano) und spart bei einer Vielzahl von Beweisen, Aussagen, ... die Betrachtung von Sonderfällen, steht aber seit der Einführung der Gruppentheorie in Widerspruch zu deren Aussagen.

Außerdem ist in Deutschland nach DIN 5473 die Null eine natürliche Zahl.

Allerdings wird in Gullbergs faszinierenden Werk "Mathematics - from the birth of numbers" von 1997 die Null nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt.

- ◉ Indisch 8. Jahrhundert
- ◉ Westarabisch 11. Jh.
- ◉ Europäisch 15. Jh.
- ◉ Europäisch 16. Jh.
- ◉ Neuzeit 20. Jh.

### Ziffer Null

*"In der Kulturgeschichte wird die Entdeckung der Null immer als eine der größten*

*Leistungen der Menschheit herausragen"*

*Tobias Danzig, "Number, The language of science"*

Im Laufe der Geschichte wurde die Zahl Null dreimal erfunden:

**von den Babyloniern, den Mayas und zuletzt von den Indern.**

Der italienische Mathematiker Fibonacci (1170 - 1240) lernte die Null auf seinen Reisen nach Afrika und Byzanz kennen. Dort hatte ihre Genialität bereits in weiten Kreisen Anerkennung gefunden.

In Europa tat man sich schwer mit einer Zahl die gar keine Zahl ist, sondern das Nichts beziffert, gleichzeitig aber jede vor ihr stehende Zahl verzehnfacht. Es dauerte lange bis die Rechenlehrer der frühen Neuzeit dem Volk den hohen Wert dieser "wertlosen" Zahl nahe bringen konnte.

Die Inder nannten die Zahl Null sunya, die Araber as-sifr oder sifr. Sunya bedeutet dabei "leer" und kennzeichnete die leere Spalte auf einem Rechenbrett. Aus sifr wurde bei Fibonacci der Begriff zero.

### Das indisch-arabische Zahlensystem

Die von uns verwendeten "arabischen" Ziffern sind indischen Ursprungs. Sie sind im Laufe der Jahrhunderte über Vorderasien und das unter arabischem Einfluss stehende Spanien zu uns gelangt. Das Kennzeichen dieses Systems sind die Verwendung von zehn verschiedenen Ziffern innerhalb eines Stellenwertsystems. Damit war erstmals ein einfaches und schnelles Rechnen möglich. Bekannt wurde dieses System in Deutschland, nach anfänglichem Verbot, durch Rechenbücher von Adam Ries (1492 - 1559).

### $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Zahlenpaare, Zahlentripel und n-Tupel

Ein (geordnetes) Zahlenpaar besteht aus zwei Zahlen, einer ersten und einer zweiten. Es wird entweder als  $(x, y)$  oder in der Vektor-Schreibweise angegeben und als ein mathematisches Objekt behandelt. Die Zahlen  $x$  und  $y$  heißen Komponenten.

Die Menge aller Paare aus reellen Zahlen wird als  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet und geometrisch als Ebene gedeutet, in ähnlicher Weise wie die Interpretation von  $\mathbb{R}$  als Zahlengerade. Auch die komplexen Zahlen bilden eine Ebene, die so beschrieben wird.

Das geordnete Paar  $(a, b)$  muss von der Zweiermenge  $\{a, b\}$  unterschieden werden. Für Mengen gilt stets  $\{a, b\} = \{b, a\}$ , während für geordnete Paare nur dann  $(a, b) = (b, a)$  ist, wenn  $a = b$ .

Analog können Zahlentripel  $(x, y, z)$  und, ganz allgemein, n-Tupel  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ , betrachtet werden.

Die Menge aller reellen Zahlentripel heißt  $\mathbb{R}^3$  und wird geometrisch als dreidimensionaler Raum gedeutet. Ganz allgemein wird die Menge aller reellen n-Tupel als  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet und stellt einen n-dimensionalen Raum dar.

Elemente von  $\mathbb{R}^4$  heißen Zahlenquadrupel, von  $\mathbb{R}^5$  Zahlenquintupel usw. Unter  $\mathbb{R}^1$  wird analog die Menge der reellen Zahlen verstanden.



## Mengenlehre, Logik

$\in$	Element von	$\notin$	nicht Element	$\subseteq$	Teilmenge
$\subset$	echte Teilmenge	$\subsetneq$	nicht Teilmenge	$\emptyset$	leere Menge
$\cap$	Durchschnitt	$\cup$	Vereinigung	$\setminus$	Differenzmenge $C_E A$
	Komplementmenge	$\forall$	für alle...	$\exists$	es existiert...
$\neg$	Negation	$\wedge$	Konjunktion	$\vee$	Disjunktion
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz	$\Rightarrow$	Implikation	$\otimes$	Produkt
$\oplus$	Summe	$:\Leftrightarrow$	definitionsgemäß äquivalent		

## Analysis, Algebra

$\rightarrow$	gegen	$=$	ist gleich	$\neq$	ungleich
$\equiv$	identisch, kongruent	$:=$	definiert durch	$<$	kleiner als
$>$	größer als	$\leq$	kleiner oder gleich	$\geq$	größer oder gleich $\approx$
	rund	$\equiv$	kongruent	$\sim$	proportional
$+$	plus	$-$	minus	$*, \bullet$	mal
$a b$	a teilt b	$\Sigma$	Summe	$\Pi$	Produkt
$\sphericalangle$	Winkel	$\perp$	senkrecht	$\uparrow\uparrow$	gleich gerichtet
$\parallel$	parallel	$n!$	Fakultät	$\lim$	Grenzwert
$f(x)$	Funktion	$f'(x)$	1. Ableitung	$\Delta x$	Differenz
$dx$	Differenzial	$\partial x$	part. Differenzial	$ a $	absoluter Betrag
$\sqrt{\quad}$	Wurzel	$\sqrt[n]{\quad}$	n.te Wurzel	$i$	imaginäre Einheit
$\log_b$	Logarithmus Basis b	$\infty$	unendlich	$\int$	Integral
$\aleph$	Aleph				
$\wedge$	Potenzbildung (nur, wenn Hochsetzen des Exponenten nicht möglich)				

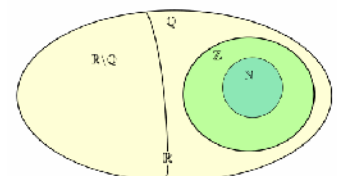
## Zahlenwerte einiger Konstanten

$\pi$	3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 27 ...
$\pi/2$	1.570 796 326 794 896 619 231 321 691 63 ...
$\pi/180$	0.017 453 292 519 943 295 769 236 907 ...
$\pi^2$	9.869 604 401 089 358 618 834 490 999 87 ...
$\sqrt{\pi}$	1.772 453 850 905 516 027 298 167 483 34 ...
$\sqrt{2\pi}$	2.506 628 274 631 000 502 415 765 284 81 ...
$1/\pi$	0.318 309 886 183 790 671 537 767 526 ...
$1/\sqrt{\pi}$	0.564 189 583 547 756 286 948 079 451 ...
$\sqrt[3]{\pi}$	1.464 591 887 561 523 263 020 142 527 26 ...
$e$	2.718 281 828 459 045 235 360 287 471 35 ...
$e^2$	7.389 056 098 930 650 227 230 427 460 57 ...
$\sqrt{e}$	1.648 721 270 700 128 146 848 650 787 81 ...
$\sqrt[3]{e}$	1.395 612 425 086 089 528 628 125 319 60 ...
$e^\pi$	23.140 692 632 779 269 005 729 086 367 9 ...
$e^{\pi-\pi}$	19,999 099 979 189 475 767 266 442 984 669 ...
$e^{-\pi}$	0.043 213 918 263 772 249 774 417 737 171 7 ...
$e^{\pi/4}$	2,193 280 050 738 015 456 559 769 659 278 ...
$e^{-\pi/2}$	0,207 879 576 350 761 908 546 955 619 834 ...
$e^{-\pi/4}$	0,455 938 127 765 996 236 765 921 294 728 ...
$e^{-\gamma}$	0,561 459 483 566 885 169 824 143 214 790 ...
$1/e$	0.367 879 441 171 442 321 595 523 770 161 ...
$1/e^e$	0,065 988 035 845 312 537 076 790 187 596 ...
$\lg e$	0.434 294 481 903 251 827 651 128 918 916 ...
$1/\lg e$	2.302 585 092 994 045 684 017 991 454 68 ...
$C$	0.577 215 664 901 532 860 606 512 090 082 ... (Eulersche Konstante)
$\delta$	4,699 201 660 910 299 067 185 320 382 046 620 ... (Feigenbaumkonstante)
$\phi$	$(\sqrt{5}+1)/2 = 1.618 033 988 749 894 848 204 586 834 36 ...$ (Goldenes Verhältnis)

Konstante ... Platzhalter für ein ganz bestimmtes Element oder eine eindeutig bestimmte reelle oder komplexe Zahl

## Zahlenbereiche

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	Menge der natürlichen Zahlen, mit Ausnahme der Null
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der nichtnegativen gebrochenen Zahlen
$\mathbb{P}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{IR}$	Menge der irrationalen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{I}$	Menge der imaginären Zahlen



## Beziehungen zwischen den Zahlbereichen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{R}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{R}$$

## Abweichende Bezeichnungen

Rationale Zahlen	Q, R, K	Gebrochene Zahlen	Q <sub>&gt;</sub> , Q <sub>+</sub>
Ganze Zahlen	G, Γ	Reelle Zahlen	P
Irrationale Zahlen	I, IQ		

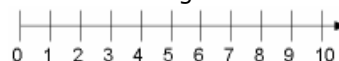
Im französischen Sprachraum wird zusätzlich die Menge der endlichen Dezimalzahlen D betrachtet. Für diese gilt  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

Hinweis: In der mathematischen Fachliteratur werden die Zahlenmengen oft besonders durch Hervorheben des ganzen Buchstabens, z.B. N und R, oder eines Teils des Buchstabens gekennzeichnet. Aus programmtechnischen Gründen wird hier darauf verzichtet.

## Zahlenstrahl, Zahlengerade

Unter einer Zahlengerade versteht man in der Schulmathematik eine grafische Veranschaulichung der reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden.

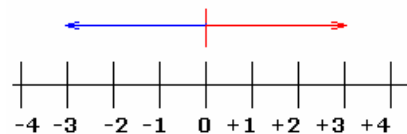
Die Zahlengerade ist eine Darstellung des eindimensionalen euklidischen Vektorraums  $\mathbb{R}^1$ , die verdeutlicht, dass die Menge der reellen Zahlen eine lineare Ordnung bildet. Die Zahlengerade setzt sich in beide Richtungen bis ins Unendliche fort. Der Pfeil an der rechten Seite der Darstellung gibt an, dass die Zahlen in dieser Richtung größer werden.



Zur Darstellung der natürlichen Zahlen im Unterricht wird ein Zahlenstrahl, beginnend bei 0 verwendet. (Abbildung)

In der Grundschule wird der Zahlenstrahl für einfache Operationen der Addition und Subtraktion genutzt. Soll  $5 + 3$  demonstriert werden, geht man von der Zahl 5 um 3 nach rechts und erhält das Ergebnis 8. Analog wird im Bereich der natürlichen Zahlen subtrahiert.

## Ganze Zahlen



Erweitert man die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  um die Menge  $\{n \mid -n \in \mathbb{N}\}$ , so erhält man die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ oder } -n \in \mathbb{N}\}$$

In dieser Menge ist neben der Addition und Multiplikation auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar. Für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$  ist auch  $n$

$$-m = n' \in \mathbb{Z}.$$

Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ist Teilmenge von  $\mathbb{Z}$ .

Die Division (Umkehrung der Multiplikation) ist in der Menge der ganzen Zahlen nicht immer ausführbar, d.h. das Ergebnis liegt im allgemeinen nicht mehr in der Menge der ganzen Zahlen.

## Negative und positive Zahlen

Ganze Zahlen, die kleiner als 0 sind, werden negative Zahlen genannt. Ganze Zahlen, die größer als Null sind, heißen positive Zahlen. Die Null und die positiven Zahlen zusammen bilden die nichtnegativen Zahlen.

## Konstruktion der ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  können durch eine Zahlbereichserweiterung aus der Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen konstruiert werden.

Dazu betrachtet man die Menge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  aller Paare  $(a,b)$  natürlicher Zahlen.

Für eine Zahlbereichserweiterung werden eine Äquivalenzrelation sowie eine Addition und eine Multiplikation definiert:

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ wenn } a+d = c+b \text{ gilt}$$

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \otimes (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Die Menge dieser Äquivalenzklassen wird mit  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$  bezeichnet.

Die Äquivalenzklasse eines Paares  $(a,b)$  schreibt man als  $(a-b)$ , die spezielle Form  $(0-b)$  kurz mit  $-b$ .

Aus der Konstruktion der Addition  $\oplus$  und Multiplikation  $\otimes$  ergibt sich, dass die Menge  $\mathbb{Z}$  mit diesen Operationen einen Ring bildet, den Ring der ganzen Zahlen. Jede natürliche Zahl  $n$  ist durch die Äquivalenzklasse  $(n-0)$  in  $\mathbb{Z}$  vertreten.

Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen mit der Addition bildet eine Halbgruppe, die Menge  $\mathbb{Z}$  mit der Addition eine Gruppe. Damit ist  $(\mathbb{Z}, +)$  die sogenannte Grothendieck-Gruppe der Halbgruppe  $(\mathbb{N}, +)$ .

Die Menge der ganzen Zahlen bildet sogar einen euklidischen Ring, d.h. die Division mit Rest ist stets möglich.

## Rationale Zahlen

...Zahlen  $z$ , welche sich in der Form  $z = p / q$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $q \neq 0$  darstellen lassen.

Die Menge der rationalen Zahlen  $P$  (auch  $Q$ ) umfasst als Teilmengen die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der gebrochenen Zahlen.

Die Darstellung  $z = p / q$  ist nicht eindeutig. Eine reelle Zahl, welche nicht zu  $P$  gehört heißt irrational. Beispiel:  $\sqrt{2}$

Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen (d.h. Punkten auf der Zahlengeraden) liegen unendlich viele rationale Zahlen. Daher wird die Menge  $P$  als "dicht" bezeichnet. Dennoch gibt es sehr viel mehr reelle Zahlen als rationale:

Die Menge  $P$  ist abzählbar, d.h. ihre Elemente können durchnummeriert werden, im Gegensatz zur Menge  $R$  der reellen Zahlen.

Da die Menge  $P$  die Zahlengerade nicht ganz ausfüllt, wird sie als nicht-vollständig bezeichnet.

N \ Z	1	2	3	4	5	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	...
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	...
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

### Abzählbare rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar. Nach Cantor kann folgendes Abzählverfahren genutzt werden:

In dem abgebildeten unendlichen Schema sind alle Brüche und damit alle gebrochenen Zahlen außer der 0 enthalten. Wenn man das Schema längs der eingezeichneten Diagonalen durchläuft, werden nacheinander alle Brüche einmal erfasst.

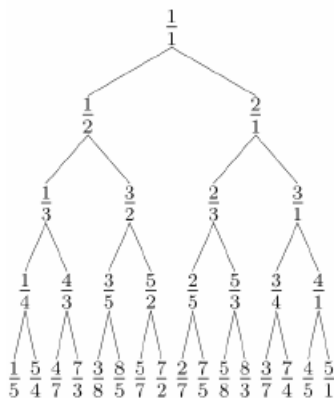
Man kann somit die Brüche auf diese Art durchnummerieren, d.h. abzählen. Für die negativen Brüche verwendet man entsprechend ein zweites Schema.

### Calkin-Wilf-Abzählverfahren

Das Cantorsche Abzählverfahren gewährleistet das Abzählen aller rationalen Zahlen. Allerdings treten Brüche wiederholt auf, da nicht nur vollständig gekürzte Brüche in das Schema eingetragen werden. Aufbauend auf dem Stern-Brocot-Baum entwickelten 1999 Neil Calkin und Herbert S. Wilf einen nach ihnen benannten Binärbaum mit dem ebenfalls die Menge der rationalen Zahlen abgezählt werden kann. Dieser Calkin-Wilf-Baum enthält allerdings jede positive, rationale Zahl genau einmal und zwar als gekürzten Bruch.

Der Calkin-Wilf-Baum entsteht aus der Wurzel  $1/1$  nach der Konstruktionsvorschrift:

$$a/b \rightarrow (a/(a+b)) ; (a+b)/b$$



### Irrationale Zahlen

... sind jene reellen Zahlen, die nicht rational sind, d.h. die sich nicht als Bruch "ganze Zahl/ganze Zahl" schreiben lassen.

Es sind dies genau jene reellen Zahlen, deren Dezimaldarstellung weder abbricht noch periodisch ist.

Die Menge aller irrationalen Zahlen ist so "groß", dass sie sich nicht "durchnummerieren" lässt. Sie ist (im Gegensatz zur Menge der rationalen Zahlen) überabzählbar.

Die rationalen Zahlen, mit denen man es in der Praxis so oft zu tun hat, und die in so vielen Rechenaufgaben vorkommen, bilden genau genommen nur eine verschwindende Minderheit! Beispiele für irrationale Zahlen sind jene Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen, die selbst keine natürlichen Zahlen sind (also  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  ...) sowie die transzendenten Zahlen  $\pi$  und  $e$ .

Hippasos von Metapont (5. Jahrhundert v.u.Z.) bewies als Erster am Beispiel von  $\sqrt{2}$  die Existenz irrationaler Zahlen. Dennoch dauerte es noch über 2000 Jahre, bis diese Zahlen als "richtige" Zahlen in der Mathematik anerkannt wurden.

Noch 1544 schrieb Michael Stifel in "Arithmetica integra":

"Mit Recht wird bei den irrationalen Zahlen darüber disputiert, ob sie wahre Zahlen sind oder nur fiktive.

Denn bei Beweisen an geometrischen Figuren haben die irrationalen Zahlen noch Erfolg, wo uns die rationalen im Stich lassen, und sie beweisen genau das, was die rationalen Zahlen nicht beweisen konnten.

Wir werden also veranlasst, ja gezwungen zuzugeben, dass sie in Wahrheit existieren, nämlich auf Grund ihrer Wirkungen ...

Aber andere Gründe veranlassen uns zu der entgegengesetzten Behauptung, dass wir nämlich bestreiten müssen, dass die irrationalen Zahlen Zahlen sind. Nämlich wenn wir versuchen, sie der Zählung zu unterwerfen und sie mit rationalen Zahlen in ein Verhältnis setzen, dann finden wir, dass sie uns fortwährend entweichen, so dass keine von ihnen sich genau erfassen lässt ...

Es kann aber nicht etwas eine wahre Zahl genannt werden, bei dem es keine Genauigkeit gibt und was zu wahren Zahlen kein bekanntes Verhältnis hat."

## Irrationalität von $\sqrt{2} \approx 1,41421356237309504880168872420969807856967187537694807 \dots$

Es ist seit mehr als zweitausend Jahren bekannt, dass die Diagonale des Quadrats in keinem "rationalen Verhältnis" zur Seitenlänge steht, d.h. dass der Quotient Diagonale/Seitenlänge keine rationale Zahl ist. Diese Erkenntnis geht wahrscheinlich auf die Pythagoräer zurück und dürfte damals eine der ersten Grundlagenkrisen der Mathematik ausgelöst haben.

Der Quotient Diagonale/Seitenlänge im Quadrat ist gerade  $\sqrt{2}$ . Damit sind die Seite und die Diagonale im Quadrat inkommensurabel.

Hinter dem Satz " $\sqrt{2}$  ist eine irrationale Zahl" steckt viel Geistesgeschichte. Erst nach dieser Erkenntnis war der Weg frei zur langsamen Herausbildung des Begriffs der reellen Zahlen.

Hippasos von Metapont (5. Jahrhundert v. Chr.) bewies als Erster, dass keine natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$  existieren, so dass  $\sqrt{2} = a/b$  ist. Da dies der Proportionslehre der antiken Griechen widersprach, wurde Hippasos im Meer ertränkt; so die Legende. Allgemein kann der Beweis von Hippasos auf alle Primzahlen  $p$  erweitert werden:

Satz:  $\sqrt{p}$  ist für alle Primzahlen  $p$  eine irrationale Zahl.

Indirekter Beweis:

Sei  $p > 1$  eine beliebige Primzahl und  $\sqrt{p}$  eine rationale Zahl.

Dann existieren natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $\text{ggT}(a,b) = 1$  und  $a/b = \sqrt{p} \rightarrow p \cdot b^2 = a^2 \rightarrow p$  teilt  $a^2$ .

Weil  $p$  eine Primzahl ist, folgt damit:  $p$  teilt  $a \rightarrow a = k \cdot p \rightarrow a^2 = k^2 p^2 \rightarrow p b^2 = k^2 p^2 \rightarrow b^2 = k^2 p \rightarrow p$  teilt  $b^2 \rightarrow p$  teilt  $b \rightarrow p$  teilt  $a$  und  $b \rightarrow \text{ggT}(a,b) > 1$  - Widerspruch!

Der Quotient Diagonale/Seitenlänge im Quadrat ist gerade  $\sqrt{2}$ .  $\sqrt{2}$  wird oft als das Standardbeispiel einer irrationalen Zahl benutzt. Die Besonderheit der Zahl war schon den Pythagoräern bekannt.

Die älteste überlieferte Darstellung eines Bruchs ist zugleich die erste Näherung von  $\sqrt{2}$ .

Das babylonische Zahlensystem basiert auf der Zahl 60. Die abgebildete Ziffernfolge wurde auf einer babylonischen Tafel der Yale-Sammlung gefunden.

Die einzelnen Ziffern lauten 1, 24, 51, und 10. Im babylonischen Zahlensystem ist dies



$$1 * 60^0 + 24 * 60^{-1} + 51 * 60^{-2} + 10 * 60^{-3} = 1.414222$$

und damit eine schon sehr gute Näherung von  $\sqrt{2}$ .

## die ersten 2000 Dezimalziffern von $\sqrt{2}$

1, ...

41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37694 80731 76679 73799 07324 78462  
10703 88503 87534 32764 15727 35013 84623 09122 97024 92483 60558 50737 21264 41214 97099  
93583 14132 22665 92750 55927 55799 95050 11527 82060 57147 01095 59971 60597 02745 34596  
86201 47285 17418 64088 91986 09552 32923 04843 08714 32145 08397 62603 62799 52514 07989  
68725 33965 46331 80882 96406 20615 25835 23950 54745 75028 77599 61729 83557 52203 37531  
85701 13543 74603 40849 88471 60386 89997 06990 04815 03054 40277 90316 45424 78230 68492  
93691 86215 80578 46311 15966 68713 01301 56185 68987 23723 52885 09264 86124 94977 15421  
83342 04285 68606 01468 24720 77143 58548 74155 65706 96776 53720 22648 54470 15858 80162  
07584 74922 65722 60020 85584 46652 14583 98893 94437 09265 91800 31138 82464 68157 08263  
01005 94858 70400 31864 80342 19489 72782 90641 04507 26368 81313 73985 52561 17322 04024  
50912 27700 22694 11275 73627 28049 57381 08967 50401 83698 68368 45072 57993 64729 06076  
29969 41380 47565 48237 28997 18032 68024 74420 62926 91248 59052 18100 44598 42150 59112  
02494 41341 72853 14781 05803 60337 10773 09182 86931 47101 71111 68391 65817 26889 41975  
87165 82152 12822 95184 88472 08960

Zur Berechnung sehr vieler Dezimalziffern von  $\sqrt{2}$  nutzt man u.a. folgende Formeln:

$$\sqrt{2} = (7/5) / (1-1/50)^2 \text{ (Knopp)} = 1.4577259475218658892128279883\dots$$

$$\sqrt{2} = (239/169) / (1-1/57122)^2 = 1.4142506998466662452362924216\dots$$

$$\sqrt{2} = (1393/985) / (1-1/1940450)^2 = 1.4142146555843141338632693220\dots$$

$$\sqrt{2} = (8119/5741) / (1-1/65918162)^2 = 1.4142135945542166004924725473\dots$$

$$\sqrt{2} = (47321/33461) / (1-1/2239277042)^2 = 1.4142135633204188077454010904\dots$$

$$\sqrt{2} = (275807/195025) / (1-1/76069501250)^2 = 1.4142135624009816565582303228\dots$$

Die ersten Ziffern von  $\sqrt{2}$  im Dualsystem sind:

1.011010100000100111100110011001111110011101111001100100100001000101100101111101100  
01001101100110111010101001010101111010011111000111010110111101100000101110101000100  
10011101110101000010011001110110100010111010110010000101100000110011001110011001000  
10101010010101111100100001100001000011101010111000101000111010000111010000101000  
1111111001101111101110010000011101101100110011001000011101110100101010000101110010  
0001110011100011110110100101001111000000010010000111001101100011110111110100010011  
101101000110100100010000000101110100001110100001010101111000111110100111001010011000  
001011001110001100000000100011011110000110011011110111100101010110001101111001001000  
10001011010001000010001011000101001000110000010101011110001110010001011101111100010  
01110001100111100011011010101010100010100011100010111011011111101001110111001100101

100101010011000110100001100110001111100111100100001001101111101010010111100010010000  
 011111000001101101110010110000010111011101010101001001010000010001001100100000100000  
 011001010010010101000000100111...

Testet man die Häufigkeit des Auftretens der Dualziffern '0' und '1', zeigt sich, dass beide etwa gleichhäufig auftreten. Auch  $\sqrt{2}$  ist eine normale irrationale Zahl.

Die ersten Ziffern von  $\sqrt{2}$  im Hexadezimalsystem sind:

1,6A09E667F3BCC908B2FB1366EA957D3E3ADEC17512775099DA2F590B0667322A95F90608757145875  
 163FCDFB907B6721EE950BC8738F694F0090E6C7BF44ED1A4405D0E855E3E9CA60B38C0237866F79563  
 79222D108B148C1578E45EF89C678DAB5147176FD3B99654C68663E7909BEA5E241F06DCB05DD54941  
 13208194950272956DB1FA1DFBE9A74059D7927C1884C9B579AA516CA3719E6836DF046D8E0209B803  
 FC646A5E6654BD3EF7B43D7FED437C7F9444260FBD40C483EF55038583F97BBD45EFB8663107145D5FE  
 BE765A49E94EC7F597105FBFC2E1FA763EF01F3599C82F2FE500B848CF0BD252AE046BF9F1EF7947D46  
 769AF8C14BCC67C7C290BE76929B0578C10B584FB487C924F5B71F82DCD2903609DEE8912983D4EAAD  
 0EEA321F7489F46A7E9030BE20FB7694EFB58C9984CDD70A1DA9045C3D133A068423D6E38303D901BA  
 9DA3476684796C5CD5972DC0FF3540C3412942D6406101EF6FC6DE9114A2B4F248C689C600BB40A8B5  
 6B041FD5DE6E0DD0C66D4831FE7FFF5757E4710980CDBD5C268485DA5E91B3E2F205B72725B971D60A  
 1F888F08A0A6E100CCEDC2CE5BD98AE71E42E268D37A6072F220234613FFC22453439EA97A999B6C9  
 E3CE71F94D6092ACE120AB8E550E0D5511688...

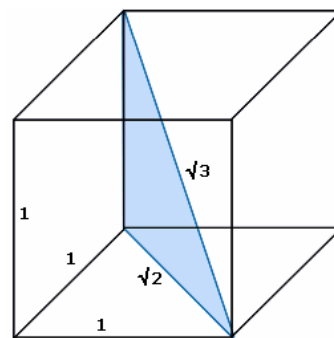
Die ersten Ziffern von  $\sqrt{2}$  im 26er-System sind:

1,KUAFRCBHYMISHEIXYEWQHVSPOPATDCSNZAHHUWZCPMMNMSZUJIRFUZWFHNNCKGGJKOUDRCIGJJV  
 OVIMEFKLEPNLCWBTCQWXONIIHOTPCOHLPLGALFGTOVCJMHXDMCEQPCWCBNCOVIMPSBYSDYSJYAIMR  
 OLBUISGMNINIWIUYXFFTMBPBBDYLXDPSHZAILUEUKAPNBDQNKPGNKANPUSGLFCECRKMZAABPDLGEKAG  
 ZCZNNVFCOTJLIQENYARMIRHYEEXUBRXNBIFQSKJCSUMUGDCWJVNZPZZFSHZDWMMIIESWUEXTFVR  
 LRVVCJJCMI CFHX YTKJKNXKXMFVDTHEWYEOPIZOURMSKBYMTPBAXCMBADRFWUUCFLTJPMNGAIAGRHR  
 UKXAYUITTBKJMRZQFBBVURVOPCOPJKYNMURKCFWVIVTNUMUTZPNQOWLHTTXFCBKIAIJCTPEQATFYZHK  
 AFBKLFWEZXSSMVXXEPBLYAOCMEMGGNEAXCTVVTSPKMGUJOHIITZZSVDMPOLUZWJWJTWLLKHJATVRTV  
 DSTJIXKTAEHJLXYMMVIGSSCOTEHTBLYIJBKTZUAHJOITKONRBBIMRESFNAZYBEFPDGTIDKQWRJONQQB  
 IJZOIWPHLAJHIJPCUTMVGUWRSRSGBNKLTFLCUPPLGSHRWUWIHGETPSNHRXISKROKLTORHPJKPJAJXE  
 QOXHCGYAJGGIBGPFQFZBTBTGJPTBBWKENFOBRKTWWUCQYESOCRDLDFBUILAAZMJVXKWDVVDGXCTPY  
 WUKVDXVBURZFDABMSAXFBUEEQYCEPFXNREPMMJDRJXMAARYKUCDEISTDWAYAAZXOEWGGSMMJKTD  
 TASJPOSLSOKJWHBITSGWLXWABNI...

Nach dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium sind alle reellen Wurzeln  $\sqrt[n]{p}$ , mit  $p$  ist Primzahl, irrational. Elementar findet man:

Satz: Für alle natürlichen  $n$  und  $m$  ist  $\sqrt[n]{m}$  entweder ganzzahlig oder ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch, d.h. also irrational.

Indirekter Beweis: Angenommen  $\sqrt[n]{m}$  sei eine rationale Zahl, so existieren natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $\text{ggT}(a,b) = 1$  und  $(a/b)^n = m \rightarrow a^n = b^n \cdot m$ . Damit ist  $b$  ein Teiler von  $a^n \rightarrow \text{ggT}(a^n, b) = b$ . Aus  $\text{ggT}(a,b) = 1$  folgt:  $\text{ggT}(a^n, b) = 1 \rightarrow b = 1$ .



### Irrationale Zahl $\sqrt{3} \approx 1,73205\ 08075\ 68877\ 29352\ \dots$

die ersten 100 Nachkommastellen:

1, 7320508075 6887729352 7446341505 8723669428 0525381038  
 0628055806 9794519330 1690880003 7081146186 7572485756 ...

Die Quadratwurzel aus 3;  $\sqrt{3}$ ; ist die positive, reelle Zahl, die mit sich selbst multipliziert 3 ergibt.  $\sqrt{3}$  ist eine irrationale Zahl. Sie ist auch bekannt unter dem Namen Theodoros-Konstante, benannt nach Theodoros von Kyrene. Ihre Kettenbruchentwicklung ist  $[1;1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\dots]$ .

Anwendung

- 1) die Länge der Diagonale eines dreidimensionalen Würfels mit der Einheitslänge 1, beträgt  $\sqrt{3}$
- 2) die Distanz zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten eines regulären Sechsecks mit der Seitenlänge 1 beträgt  $\sqrt{3}$
- 3) die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1 beträgt  $1/2 \sqrt{3}$
- 4) der Verkettungsfaktor, das Verhältnis von Phasenspannung (230 V) zu Außenleiterspannung (400 V), beträgt bei Dreiphasenwechselstrom  $\sqrt{3}$

### Algebraische Zahl

Eine algebraische Zahl ist eine Zahl, welche Lösung einer ganzrationalen Gleichung ist, wobei die Koeffizienten des Polynoms rationale Zahlen sind.

Wenn  $n$  der kleinstmögliche Grad des Polynoms ist, heißt  $x$  algebraisch vom Grad  $n$ . Die rationalen Zahlen sind somit algebraisch vom Grad 1. Quadratwurzeln aus Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, sind somit vom Grad 2. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier algebraischer Zahlen sind wieder algebraisch.

Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar, da sowohl die Koeffizienten der Polynome als auch der Grad der Polynome selbst abzählbar sind.

Die algebraischen Zahlen bilden eine Teilmenge der komplexen Zahlen.

Jedes Polynom mit rationalen Koeffizienten kann durch Multiplikation mit dem Hauptnenner der Koeffizienten in eines mit ganzzahligen Koeffizienten umgewandelt werden. Die Nullstellen sind in beiden Darstellungen des Polynoms identisch.

Polynome mit rationalen Koeffizienten kann man normieren, indem man alle Koeffizienten durch den Koeffizienten  $a_n$  dividiert. Nullstellen von normierten Polynomen, deren Koeffizienten ganzzahlig sind, nennt man ganzalgebraische Zahlen.

Man kann den Begriff der algebraischen Zahl zu dem des algebraischen Elements erweitern, indem man die Koeffizienten des Polynoms statt aus  $\mathbb{Q}$ , aus einem beliebigen Körper entnimmt.

### Minimalpolynom einer algebraischen Zahl

Für viele Untersuchungen algebraischer Zahlen ist das Minimalpolynom einer algebraischen Zahl wichtig. Ist  $x$  eine algebraische Zahl, die eine algebraische Gleichung

$$f(x) = x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit  $n \geq 1$ , erfüllt, aber keine derartige Gleichung geringeren Grades, dann ist  $n$  nicht nur der Grad der algebraischen Zahl  $x$ , sondern der Grad des Polynoms  $f$ , dem so genannten Minimalpolynom von  $x$ .

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde bewiesen, dass die Kreiszahl  $\pi$  und die Eulersche Zahl  $e$  nicht algebraisch sind. Von anderen Zahlen, wie zum Beispiel  $\pi+e$ , weiß man bis heute nicht, ob sie algebraisch oder transzendent sind.

### Transzendente Zahl

Eine transzendente Zahl ist eine Zahl, welche nicht algebraisch ist; z.B.  $\pi$ ,  $e$ ; d.h. wenn sie nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung beliebigen, endlichen Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

darstellbar ist.

Die Menge der transzendenten Zahlen ist überabzählbar. Die Summe einer algebraischen und einer transzendenten Zahl ist transzendent. Jede transzendente Zahl ist irrational.

1748 behauptete Euler in "Introductio in Analysin Infinitorum", dass bei positivem rationalem  $a \neq 1$  und natürlichem  $b$ , das keine Quadratzahl ist, die Zahl  $a^{1/b}$  nicht nur nicht rational, sondern auch "nicht mehr irrational" sei.

Tatsächlich wurde diese Transzendenzvermutung 1934 als Spezialfall durch den sowjetischen Mathematiker Alexander Ossipowitsch Gelfond in ihrer Richtigkeit bestätigt.

Die Existenz von transzendenten Zahlen wurde 1844 durch Joseph Liouville nachgewiesen. In seiner Arbeit konnte er zeigen, dass es für jede algebraische Zahl  $x$  vom Grad  $n \geq 2$  eine Konstante  $c$  gibt, so dass für jede rationale Approximation  $p/q$ :

$$|x - p/q| > c / q^n$$

gilt. Daraus folgt, dass die Liouville-Konstante

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0,11000100000000000000001000..$$

transzendent ist.

### Gelfond-Theorem (7. Hilbert Problem, 1934)

Die Zahl  $a^b$  ist transzendent, wenn

$a$  algebraisch und verschieden 0 und 1 ist und

$b$  algebraisch und irrational ist

Explizit nannte Hilbert in seiner Rede die Zahl  $2^{\sqrt{2}} = 2.6651\dots$ , deren Transzendenz 1900 noch unbekannt war und erst durch das Resultat von Gelfond bewiesen wurde; diese Zahl heißt daher *Gelfond-Konstante*. Hätte Hilbert sein 7. Problem weiter gefasst und bei  $b$  die Einschränkung "algebraisch" fortgelassen, so wäre das Problem bis heute ungelöst. Nach dem Ergebnis von Gelfond wären dann nur noch transzendente  $b$  zu betrachten, aber dieser Fall ist noch immer offen.

Hilberts Zahl  $2^{\sqrt{2}} =$

2,6651441426902251886502972498731398482742113137146594928359795933649204461787059548  
676091800051964169419893638542353875146742420314383674078186985054875748950831147839  
628583561836083461266431794091489100534014373950342870833119045271169737315956529056  
576328457297981774346372848330862819349528549927583773563188830693383234459611805080  
97687908126127...

### Wichtigste transzendente Zahlen

Durch Clifford Pickover wurden in dem Buch "Wonders of numbers" die wichtigsten transzendenten Zahlen der Mathematik aufgelistet. Diese sind:



0,163345560011  
0,199992445111  
0,500000000000 ... usw.

Man konstruiert nun folgende Zahl  $y$  aus dem Intervall  $[0,1]$ :

$y$  erhält als erste Nachkommastelle eine andere Ziffer als die 1. Nachkommastelle der Zahl aus der 1. Zeile, hier z.B. 2.

Die zweite Nachkommastelle von  $y$  soll eine andere Ziffer als die der zweiten Zahl in der Liste sein, z.B. 4.

Führt man sofort, erhält man eine Zahl, die sich an der  $n$ .ten Stelle von der  $n$ .ten Zahl der Liste unterscheidet.

D.h.,  $y$  kommt nicht in der Liste vor.

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass eine vollständige Liste vorliegt. Somit kann es nie eine vollständige Liste geben und die reellen Zahlen des Intervalls  $[0,1]$  sowie alle reellen Zahlen sind nicht abzählbar, d.h. überabzählbar. Diese Nachweismethode wird 2. Cantorsches Abzählverfahren genannt.

### Dirichletscher Approximationssatz

Der Dirichletsche Approximationssatz ist eine Aussage über die Qualität der Annäherung reeller Zahlen durch rationale Zahlen.

Er besagt, dass es zu jeder reellen Zahl  $a$  und jeder positiven ganzen Zahl  $n$  eine ganze Zahl  $q$  mit  $1 \leq q \leq n$  gibt, so dass der Abstand von  $qa$  zur nächsten ganzen Zahl höchstens gleich  $1/(n+1)$  ist, d.h.

Zu  $a \in \mathbb{R}$  existieren ein  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq q \leq n$  und ein  $p \in \mathbb{Z}$ , sodass

$$|qa - p| < 1/(n+1)$$

Bewiesen wird dieser nach Peter Gustav Lejeune Dirichlet benannte Satz mithilfe des Schubfachprinzips. Als Schlussfolgerung ergibt sich, dass es zu jedem reellen  $a$  unendlich viele Paare  $(p,q)$  positiver ganzer Zahlen gibt, die

$$|a - p/q| < 1/q^2$$

erfüllen. Dass diese Abschätzung nicht beliebig verbessert werden kann, besagt der kompliziertere Satz von Thue-Siegel-Roth.

Beispiel: Es seien  $a = \sqrt{2}$  und  $n = 10$ . Dann ist nach dem Dirichletschen Approximationssatz eine der Zahlen  $\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$ , ...,  $10\sqrt{2}$  um höchstens  $1/11$  von einer ganzen Zahl entfernt. Tatsächlich ist

$$|5\sqrt{2} - 7| = |7,07106... - 7| = 0,07106 < 0,090909 = 1/11$$

### Satz von Thue-Siegel-Roth

Für jede algebraische Zahl  $a$ , jedes  $\varepsilon > 0$  und zu einander prime  $p$  und  $q$  hat die Ungleichung  $|a - p/q| < q^{-(2+\varepsilon)}$

nur endlich viele Lösungen.

Der Beweis von Roth gibt keine Methode an, solche Lösungen zu finden. Von Bedeutung ist dies, um etwas über die Anzahl der Lösungen Diophantischer Gleichungen zu erfahren.

### Beste rationale Näherung

Für jede reelle Zahl  $r > 0$  kann schrittweise eine Folge immer besserer rationaler Approximationen  $p/q$  mit  $q < q_{\max}$  gefunden werden. Ein einfacher Algorithmus erzeugt zum Beispiel für

$$r = (1+\sqrt{5})/2 = 1,6180339887...$$

als Zähler und Nenner von  $p/q$  Paare aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.

Algorithmus: Starte mit  $p = 0$ ,  $q = 1$ ,  $d = r$

Wenn  $p/q < r$ , dann erhöhe  $p$  um 1

Wenn  $p/q > r$ , dann erhöhe  $q$  um 1

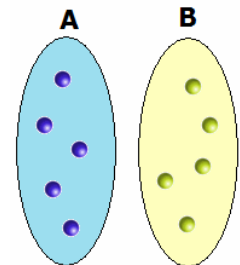
Ist die Distanz  $d = |r - p/q|$  kleiner als die vorhergehende Distanz, so gib den Bruch aus und verändere  $d$   
Stoppe wenn  $q > q_{\max}$



## Mengenlehre

### Mengenschreibweise

$\{1;2;3\}$	endliche Menge
$\{1;3;5;\dots\}$	unendliche Menge
$[1;2]$	geordnetes Paar



### Menge und Element, Mengenbegriff

... ein streng mathematisch nicht eindeutig definierbarer Grundbegriff der Mathematik; nach Cantor:

"jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens; welche die "Elemente" der Menge genannt werden; zu einem Ganzen"

Schreibweise  $x \in M$   $x$  ist Element von  $M$

$x \notin M$   $x$  ist kein Element von  $M$

Sind die Elemente der Mengen Punkte einer Kurve, einer Ebene oder eines Raumes, so werden die Mengen auch Punktmengen genannt. Mengen werden auch durch Aufzählen ihrer Elemente gekennzeichnet, z.B.  $\{a, b, c, d, e\}$ . Die Reihenfolge der Elemente in der Auflistung ist im Allgemeinen ohne Bedeutung.

Diese Erklärung des Mengenbegriffs der "naiven Mengenlehre" hat sich allerdings als widersprüchlich erwiesen. Dennoch wird sie als Einstieg in der Problematik der Mengenlehre gern genutzt. In der axiomatischen Mengenlehre wird eine widerspruchsfreie, aber wesentlich kompliziertere Mengendefinition gegeben.

### Mengenarten

#### Einelementige Menge

Eine Menge mit nur einem Element wird als einelementige Menge bezeichnet.

Beispiel: Menge der Lösungen der Gleichung  $y = 2x + 2$

#### Leere Menge

Die leere Menge  $\emptyset$  enthält keine Elemente, auch nicht die Null. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

Außer der wissenschaftlichen Schreibweise  $\emptyset$  wird in der "vereinfachenden" Schulmathematik auch  $\{ \}$  für die leere Menge benutzt. Beispiele: Menge aller echten Teiler einer Primzahl, Menge der Nullstellen der Funktion  $y = x^2 + 1$

#### Endliche Menge

Eine Menge ist endlich, wenn sie endlich viele Elemente besitzt. Ist  $M$  die Menge, so gibt  $z(M)$  die Elementzahl an, die Mächtigkeit der Menge. Eine endliche Menge mit  $n$  Elementen ist gleichmächtig zur Teilmenge der natürlichen Zahlen  $\leq n$ . Die Zahl  $n$  mit wird auch Kardinalzahl genannt und es wird  $\text{card } M = n$  für  $A_n \sim M$  geschrieben. Die leere Menge ist damit eine endliche Menge mit der Kardinalität 0. Beispiele für endliche Mengen: Menge der Teiler einer natürlichen Zahlen, Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung

#### Hauptsatz über endliche Mengen

Eine endliche Menge kann nicht einer echten Obermenge gleichmächtig sein.

#### Unendliche Menge

Eine Menge ist unendlich, wenn sie unendlich viele Elemente besitzt, d.h. nicht endlich ist.

Beispiel: Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$ , Menge aller Primzahlen, Menge aller Punkte der Ebene oder des Raums

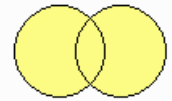
Unendliche Mengen können theoretisch abzählbar sein (z.B. Menge der rationalen Zahlen) oder nicht abzählbar, überabzählbar (z.B. Menge der reellen Zahlen)

#### Gleichheit von Mengen

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleich, wenn sie beide die gleichen Elemente enthalten

**Vereinigungsmenge** ... Vereinigung  $A \cup B$ : alle  $x$ , welche aus  $A$  oder aus  $B$  enthalten sind  
 Die Menge  $V = A \cup B$  umfasst sowohl  $A$  als auch  $B$ , und jede Menge, die  $A$  und  $B$  umfasst, umfasst auch  $V$ .

**Vereinigung**

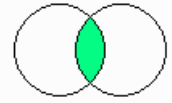


$A \cup B$

**Durchschnittsmenge, Schnittmenge**

Durchschnitt: alle  $x$ , welche gleichzeitig in  $A$  und in  $B$  enthalten sind  
 Die Menge  $D = A \cap B$  ist Untermenge sowohl von  $A$  als auch von  $B$  und jede Menge von dieser Eigenschaft ist in  $D$  enthalten.  
 Merkregel für die Verknüpfungszeichen: Schnittbildung (und) ist unten offen  $\cap$ , Vereinigung (oder) ist oben offen  $\cup$ .  
 In analoger Weise definiert man den Durchschnitt und die Vereinigung mehrerer Mengen.

**Durchschnitt**

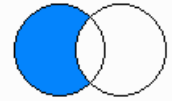


$A \cap B$

**Zueinander fremde Mengen, disjunkte Mengen**

Zwei Mengen  $A, B$  mit  $A \cap B = \emptyset$  heißen disjunkt oder zueinander fremd, d.h. die Mengen  $A$  und  $B$  haben kein Element gemeinsam. Die Mengen  $A$  und  $B$  werden dann auch fremd genannt.

**Differenz**



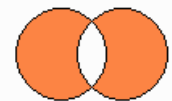
$A \setminus B$

**Differenzmenge** ... Differenz  $A \setminus B$ : alle  $x$ , welche in  $A$  aber nicht in  $B$

**symmetrische Differenzmenge, Diskrepanz**

symmetrische Differenz: alle  $x$ , welche entweder in  $A$  oder in  $B$  enthalten sind:  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**symmetrische Differenz**



$A \Delta B$

Beispiele: Der Durchschnitt der Menge aller Rechtecke mit der Menge aller Rhomben ist die Menge aller Quadrate. Die Vereinigung der Menge aller Rechtecke mit der Menge aller Parallelogramme ist die Menge aller Parallelogramme, da jedes Rechteck ein Parallelogramm ist.  
 $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{b, a, d\} \rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d\}$ ,  $A \cap B = \{a, b\}$ ,  $A \setminus B = \{c\}$ ,  $A \Delta B = \{c, d\}$

**Teilmengenbeziehung, Inklusion**

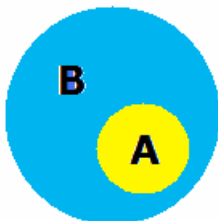
Eine Menge  $A$  ist Teilmenge von  $B$ , wenn alle Elemente aus  $A$  auch in  $B$  enthalten sind.  $A \subseteq B$   
 Enthaltenseinsrelation:  $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B)$   
 $A$  wird dann auch Untermenge,  $B$  Obermenge genannt. Die Teilmengenbeziehung ist reflexiv und transitiv.  
 Die leere Menge  $\emptyset$  ist in jeder Menge enthalten.

Eigenschaften der Inklusion: für Mengen  $A$  und  $B$  gilt

- Reflexivität  $A \subseteq A$
- Antisymmetrie  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$
- Transitivität  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

Auf Grund dieser Eigenschaften bildet die Inklusion eine teilweise Ordnung unter den Mengen.

Eine endliche Menge mit  $n$  Elementen besitzt genau  $2^n$  verschiedene Teilmengen.



**Echte Teilmenge**

Eine Menge  $A$  ist echte Teilmenge von  $B$ , wenn alle Elemente aus  $A$  auch in  $B$  enthalten sind und es in  $B$  Elemente gibt, welche nicht in  $A$  sind.  $A \subset B$   $(A \subset B) \Leftrightarrow (x \in A) \Rightarrow (x \in B) \wedge (\exists x \in B : x \notin A)$   
 Wenn  $A \subset B$  und  $B \subset A$  gilt, sind beide Mengen gleich  $A = B$ .  $A$  ist dann eine unechte Teilmenge von  $B$  und umgekehrt.

Nach DIN 5473 sind die Zeichen  $\subset$  für echtes Enthaltensein und  $\subseteq$  für Enthaltensein zu verwenden. Die umgekehrten Zeichen " $\supset$ " und " $\supseteq$ " sollten nicht genutzt werden.

Ist eine Menge  $A$  keine echte Teilmenge von  $B$ , so wird dies durch das Zeichen " $\not\subset$ " gekennzeichnet:  $A \not\subset B$

**Gleichmächtige Mengen**

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleichmächtig  $A \sim B$ , wenn eine eindeutige Abbildung der einen auf die andere Menge existiert.

Beispiel:  $N \sim Z$ ,  $N \sim P$ ,  $N$  und  $R$  sind nicht gleichmächtig.

Zum Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig zur Menge der geraden Zahlen, d.h. eine Menge kann zu einer echten Teilmenge gleichmächtig sein. Endliche Mengen sind gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten.

Für endliche Mengen ist die Mächtigkeit der Menge gleich der Anzahl der Elemente der Menge.

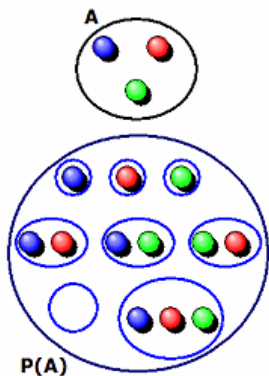
Der Begriff der Bijektion kann zur Definition der Gleichmächtigkeit von Mengen genutzt werden. Anschaulich bedeutet, dass zwei Mengen gleichmächtig sind, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen enthalten. Da es bei unendlichen Mengen schwierig ist, von Anzahlen zu sprechen, definiert man: Zwei Mengen  $A$  und  $B$  heißen gleichmächtig genau dann, wenn es eine Bijektion von  $A$  auf  $B$  gibt. Damit ist die Gleichmächtigkeitsrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. eine Äquivalenzrelation.

## Komplement einer Menge, Komplementärmenge

Komplement zu A: alle x aus der Grundgesamtheit X, welche nicht in A sind

Schreibweise:  $A^c$ , oder  $X-A$  oder  $A^-$

Es gilt stets:  $X^c = \emptyset$   $\emptyset^c = X$   $(A^c)^c = A$   $A^c \cap A = \emptyset$   $A^c \cup A = X$



## Potenzmenge

Die Potenzmenge  $P(A)$  einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Die leere Menge und die Menge selbst gehören zur Potenzmenge. Für eine endliche Menge mit n Elementen besteht die Potenzmenge aus  $2^n$  Mengen.

Beispiel: Menge  $A = \{1,2,3\} \rightarrow$  Potenzmenge  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

Menge  $B = \{1,2,3,4\}$

Potenzmenge  $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, B\}$

Eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge  $P(A)$  heißt Mengensystem über A.

Die Potenzmenge  $P(\emptyset)$  der leeren Menge  $\emptyset$  enthält diese als Element, womit  $P(\emptyset)$  selbst nicht leer ist.

Weiterhin gilt für zwei Mengen A und B:

$$A \subseteq B \rightarrow P(A) \subseteq P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B) ; \text{ d.h. nicht notwendig gleich}$$

## Produktmenge, Paarmenge, Kartesisches Produkt

Die Produktmenge  $A \times B$  ist die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Glied zu A und deren zweites zu B gehören. Die Produktmenge wird auch als kartesisches Produkt der Mengen A und B bezeichnet.

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$ . d.h.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Analog ist  $A \times B \times C$  die Menge aller Tripel aus Elementen der drei Mengen A, B und C.

Das kartesische Produkt wird z.B. genutzt, um die Ebene (Zeichenebene) als kartesisches Produkt zweier Geraden (Zahlengeraden) zu konstruieren. Mathematisch gesehen ist die Ebene die Menge aller reellen Zahlenpaare, und es gilt  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Beispiel: Mengen  $A = \{a,b\}$ ,  $B = \{x,y,z\}$  ergeben die Produktmenge  $A \times B = \{(a,x), (a,y), (a,z), (b,x), (b,y), (b,z)\}$

## Siebformel, Prinzip von Inklusion und Exklusion

Die Siebformel ist eine Verallgemeinerung der Summenregel für Mächtigkeiten auf den Fall nicht notwendig disjunkter Mengen.

Seien  $A_1, A_2$  usw. Teilmengen einer Menge A. Dann gilt:

$$\text{card}(A \setminus (A_1 \cup A_2)) = \text{card} A - \text{card} A_1 - \text{card} A_2 + \text{card}(A_1 \cap A_2)$$

$$\text{card}(A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = \text{card} A - \text{card} A_1 - \text{card} A_2 - \text{card} A_3 + \text{card}(A_1 \cap A_2) + \text{card}(A_1 \cap A_3) + \text{card}(A_2 \cap A_3) - \text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

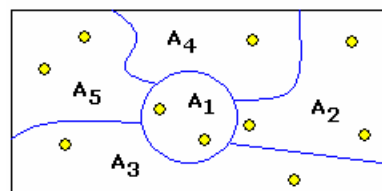
Anwendung: Wie viele Primzahlen bis 100 gibt es?

Jede zusammengesetzte Zahl  $< 100$  hat einen Primteiler  $\leq 7$ . Damit zählt man die Zahlen bis 100, die durch keine der Zahlen 2, 3, 5, 7 teilbar sind. Zum Ergebnis muss 4 addiert werden; für die Primzahlen 2,3,5,7; und eins subtrahiert werden für die Nichtprimzahl 1.

Sei also  $A = \{1, 2, \dots, 100\}$  und  $A_n$  die Teilmenge der durch n teilbaren Zahlen. Dann gilt  $\text{card} A_n = \lfloor 100/n \rfloor$  und  $A_m \cap A_n = A_{mn}$ , wenn m und n teilerfremd sind. Es folgt

$$\text{card}(A \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7)) = \text{card} A - \text{card} A_2 - \text{card} A_3 - \text{card} A_5 - \text{card} A_7 + \text{card} A_6 + \text{card} A_{10} + \text{card} A_{14} + \text{card} A_{15} + \text{card} A_{21} + \text{card} A_{35} - \text{card} A_{30} - \text{card} A_{42} - \text{card} A_{70} - \text{card} A_{105} + \text{card} A_{210} = 100 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 = 22$$

also gibt es genau  $22 + 4 - 1 = 25$  Primzahlen bis 100.



## Zerlegung einer Menge

Die Mengen  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  bilden eine Zerlegung einer Menge M, wenn sie paarweise fremd sind und ihre Vereinigung M ist, d.h.

$$A_i \cap A_k = \emptyset \text{ für } i \neq k \text{ und } A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = M.$$

Ein Beispiel für eine Zerlegung einer Menge in fünf Teilmengen ist in der Abbildung zu sehen.

## Indikator einer Menge

A sei eine Teilmenge von M. Die Funktion, die auf A den Wert 1 und auf der Komplementärmenge von A den Wert 0 annimmt, wird Indikator der Menge A genannt und mit  $I_A$  bezeichnet.

Für eine Element  $x \in M$  gilt somit

$$I_A(x) = 1 \text{ für } x \in A \text{ und } I_A(x) = 0 \text{ für } x \in A^c \text{ und } I_A = 1 \text{ und } I_A = 0$$

können somit auch als Bezeichner der Menge A und ihrer Komplementmenge benutzt werden.

Es gilt:  $I_A^2 = I_A$        $I_A + I_{A^c} = I_M$        $I_A * I_{A^c} = I_\emptyset$        $I_{A \cap B} = I_A * I_B$        $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A * I_B$

### Allgemeine Regeln

Die Vereinigung und der Durchschnitt sind kommutativ, assoziativ und zueinander wechselseitig distributiv.

$$A \cap B = B \cap A ; A \cup B = B \cup A , \text{ Kommutativgesetze}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) ; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) ,$$

Assoziativgesetze

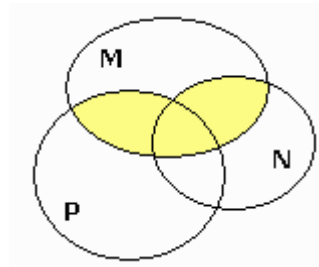
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) ; \text{ Distributivgesetze}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Für die Differenzmengenbildung sind das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz nicht gültig, z.B.  $\{1,2,3\} \setminus \{1,2\} = \{3\} \neq \{1,2\} \setminus \{1,2,3\} = \emptyset$ .

Abbildung: Euler-Venn-Diagramm des Distributivgesetzes der Vereinigung

$$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$$



### Idempotenzgesetz

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

### Weitere Gesetze

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cap B) \setminus B$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$A \setminus A = \emptyset$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

### Absorptionsgesetze, Adjunktivität

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

### Abzählbare Menge

Abzählbare Menge heißt eine Menge mit unendlich vielen Elementen, wenn sie sich "durchnumerieren" lässt.

Genauer ausgedrückt heißt das, dass es eine bijektive Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen in die gegebene Menge gibt. Das ist genau dann der Fall, wenn diese Menge zur Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Beispiele für abzählbare Mengen sind, neben den natürlichen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen. Nicht abzählbar (überabzählbar) sind die Menge der reellen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen. Die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Beispiel einer nichtabzählbaren Menge:

Die Menge aller abzählbar unendlichen Folgen von natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar. Dass sie unendlich ist, ist offensichtlich.

Wenn sie abzählbar unendlich wäre, so hätte jede Folge eine Nummer, und zu jeder Nummer i gehört eine Folge, die man mit  $a_{i1}, a_{i2}, \dots$

bezeichnen könnte. Man konstruiere die Zahlenfolge  $a_{11} + 1, a_{22} + 1, \dots$

Diese müsste auch eine Nummer haben, etwa die Nummer j. Demnach wäre

$$a_{j1} = a_{11} + 1 ; a_{j2} = a_{22} + 1 ; \dots$$

und vor allem  $a_{jj} = a_{jj} + 1$ , was einen Widerspruch ergibt.

### Obermenge

Eine Menge A heißt Obermenge einer Menge B, wenn B Teilmenge von A ist. Man schreibt  $A \supseteq B$  (oder  $B \subseteq A$ ).

Zum Beispiel ist die Menge der reellen Zahlen Obermenge der Menge der natürlichen Zahlen oder der Menge der rationalen Zahlen.

### Eigenschaften endlicher Mengen

Seien A und B zwei endliche Mengen und C eine beliebige Menge, dann gilt:

jede Teilmenge von A ist endlich

$$A \cup B \text{ ist endlich; } \text{card}(A \cup B) \leq \text{card } A + \text{card } B$$

$$A \cap B \text{ ist endlich; } \text{card}(A \cap B) \leq \min(\text{card } A, \text{card } B)$$

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

$A \setminus C$  ist endlich

$$\text{card } P(A) = 2^{\text{card } A}$$

### Ungleichmächtigkeit der Potenzmenge

Keine Menge ist mit ihrer Potenzmenge gleichmächtig. Für keine Menge A gilt  $A \sim P(A)$ .

Insbesondere muss die Unendlichkeit der Potenzmenge einer unendlichen Menge eine andere Art von Unendlichkeit sein.

## Abzählbar unendliche Menge

Eine Menge  $M$  heißt abzählbar unendlich, wenn sie zur Menge  $N$  der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist. Alle anderen unendlichen Mengen sollen überabzählbar unendlich heißen.

Die abzählbare Unendlichkeit einer Menge  $M$  bedeutet also nichts anderes, als dass  $M$  mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, quasi abgezählt werden kann.

Für die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen wird die Kardinalzahl  $\aleph_0$  eingeführt

$$\text{card } N = \aleph_0$$

$\aleph$  (gesprochen "Aleph") ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.

$\aleph_0$ , d.h. "Aleph Null", ist die abzählbare Mächtigkeit der natürlichen, rationalen und algebraischen Zahlen und damit die kleinste transfinite Kardinalzahl.

Unter  $\aleph_1$ , d.h. "Aleph Eins", wird die Mächtigkeit der reellen Zahlen verstanden.

## Schubfachprinzip, Dirichlet-Prinzip

Das Schubfachprinzip oder Dirichlet-Prinzip (im englischen pigeonhole principle = Taubenschlagprinzip) ist eine einfache und effiziente Methode, um Aussagen über eine endliche Menge zu machen.

Das Prinzip kann folgendermaßen formuliert werden:

Falls man  $n$  Objekte auf  $m$  Mengen ( $n, m > 0$ ) verteilt, und  $n$  größer als  $m$  ist, dann gibt es mindestens eine Menge, in der mehr als ein Objekt landet.

Der Name ergibt sich aus der Überlegung: Wenn man eine bestimmte Anzahl von Schubfächern hat, und man mehr Objekte in die Fächer legt als Fächer vorhanden sind, dann sind in irgendeinem Schubfach mindestens zwei dieser Objekte. Das Prinzip geht auf Dirichlet zurück, der es 1834 nutzte.

Der Beweis dieses Prinzips ist einfach und kann mittels Widerspruch geführt werden: Falls das Prinzip nicht stimmt, dann ist in jedem Schubfach höchstens ein Objekt. Damit gibt es höchstens so viele Objekte wie Schubfächer. Das steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, dass es mehr Objekte als Schubfächer gibt.

Trotz der Einfachheit erlaubt das Schubfachprinzip interessante Aussagen, zum Beispiel die, dass es in Berlin mindestens zwei Personen gibt, die exakt dieselbe Anzahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Nachweis: Man teilt alle Bewohner von Berlin nach der Anzahl ihrer Haare in "Schubfächer" ein.

Typischerweise hat der Mensch etwa 100000 bis 200000, jedoch sicher nicht mehr als 1 Million Haare, damit gibt es maximal eine Million Schubfächer.

Da es aber etwa in Berlin mehr als 1 Millionen Einwohner gibt, hat man mehr Einwohner als Schubfächer.

## Erweitertes Schubfachprinzip

Verteilt man  $n$  Objekte auf  $k$  Mengen ( $n, k > 0$ ) und ist dabei  $n > k$ , so gibt es mindestens eine Menge, in der sich mehr als  $(n-1)/k$  Objekte befinden.

Damit kann man zum Beispiel zeigen, dass es in Deutschland mindestens zweiundachtzig Einwohner gleicher Haaranzahl gibt.

## Schubfachprinzip-Beispiele

Mit Hilfe des Dirichletschen Schubfachprinzips können verschiedene Sachverhalte bewiesen werden, zum Beispiel

- 1) Es sei  $a$  eine irrationale Zahl. Dann existieren unendlich viele rationale Zahlen  $r = p/q$ , so dass  $|a - r| < q^{-2}$  gilt.
- 2) Werden 55 natürliche Zahlen  $x_1, \dots, x_{55}$  gewählt, so dass  $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{55} \leq 100$  gilt, dann unterscheiden sich zwei der Zahlen um 9 bzw. 10, ein Paar mit der Differenz 12 und ein Paar mit der Differenz 13. Erstaunlicher Weise muss kein Paar mit der Differenz 11 existieren.
- 3) Für eine ungerade natürliche Zahl  $n$  mit einer beliebigen Permutation  $p$  der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$  ist das Produkt  $P(p) = (1-p(1)) \cdot (2-p(2)) \cdot \dots \cdot (n-p(n))$  eine gerade Zahl.
- 4) In einem Zimmer befinden sich eine beliebige Anzahl von Personen, mindestens 2. Einige der Personen sind sich gegenseitig bekannt, andere nicht. Dann gibt es stets mindestens 2 Personen, die die gleiche Anzahl von Bekannten im Zimmer haben.
- 5) Werden die natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, 10$  in beliebiger Reihenfolge auf einen Kreis geschrieben, so haben drei aufeinanderfolgende Zahlen eine Summe größer als 16.
- 6) Werden 5 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck mit der Kantenlänge 1 gewählt, so gibt es mindestens ein Punktepaar mit einem Abstand kleinergleich 0,5.
- 7) In jedem Polyeder gibt es mindestens ein Paar von Seitenflächen mit der gleichen Anzahl von Kanten.
- 8) Ein  $8 \times 8$ -Schachbrett werde mit 13 Schnitten geteilt. Dann enthält mindestens ein Teilstück mehr als einen Mittelpunkt der 64 Quadrate.

## Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit  $a \in A$  und  $b \in B$ . d.h.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Analog ist  $A \times B \times C$  die Menge aller Tripel aus Elementen der drei Mengen A, B und C.

Das kartesische Produkt wird z.B. genutzt, um die Ebene (Zeichenebene) als kartesisches Produkt zweier Geraden (Zahlengeraden) zu konstruieren. Mathematisch gesehen ist die Ebene die Menge aller reellen Zahlenpaare, und es gilt  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Beispiel: Sei  $A = \{1;3\}$  und  $B = \{1;2\}$  gegeben. Dann ist

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (3,1), (3,2)\} \text{ und } B \times A = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3)\}$$

Damit ist  $A \times B \neq B \times A$ , d.h. das kartesische Produkt für Mengen ist nicht kommutativ.

Für Mengen A, B, C, D gilt

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \text{ und } A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \text{ und } A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C) \text{ und } A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$$

## Direkte Summe

Unter der direkten Summe  $A \oplus B$  zweier Mengen A und B ganzer Zahlen versteht man die Menge  $C = A \oplus B = \{a+b: a \in A, b \in B\}$

Beispiel: Die Mengen  $A = \{1,2,3\}$  und  $B = \{5,6\}$  haben als direkte Summe  $A \oplus B = \{6,7,8,9\}$ .

## Kontinuumshypothese

... besagt, dass zwischen den Kardinalzahlen  $\aleph_0$  und  $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$  keine weitere Kardinalzahl steht. Also jede Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist endlich, gleichmächtig zu  $\mathbb{N}$ , d.h. abzählbar, oder gleichmächtig zu  $\mathbb{R}$ , d.h.

überabzählbar. Kann weder bewiesen, noch widerlegt werden. Für die algebraischen Zahlen ergibt sich auch  $\aleph_0$ . Weiterhin gilt

$$\aleph_0^r = \aleph_0$$

$$r \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Diese Vermutung wurde 1878 von Cantor aufgestellt und viele bekannte Mathematiker versuchten, sie entweder zu beweisen oder zu widerlegen. Im Jahr 1938 zeigte Gödel, dass sich die Kontinuumshypothese aus der bekannten Axiomatik der Mengenlehre nicht widerlegen lässt. Weitere 25 Jahre später bewies Cohen, dass dieselbe Axiomatik der Mengenlehre nicht genügt, um die Kontinuumshypothese zu beweisen. Cohen konnte sogar zeigen, dass die Verneinung der Kontinuumshypothese zu keinem Widerspruch in der Mengenlehre führt. Daher kann der Kontinuumshypothese im Rahmen der Mengenlehre kein Wahrheitswert zugewiesen werden. Sie kann, ebenso gut wie ihre Negation, als neues Axiom verwendet werden.

## David Hilbert: „Cantors Problem von der Mächtigkeit des Continuums“

„Zwei Systeme, d.h. zwei Mengen von gewöhnlichen reellen Zahlen oder Punkten heißen nach Cantor äquivalent oder von gleicher Mächtigkeit, wenn sie zu einander in eine derartige Beziehung gebracht werden können, daß einer jeden Zahl der einen Menge eine und nur eine bestimmte Zahl der anderen Menge entspricht. Die Untersuchungen von Cantor über solche Punktmenge machen einen Satz sehr wahrscheinlich, dessen Beweis jedoch trotz eifrigster Bemühungen bisher noch Niemanden gelungen ist; dieser Satz lautet:

Jedes System von unendlich vielen reellen Zahlen d. h. jede unendliche Zahlen- oder Punktmenge ist entweder der Menge der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... oder der Menge sämtlicher reellen Zahlen und mithin dem Continuum, d.h. etwa den Punkten einer Strecke äquivalent; im Sinne der Äquivalenz gibt es hiernach nur zwei Zahlenmengen, die abzählbare Menge und das Continuum.

Aus diesem Satz würde zugleich folgen, daß das Continuum die nächste Mächtigkeit über die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen hinaus bildet; der Beweis dieses Satzes würde mithin eine neue Brücke schlagen zwischen der abzählbaren Menge und dem Continuum. Es sei noch eine andere sehr merkwürdige Behauptung Cantors erwähnt, die mit dem genannten Satze in engstem Zusammenhange steht und die vielleicht den Schlüssel zum Beweise dieses Satzes liefert. Irgend ein System von reellen Zahlen heißt geordnet, wenn von irgend zwei Zahlen des Systems festgesetzt ist, welches die frühere und welches die spätere sein soll, und dabei diese Festsetzung eine derartige ist, daß, wenn eine Zahl a früher als die Zahl b und b früher als c ist, so auch stets a früher als c erscheint. Die natürliche Anordnung der Zahlen eines Systems heiße diejenige, bei der die kleinere als die frühere, die größere als die spätere festgesetzt wird. Es gibt aber, wie leicht zu sehen ist, noch unendlich viele andere Arten, wie man die Zahlen eines Systems ordnen kann.

Wenn wir eine bestimmte Ordnung der Zahlen ins Auge fassen und aus denselben irgend ein besonderes System dieser Zahlen, ein sogenanntes Teilsystem oder eine Teilmenge, herausgreifen, so erscheint diese Teilmenge ebenfalls geordnet. Cantor betrachtet nun eine besondere Art von geordneten Mengen, die er als wohlgeordnete Mengen bezeichnet und die dadurch charakterisiert sind, daß nicht nur in der Menge

selbst, sondern auch in jeder Teilmenge eine früheste Zahl existiert. Das System der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... in dieser seiner natürlichen Ordnung ist offenbar eine wohlgeordnete Menge. Dagegen ist das System aller reellen Zahlen, d. h. das Continuum in seiner natürlichen Ordnung offenbar nicht wohlgeordnet. Denn, wenn wir als Teilmenge die Punkte einer endlichen Strecke mit Ausnahme des Anfangspunktes der Strecke ins Auge fassen, so besitzt diese Teilmenge jedenfalls kein frühestes Element. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich die Gesamtheit aller Zahlen nicht in anderer Weise so ordnen läßt, daß jede Teilmenge ein frühestes Element, hat, d.h. ob das Continuum auch als wohlgeordnete Menge aufgefaßt werden kann, was Cantor bejahen zu müssen glaubt. Es erscheint mir höchst wünschenswert, *einen direkten Beweis dieser merkwürdigen Behauptung von Cantor zu gewinnen*, etwa durch wirkliche Angabe einer solchen Ordnung der Zahlen, bei welcher in jedem Teilsystem eine früheste Zahl aufgewiesen werden kann.“

### Supremum und Infimum von Mengen

Jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}$  (Menge der reellen Zahlen) besitzt eine kleinste obere Schranke. Diese wird Supremum von  $M$  genannt und mit  $\sup M$  bezeichnet.

Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}$  (Menge der reellen Zahlen) besitzt eine größte untere Schranke. Diese wird Infimum von  $M$  genannt und mit  $\inf M$  bezeichnet.

Beispiel: Die Menge aller rationalen Summen  $1/1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots + 1/n^2$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ist nach oben beschränkt. Eine obere Schranke ist zum Beispiel 2. Die kleinste obere Schranke ist allerdings  $\pi^2/6$ . Überraschend ist, dass hier die obere Schranke einer Menge rationaler Zahlen irrational ist.

### Folgerungen:

Für positive Zahlen  $a$  und  $b$  gibt es eine natürliche Zahl  $n$  mit  $n \cdot a > b$ .

Zu jeder positiven Zahl  $r$  gibt es ein natürliches  $n$  mit  $n > r$ . Zu jedem positiven  $\varepsilon$  gibt es eine natürliche Zahl  $N$  mit  $1/N < \varepsilon$ .

In jedem, noch so kleinen, Intervall  $]a, b[$  reeller Zahlen gibt es eine, ja sogar unendlich viele rationale Zahlen.

In jedem Intervall  $]a, b[$  reeller Zahlen gibt es mindestens eine irrationale Zahl.

### Häufungswert

Eine Zahl  $z$  heißt Häufungswert der Menge  $M$ , wenn für jedes beliebige positive  $\varepsilon$  die Ungleichung  $|a - z| < \varepsilon$  für unendlich viele Elemente  $a$  der Menge erfüllt ist. Jede unendliche und beschränkte Zahlenmenge hat mindestens einen Häufungswert.

### Mengenbildungssaxiom für Mengen erster Stufe

Es gibt eine Menge  $M$ , so dass für jedes Element  $x$  gilt:  $x \in M$  genau dann, wenn  $a(x)$ .

### Mengenbildungssaxiom für Mengen zweiter Stufe

Es gibt ein Mengensystem  $M$ , so dass für jede Menge  $X$  gilt:  $X \in M$  genau dann, wenn  $a(X)$ .

### Wohlordnungsgesetz

Unter dem Wohlordnungsgesetz versteht man eine Menge  $M$ , welche in eine Menge paarweise zueinander elementfremder Teilmengen  $A, B, C, \dots$  zerfällt, deren jede mindestens eine Teilmenge  $M_1$ , welche mit jeder der Teilmengen  $A, B, C, \dots$  genau ein Element gemeinsam hat.

Eine Menge heißt endlich, wenn sie keiner echten Teilmenge gleichmächtig ist; eine Menge heißt unendlich, wenn sie wenigstens einer echten Teilmenge gleichmächtig ist.

### Geordnete Menge

Eine Menge  $M$  heißt genau dann durch eine Relation  $R$  einfach geordnet, wenn diese Relation irreflexiv und transitiv ist.

Zwei durch eine gewisse Relation  $R$  geordnete Mengen  $M, N$  heißen genau dann ähnlich bezüglich der Relation  $\infty$ , wenn sie sich derart eineindeutig aufeinander abbilden lassen, dass für zwei verschiedene Elemente  $x, y \in M$  mit  $x \infty y$  auch in  $N$  die Ordnungsrelation  $f(x) \infty f(y)$  gilt.

**Offene Menge ...** Eine Menge  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt offen, wenn sie mit jedem ihrer Punkte auch eine  $\varepsilon$ -Umgebung des Punktes enthält, d.h.  $\forall x_0 \in E \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon \subseteq E$ .

### Abgeschlossene Menge

Eine Menge  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Die einzigen Mengen des  $\mathbb{R}^n$ , die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind, sind  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$ . Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

Gegeben sei eine Teilmenge  $A$  der Menge  $C$  der komplexen Zahlen.  $A$  ist abgeschlossen, wenn für jede Folge  $(x_n)$  in  $A$ , die konvergent ist, auch der Grenzwert

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$   
ein Element von  $A$  ist.

Eine abgeschlossene Menge enthält keine Lücken in ihrem Inneren. Alle Randpunkte sind auch Elemente der Menge.

Beispiel: Das Intervall  $I = [-1, 1]$  reeller Zahlen ist abgeschlossen. Auf

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

betrachten wir eine beliebige konvergente Folge  $(x_n)$  in  $I$ . Dann gilt für jedes Folgenglied  $x_n$

$$-1 \leq x_n \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq 1$$

d.h.,  $I$  ist eine abgeschlossene Menge.

Dagegen ist die maximale Definitionsmenge  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  für die Funktion  $f(x) = 1/x$  nicht abgeschlossen.

Die Nullfolge  $\{1/n\}$  enthält nur Elemente aus  $D$ . Allerdings ist der Grenzwert 0 kein Element von  $D$ .

Im Allgemeinen muss die Abgeschlossenheit einer Menge rechnerisch geprüft werden.

Dabei ist zu beachten, dass aus  $x_n \leq a$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$

folgt. Dagegen folgt aus  $x_n < a$  nicht  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < a$ .

### Kompakte Menge

Eine Menge  $K$ , Teilmenge der komplexen Zahlen, heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

### Axiomatische Mengenlehre - Definition

Gegeben sind Variablen  $x, y, z, \dots$  für Objekte, welche man Klassen nennt. Zwischen ihnen kann eine zweistellige Elementrelation  $x \in y$  bestehen. Diejenigen Klassen, die Elemente wenigstens einer Klasse sind, nennt man Mengen. Für diese Menge fordert man axiomatisch:

1.  $x = y \Leftrightarrow$  für alle  $z$  gilt:  $x \in z \Leftrightarrow y \in z$  und  $z \in x \Leftrightarrow z \in y \dots$  Gleichheit von Mengen
2. für jedes  $x$  existiert eine Menge  $Mg\ x \dots$  Existenzaxiom
3. für alle  $z$  gilt:  $(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y \dots$  Extensionalitätsaxiom
4. für alle  $x$  gilt:  $(A(x) \Rightarrow Mg\ x) \Rightarrow$  es existiert ein  $y$ , so dass für  $x$  gilt:  $(x \in y \Leftrightarrow A(x)) \dots$  Komprehensionsaxiom

5.  $Mg\ \emptyset \dots$  Nullmengenaxiom
6.  $Mg\ x \Rightarrow Mg\ \{x\} \dots$  Einermengenaxiom

7.  $Mg\ x$  und  $Mg\ y \Rightarrow Mg(x \cup y) \dots$  1. Vereinigungsaxiom
8.  $Mg\ x \Rightarrow Mg(\cup_{y \in x} y) \dots$  2. Vereinigungsaxiom

9. für alle  $x$  gilt:  $(Mg\ x \wedge \emptyset \in x \wedge (y \in x \Rightarrow \{y\} \in x)) \dots$  Unendlichkeitsaxiom
10.  $Mg\ x \wedge f: x \rightarrow y \Rightarrow Mg\ y \dots$  Funktionalaxiom
11.  $Mg\ x \Rightarrow Mg\ P(x) \dots$  Potenzmengenaxiom

12. zu jeder Klasse  $y$  nichtleerer Mengen  $x$  gibt es eine Funktion  $f$  mit  $f(x) \in x$  für alle  $x \in y \dots$  Auswahlaxiom

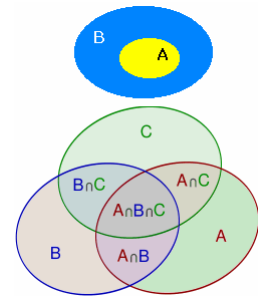
Bei dieser Mengenerklärung treten die klassischen Probleme der "naiven" Mengenlehre, wie z.B. die Russellsche Antinomie, nicht mehr auf.

### Venn-Diagramm, Mengendiagramm

Zur Veranschaulichung von Mengen und Mengenoperationen benutzt man Venn-Diagramme (nach John Venn, 1834-1923). Dabei werden Mengen durch ebene Figuren dargestellt.

In der oberen Abbildung wird z.B. die Teilmengenbeziehung  $A \subset B$  dargestellt, in der unteren Abbildung die Schnittmengen dreier Mengen.

Mitunter werden die Venn-Diagramme auch als Eulersche Kreise bezeichnet.



### Symmetrische Venn-Diagramme

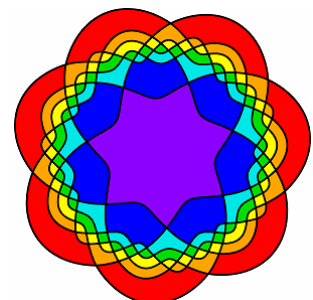
Venn-Diagramme werden vor allem für drei Menge mit Kreisen verwendet. Venn hatte jedoch die Absicht, "in sich elegante symmetrische Figuren" zu finden, die eine größere Anzahl an Mengen darstellen, und zeigte ein Diagramm für vier Mengen in Ellipsenform.

Er gab ein Konstruktionsverfahren an, mit dem man Venndiagramme für eine beliebige Anzahl von Mengen darstellen kann, wobei jede geschlossene Kurve mit den anderen verflochten ist.

1960 wurde begonnen, intensiv mit Computereinsatz nach derartigen symmetrischen Venn-Diagrammen zu suchen. Gefunden wurden zuerst Venn-Diagramme mit 7 Mengen, sogenannte 7-Venn-Diagramme. Die Abbildung zeigt eines.

Am 27. Juli 2012 gaben Khalegh Mamakani und Frank Ruskey von der Universität von Victoria (Kanada) die Entdeckung des ersten 11-Venn-Diagramms bekannt.

siehe <http://webhome.cs.uvic.ca/~ruskey/Publications/Venn11/Venn11.html>  
Abbildung: 11-Venn-Diagramm





Unter der Logik (griech. λογική [τέχνη] „die denkende [Kunst, Vorgehensweise]“) wird heute im Allgemeinen eine teils in der Philosophie, teils in der Mathematik und in der Informatik angesiedelte Theorie verstanden, die sich primär mit den Normen des korrekten Schlussfolgerns beschäftigt. Heute versteht man unter Logik überwiegend formale Logik (auch symbolische Logik oder mathematische Logik genannt), wie man sie zum Beispiel in der Aussagenlogik und in den formalen Systemen findet.

**Aussagenlogik**

Fachgebiet, welches sich mit mathematischen Aussagen, deren Beziehungen und Operationen beschäftigt.

Im Gegensatz zur Begriffslogik untersucht die Aussagenlogik nicht Verknüpfungen von - und Beziehungen zwischen - Begriffen, sondern Verknüpfungen von - und Beziehungen zwischen - Urteilen. Während sich in der Begriffslogik Urteile als aus Begriffen zwischen denen eine Beziehung besteht, zusammengesetzt darstellen, sind die Urteile in der Aussagenlogik atomare, d.h. nicht weiter zerlegbare Gebilde. Diese atomaren Bestandteile können wahr oder falsch sein. Gegenstand der Aussagenlogik ist, wie sich die „Wahrheitswerte“ der atomaren Bestandteile zu Wahrheitswerten komplexer sprachlicher Gebilde fortsetzen lassen.

**Aussage**

Eine Aussage p ist ein sprachliches Gebilde, dem man einen Wahrheitswert (entweder wahr oder falsch, 0 oder 1, true oder false) zuordnen kann. (tertium non datur)

**Aussageform**

Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde, das mindestens eine Variable enthält und zur Aussage wird, wenn für die Variable ein Element aus dem Grundbereich eingesetzt wird

**Existenzaussagen**

$\exists x \in M : A$  ... es existiert (mindestens) ein  $x \in M$  mit der Eigenschaft A (ist wahre Aussage). Der Operator  $\exists$  wird auch Partikularisator, Existenzoperator oder Existenz-Quantor genannt.

**Generalisator, Allquantor**

$\forall x \in M$  gilt A ... für alle x Element von M gilt A. Der Operator  $\forall$  wird auch Allquantor genannt. Eine Aussage mit Allquantor wird Allaussage genannt. Die Negation einer Allaussage ist eine Existenzaussage, die Negation eine Existenzaussage eine Allaussage.

**Aussagenverknüpfungen, Junktoren, logische Verknüpfungen**

Aussagen und Aussageformen können verneint oder durch die Wörter "und", "oder", "entweder ... oder", "wenn ..., dann ...", "genau dann, wenn" miteinander verknüpft werden. Dabei entsteht eine neue Aussage oder Aussageform.

Negation, NICHT, NOT, non	$\neg p$
Konjunktion, UND, AND, et	$p \wedge q$
Disjunktion, Alternative, ODER, OR, vel	$p \vee q$
Antivalenz, Entweder-Oder, XOR, aut	$p \oplus q$
Implikation, Wenn-Dann, seq	$p \Rightarrow q$
Äquivalenz, Genau-Dann-Wenn, äq	$p \Leftrightarrow q$

Die Konjunktion "A und B" ist genau dann wahr, wenn die Teilaussagen A und B zugleich wahr sind. Die Disjunktion "A oder B" ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Teilaussagen A bzw. B wahr ist. Die Alternative "entweder A oder B" ist genau dann wahr, wenn eine der beiden Teilaussagen wahr und zugleich die andere falsch ist. In der Umgangssprache wird "oder" oft in dieser Art verwendet. Die Implikation "wenn A, dann B" ist genau dann falsch, wenn A (Voraussetzung oder auch Prämisse genannt) wahr und gleichzeitig B (Schlussfolgerung oder auch Konklusion genannt) falsch ist. Die Äquivalenz "A genau dann, wenn B" ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Die Äquivalenz wird auch Biimplikation genannt. Die Antivalenz wird auch Kontravalenz genannt.

**Wahrheitstabelle**

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \times q$	$p   q$	$q \Rightarrow p$
W	W	W	W	F	W	W	F	F	W
W	F	F	W	W	F	F	F	W	W
F	W	F	W	W	W	F	F	W	F
F	F	F	F	F	W	W	W	W	W

**Funktionell vollständige Funktionen**

Es gibt zwei zweistellige Wahrheitsfunktionen, die einzeln zur Repräsentation aller Wahrheitsfunktionen ausreichen.



## Umformulierung mit zwei Voraussetzungen

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\neg r \wedge q) \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

Wahrheitstabelle	p	q	r	$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q))$
	1	1	1	1
	0	1	1	1
	1	0	1	1
	0	0	1	1
	1	1	0	1
	0	1	0	1
	1	0	0	1
	0	0	0	1

"Hinreichend"  $a \Rightarrow b$  bedeutet "a ist hinreichend für b"

"Notwendig"  $\neg c \Rightarrow \neg d$  bedeutet "c ist notwendig für d"

## Disjunktive Normalform

Ein Konjunktionsterm ist ein logischer Ausdruck (Term) einer Konjunktion einfacher oder negierter Variablen, wobei jede Variable höchstens einmal auftritt.

Ein Minterm ist ein Konjunktionsterm, in dem jede Variable genau einmal auftritt.

Unter einer disjunktiven Normalform, DN, versteht man die disjunktive Verknüpfung von Konjunktionstermen.

Enthält die disjunktive Normalform ausschließlich Minterme, so heißt sie ausgezeichnete Disjunktive Normalform, ADN. Jede DN lässt sich zu einer ADN erweitern.

**Beispiel:** Der logische Ausdruck  $(a \wedge b) \Rightarrow c$  lässt sich mit

$$(a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

als ausgezeichnete disjunktive Normalform darstellen. Beide Ausdrücke haben identische Wahrheitstabelle.

## Verknüpfungsbasis

Menge von Verknüpfungen, mit deren Hilfe jede beliebige Boolesche Funktion dargestellt werden kann. Die Mengen

$$\{\neg, \wedge, \vee\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\text{NAND}\}, \{\text{NOR}\}$$

sind Verknüpfungsbasen. In der Praxis bedeutet dies, dass jede beliebige Boolesche Funktion unter Verwendung von ausschließlich NAND-Gattern oder ausschließlich NOR-Gattern dargestellt werden kann. In den meisten digitalen Schaltkreisfamilien überwiegen NAND- und NOR-Gatter.

## Algorithmus zur Konstruktion der Disjunktiven Normalform

1. Aufstellen der Wahrheitstabelle für die Funktion.
2. Streichen aller Zeilen, deren Funktionswert gleich Null ist.
3. Übersetzen jeder verbliebenen Zeile in einen Minterm. Dazu wird in der jeweiligen Zeile jede Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 0 enthält, negiert und jede Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 1 enthält, nicht negiert in einen Minterm übernommen.
4. Die Disjunktion aller so gewonnenen Minterme ergibt die gesuchte ausgezeichnete Disjunktive Normalform.

## Algorithmus zur Konstruktion der Konjunktiven Normalform

1. Aufstellen der Wahrheitstabelle für die Funktion.
2. Streichen aller Zeilen, deren Funktionswert gleich Eins ist.
3. Übersetzen jeder verbliebenen Zeile in einen Maxterm. Dazu wird in der jeweiligen Zeile jede Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 1 enthält, negiert und jede Eingangsvariable, die in der Wahrheitstabelle eine 0 enthält, nicht negiert in einen Maxterm übernommen.
4. Die Konjunktion aller so gewonnenen Maxterme ergibt die gesuchte ausgezeichnete Konjunktive Normalform.

## Logik-Aufgabe

### Drei Brüder

Du kommst an eine Weggabelung und weißt nicht, ob der linke oder der rechte Weg zu Deinem Ziel führt. Glücklicherweise ist gleich in der Nähe ein Haus, deren Bewohner Du fragen kannst.

In dem Haus wohnen drei Brüder. Einer sagt immer die Wahrheit, einer lügt immer, und der dritte lügt manchmal und manchmal nicht. Du weißt aber nicht, wer der drei Brüder wer ist.

Du darfst zwei beliebige Fragen stellen, um herauszufinden, wohin du gehen musst, um Dein Ziel zu erreichen. Eine Frage darfst Du nur an jeweils einen der drei Brüder richten; aber nicht notwendigerweise an den selben.

Was musst du wen fragen?

Lösung:

Die erste Frage an einen beliebigen der drei Brüder lautet: "Welcher von deinen Brüdern sagt prinzipiell häufiger die Wahrheit?"

Gerät man an den Wahrheitsliebenden, so zeigt er einem den Wankelmütigen. Gerät man an den Lügner, zeigt er einem auch den Wankelmütigen. Gerät man an den Wankelmütigen, zeigt er je nach Laune einen der beiden anderen. In allen drei Fällen aber ist der, den man weder gefragt hat noch den man gezeigt bekommen hat, nicht der Wankelmütige.

Diesem kann man also erfolgreich die Frage "Welchen Weg würde mir dein Bruder, der das genaue Gegenteil von dir ist, zeigen?"

Die Antwort ist auf jeden Fall der falsche Weg: Der Wahrheitsliebende würde wahrheitsgemäß auf den falschen Weg zeigen, und der Lügner würde lügen und auch auf den falschen Weg zeigen. Also muss man den anderen Weg nehmen.

### Problem des Gefangenen

Der Gefangene wird in einen Raum mit zwei Türen geführt. Eine der Türen führt in die Freiheit, die anderen führen in den Tod. Vor den Türen stehen einige Wächter. Jeder von ihnen lügt immer oder sagt immer die Wahrheit; es ist aber unbekannt, welche von ihnen lügen und welche die Wahrheit sagen. Wie kann man mit einer einzigen Frage an einen beliebigen der Wächter herausfinden, welche Türe in die Freiheit führt?

Lösung: "Welche Tür würde mir ein Wächter, der mit einem anderen Wahrheitsgehalt als du antwortet, nennen, wenn ich ihn nach der Tür in die Freiheit frage?"

Man erhält dann als Antwort immer die Tür in den Tod, muss also die andere wählen.

### Am runden Tisch

Um einen runden Tisch sitzen einige Leute. Einige sagen immer die Wahrheit, andere lügen immer. Jeder behauptet über seinen Sitznachbar, er sei ein Lügner.

Eine Frau behauptet, dass 47 Leute an diesem Tisch säßen.

Darauf meint ein Mann verärgert: "Das stimmt nicht, sie ist eine Lügnerin. Es sitzen 50 Leute am Tisch".

Wie viele Leute saßen denn nun am Tisch?

Lösung: Da neben jedem Lügner jemand sitzen muss, der die Wahrheit sagt, muss eine gerade Anzahl an Leuten um den Tisch sitzen. Also lügt die Frau. Da der Mann die Frau als Lügnerin bezeichnet, spricht er die Wahrheit. Es sitzen also 50 Leute am Tisch.

### Einstellungstest bei IBM

1. Es stehen fünf Häuser in einer Reihe.
2. Der Engländer bewohnt ein rotes Haus.
3. Der Spanier hat einen Hund.
4. Kaffee wird im grünen Haus getrunken.
5. Der Ukrainer trinkt Tee.
6. Das grüne Haus steht unmittelbar rechts neben dem elfenbeinfarbenen.
7. Der der Winston raucht, kaut Schnecken.
8. Milch wird im dritten Haus getrunken.
9. Krone wird im gelben Haus geraucht.
10. Der Norweger wohnt im ersten Haus.
11. Der Chesterfield raucht, wohnt im Haus neben dem Fuchs.
12. Krone wird neben dem Haus mit dem Pferd geraucht.
13. Der der Milde Sorte raucht, trinkt Orangensaft.
14. Der Japaner raucht Dorel.
15. Das Haus des Norwegers steht neben dem braunen Haus.

Frage A: Wer trinkt Wasser ? Frage B: Wem gehört das Zebra ?

### Lösung zum Einstellungstest

Am schnellsten gelangt man mit Hilfe einer Tabelle zur Lösung. Drei Aussagen können direkt eingetragen werden:

1. Milch wird im dritten Haus getrunken.
2. Der Norweger wohnt im ersten Haus.
3. Das Haus des Norwegers steht neben dem braunen Haus.

Anschließend werden paarweise die im Text genannten Fakten eingetragen. Die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Häusern erzeugen eine Ausschlusslogik, welche letztendlich die unten stehende Kombination ergeben.

Haus 1	Haus 2	Haus 3	Haus 4	Haus 5
Norwegen	Ukraine	England	Spanien	Japan
gelb	braun	rot	elfenbein	grün
Wasser	Tee	Milch	Orangensaft	Kaffee
Fuchs	Pferd	Schnecken	Hund	Zebra
Krone	Chester	Whinston	Milde Sorte	Dorel

Demnach trinkt der Norweger Wasser (Frage 1) und das Zebra gehört dem Japaner (Frage 2).

## Die drei Professoren

Drei Professoren bewerben sich um eine Anstellung an einer Universität. Der Vorsteher teilt ihnen folgendes mit: "Ich werde jedem von Ihnen, meine Herren, einen roten oder weißen Punkt auf die Stirn malen. Sobald Sie einen roten Punkt auf der Stirn eines Kollegen sehen, heben Sie bitte Ihre rechte Hand. Und wenn Sie Ihre eigene Farbe herausgefunden haben, senken Sie bitte Ihre Hand."

Er versieht alle drei Professoren mit einem roten Punkt und natürlich heben sie alle die Hände. Nach einiger Zeit lässt Professor Sol Hoph die Hand sinken und erklärt: "Ganz klar, ich muss einen roten Punkt haben."

"Woher wissen Sie das?", fragt der Vorsteher?

Lösung:

Die Professoren seien A, B und C. Für die Professoren dürfte klar sein: 3 mal Weiß ist unmöglich, da dann niemand die Hand heben würde. Auch 2 mal Weiß / 1 mal Rot kommt nicht in Frage, da dann nur die beiden mit dem weißen Punkt die Hand heben.

Damit bleibt noch 1 mal Weiß / 2 mal Rot oder 3 mal Rot. In diesen Fällen heben alle die Hand.

A überlegt so: "Hätte ich einen weißen Punkt, so sähe jeder der beiden andern einen weißen und einen roten Punkt und weil Rot mindestens 2 mal vorkommen muss, wüssten sie dann sofort, dass sie es wären, die den roten Punkt hätten. Sie müssten also sofort die Hand hinunternehmen und die richtige Lösung nennen.

Da sie aber die Hand oben behalten, sehen sie beide, B und C, zwei rote Punkte, also hat A einen roten Punkt.

## Ableitung in der Logik, Herleitung

Unter einer Ableitung oder Herleitung versteht man in der mathematischen Logik eine formale Folgerung von neuen Aussagen aus einer Menge von gegebenen Aussagen. Die zulässigen Schlussregeln sind in einem Kalkül definiert.

Die einfache Anwendung einer solchen Regel auf Aussagen nennt man einen Ableitungsschritt.

Eine Aussage  $\phi$  heißt ableitbar oder beweisbar aus einer gegebenen Menge  $\Theta$  von Aussagen, wenn sie durch eine endliche Folge von Ableitungsschritten erreicht werden kann, wobei man von einer ggf. leeren Aussagenmenge  $\Theta$ , den Prämissen oder Annahmen, ausgeht. Fügt man alle ableitbaren Aussagen zur Aussagenmenge hinzu, d.h. man bildet den deduktiven Abschluss, so erhält man eine Theorie.

Beispiel:  $\Theta = \{\phi, \psi, \zeta\}$  sei als Aussagenmenge gegeben und eine Ableitungsregel des Kalküls sei

$$\phi, \psi / \phi \wedge \psi,$$

so können zum Beispiel  $\phi \wedge \omega$  und  $\zeta \wedge \psi \wedge \phi$  abgeleitet werden.

Bei der Ableitbarkeitsrelation, bzw. dem Ableitbarkeitsbegriff, handelt es sich um eine Relation zwischen einer Menge von Aussagen, den Prämissen, und einer einzelnen Aussage, der Konklusion.

Für die Ableitbarkeit wird oft das Symbol  $\vdash$  verwendet.  $\Theta \vdash \phi$  ist dabei zu lesen als: "aus  $\Theta$  ist  $\phi$  ableitbar".

Unterschiedliche Logiken definieren jeweils einen unterschiedlichen Ableitbarkeitsbegriff. So gibt es einen aussagenlogischen Ableitbarkeitsbegriff, einen prädikatenlogischen, einen intuitionistischen, einen modallogischen usw.

Obwohl es also unterschiedliche Ableitbarkeitsrelationen gibt, gibt es doch Eigenschaften, die den meisten Ableitbarkeitsrelationen gemeinsam sind:

Inklusion  $\Gamma \cup A \vdash A$ ; jede Annahme ist auch eine Folgerung

Idempotenz wenn  $\Gamma \vdash A$  und  $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ , dann  $\Gamma \vdash B$ ; durch Hinzunahme von Folgerungen zu den Annahmen erhält man keine neuen Folgerungen

Monotonie wenn  $\Gamma \vdash A$ , dann  $\Gamma \cup \Delta \vdash A$ ; Hinzufügen von Annahmen erhält die bisher möglichen Folgerungen

Kompaktheit Wenn  $\Gamma \vdash A$ , dann gibt es eine endliche Menge  $\Delta$  mit  $\Delta \in \Gamma$ , so dass  $\Delta \vdash A$ ; jede Folgerung aus einer unendlichen Annahmenmenge ist bereits aus einer endlichen Teilmenge zu erreichen

## Aussagenlogische Paradoxien

Paradoxien sind sprachliche Ausdrücke, welche scheinbare Widersprüche in sich beinhalten.

### Semantische Antinomien

Der Widerspruch entsteht durch Missbrauch der Sprache. Es wird nicht zwischen gewöhnlichen Aussagen und Aussagen über Aussagen unterschieden.

### Syntaktische Antinomien

Der Widerspruch entsteht durch rein formale Schlüsse, insbesondere durch die Verwendung der Element-Menge-Beziehung der klassischen Mengendefinition.

## Paradoxon des Epimenides

Epimenides war Philosoph um 600 v.u.Z.

**"Alle Kreter sind Lügner ... einer ihrer Dichter hat dies gesagt..."**

Paradoxon: Wenn der Dichter Kreter ist, dann hat er gelogen. Damit ist aber die Aussage falsch. Wenn er nicht gelogen hat, ist die Aussage aber auch falsch, da er ja Kreter ist.

Dieses Paradoxon wurde dem kretischen Dichter Epimenides von Eubulides von Milet von Clemens von Alexandria (150-215) "in den Mund gelegt". Epimenides soll in einen 57jährigen Schlaf gefallen sein. Dies inspirierte Goethe 1814 zu dem Festspiel "Des Epimenides Erwachen".

Das Paradoxon des Epimenides wird gern zur Konstruktion logischer Denkaufgaben genutzt.  
Aufgabe: Ein Kreter (K) lügt stets, ein Grieche (G) sagt stets die Wahrheit. Zwei Leibgardisten A und B stehen vor dem Königspalast Wache; jeder von ihnen kann ein K oder ein G sein. Da sie dieselbe Uniform tragen, weiß ein Höfling nicht, welcher Gruppe jeder angehört. Auf eine darauf zielende Frage antwortet A: "Mindestens einer von uns ist ein K." Was sind A und B?  
Lösung: Angenommen, A sei ein K, dann ist seine Aussage falsch, folglich wären beide ein G, was sich widerspricht. Also ist A ein G, d.h. seine Antwort ist korrekt und B ist damit ein G.

Ein Hinweis auf dieses Paradoxon findet sich auch im Neuen Testament, Titus 1,12:

"Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet: Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäuche. Dies Zeugnis ist wahr."

## Russelsche Antinomie

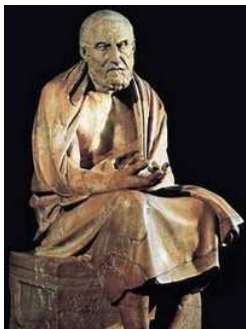
Das Barbier-Paradoxon ist eine Antinomie aus dem Bereich der Mengenlehre. In einer Stadt wohnt ein Mann und arbeitet als Barbier. Im Schaufenster seines Geschäfts hängt ein Schild mit folgendem Text:

**"Ich rasiere alle Männer dieser Stadt, die sich nicht selbst rasieren - und nur diese!"**

Die Männer, die sich selbst rasieren, darf der Barbier also nicht rasieren.

R ist die Menge aller Dorfbewohner, die der Friseur rasiert. Wenn der Friseur sich selbst rasiert, gehört er zu R. Weil er aber alle "Selbstrasierer" nicht rasieren darf, darf er sich nicht rasieren, gehört also doch nicht zu R. Dieser Widerspruch ist nicht aufzulösen.

## Poincaré-Russel-Antinomie



Poincaré "Über transfinite Zahlen":

"A sei die kleinste ganze Zahl, deren Definition mehr als hundert deutsche Worte erfordert.

A muss existieren, da man mit hundert Worten jedenfalls nur eine endliche Anzahl von Zahlen definieren kann. Die Definition, die wir eben von dieser Zahl gegeben haben, enthält aber weniger als hundert Worte. Und die Zahl A ist also definiert als undefinierbar."

## Paradoxon des Eubulides

Eubulides aus Milet (Mitte des 4.Jh. v.u.Z., Abbildung) war ein griechischer Philosoph und Logiker. Eubulides formulierte eine Vielzahl von Paradoxien. Das bekannteste Paradoxon ist

**"Dieser Satz ist falsch."**

Ist dieser Satz wirklich falsch, so ist seine Aussage richtig. Andernfalls, sollte der Satz falsch sein, so ist er wiederum richtig. Damit liegt ein Paradoxon vor.

## Sophismus vom Gehörnten

"Was du nicht verloren hast, das hast du noch. Hörner hast du nicht verloren. Daraus folgt: Du hast Hörner."

Der Sophismus beruht hier auf der Unbestimmtheit des Mittelbegriffes Verlust. Im Obersatz wird als Verlust das Verschwinden von etwas bezeichnet, das wir haben, im Untersatz wird unter Verlust der Nichtbesitz einer Sache verstanden.

Ein weiteres klassisches Paradoxon des Eubulides ist das vom Lügner.

"Wenn ich lügend sage, dass ich lüge, lüge ich oder sage ich Wahres?"

"Du sagst Wahres."

"Wenn ich Wahres sage und sage, dass ich lüge, lüge ich."

"Du lügst offenbar."

"Wenn ich aber lügnerisch sage, dass ich lüge, sage ich Wahres."

In späteren Versionen wird ausgesagt: "Wenn ein Lügner sagt, dass er lügt, dann bedeutet das, dass er sowohl lügt als auch die Wahrheit sagt. Denn wenn er die Wahrheit sagt, so lügt er, und wenn er lügt, so sagt er die Wahrheit."

### Semantische Antinomie des Proklos (um 450)

Protagoras lehrt einen Schüler die Rechte und trifft mit ihm die Verabredung, dass der Schüler die Studienkosten erst zu entrichten hat, nachdem er seinen ersten Prozess gewonnen hat. Da er nach dem Abschluss seiner Studien keine Prozess übernimmt, verklagt ihn Protagoras schließlich auf Zahlung der Kosten.

Er argumentiert: Gewinne ich den Prozess, so erhalte ich mein Geld auf Grund des Urteilspruches, verliere ich, so erhalte ich es aufgrund der früheren Verabredung.

Der Schüler argumentiert umgekehrt, dass er die Studienkosten in keinem Fall zu zahlen braucht, entweder wegen der getroffenen Verabredung oder aufgrund des richterlichen Urteilspruches.

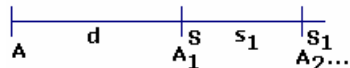
### Antinomie von Grelling (1908)

Man teile alle deutschen Adjektive in folgende zwei Klassen ein:

a) heterologische Adjektive, die nicht das sind, was sie bedeuten, z.B. das kurze Adjektiv "lang", das dreisilbige Adjektiv "zweisilbig" ...

b) autologische Adjektive, die das sind, was sie bedeuten, z.B. "kurz" oder "deutsch"

Die Frage, in welcher Klasse das Adjektiv "heterologisch" liegt, führt stets zu einem Widerspruch. Liegt es in a), müsste es aber in b) liegen, und umgekehrt.



### Paradoxie des Zenon: Achill und die Schildkröte

Problem: Wettlauf zwischen Achill A und der Schildkröte S: S habe d Vorsprung. Ist A an der Stelle A1 (Startposition von S) angelangt, so ist S doch bereits an der Stelle S1. Ist A an der Stelle A2 = S1 angelangt, so ist S doch bereits an der Stelle S2 usw. Wenn A also jeweils an der Stelle ist, wo S vorher war, so ist S immer wieder bereits eine Strecke weiter. Holt also Achill die Schildkröte nie ein??

Das berühmte Paradoxon lässt sich mit Hilfe der Formeln für unendliche

geometrische Reihen erklären:

Die Geschwindigkeit von A sei  $v_A$ , diejenige der Schildkröte sei  $v_S$  mit  $v_A > v_S$

A benötige für die Strecke d die Zeit  $t_1 = d / v_A$

$$\text{Strecke } s_1 = v_S \cdot t_1 = v_S / v_A \cdot d$$

A benötige für die Strecke  $s_1 = A1A2$  die Zeit  $t_2 = s_1 / v_A$

$$\text{Strecke } s_2 = v_S \cdot t_2 = v_S / v_A \cdot s_1$$

A benötige für die Strecke  $s_2 = A2A3$  die Zeit  $t_3 = s_2 / v_A$

$$\text{Strecke } s_3 = v_S \cdot t_3 = v_S / v_A \cdot s_2 \text{ und so weiter ...}$$

Also ist  $(s_n)$  eine geometrische Folge mit  $q = v_S / v_A < 1$ . Daher konvergiert die unendliche geometrische Reihe  $s = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$   $s = s_1 / (1 - q) = (v_S / v_A \cdot d) / (1 - v_S / v_A) = v_S \cdot d / (v_A - v_S)$

Dies stimmt mit der elementaren Berechnung der Gesamtzeit T überein, bis Achill die Schildkröte einholt:

$$v_A \cdot T = v_S \cdot T + d, \text{ also } T = d / (v_A - v_S)$$

Quelle: <http://www.mathematik.ch>

### Boolesche Algebra ( $B, \cup, \cap, -$ )

Eine Boolesche Algebra ist eine nichtleere Menge B mit den zweistelligen Verknüpfungen

$\cup$  und  $\cap$

und der einstelligen Verknüpfung - (Komplement-Bildung), die für beliebige Elemente a,b,c aus B erfüllt:

$$a \cup b = b \cup a$$

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$$

$$a \cup 0 = a$$

$$a \cup -a = 1$$

$$a \cap b = b \cap a$$

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup c$$

$$a \cap 1 = a$$

$$a \cap -a = 0$$

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

Eine Zuordnung  $B^n \rightarrow B$  heißt Boolesche Funktion von n Variablen

Besteht eine Boolesche Funktion aus Konjunktionen in disjunkter Form

$$(a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n) \cap (-a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup \dots) \cap \dots$$

so heißt sie konjunktive Normalform (KNF)

Jede Boolesche Funktion kann in eine konjunktive Normalform umgewandelt werden.

### Allgemeine Boolesche Algebra

Eine boolesche Algebra muss nicht notwendigerweise mit den Operationen  $\cup, \cap$  definiert werden.

Allgemein gilt auch:

### Axiome der Booleschen Algebra

Definition: Das 6-Tupel  $(B, +, *, \sim, 0, 1)$  heißt Boolesche Algebra, wenn folgende Axiome gelten:

1. B ist eine nicht leere Menge, genannt Trägermenge,  $0 \in B$  und  $1 \in B$  und  $0 \neq 1$ .
2. Die Operatoren  $+, *$  bezeichnen binäre,  $\sim$  bezeichnet eine unäre Operation auf der Trägermenge B.
3. Die Operatoren  $+, *$  sind kommutativ und assoziativ.
4. Die Operatoren  $+, *$  sind wechselseitig distributiv zueinander.
5. Für alle  $x \in B$  gilt  $x + \sim x = 1$  und  $x * \sim x = 0$
6. Für alle  $x \in B$  gilt  $x + 0 = x$  und  $x * 1 = x$

Aus diesen Axiomen folgen eine Reihe weiterer Sätze:

Satz 1: Die Operatoren  $+$ ,  $*$  sind idempotent, d.h. für alle  $x \in B$  gilt  $x+x = x*x = x$

Beweis: Es sei  $x \in B$  beliebig:

- $x+x = (x+x)*1 = (x+x)*(x+\sim x) = x+x*\sim x = x+0 = x$
- $x*x = (x*x)+0 = (x*x)+(x*\sim x) = x*(x+\sim x) = x*1 = x$

Satz 2: Für alle  $x \in B$  gilt  $x+1 = 1$  und  $x*0 = 0$

Beweis: Es sei  $x \in B$  beliebig:

- $x+1 = (x+1)*1 = (x+1)*(x+\sim x) = x+1*\sim x = x+\sim x*1 = x+\sim x = 1$
- $x*0 = (x+0)+0 = (x+0)+(x*\sim x) = x*0+\sim x = x*\sim x+0 = x*\sim x = 0$

Satz 3: Es gelten die Absorptionsgesetze: für alle  $x,y \in B$  gilt  $x*(x+y) = x+x*y = x$

Beweis:

$$x*(x+y) = (x+0)*(x+y) = x+0*y = x+y*0 = x+0 = x$$
$$x+(x*y) = (x*1)+(x*y) = x*(1+y) = x*(y+1) = x*1 = x$$

Satz 4: Jede endliche Boolesche Algebra ist zu einer Potenzmengenalgebra  $(P(M), \cup, \cap, -, \emptyset, M)$  isomorph.

Satz 5: In jeder Booleschen Algebra  $(B, +, *, \sim, 0, 1)$  ist für jedes Element das Komplement eindeutig bestimmt:

für alle  $x,y \in B$  gilt: aus  $x+y = 1$  und  $x*y = 0$  folgt  $y = x$

Beweis: Einerseits gilt  $y = y+0 = y+x*\sim x = (y+x)*(y+\sim x) = (x+y)*(y+\sim x) = 1*(y+\sim x) = (y+\sim x)*1 = y+\sim x$

andererseits  $\sim x = \sim x+0 = \sim x+x*y = (\sim x+x)*(\sim x+y) = (x+\sim x)*(y+\sim x) = 1*(y+\sim x) = y+\sim x$   
und insgesamt  $y = \sim x$

Satz 6: Es gelten die De Morganschen Gesetze für alle  $x,y \in B$  gilt  $\sim(x+y) = \sim x*y$  und  $\sim(x*y) = \sim x+\sim y$

Beweis: Nach Satz 5 genügt es zu zeigen:  $(x+y)+(\sim x*\sim y) = 1$  und  $(x+y)*(\sim x*\sim y) = 0$

$$(x+y)+(\sim x*\sim y) = ((x+y)+\sim x)*((x+y)+\sim y) = (x+\sim x+y)*(y+\sim y+x) = (1+y)*(1+x) = (y+1)*(x+1) = 1*1 = 1$$

$$(x+y)*(\sim x*\sim y) = (x*(\sim x*\sim y))+(y*(\sim x*\sim y)) = (x*\sim x*\sim y)+(y*\sim y*\sim x) = ((0*\sim y)+(0*\sim x)) = ((\sim y*0)+(\sim x*0)) = 0+0 = 0$$

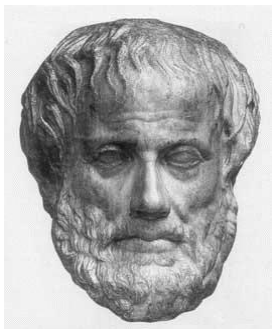
Der andere Teil der Behauptung wird analog bewiesen.

Satz 7: Doppelte Komplementbildung: für alle  $x \in B$  gilt  $\sim\sim x = x$

Satz 8: Die ausgezeichneten Elemente  $(0,1)$  sind wechselseitig komplementär. Es gilt:  $\sim 0 = 1$  und  $\sim 1 = 0$  in jeder Booleschen Algebra

Satz 9: In jeder Booleschen Algebra gilt: für alle  $x,y,z \in B$  gilt  $x+z = y+z$  und  $x*z = y*z \rightarrow x = y$

Satz 10: In jeder Booleschen Algebra gilt: für alle  $x,y,z \in B$  gilt  $x+z = y+z$  und  $x+\sim z = y+\sim z \rightarrow x = y$   
und für alle  $x,y,z \in B$  gilt  $x*z = y*z$  und  $x*\sim z = y*\sim z \rightarrow x = y$



### Geschichte der Logik

Als Begründer der Logik gilt Aristoteles. Besonders zu nennen ist seine Syllogistik, ein formales logisches System, in dem Argumente starrer Struktur, Syllogismen genannt, untersucht werden. Die Aussagen, die innerhalb von Syllogismen auftreten, setzen Begriffe zueinander in Beziehung (z.B. "Alles S ist P", d.h. alles, was unter den Begriff S fällt, fällt auch unter den Begriff P). Logische Systeme, in deren Aussagen Begriffe zueinander in Beziehung gesetzt werden, heißen Begriffslogiken.

Gleichfalls auf Aristoteles zurück geht die Lehre von einigen fundamentalen Grundsätzen menschlichen Denkens. Hierzu zählen der Satz vom Widerspruch und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

In verschiedenen anderen Werken (in *De interpretatione* und der 2. *Analytik*) hat sich Aristoteles zudem mit zentralen sprachphilosophisch-logischen Termini wie Urteil und Begriff und mit allgemeinen Regeln des Beweisens und des Widerlegens beschäftigt. Durch Arbeiten von Łukasiewicz ab 1923 und Mates ab 1949 weiß man, dass schon die Stoa eine voll ausgearbeitete Junktorenlogik hatte. In mittelalterlichen Universitäten hatte die Logik ihren Platz in der sogenannten "Artistenfakultät" (*facultas artium*). Das Studium der *artes* ist Voraussetzung für das Studium an allen anderen Fakultäten. Ab etwa der Mitte des 13. Jahrhunderts umfasst der Unterrichtsstoff der Logik drei separate Textkorpora. Bei der *logica vetus* und der *logica nova* handelt es sich um überlieferte logische Schriften, insbesondere das *Organon* des Aristoteles und die Kommentare des Boëthius und des Porphyrius.

Die *parva logicalia* kann man als Eigenschöpfung der mittelalterlichen Logik ansehen. Hier werden abseits der antiken Vorlagen eine ganze Reihe von neuen Problemstellungen aus dem Grenzbereich zwischen



Logik und Semantik entwickelt und in voneinander unabhängigen Traktaten diskutiert. Einige gängige Traktattypen sind

*De proprietatibus terminorum* befasst sich mit den Eigenschaften der materialen (nicht-logischen) Termini.

*De syncategorematicis* untersucht dagegen die formalen, d.h. logischen Ausdrücke.

*De suppositio terminorum* formuliert die mittelalterliche Suppositionstheorie

Bei *De consequentiis* geht es um Folgerungen.

*De insolubilibus* hat Paradoxien und Trugschlüsse zum Gegenstand.

*De Relativis* befasst sich mit den Eigenschaften anaphorischer Ausdrücke.

*De Modalibus* untersucht Modal-Ausdrücke.

Bei *De Obligationibus* geht es um die logischen Bedingungen eines kohärenten Disputs

## Bedeutende Logiker

Aristoteles: in der *Analytica Priora* Entwicklung der bis ins 19. Jh. verwendeten Syllogistik, einer Vorform der Prädikatenlogik

Cicero (106-43 v.u.Z.): er übernahm von Aristoteles die Lehre von der Logik und übertrug sie als *Ars logica* ins Lateinische: *De finibus bonorum et malorum*

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): Erste Ansätze zu einer symbolischen Logik

George Boole (1815-1864): Entwicklung der Algebra

Georg Cantor (1845-1918): Entwicklung der Mengenlehre

Gottlob Frege (1848-1925): Entwicklung der modernen Aussagen- und Prädikatenlogik

Edmund Husserl (1859-1938): Kritik des Psychologismus in der Logik

Bertrand Russell (1872-1970): Russellsche Antinomie

Kurt Gödel: Vollständigkeit der Prädikatenlogik. Unvollständigkeit der Peano-Arithmetik

## Klassische Logik

Von klassischer Logik spricht man, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Jede Aussage hat genau einen von genau zwei Wahrheitswerten, die meist als wahr und falsch bezeichnet werden. (Prinzip der Zweiwertigkeit oder Bivalenzprinzip)

Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen und die Art, wie diese zusammengesetzt sind, bestimmt. (Prinzip der Extensionalität oder Kompositionalität).

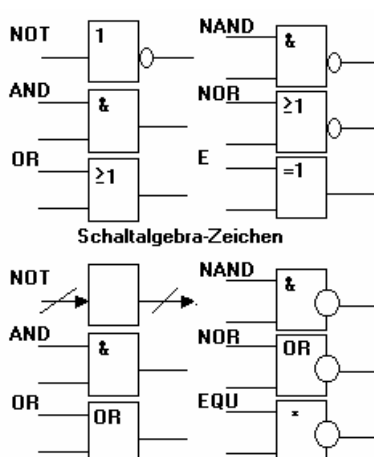
Der Begriff klassische Logik ist im Sinn von grundlegender Logik zu verstehen.

Die wichtigsten Teilgebiete der formalen klassischen Logik sind die klassische Aussagenlogik, Prädikatenlogik der ersten Stufe und höherer Stufe sowie Stufenlogik.

In der Aussagenlogik werden Aussagen daraufhin untersucht, ob sie ihrerseits wieder aus Aussagen zusammengesetzt sind, die durch Junktoren (z.B. "und", "oder") miteinander verbunden sind. Besteht eine Aussage nicht aus durch Junktoren verbundenen Teilaussagen, dann ist sie aus Sicht der Aussagenlogik atomar, d.h. nicht weiter zerlegbar.

In der Prädikatenlogik lässt sich auch die innere Struktur von Sätzen darstellen, die aussagenlogisch nicht weiter zerlegbar sind. Der Unterschied zwischen Prädikatenlogik der ersten Stufe und Prädikatenlogik höherer Stufe besteht darin, worüber mittels der Quantoren ("alle", "mindestens ein") quantifiziert wird: In der Prädikatenlogik erster Stufe wird nur über Individuen quantifiziert, in der Prädikatenlogik höherer Stufe wird auch über Prädikate selbst quantifiziert.

Formal bedarf die Prädikatenlogik einer Unterscheidung zwischen verschiedenen Ausdruckskategorien wie Termen, Funktoren, Prädikatoren und Quantoren. Diese wird in der Stufenlogik, einer Form des typisierten Lambda-Kalküls, überwunden. Dadurch wird zum Beispiel die mathematische Induktion eine gewöhnliche, ableitbare Formel.



## Schaltsymbole der Aussageoperationen

## Arithmetik

wörtlich: zum Zählen gehörend.

Das Wort stammt von dem griechischen  $\alpha\rho\iota\tau\eta\mu\epsilon\tau\iota\kappa\epsilon$ , das die beiden Wörter  $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$  = arithmos (Zahl) und  $\tau\epsilon\chi\nu\eta$  = techne (Kunst) miteinander verbindet.

Die Arithmetik umfasst die Kenntnisse der Zahlen und des Rechnens.

Im Mittelalter wurde die Arithmetik oft in Form einer Frauengestalt dargestellt.

Links ist die "Arithmetik" des Pinturicchio (1494) zu sehen. Das Gemälde befindet sich in den Räumen der Borgia im Vatikanischen Palast.



## Intervalle, Mengen

Eine zusammenhängende Menge reeller Zahlen mit den Endpunkten  $a$  und  $b$ , wobei  $a < b$  ist, wird Zahlenintervall mit den Endpunkten  $a$  und  $b$  genannt. Wenn der Endpunkt nicht selbst zum Intervall gehört, spricht man vom offenen Intervallende, im entgegengesetzten Falle vom abgeschlossenen Intervallende.



### Abgeschlossenes Intervall

$[a, b]$  oder  $\langle a, b \rangle$  ...Menge aller reellen Zahlen  $x$  mit  $a \leq x \leq b$



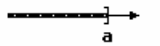
### Offenes Intervall

$(a, b)$  oder  $]a, b[$  ...Menge aller reellen Zahlen  $x$  mit  $a < x < b$



### Links offenes Intervall

$(a, b]$  oder  $]a, b]$  ...Menge aller reellen Zahlen  $x$  mit  $a < x \leq b$



$(-\infty, a]$  ...Menge aller reellen Zahlen  $x$  mit  $x \leq a$



### Rechts offenes Intervall

$[a, b)$  oder  $[a, b[$  ...Menge aller reellen Zahlen  $x$  mit  $a \leq x < b$



$[a, -\infty)$  ...Menge aller reellen Zahlen  $x$  mit  $a \leq x$

Links offene und rechts offene Intervalle werden auch halboffen genannt.

Nach DIN 1302 ist die Verwendung der Symbole "(", ")" für offene und "[", "]" für geschlossene Intervallenden vorgeschrieben.

## Unendliches Intervall

Das Intervall  $(-\infty, +\infty)$  oder auch  $-\infty < c < \infty$  heißt unendliches Intervall.

## Rechnen mit Intervallen

Bei numerischen Rechnungen wird mit einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen gerechnet. Mitunter werden eine obere und eine untere Schranke, d.h. ein Intervall, angegeben, zwischen denen sich der exakte Wert mit Sicherheit befindet. Diese Intervalle müssen bei Rechnungen entsprechend verändert werden.

### Intervall

$$\tilde{a} = [\underline{a}_{\text{unten}}, \overline{a}_{\text{oben}}] = \{ a \mid a \in \mathbf{R}, \underline{a}_{\text{unten}} \leq a \leq \overline{a}_{\text{oben}} \}$$

Addition

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{c} = [\underline{a}_{\text{unten}} + \underline{b}_{\text{unten}}, \overline{a}_{\text{oben}} + \overline{b}_{\text{oben}}]$$

Subtraktion

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \tilde{c} = [\underline{a}_{\text{unten}} - \overline{b}_{\text{oben}}, \overline{a}_{\text{oben}} - \underline{b}_{\text{unten}}]$$

Multiplikation

$$\tilde{a} * \tilde{b} = \tilde{c} = [\underline{c}_{\text{unten}}, \overline{c}_{\text{oben}}]$$

$$\underline{c}_{\text{unten}} = \text{Minimum}(\underline{a}_{\text{unten}}\underline{b}_{\text{unten}}, \underline{a}_{\text{unten}}\overline{b}_{\text{oben}}, \overline{a}_{\text{oben}}\underline{b}_{\text{unten}}, \overline{a}_{\text{oben}}\overline{b}_{\text{oben}})$$

$$\overline{c}_{\text{oben}} = \text{Maximum}(\underline{a}_{\text{unten}}\underline{b}_{\text{unten}}, \underline{a}_{\text{unten}}\overline{b}_{\text{oben}}, \overline{a}_{\text{oben}}\underline{b}_{\text{unten}}, \overline{a}_{\text{oben}}\overline{b}_{\text{oben}})$$

Division

$$\tilde{a} / \tilde{b} = \tilde{c} = [\underline{c}_{\text{unten}}, \overline{c}_{\text{oben}}]$$

$$\underline{c}_{\text{unten}} = \text{Minimum}(\underline{a}_{\text{unten}}/\underline{b}_{\text{unten}}, \underline{a}_{\text{unten}}/\overline{b}_{\text{oben}}, \overline{a}_{\text{oben}}/\underline{b}_{\text{unten}}, \overline{a}_{\text{oben}}/\overline{b}_{\text{oben}})$$

$$\overline{c}_{\text{oben}} = \text{Maximum}(\underline{a}_{\text{unten}}/\underline{b}_{\text{unten}}, \underline{a}_{\text{unten}}/\overline{b}_{\text{oben}}, \overline{a}_{\text{oben}}/\underline{b}_{\text{unten}}, \overline{a}_{\text{oben}}/\overline{b}_{\text{oben}})$$

$$\text{Bedingung: } \underline{a}_{\text{unten}}, \underline{b}_{\text{unten}}, \overline{a}_{\text{oben}}, \overline{b}_{\text{oben}} > 0$$

## Grundrechenoperationen

### Axiome der natürlichen Zahlen (Peano 1891):

1. 0 ist eine natürliche Zahl
2. Jede Zahl  $n$  hat genau einen Nachfolger  $n'$
3. 0 ist nicht Nachfolger einer Zahl
4. Jede Zahl ist Nachfolger höchstens einer Zahl
5. (Induktionsaxiom) Von allen Mengen, die die Zahl 0 und mit der Zahl  $n$  auch deren Nachfolger  $n'$  enthalten, ist die Menge  $N$  der natürlichen Zahlen die kleinste.

Anmerkung: Peano selbst hat die 0 nicht als natürliche Zahl gesehen. Auf Grund der Entwicklung der Algebra (Gruppen- und Ringtheorie) wird die Null heute zu den natürlichen Zahlen gezählt. Andersartige, immer wieder vorkommende, Veröffentlichungen sind algebraisch nicht begründbar.

Anmerkung 2: Nach dem Werk "Assiomi di Peano" [da Peano G., Formulario Mathematico, Fratelli Bocca {indicato sul frontespizio come Fratres Bocca} Editore, Torino 1908, pag. 21]) soll Peano

„Zero es numero“

formuliert haben. Bis heute konnte nicht geklärt werden, ob die Null für Peano vielleicht doch die erste natürliche Zahl war.

In dem für die Mathematik fundamentalen Werk "Moderne Algebra" nennt van der Waerden als erstes Axiom:

1. 1 ist eine natürliche Zahl  
und schließt die Null damit aus.

Aus den Axiomen ergibt sich der für die mathematische Induktion wichtige Satz: Jede nichtleere Menge von natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl, d.h. eine solche, die kleiner ist als alle anderen Zahlen der Menge.

### Archimedisches Grundgesetz

Ist  $a$  eine positive Zahl, so gibt es stets eine natürliche Zahl  $n$  mit  $n > a$ . Sind  $a$  und  $b$  zwei positive Zahlen, so gibt es stets eine natürliche Zahl  $n$  mit  $a \cdot n > b$ .

### Nachfolger

Von zwei Elementen  $n$  und  $m$  ist  $m$  Nachfolger von  $n$  ( $n, m \in \text{Zahlenbereich}$ ), wenn  $n < m$ . Es existiert keine Zahl  $x$  mit:  $n < x < m$  (auch:  $m = n + 1$  für natürliche Zahlen).

**Vorgänger** ... Von zwei Elementen  $n$  und  $m$  ist  $m$  Vorgänger von  $n$  ( $n, m \in \text{Zahlenbereich}$ ), wenn  $m < n$ . Es existiert keine Zahl  $x$  mit:  $m < x < n$ .

**Variable** ... Buchstaben oder andere Zeichen, für die Zahlen aus einer vorgegebenen Grundmenge eingesetzt werden können. (Platzhalter)

**Term** ... mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen oder Variablen besteht  
Term ist der Oberbegriff für Zahlen und kompliziertere mathematische Ausdrücke, die keine Gleichheits- oder Relationszeichen enthalten. Sind  $S$  und  $T$  Terme, so auch  $S \wedge T$  und  $S \vee T$ ; ist  $S$  ein Term, so auch  $\neg S$ . Ist  $S$  ein Term, so ist  $S$  auch eine Formel.

**Formel** ... Zeichen des Alphabetes, die auch, mehrfach, mit Indizes oder Exponenten, aus dem Alphabet, versehen sein dürfen. Sind  $S$  und  $T$  Terme, so sind  $S \rightarrow T$  und  $S \Leftrightarrow T$  Formeln. Sind  $A$  und  $B$  Formeln, so auch  $A \rightarrow B$ ,  $A \Leftrightarrow B$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ; ist  $A$  eine Formel, so auch  $\neg A$ .

*„Deinde multiplicationis et divisionis praecepta aliquanto plus requirunt diligentiae, sed tamen causae cito perspici possunt ab attentis. Exercitationem et usum requirit haec ars, ut aliae omnes.“*

*„Die Regeln des Vervielfachens und Teilens schließlich erfordern viel mehr Fleiß, aber bei einiger Anstrengung können sie doch bald begriffen werden. Wie alle anderen Künste verlangt auch diese Kunst Übung und Gebrauch.“*

*Philipp Melanchthon*

### Rechenoperationen 1.Stufe

Addition  $a + b = c$   
Subtraktion  $a - b = c$

Summand + Summand = Summe  
Minuend - Subtrahend = Differenz

### 2.Stufe

Multiplikation  $a * b = c$   
alte Bezeichnung:  
Division  $a : b = c, b \neq 0$

Faktor \* Faktor = Produkt  
Multiplikand \* Multiplikator = Produkt  
Dividend : Divisor = Quotient

### 3.Stufe

Potenzieren  $a^b = c$   
Radizieren  $b\sqrt{a} = c$   
Logarithmieren  $\log_a b = c$

Basis<sup>Exponent</sup> = Potenz  
Wurzelexponent  $\sqrt{\text{Radikand}}$  = Wurzel  
 $\log_{\text{Basis}} \text{Numerus}$  = Logarithmus

Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division werden als Grundrechenarten bezeichnet.

### Hierarchie der Rechenoperationen

Operationen höherer Stufen werden zuerst ausgeführt

**"Punktrechnung geht vor Strichrechnung"**

**"Punkte binden mehr als Striche"**

Punktrechnung Multiplikation und Division

Strichrechnung Addition und Subtraktion

Wichtig: Klammerausdrücke sind stets vor der weiteren Beachtung von Punkt- und Strichrechnung auszuwerten.

### Addition

Bei einer Addition (lat. additio = Hinzufügung) werden zwei Zahlen so zusammengefasst, dass das Ergebnis genauso viele Einheiten besitzt wie die beiden gegebenen Zahlen zusammen.

Das Ergebnis einer Addition ist die Summe. Die zu addierenden Zahlen oder Terme heißen Summanden. Das mathematische Symbol der Addition ist das Pluszeichen «+». Die Umkehroperation der Addition ist die Subtraktion.

### Subtraktion

Die Subtraktion (lat. subtractio = Verminderung) ist die Umkehrrechnungsart der Addition. Bei einer Subtraktionsaufgabe  $a-b$  von den gegebenen  $a$  Einheiten  $b$  Einheiten entfernt. Während die Addition im Bereich der natürlichen Zahlen unbeschränkt ausführbar ist, ist das bei der Subtraktion nicht der Fall.

### Grundgesetze der Addition

1. Zu jedem Paar von Zahlen  $a$  und  $b$  gibt es genau eine dritte Zahl, die die Summe von  $a$  und  $b$  genannt und mit  $a+b$  bezeichnet wird;  $a, b$  heißen Summanden.
2. Kommutativität der Addition  $a + b = b + a$
3. Assoziativität der Addition  $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Monotonie der Addition aus  $a < b$  folgt  $a + c < b + c$

### Grundgesetze der Multiplikation

1. Zu jedem Paar von Zahlen  $a$  und  $b$  gibt es genau eine dritte Zahl, die das Produkt von  $a$  und  $b$  genannt und mit  $a*b$  bezeichnet wird;  $a, b$  heißen Faktoren.
2. Kommutativität der Multiplikation  $a * b = b * a$
3. Assoziativität der Multiplikation  $(a * b) * c = a * (b * c)$
4. Distributivität der Multiplikation  $(a + b) * c = a * c + b * c$
5. Monotonie der Multiplikation aus  $a < b$  und  $c > 0$  folgt  $a * c < b * c$

### Division

Die Division (lat. divisio = Teilung) ist die Umkehrrechnungsart der Multiplikation. Während die Multiplikation im Bereich der natürlichen Zahlen unbeschränkt ausführbar ist, ist das bei der Division nicht der Fall.

Grundsätzlich unmöglich ist die Division mit Null und das in jedem Zahlenbereich!

### Ausführbarkeit von Rechenoperationen

Innerhalb der Zahlenbereiche gilt für Ausführbarkeit der Grundrechenoperationen:

	Addieren	Subtrahieren	Multiplizieren	Dividieren (außer durch 0)
N	ja	nein	ja	nein
Z	ja	ja	ja	nein
Q	ja	ja	ja	ja
R	ja	ja	ja	ja

### Umgekehrte Polnische Notation

Zur schnellen Verarbeitung mathematischer Terme eignet sich eine besondere Schreibweise, die sogenannte umgekehrte polnische Notation (auch Postfixschreibweise). Diese wurde von dem polnischen Mathematiker Lukasiewicz Anfang des 20. Jahrhunderts eingeführt. Das Prinzip besteht darin, die Operatoren erst nach den Operanden zu schreiben und nicht wie in der üblichen Infixschreibweise zwischen den Operanden. Der Vorteil liegt darin, dass man keine Prioritätsvereinbarungen treffen muss sowie vollständig auf Klammern verzichten kann.

Zum Beispiel wird die Aufgabe  $7 + 4 * (3 - 2)$  in UPN-Schreibweise zu  $7 4 3 2 - * +$ , dagegen  $(7 + 4) * 3 - 2$  zu  $7 4 + 3 * 2 -$ . Für den AOS-Term  $((3+A)*B-C/4+5)*D$  ergibt sich in umgekehrter polnischer Notation  $3 A + B * C 4 / 5 + - D *$ .

$$\begin{array}{r}
 2, 3 5 6 9 2 7 5 \\
 + 1, 4 7 8 5 3 6 4 \\
 \hline
 3, 8 3 5 4 6 3 9 \\
 \\
 1, 9 8 4 3 7 \\
 + 2, 7 9 5 7 2 \\
 \hline
 4, 7 8 0 0 9
 \end{array}$$

### Schriftliche Addition

Das Verfahren der schriftlichen Addition wird üblicherweise von rechts nach links durchgeführt.

Sind nur zwei Summanden vorhanden, so ist es vorteilhaft, die Rechnung auf der linken Seite zu beginnen, da der Übertrag aus der nächstfolgenden Vertikalreihe höchstens gleich 1 sein kann. Ob dieser Übertrag 1 vorhanden ist, kann in der Regel ohne besondere Rechnung durch einen Blick auf die nächste Vertikalreihe festgestellt werden.

Beispiel (obere Rechnung)

Man beginnt links mit  $2 + 1$  und stellt fest, dass die nächste Vertikalreihe  $3 + 4$  keinen Übertrag ergibt. Bei dieser Vertikalreihe ist aus der Kolonne  $5 + 7$  der Übertrag 1 zu übernehmen und man erhält somit 3,8... usw.

Bei dem zweiten Beispiel wird dieses Verfahren komplizierter. Hier ist es besser von rechts nach links zu rechnen.

Historisch gesehen wurde durch al-Hwarizmi das Verfahren von links nach rechts empfohlen, denn so wäre es nützlicher und leichter. Auch Gauß praktizierte dieses Verfahren.

In den deutschen Grundschulen wird stets von rechts nach links gerechnet. Dies wird so automatisiert, dass der mathematische Grund für einen Übertrag dem Schüler kaum noch klar wird.

### Das kleine Ein-Mal-Eins

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

### Das große Ein-Mal-Eins

	11	12	13	14	15	16	17	18	19
11	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	209	228	247	266	285	304	323	342	361

### Verfahren der schriftlichen Multiplikation

Sollen mehrstellige Zahlen multipliziert werden, so gibt es schriftliche Rechenverfahren. Auf dieser Seite werden am Beispiel  $896 \cdot 271$  verschiedene Methoden zur schriftlichen Multiplikation dargestellt.

#### Standardmethode

$$\begin{array}{r}
 896 \cdot 271 \\
 1792 \\
 6272 \\
 896 \\
 \hline
 242816
 \end{array}$$

Verfahren: 3 mal multiplizieren, 6 mal addieren

Hintergrund:  $896 \cdot 271 = (800 + 90 + 6) \cdot 271 = 800 \cdot 271 + 90 \cdot 271 + 6 \cdot 271$

$$\begin{array}{r}
 896 \cdot 271 \\
 896 \\
 6272 \\
 1792 \\
 \hline
 242816
 \end{array}$$

älteres Verfahren

$$\begin{array}{r}
 896 \cdot 271 \\
 1626 \\
 2439 \\
 2168 \\
 \hline
 242816
 \end{array}$$

selten genutzte Form

$$\begin{array}{r}
 896 \\
 \times 271 \\
 \hline
 1626 \\
 2439 \\
 2168 \\
 \hline
 242816
 \end{array}$$

englische Schreibweise

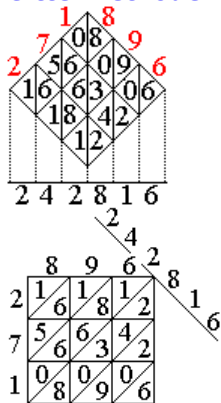
### Russische, abessinische Bauernmultiplikation

Gerade Zahlen werden gestrichen, denn die abessinischen Bauern sagen: Gerade Zahlen bringen Unglück. Diese Methode heißt auch russische Bauernmethode.

8	9	6	2	7	1	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>6</del>	<del>2</del>	<del>7</del>	<del>1</del>					
4	4	8	5	4	2	<del>4</del>	<del>4</del>	<del>8</del>	<del>5</del>	<del>4</del>	<del>2</del>					
2	2	4	1	0	8	4	<del>2</del>	<del>2</del>	<del>4</del>	<del>1</del>	<del>0</del>	<del>8</del>	<del>4</del>			
1	1	2	2	1	6	8	<del>1</del>	<del>1</del>	<del>2</del>	<del>2</del>	<del>1</del>	<del>6</del>	<del>8</del>			
	5	6	4	3	3	6	<del>5</del>	<del>6</del>	<del>4</del>	<del>3</del>	<del>3</del>	<del>6</del>				
	2	8	8	6	7	2	<del>2</del>	<del>8</del>	<del>8</del>	<del>6</del>	<del>7</del>	<del>2</del>				
	1	4	1	7	3	4	4	<del>1</del>	<del>4</del>	<del>1</del>	<del>7</del>	<del>3</del>	<del>4</del>	<del>4</del>		
	7		3	4	6	8	8	7		3	4	6	8	8		
	3		6	9	3	7	6	3		6	9	3	7	6		
	1		1	3	8	7	5	2	1		1	3	8	7	5	2
			<u>2</u>	<u>4</u>	<u>2</u>	<u>8</u>	<u>1</u>	<u>6</u>			<u>2</u>	<u>4</u>	<u>2</u>	<u>8</u>	<u>1</u>	<u>6</u>

1) 9 mal halbieren ohne Rest und 9 mal verdoppeln  
 2) 7 Zeilen mit geraden Zahlen in der 1. Spalte streichen  
 3) 6 mal addieren  
 Hintergrund:  $896 \cdot 271 = (512 + 256 + 128) \cdot 271 = (2^9 + 2^8 + 2^7) \cdot 271 = 2^9 \cdot 271 + 2^8 \cdot 271 + 2^7 \cdot 271 = 34688 + 69376 + 138752 = 242816$ . Der erste Faktor wird zur Dualzahl. Die Multiplikation wird auf Halbieren und Verdoppeln zurückgeführt.

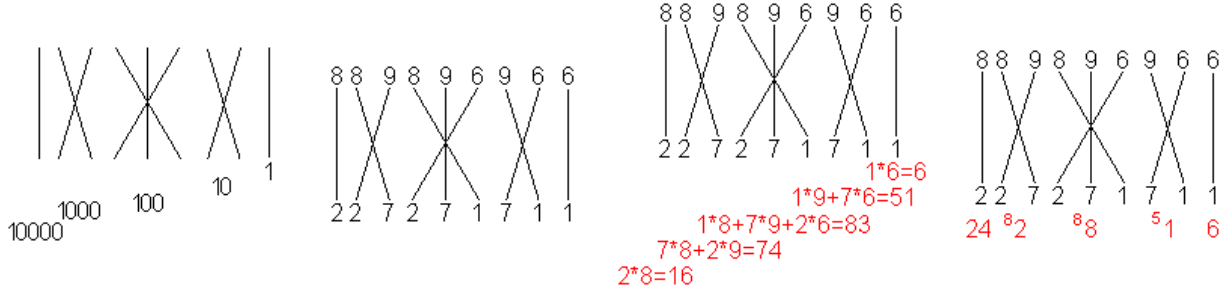
### Gittermethode nach Neper



Verfahren (linke Abbildung):  
 9 mal multiplizieren, die Ergebnisse werden in die kleinen Quadrate geschrieben, erneut 6 mal addieren  
 Hintergrund:  $896 \cdot 271 = (800 + 90 + 6) \cdot (200 + 70 + 1) = 8 \cdot 2 \cdot 10.000 + 8 \cdot 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 1 \cdot 100 + 9 \cdot 2 \cdot 1000 + 9 \cdot 7 \cdot 100 + 9 \cdot 1 \cdot 10 + 6 \cdot 2 \cdot 100 + 6 \cdot 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ .

Die zweite Abbildung zeigt eine veränderte Form dieses Verfahrens

### Kreuzmethode



Stelle die folgende Figur bereit und ordne jeder Teilfigur eine Stelle zu.

Beschrifte die Enden der Strecken mit entsprechenden Ziffern. Das Produkt heißt 896 \* 271

Bilde aus den Zahlen die unten stehenden Terme und berechne sie. Merke dir die Terme und die Ergebnisse.

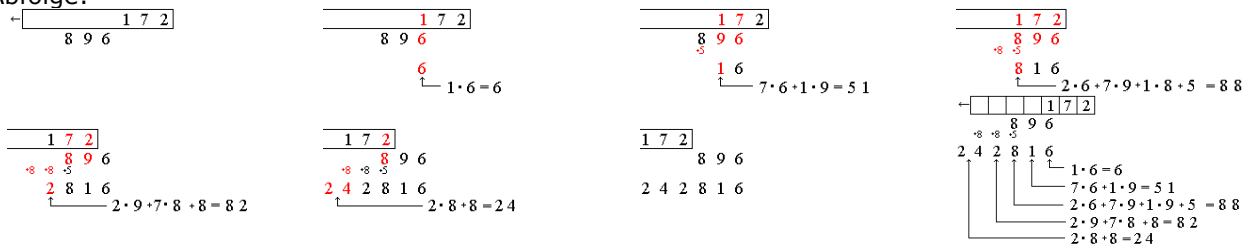
Notiere die Ergebnisse wie bei der schriftlichen Addition und beachte dabei den Übertrag. Schreibe bei dieser Methode nur diese Anordnung hin

Hintergrund:  $896 \cdot 271 = (800 + 90 + 6) \cdot (200 + 70 + 1) = 8 \cdot 2 \cdot 10.000 + 8 \cdot 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 1 \cdot 100 + 9 \cdot 2 \cdot 1000 + 9 \cdot 7 \cdot 100 + 9 \cdot 1 \cdot 10 + 6 \cdot 2 \cdot 100 + 6 \cdot 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ .

### Streifenmethode mit Faktorentransport

Streifen mit der Kehrzahl des 2. Faktors beschriften, Streifen verschieben, multiplizieren und addieren.  
 Hintergrund:  $896 \cdot 271 = (800 + 90 + 6) \cdot (200 + 70 + 1) = 8 \cdot 2 \cdot 10.000 + 8 \cdot 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 1 \cdot 100 + 9 \cdot 2 \cdot 1000 + 9 \cdot 7 \cdot 100 + 9 \cdot 1 \cdot 10 + 6 \cdot 2 \cdot 100 + 6 \cdot 7 \cdot 10 + 6 \cdot 1$ .

Abfolge:



→ halbieren  
 ← verdoppeln

### Vedische Multiplikation

Dieses Verfahren stammt aus Indien und eignet sich immer dann zu einer Multiplikation auch großer Faktoren, wenn diese knapp unter derselben Zehnerpotenz liegen. Dem Rechenweg liegt folgende Beziehung zugrunde:

II I  
 X V  
 XX X  
 C L  
 CC C  
 M D  
 MM M

a und b seien zwei Zahlen dicht unterhalb einer Zehnerpotenz  $10^n$  und  $a^*$  bzw.  $b^*$  die Differenzen hierzu. Dann ist

$$a \cdot b = (10^n - a^*) \cdot (10^n - b^*) = (10^n - a^* - b^*) 10^n + a^* b^* = (a - b^*) 10^n + a^* b^*$$

Falls  $a^* b^* < 10^n$  ist, kann man die beiden Zifferfolgen von  $(a - b^*)$  und  $a^* b^*$  einfach nebeneinander schreiben, um so zur Lösung der Multiplikation zu gelangen. Dabei müssen führende Nullen des zweiten Terms mitgeschrieben werden. Die Vertauschung der Faktoren ergibt das gleiche Ergebnis.

Beispiel:  $95 \cdot 97 = 9215 = (95 - 3) \cdot 10^2 + 5 \cdot 3$   
 $992 \cdot 998 = 980096 = (992 - 12) \cdot 10^3 + 8 \cdot 12$

IV II  
 XL XX  
 CD CC  
 VIII IV  
 LXXX XL  
 DCCC CD

### Multiplikation römischer Zahlen

Römische Zahlen erweisen sich beim Multiplizieren als sehr schwierig, was viele Jahrhunderte lang die Kaufleute beim Rechnen behindert hat. Dies liegt daran, dass das römische Zahlensystem kein Stellenwertsystem ist.

Da die russische Bauernmultiplikation mit Verdoppeln bzw. Halbieren der Faktoren die Stellenwerte nicht nutzt, ist das Verfahren auf römische Zahlen anwendbar.

Wichtige Verdopplungen und Halbierungen sind links abgebildet. In den Beispielen werden die zu addierenden Zeilen mit \* markiert.

Beispiel 1:  $12 \times 152 = 1824$

	XII	×	CL II	
	VI		CCC IV	
*	III		DC V III	
*	I		MCC X V I ...	= MDCCCXXIV

Beispiel 2:  $14 \times 17 = 238$

	XIV	×	XV II	
*	VII		XXX IV	
*	III		LX V III	
*	I		CXX X VI	
	= C + L + 7×X = CCXX			
	+ 3×V + (4-1)×I = XVIII ... = CCXXXVIII			

Quelle: Manfred Boergens, [http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/problem/problem052/problem052\\_roemische\\_zahlen.htm](http://www.fh-friedberg.de/users/boergens/problem/problem052/problem052_roemische_zahlen.htm)



### Multiplikation mit der Viertelquadrat-Methode

Eine sehr interessante Multiplikationsmethode ist die Viertelquadrat-Methode, die auch in Europa eine Weile in Gebrauch war. Sie verschwand erst, als es mittels dekadischer Logarithmentafeln möglich wurde, in einfacher Weise aufwändige Multiplikationen in bequemere Additionen von Logarithmen umzuformen. Die Viertelquadrat-Methode arbeitet mittels der Beziehung

$$a \cdot b = 1/4 (a + b)^2 - 1/4 (a - b)^2$$

Die benötigten Tabellenwerte können aber sehr viel leichter berechnet werden als Logarithmen.

Offensichtlich erreicht auch diese Methode ein Ersetzen der Multiplikation durch drei Strichrechnungen: eine Addition und zwei Subtraktionen. Sie erspart nicht ganz so viel Arbeit wie die Benutzung logarithmischer Tafelwerke.

Viertelquadrat-Methode - Beispiel  $27 \cdot 15 = 405$

- 1) man benötigt eine Tabelle, in der für alle Zahlen eines bestimmten Bereichs die Viertelquadrate notiert worden sind
- 2) die beiden gegebenen Faktoren werden aus praktischen Gründen sortiert, die größte zuerst, hier: 27 und 15
- 3) man bildet zuerst die Summe der beiden beteiligten Zahlen und dann ihre Differenz, hier: 42 und 12
- 4) für beide entstandene Zwischenergebnisse schlägt man nun die zugehörigen Viertelquadrate nach, hier: 441 und 36
- 5) zuletzt wird die Differenz gebildet, sie liefert das gewünschte Produkt, hier: 405

Überraschend ist, dass dieses Verfahren schon im Zweistromlandgebiet bekannt und verbreitet war. Funde belegen die Existenz der notwendigen Tabellenwerke in der Form von Tontafeln.

## Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation

### Aufgabe 1: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen ohne Übertrag

121·4	2314·2	12 132·2	134 402·2	312·20	1223·30
223·3	1221·4	31221·3	213 321·3	212·40	2443·20
212·4	2212·3	21211·4	210 101·4	404·20	21 221·40
313·3	3432·2	11001·5	111 011·5	333·30	42 442·20

### Aufgabe 2: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen mit Übertrag

123·4	213·4	2316·3	12 733·2	101 312·4	110 171·50
204·3	312·5	1744·2	10 318·5	213 461·2	405 424·20
612·3	609·7	3101·7	21 370·7	103 204·5	107 411·20
811·5	817·4	2709·7	30 972·8	290 004·7	213 673·50
972·4	944·6	4817·6	41 271·9	145 400·9	489·219·60

### Aufgabe 3: Schriftliche Multiplikation

76·110	290·53	500·72	138·66	8·63·9	73·5·13
11·482	65·278	8·9712	2001·731	32·5·16	24·36·7
139·13	282·42	6000·43	111·1078	101·5·16	91·0·67
63·160	610·73	2222·179	4040·2135	4·144·25	8·2712·125
47·209	927·0	0·9999	25 000·123	250·3912·40	500·897·200

### Aufgabe 4: Textaufgaben

- Irene hat im Jahr insgesamt 13 Wochen schulfrei. In der restlichen Zeit fährt sie 5 Tage in der Woche die 8 km zur Schule und wieder zurück mit dem Bus. Wie viele km legt sie insgesamt pro Jahr mit dem Schulbus zurück?
- Ein Fahrrad bekommt kann man in einem Laden zum Barpreis von 868 € kaufen und in einem andere Laden zu 12 Monatsraten von je 75 € Welches Angebot ist günstiger?
- Eine Sekretärin schafft pro Minute 325 Anschläge auf ihrem Computer. Wie viele Anschläge erreicht sie in 15 Minuten? Wie viele wären es bei gleich bleibender Konzentration in einer Stunde?
- Die Erde rast mit einer Geschwindigkeit von 1788 km pro Minute um die Sonne. Welchen Weg legt die Erde dabei in einer Stunde bzw. an einem Tag zurück?

## Lösungen

### Aufgabe 1: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen ohne Übertrag

484	4628	24264	268 804	6240	36 690
669	4884	93663	639 963	8480	48 860
848	6636	84844	840 404	8080	84 884
939	6864	55005	555 055	9990	84 884

### Aufgabe 2: Schriftliche Multiplikation einfacher Zahlen mit Übertrag

492	852	6948	26 166	405 248	5 508 550
612	1560	3488	51 590	426 922	8 108 480
1836	4263	21 707	14 950	516 020	2 148 220
4055	3268	18 963	247 776	2 030 028	10 683 650
3888	5664	28 902	371 439	1 308 600	29 353 140

### Aufgabe 3: Schriftliche Multiplikation

8360	15 370	36 000	9108	4536	4745
5302	18 070	77 696	1 462 731	2560	6048
1807	11 844	258 000	119 658	8080	0
10 080	44 530	397 738	8 625 400	14 400	2 712 000
9823	0	0	3 075 000	39 120 000	89 700 000

### Aufgabe 4: Textaufgaben

- Irene legt in  $52 - 13 = 39$  Schulwochen  $39 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 = 390 \cdot 8 = 3120$  km mit dem Schulbus zurück
- Der Barpreis von 868 € ist günstiger als die Ratenzahlung von  $12 \cdot 75 \text{ €} = 900 \text{ €}$ .
- Es wären in 15 Minuten  $15 \cdot 325 = 4875$  Anschläge und in einer Stunde  $4 \cdot 4875 = 19 500$  Anschläge.
- Pro Stunde sind es  $60 \cdot 1788 \text{ km} = 107 280 \text{ km}$  und pro Tag  $24 \cdot 107 280 \text{ km} = 2 574 720 \text{ km}$ .

## Schriftliches Dividieren, Schriftliche Division

Die Division von Dezimalbrüchen wird auf die Division ganzer Zahlen zurückgeführt.

Zuerst erweitert man beide Brüche so, dass der Divisor eine ganze Zahl ist. Im Dividenden und im Divisor verschiebt man dazu das Komma um so viele Stellen nach rechts, wie der Divisor Dezimalstellen hat. Danach lässt man das Komma im Dividenden außer Acht und dividiert durch den Divisor, d.h. ganze Zahl durch ganze Zahl.



In einem dritten Schritt überlegt man, wo das Komma im Ergebnis stehen muss. Dabei sind zu unterscheiden:

1) Die Division geht auf. Das Komma wird vor die Stelle gesetzt, bei der es im neuen Dividenden steht. Eventuell sind Nullen zu ergänzen.

$$1,15 : 0,5 = 11,5 : 5 = 2,3$$

$$0,48 : 0,8 = 4,8 : 8 = 0,6$$

2) Die Division geht nicht auf. Es wird praktisch das Verfahren der schriftlichen Division ganzer Zahlen angewandt und das Komma wird an der Stelle übernommen, in der es beim Dividenden steht.

$$0,8 : 0,03 = 80 : 3 = 26,666666666...$$

$$2,391 : 0,7 = 23,91 : 7 = 3,415714341674...$$

Zähler Reste	größer gleich?	Doppeln Nenner	Doppeln Zahl 1
500	-	544	32
500	Ja	272	16
228	Ja	136	8
92	Ja	68	4
24	-	34	2
24	Ja	17	1
Rest 7	Quotient	=	29

### Binäres Dividieren

Im Gegensatz zum schriftlichen Divisionsverfahren, wie es heutzutage gelehrt wird, kommt auch das Verfahren der binären Division ohne Kenntnis des kleinen  $1 \times 1$  aus. Es reicht aus, ganze Zahlen verdoppeln und halbieren und größere von kleineren unterscheiden zu können.

Die Sumerer und Babylonier müssen zur Entwicklung des Verfahrens ein großes, aus der Praxis gewachsenes Verständnis für

die innere Struktur ganzer Zahlen gehabt haben.

Beispiel:  $500 / 17 = 29$  Rest 7

1) den gegebenen Nenner in die unterste Zeile einer Tabelle schreiben und getrennt daneben eine 1 notieren

2) beide Zahlen werden jeweils verdoppelt und in die darüberliegende Zeile geschrieben, bis eine Zahl entsteht, die  $>$  oder  $=$  dem gegebenen Zähler ist

3) den Zähler als ersten Rest links neben die gefundene große Zahl schreiben

4) ist der verbliebene Rest kleiner als die nebenstehende Dopplungszahl, so wird er direkt darunter wieder übernommen

5) in den anderen Fällen wird die nebenstehende Dopplungszahl vom Rest abgezogen und die Differenz als neuer Rest direkt darunter notiert

6) nachdem alle Zeilen abgearbeitet worden sind, hat man den Divisionsrest bereits gefunden, der Quotient ergibt sich aus der Summe der 1-er Dopplungen der Zeilen, in denen vom Rest abgezogen wurde

### Elementare Arithmetikaufgaben

Vermischte Aufgaben zur Arithmetik:

1 a)  $5 \cdot (-3) \cdot 4 = -5 \cdot 3 \cdot 4 = -60$  ; zuerst das Vorzeichen berechnen

b)  $4 - 5 = -1$

c)  $4 : (-6) = -4/6 = -2/3$  ; zuerst das Vorzeichen berechnen, kürzen

d)  $5 + (-3) \cdot 4 = 5 - 12 = -7$  ; zuerst multiplizieren

e)  $4 \cdot (-6 + 5) = 4 \cdot (-1) = -4$  ; Klammer zuerst berechnen

2 a)  $8 \cdot (-3/8) \cdot (-5/12) = +8/1 \cdot 3/8 \cdot 5/12 = 54$  ; Vorzeichen zuerst; 8 in Bruch verwandeln, 8 gegen 8 und 3 gegen 12 kürzen

b)  $-8 + 3/4 = -7 \frac{1}{4}$

c)  $8 : (-3/8) = 8 \cdot (-8/3) = -8/1 \cdot 8/3 = -64$  ; Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner, nicht gleichnamig machen

d)  $8 + (-3/8) \cdot (-5/12) = 8 + 3/8 \cdot 5/12 = 8 + 5/32 = 8 \frac{5}{32}$  ; 3 gegen 12 kürzen

e)  $-8 \cdot (5/6 - 3/4) = -8 \cdot (20/24 - 18/24) = -8 \cdot 2/24 = -2/3$

3 a)  $10/3 \cdot 3/4 \cdot 4/5 = 10/5 = 2$  ; kürzen

b)  $1/2 - 3/5 = 5/10 - 6/10 = -1/10$

c)  $10/3 : 3/4 = 10/3 \cdot 4/3 = 40/9$

d)  $1/2 + 2/3 \cdot 3/5 = 1/2 + 2/5 = 5/10 + 4/10 = 9/10$

e)  $10/3 \cdot (3/4 + 4/5) = 10/3 \cdot (15/20 + 16/20) = 10/3 \cdot 31/20 = 31/(3 \cdot 2) = 31/6$

4. Zerlege 304000 in Primfaktoren.

$$308000 = 304 \cdot 1000 = 2 \cdot 154 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 77 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$

5. Bestimme ggT und kgV von  $a = 7000$  und  $b = 300$ .

$$7000 = 7 \cdot 1000 = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(a,b) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$$

$$\text{kgV}(a,b) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7) \cdot 3 = 7000 \cdot 3 = 21000$$

## Kopfrechentricks

### 1) Multiplikation einer zweistelligen Zahl mit 11

Eine zweistellige Zahl  $[ab]$  multipliziert man mit 11, indem man die Ziffern  $a$ ,  $b$  auseinandernimmt und zwischen diese deren Summe  $a+b$  setzt.

Beispiel:

$$23 \cdot 11 = [2 (2+3) 3] = 253$$

$$54 \cdot 11 = [5 (5+4) 4] = 594$$

Zu beachten ist, dass die Ziffernsumme  $a+b$  nicht größer als 9 sein darf. Wird  $a+b > 9$ , dann wird die erste Ziffer um 1 vergrößert und die Einerstelle von  $a+b$  genutzt.

$$74 \cdot 11 = [7 (7+4) 4] = 814$$

### 2) Multiplikation zweistelliger Zahlen $[ab]$ und $[ac]$ mit $b+c = 10$

Das Ergebnis ist dann

$$[a \cdot (a+1) \quad b \cdot c]$$

Die erste Ziffer wird mit der nächstgrößeren multipliziert und an der Ergebnis das Produkt der Einer angehängen.

Beispiel:  $34 \cdot 36 = [3 \cdot 4, 4 \cdot 6] = 1224$

$$82 \cdot 88 = [8 \cdot 9, 2 \cdot 8] = 7216$$

Das Verfahren ergibt automatisch das Quadrieren einer zweistelligen Zahl, die auf 5 endet.

$$55 \cdot 55 = [5 \cdot 6, 5 \cdot 5] = 3025 \quad \text{usw.}$$

## Trugschlüsse

Die nachfolgenden "Beweise" sind fehlerhaft und enthalten typische, immer wiederkehrende Trugschlüsse.

### Beispiel 1:

Behauptung:  $1 = 2$

"Beweis":  $x^2 - x^2 = x^2 - x^2 \rightarrow x(x-x) = (x+x)(x-x)$  (linke Seite ausgeklammert, rechte Seite binomische Formel)  $\rightarrow x = x+x$  (gekürzt)  $\rightarrow 1 = 2$  (durch  $x$ )

Trugschluss: Division mit  $0 = x-x$

### Beispiel 2:

Theorem: alle natürlichen Zahlen sind interessant

"Beweis": Angenommen, es wäre nicht so; dann existiert eine kleinste natürliche Zahl, die nicht interessant ist. Diese Zahl ist offensichtlich interessant, was der Annahme, dass sie nicht interessant ist, widerspricht. Dieses ist ein Widerspruch, also muss die Annahme falsch sein, womit die Behauptung gezeigt ist

Trugschluss: Anwendung eines indirekten Beweises auf eine mathematisch nicht exakt definierte Eigenschaft "interessant".

### Beispiel 3:

Behauptung:  $1/\infty = 0$

„Beweis“: Wir beginnen mit  $1/0 = \infty$ , drehen beide Seiten um 90 Grad nach links und erhalten  $-10 = 8$ ; nun ziehen wir auf jeder Seite 8 ab und erhalten  $-18 = 0$ . Nun drehen wir beide Seiten wieder um 90 Grad nach rechts und erhalten  $1/\infty = 0$ .

### Beispiel 4:

Satz: Alle natürlichen Zahlen sind gleich

"Beweis": Wir zeigen, falls für eine natürliche Zahl  $m$  gilt  $\max(a,b) = m$ , dann folgt  $a = b$  ( $a, b$  natürliche Zahlen). Daraus folgt offenbar die Behauptung.

Induktionsanfang ( $m = 1$ ):  $\max(a,b) = 1 \rightarrow a = b = 1 \rightarrow \text{o.k.}$

Induktionsschritt ( $m \rightarrow m+1$ ): Für  $m$  sei die Behauptung bewiesen.

$\max(a,b) = m+1 \rightarrow \max(a-1, b-1) = m \rightarrow a-1 = b-1$  (nach Induktionsannahme)  $\rightarrow a = b$   
q.e.d.

### Beispiel 5:

Theorem:  $n=n+1$

"Beweis":  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad | -(2n+1)$

$$\rightarrow (n+1)^2 - (2n+1) = n^2 \quad | -n(2n+1) \rightarrow (n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1) \quad | +1/4(2n+1)^2$$

$$\rightarrow (n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + 1/4(2n+1)^2 = n^2 - n(2n+1) + 1/4(2n+1)^2$$

$$\rightarrow [(n+1) - 1/2(2n+1)]^2 = [n - 1/2(2n+1)]^2$$

$$\rightarrow (n+1) - 1/2(2n+1) = n - 1/2(2n+1)$$

$$\rightarrow n+1 = n \quad \text{qed.}$$

### Beispiel 6:

Theorem:  $\log(-1) = 0$

"Beweis":  $\log[(-1)^2] = 2 \log(-1)$       Andererseits:  $\log[(-1)^2] = \log(1) = 0$

Aus a) und b) folgt:  $2 \cdot \log(-1) = 0$  und damit  $\log(-1) = 0$

### Beispiel 7:

Behauptung:  $\ln(2) = 0$

"Beweis": Bekanntlich ist  $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 \dots$

Umordnen liefert:  $\ln 2 = (1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 \dots) - (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 \dots)$

Somit:  $\ln 2 = (1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 \dots) + (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 \dots) - 2 \cdot (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 \dots)$

Aus dieser und der oberen Reihe folgt:  $\ln 2 = (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 \dots) - (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 \dots)$

und somit:  $\ln 2 = 0$ , qed.

### Beispiel 8:

Behauptung: Unendlich=2

„Beweis“: Wieviele Symmetrieachsen hat ein Kreis? Antwort: Unendlich viele! Jetzt teilen wir alles durch zwei! Wieviele Symmetrieachsen hat der Halbkreis? Antwort: Eine einzige! Daraus folgt: Unendlich=2. q.e.d.

### Beispiel 9:

$$x^2 = x \cdot x = x + x + \dots + x \text{ (x Summanden)}$$

Differenzieren nach x ergibt

$$2x = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \text{ (x Summanden)}$$

$$2x = x \text{ und das bedeutet } 2 = 1$$

### Beispiel 10:

Behauptung: Alle Zahlen sind gleich 0.

"Beweis": Sei  $a=b$ . Dann gilt:  $a = b$  und weiter

$$a^2 = ab \rightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2 \rightarrow (a + b)(a - b) = b(a - b), \text{ d.h.}$$

$$a + b = b \rightarrow a = 0, \text{ q.e.d.}$$

### Beispiel 11: Alle natürlichen Zahlen sind gleich.

"Lemma": Seien a und b natürliche Zahlen. Gilt für eine natürliche Zahl n:  $\max(a, b) = n \Rightarrow a = b$ .

"Beweis des Lemmas" durch Induktion über n:

Induktionsanfang:  $n = 1: \max(a, b) = 1 \Rightarrow a = b = 1$

Induktionsvoraussetzung:  $\max(a, b) = n$  gilt

Induktionsschritt:  $\max(a, b) = n + 1 \Rightarrow \max(a-1, b-1) = n \Rightarrow$  mit Induktionsvoraussetzung gilt:

$$a-1 = b-1 \Rightarrow a = b$$

Aus diesem "Lemma" ergibt sich auch: Die Voraussetzung, dass das Maximum mit irgendeiner bestimmten natürlichen Zahl übereinstimmt, ist immer erfüllt. Falls das Lemma stimmt, gilt also für zwei beliebige natürliche Zahlen, dass sie gleich sind.

### Beispiel 12:

Behauptung: Ein Krokodil ist länger als breit.

"Beweis": Man betrachte ein Krokodil.

1. Es ist oben lang und unten lang, aber nur oben grün. Also ist ein Krokodil länger als es grün ist.

2. Es ist grün entlang Länge und Breite, aber nur breit entlang der der Breite. Also ist ein Krokodil grüner als breit.

Aus 1. und 2. folgt: Das Krokodil ist länger als breit.

### Beispiel 13:

Behauptung:  $1 = -1$

"Beweis":  $1 = \sqrt{1} = \sqrt{((-1) \cdot (-1))} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = i \cdot i = -1$

Der Trugschluss entsteht, da die Beziehung  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  nur gültig ist, wenn wenigstens eine der Variable a und b nichtnegativ ist.

### Beispiel 14:

Behauptung:  $2\pi = 0$

"Beweis":  $x = 2\pi$

$$\sin x = \sin(2\pi) = 0$$

$$x = \arcsin(0)$$

$$x = 0, \text{ d.h. } 2\pi = 0$$

Der Trugschluss entsteht, da  $\arcsin 0$  nicht nur gleich 0 ist, sondern allgemein  $0 + 2k\pi$  mit beliebigen ganzzahligen k ergibt.

### Beispiel 15

Behauptung: Die Gleichung

$$(x - 2)(x + 1) + 2 = 0$$

besitzt genau die reelle Lösung  $x = 1$ .

"Beweis": Die Probe zeigt, dass  $x = 1$  der Gleichung genügt. Um nachzuweisen, dass es keine weitere Lösungen gibt, nehmen wir an, dass  $x_0$  eine Lösung von (4.11) ist. Dann gilt

$$x_0^2 - 2x_0 + x_0 - 2 + 2 = 0.$$

$$x_0^2 - x_0 = x_0(x_0 - 1) = 0$$

Division durch  $x_0$  ergibt  $x_0 - 1 = 0$ . Das bedeutet  $x_0 = 1$ .

Die Behauptung ist offensichtlich falsch, denn neben  $x = 1$  ist auch  $x = 0$  Lösung.

Der Fehler im Beweis besteht darin, dass in nur unter der Voraussetzung  $x_0 > 0$  durch  $x_0$  dividiert werden darf.

### Beispiel 16

Behauptung:  $1 = 0$

Es sei  $x = 1$ . Dann wird

$$x^2 = x$$

$$x^2 - 1 = x - 1$$

$$(x - 1)(x + 1) = x - 1 \quad | : (x-1)$$

$$x + 1 = 1 \quad | - 1$$

$$x = 0$$

d.h. mit Anfangswert  $0 = 1$ . Der Trugschluss ergibt sich wieder durch eine Division mit 0, da  $x-1 = 0$ .

### Beispiel 17

Behauptung:  $4 = 5$

Dazu setzt man  $x = 4$  und  $y = 5$  und weiter

$$x + y = 9 \quad | (x-y)$$

$$x^2 - y^2 = 9x - 9y \quad | +81/4$$

$$x^2 - 9x + 81/4 = y^2 - 9y + 81/4 \quad | +81/4$$

$$(x - 9/2)^2 = (y - 9/2)^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - 9/2 = y - 9/2$$

$$x = y$$

und somit  $4 = 5$ . Dieser Trugschluss beruht auf der Tatsache, dass das Wurzelziehen keine äquivalente Umformung ist. Die vorletzte Zeile müsste

$$|x - 9/2| = |y - 9/2|$$

lauten. Damit wäre aber die Reduktion auf  $x = y$  nicht möglich.

### Mathematische Fehler

#### Durch Differenzen und durch Summen kürzen nur die Dummen :-)

$(2a + b)/3a$  ist nicht  $(2 + b)/3$  sondern  $(2a + b)/3a = (2 + b/a)/3$ , d.h. keine Vereinfachung!

Kürzen heißt: Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividieren. Der Wert ändert sich dabei nicht.

Beispiel:

$$\frac{35}{49} = \frac{5}{7} \quad \text{(gekürzt mit 7)} \quad \frac{2a^2}{3a} = \frac{2a}{3} \quad \text{(gekürzt mit a)}$$

Steht im Zähler eine Summe zum Beispiel  $ac + bc$ , dann muss bei Division durch eine Zahl jeder

Summand durch diese Zahl dividiert werden.

$$(ac + bc) : c = (ac) : c + (bc) : c = a + b$$

#### Bei Wurzeln die Noten purzeln :-)

$\sqrt{a^2 + b^2}$  ist nicht  $a + b$ . Richtig ist:

$$\sqrt{a^2 b^2} = a b \quad \text{oder} \quad \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$$

#### Problem: Was ist $(-3)^2$ und $-3^2$ ?

Es gilt die Klammerersparnisregel: Zuerst Potenzieren, dann Punktrechnung (Multiplizieren und Dividieren) und ganz zum Schluss Strichrechnung (Addieren und Subtrahieren). Klammersausdrücke werden jedoch als erstes ausgewertet.

$(-3)^2$  bedeutet: Multipliziere  $(-3)$  mit sich selbst (2 mal), also  $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$

$-3^2$  bedeutet: Potenziere zuerst 3 mit 2 und nimm davon den negativen Wert, also  $-3^2 = -(3^2)$  ("zuerst Potenzieren") = -9

#### Behauptung: Das Quadrat einer beliebigen Zahl ist gleich 1

"Beweis": Es sei  $x = y = m^2/4$  ( $m$  natürliche Zahl) (1)

Daraus folgt  $\sqrt{x} = \sqrt{y}$  (2)

Wir subtrahieren von der Gleichung (1) die Gleichung (2) und erhalten folgende Kette von Gleichungen:

$$x - \sqrt{x} = y - \sqrt{y} \rightarrow x - y = \sqrt{x} - \sqrt{y} \rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

$$\rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \rightarrow 2\sqrt{x} = 1$$

In die letzte Gleichung setzen wir Gleichung (1) ein:  $2\sqrt{(m^2/4)} = 1$ , also  $m^2 = 1$  "q.e.d."

## Geld-Maßeinheiten

Scheinbar ist  $\sqrt{(2500 \text{ Cent})} = \sqrt{(50 \text{ Cent} * 50 \text{ Cent})} = \sqrt{(1/2 \text{ €} * 1/2 \text{ €})} = \sqrt{(1/4 \text{ €})} = \sqrt{(25 \text{ Cent})} = 5 \text{ Cent}$

Der Fehler liegt in der falschen Verwendung der Maßeinheit des Geldes. Gezeigt wurde, dass 5 Cent gleich der Wurzel aus 2500 "Quadrat-Cent" ist, was immer das auch sein mag.

## Satz des Pythagoras

"Der Pythagoras lautet: Das Quadrat über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Behauptung: Ich behaupte  $a^2 = b^2 + c^2$

Beweis: Wenn der Inhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich 2 ist und der der Inhalt der beiden Quadrate über den beiden Katheten je 1 beträgt, so komme ich zu dem Resultat  $2 = 1 + 1$ .  $1+1$  ist aber 2. Also  $2 = 2$ . Setze ich statt dieser Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , so erhalte ich  $a^2 = b^2 + c^2$ , was zu beweisen war." Dieser "Beweis" grenzt schon an das Komische, ist aber als schriftliche Reifeprüfungsarbeit eines Lyzeums einer jungen Dame verbürgt. Offensichtlich hat sie den Inhalt sowie die Beweistechnik nicht im Ansatz verstanden. Selbstverständlich kann man von einem "konstruierten" Beispiel nicht auf die Allgemeinheit schließen.

$$\text{Gleichung} \quad (x+1)^2 - (x+2)(x+3) = (x+4)(x+5) - (x+6)^2$$

$$\text{Lösung} \quad x^2 + 2x + 1 - x^2 - 5x - 6 = x^2 + 9x + 20 - x^2 - 12x - 36 \\ -3x - 5 = -3x - 16 \\ 5 = 16$$

Die Schlussfolgerung, dass  $5 = 15$  gilt, ist natürlich falsch. Der hier auftretende Widerspruch zeigt nur, dass es keinen endlichen Wert für  $x$  gibt, der die Gleichung erfüllt.

$$\text{Gleichung} \quad 6/(x-3) - 9/(x-2) = 1/(x-4) - 4/(x-1)$$

$$\text{Lösung} \quad [6(x-2) - 9(x-3)] / [(x-2)(x-3)] = [(x-1) - 4(x-4)] / [(x-4)(x-1)] \\ (6x - 12 - 9x + 27) / (x^2 - 5x + 6) = (x - 1 - 4x + 16) / (x^2 - 5x + 4) \\ (15 - 3x) / (x^2 - 5x + 6) = (15 - 3x) / (x^2 - 5x + 4) \\ (x^2 - 5x + 6) / (15 - 3x) = (x^2 - 5x + 4) / (15 - 3x) \\ 6 = 4$$

Die korrekte Lösung ist 5, d.h. es wurde mit  $15 - 3x = 0$  dividiert und somit der scheinbare Widerspruch erzeugt.

## Summenzeichen

Zur Abkürzung der Schreibweise einer Summe wird das Summenzeichen  $\Sigma$  eingeführt:

$$\sum_{i=m}^n x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_n$$

$i$  heißt Summationsindex, weiterhin ist  $m \leq n$ . Man spricht: Summe über  $x_i$  für  $i$  gleich  $m$  bis  $n$  bzw. Summe über  $x_i$  für  $i$  von  $m$  bis  $n$

In Analogie versteht man unter dem Produktzeichen:

$$\prod_{i=m}^n x_i = x_m * x_{m+1} * x_{m+2} * \dots * x_n$$

Beispiele:

$$\sum_{i=m}^n i = m + m+1 + \dots + n \dots \text{Summe der natürlichen Zahlen von } m \text{ bis } n$$

$$\sum_{i=0}^n 2i+1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n+1 \dots \text{Summe der ungeraden natürlichen Zahlen von } 1 \text{ bis } 2n+1$$

$$\prod_{i=1}^n i = 1 * 2 * 3 * \dots * n = n! \dots n \text{ Fakultät}$$

$$i = 1$$

## Rechnen mit Summenzeichen, Rechnen mit Produktzeichen

Für das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k &= \sum_{j=0}^n a_j && \text{Umbenennung des Summationsindex} \\ \sum_{k=0}^n a_k &= \sum_{j=N}^{n+N} a_{j-N} && \text{Verschiebung des Summationsindex } j = k+N \\ \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k &= \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) && \text{Additionsregel} \\ (\sum_{j=1}^m a_j) (\sum_{k=1}^n b_k) &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_j b_k && \text{Distributivgesetz} \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{jk} && \text{Vertauschungsregel} \\ \prod_{k=0}^n a_k &= \prod_{j=0}^n a_j \\ \prod_{k=0}^n a_k &= \prod_{j=N}^{n+N} a_{j-N} \\ (\prod_{k=0}^n a_k) (\prod_{k=0}^n b_k) &= \prod_{k=0}^n a_k b_k \end{aligned}$$

$$\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n a_{jk} = \prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^m a_{jk}$$

### Hyperoperator

Zur Fortsetzung der elementaren mathematischen Operationen Addition, Multiplikation und Potenzierung wurde der Hyperoperator eingeführt. Da man Addition, Multiplikation und Potenzbildung rekursiv

$$\begin{aligned} a + b &= 1 + (a + (b-1)) \\ a \cdot b &= a + (a \cdot (b-1)) \\ a^b &= a \cdot a^{b-1} \end{aligned}$$

definieren kann, verallgemeinert man zu einem dreistelligen Operator

$$\begin{aligned} a^{(n)}b &= b + 1, \text{ für } n = 0 & a + b, \text{ wenn } n = 1 \text{ und } b = 0 \\ 0, \text{ wenn } n = 2 \text{ und } b = 0 & 1, \text{ wenn } n > 2 \text{ und } b = 0 \\ a^{(n-1)}(a^{(n)}(b-1)), \text{ sonst} \end{aligned}$$

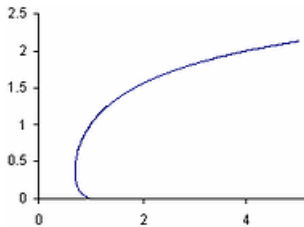
mit  $\text{hyper}(a,b) = \text{hyper}(a,n,b) = a^{(n)}b$

und bezeichnet diesen Operator als Hyperoperator.

Damit sind hyper1 die Addition, hyper2 die Multiplikation und hyper3 die Potenzierung. hyper4 wird als Tetration oder Superpotenz bezeichnet. Für die Tetration werden auch  ${}^b a$  oder  $a \uparrow\uparrow b$  als Schreibweise für hyper4(a,b) verwendet. Zum Beispiel wird für die Tetration hyper4(4,3)

$${}^3 4 = 4^{4^4} = 4^{256} = 13407\ 80792\ 99425\ 97099\ 57402\ 49982\ 05846\ 12747\ 93658\ 20592\ 39337\ 77235\ 61443\ 72176\ 40300\ 73546\ 97680\ 18742\ 98166\ 90342\ 76900\ 31858\ 18648\ 60508\ 53753\ 88281\ 19465\ 69946\ 43364\ 90060\ 84096$$

hyper5(a,b) =  $a \uparrow\uparrow\uparrow b$  wird Pentation genannt, hyper6(a,b) =  $a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b$  Hexation usw.



### Superwurzel, Superquadratwurzel

Die Superwurzel ist eine der Umkehroperationen der Tetration. Gilt  ${}^n y = x$ , so ist y die n-te Superwurzel von x.

Insbesondere wird die 2.Superwurzel  $\sqrt{x_s}$  Superquadratwurzel genannt. Analytisch kann  $\sqrt{x_s}$  mit Hilfe der Lambertschen W-Funktion dargestellt werden:

$$\sqrt{x_s} = e^{W(\ln x)}$$

Die linke Abbildung zeigt den prinzipiellen Verlauf der Superquadratwurzel-Funktion. Im Intervall  $e^{-1/e} < x < 1$  existieren zwei reelle Superquadratwurzeln, für  $x < e^{-1/e}$  keine Wurzel. Ab dem Argument  $x = 1$  ist die Superquadratwurzel eindeutig.

Erste Werte sind

x	$\sqrt{x_s}$	x	$\sqrt{x_s}$	x	$\sqrt{x_s}$
1	1	2	1.559610...	3	1.825455...
4	2	5	2.129372...	6	2.231828...
7	2.316454...	8	2.388423...	9	2.450953...

## Teilbarkeit von Zahlen, Zahlentheorie

### Teiler und Vielfaches

$a$  heißt Teiler von  $b$ , wenn es eine natürliche Zahl  $n$  gibt, so dass  $a \cdot b = n$  gilt.  
Auch 1 und  $n$  selbst sind Teiler von  $n$ . Alle Teiler von  $n$  außer  $n$  selbst nennt man "echte Teiler" von  $n$ .  
Eine Zahl  $b$  heißt unteilbar oder auch Primzahl, wenn sie keine echten Teiler besitzt, andernfalls teilbar.  
Die Eigenschaft der Teilbarkeit ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

### Gemeinsamer Teiler

$c = gT(a,b)$  heißt gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ , wenn  $c$  sowohl Teiler von  $a$  als auch von  $b$  ist

### Vielfaches

$b = gV(a,b)$  heißt Vielfaches von  $a$ , wenn  $a$  Teiler von  $b$  ist

### gemeinsame Vielfache, gemeinschaftliche Vielfache

$V(a_1, a_2, \dots, a_n)$  sei die Menge aller Zahlen, die durch alle  $a_i$  ( $a_i \neq 0$ ) teilbar sind. Dann heißen die Elemente von  $V$  gemeinschaftliche Vielfache oder gemeinsame Vielfache der  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .  
Die Menge  $V^+$  positiver Zahlen aus  $V$  ist niemals leer. Das Produkt  $|a_1 a_2 \dots a_n|$  ist Element von  $V^+$ . Das kleinste Element von  $V^+$  ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der  $a_i$  (kgV).

### Vollständige Induktion

#### Prinzip der vollständigen Induktion (Beweisverfahren)

Die Aussage "Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq n_0$  gilt  $H(n)$  ist wahr  $\Leftrightarrow$

#### Induktionsanfang, Induktionsverankerung

1.  $H(n)$  ist richtig für  $n = n_0$

#### Induktionsschritt, Induktionsschluss

2. Aus der Gültigkeit von  $H(n)$  für  $n=k$  folgt für beliebiges  $k$  die Gültigkeit für  $n=k+1$

### Vollständige Induktion, Beweisbeispiele

Satz: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/2$ , d.h. die Summe der ersten natürlichen Zahlen bis  $n$  ist gleich  $n(n+1)/2$ .

#### Induktionsanfang, Induktionsverankerung

$n_0 = 1$  dann gilt  $1 = 1 = 1 \cdot (1+1)/2 = 1$

#### Induktionsvoraussetzung

für  $n = k$  gilt  $1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k+1)/2$

#### Induktionsbehauptung

dann gilt auch für  $n = k+1$ :  $1 + 2 + 3 + \dots + k + k+1 = (k+1)(k+2)/2$

#### Induktionsbeweis

$1 + 2 + 3 + \dots + k + k+1 =$  Einsetzen der Induktionsvoraussetzung  
 $= k(k+1)/2 + k+1 =$  Zusammenfassen der Terme  
 $= [k(k+1) + 2(k+1)] / 2$  Ausklammern von  $(k+1) = (k+1)(k+2) / 2$

Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.

Satz: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ , d.h. die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen bis  $(2n-1)$  ist gleich  $n^2$ .

#### Induktionsanfang, Induktionsverankerung

$n_0 = 1$  dann gilt  $1 = 1 = 1^2 = 1$

#### Induktionsvoraussetzung

für  $n = k$  gilt  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$

#### Induktionsbehauptung

dann gilt auch für  $n = k+1$ :  $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$

#### Induktionsbeweis

$1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) =$  Einsetzen der Induktionsvoraussetzung  
 $= k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1$  Binomische Formel  
 $= (k+1)^2$

Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.

Satz: Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$   
d.h. die Summe der ersten Zweierpotenzen bis  $2^n$  ist gleich  $2^{n+1} - 1$ .

#### Induktionsanfang, Induktionsverankerung

für  $n = 1$  wird  $1 + 2 = 2^2 - 1 = 3$ , wahre Aussage

#### Induktionsvoraussetzung

für  $n = k$  gilt  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$

#### Induktionsbehauptung

dann gilt auch für  $n = k+1$ :  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$

#### Induktionsbeweis

aus  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$  folgt  
 $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$

Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.

**Satz:**  $1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 - + \dots + 1/2^n \geq 1 + n/2$

**Induktionsanfang, Induktionsverankerung**

für  $n=1$  wird  $1 + 1/2^1 \geq 1 + 1/2$ , wahre Aussage

**Induktionsschritt**

Es sei  $1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 - + \dots + 1/2^n \geq 1 + n/2$

Dann folgt

$$\begin{aligned} & 1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 - + \dots + 1/2^n + 1/(2^{n+1}) + \dots + 1/2^{n+1} \geq \\ & \geq 1 + n/2 + 1/(2^{n+2}) + \dots + 1/(2^{n+2}) \\ & = 1 + n/2 + 2^n \cdot 1/(2^{n+2}) \\ & = 1 + n/2 + 1/2 = 1 + (n+1)/2 \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass der Satz auch für  $n+1$  gilt.

Behauptung: Es gilt  $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5+3 \cdot n) = 5(n+1) + 3/2 n \cdot (n+1)$

**Induktionsanfang:**

A(1):  $5 + 8 = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2/2$ ; wahre Aussage

**Induktionsschritt:**

Es sei  $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5+3 \cdot n) = 5(n+1) + 3/2 n \cdot (n+1)$

Daraus ist die Induktionsbehauptung herzuleiten:

$$5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5+3 \cdot n) + (5 + 3 \cdot (n+1)) = 5(n+2) + 3/2 (n+1) \cdot (n+2)$$

**Induktionsschritt:**

Aus  $5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5+3 \cdot n) = 5(n+1) + 3/2 n \cdot (n+1)$  folgt

$$\begin{aligned} & 5 + 8 + 11 + 14 + \dots + (5+3 \cdot n) + (5+3 \cdot (n+1)) = 5(n+1) + 3/2 n \cdot (n+1) + (5+3 \cdot (n+1)) = \\ & = 5n + 5 + 3/2 (n^2 + n) + 5 + 3n + 3 = 3/2 n^2 + 19/2 n + 13 \end{aligned}$$

Multipliziert man die rechte Seite der Behauptung aus, ergibt sich der gleiche Term. q.e.d.

**Summenformel der arithmetischen Zahlenfolge**

Behauptung: Es gilt  $a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) = a(n+1) + k/2 n \cdot (n+1)$

**Induktionsanfang:**  $a + (a + k) = a \cdot 2 + k$ ; wahre Aussage

**Induktionsschritt:**

Es sei  $a + (a+k) + (a + 2k) + \dots + (a + nk) = a(n+1) + k/2 n \cdot (n+1)$

Behauptung:  $a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) + (a + (n+1)k) = a(n+2) + k/2 (n+1) \cdot (n+2)$

Herleitung:

Aus  $a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) = a(n+1) + k/2 n \cdot (n+1)$  folgt

$$\begin{aligned} & a + (a+k) + (a + 2k) + (a + 3k) + \dots + (a + nk) + (a + (n+1)k) = \\ & = a(n+1) + k/2 n \cdot (n+1) + (a + (n+1)k) = a(n+1) + a + k/2 (n^2+n) + a + nk + k = \\ & = k/2 n^2 + (a + 3/2k) n + 2a + k \end{aligned}$$

Dieser Term entspricht der rechten Seite der Behauptung.

**Behauptung**  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1)$

**Induktionsanfang**  $n = 1: 1 = 1(2-1) = 1$  ist erfüllt

**Induktionsvoraussetzung**  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1)$  gilt für ein  $n$  in  $\mathbb{N}$

**Induktionsschluss**  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) + (4(n+1) - 3) = n(2n-1) + (4(n+1) - 3) = 2n^2 - n + 4n + 1 = 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1)$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion soll gezeigt werden, dass  $n^5 - n$  durch 5 teilbar ist für alle  $n$  in  $\mathbb{N}$ .

**Induktionsanfang**  $n=1: 1^5 - 1 = 0$  und somit durch 5 teilbar

**Induktionsvoraussetzung** Es gelte für ein  $n$  in  $\mathbb{N}$ :  $n^5 - n$  ist durch 5 teilbar, d.h. es existiert ein  $m$  in  $\mathbb{N}$ , so dass gilt:  $5m = n^5 - n$

**Induktionsschluss**

$$\begin{aligned} & (n+1)^5 - (n+1) = (n+1)^5 - n - 1 = \\ & = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = \\ & = n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = 5m + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) = \\ & = [m + (n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)] \cdot 5 \end{aligned}$$

Und somit folgt, dass  $(n+1)^5 - (n+1)$  durch 5 teilbar ist

**Behauptung:** Für alle natürlichen Zahlen  $x$  und  $n$  gilt die Aussage  $x^n - 1$  ist durch  $x-1$  ohne Rest teilbar.

Dass die Aussage für  $n=1$ ,  $(x-1)$  ist durch  $(x-1)$  ohne Rest teilbar, ist offensichtlich richtig.

Zu zeigen ist, dass unter der Voraussetzung von " $x^n - 1$  ist durch  $x-1$  teilbar" auch " $x^{n+1} - 1$  ist durch  $x-1$  teilbar" folgt.

$$x^{n+1} - 1 = x(x^n - 1) + (x-1)$$

was sich durch einfaches Ausmultiplizieren bestätigen lässt.

Beide Summanden der rechten Seite sind nach Voraussetzung durch  $x-1$  teilbar, also auch die Summe und damit der Ausdruck links des Gleichheitszeichens.

**Behauptung:**  $n^2 + n$  ist für alle natürlichen Zahlen  $n$  eine gerade, d.h. durch 2 teilbare Zahl.



**Induktionsanfang:** für  $n = 0$  wird  $0^2 + 0 = 0$  eine gerade Zahl  
**Induktionsvoraussetzung:** es gelte  $n^2+n$  ist eine gerade Zahl  
**Induktionsbehauptung:** dann gilt für  $n+1$ :  $(n+1)^2 + (n+1)$  ist eine gerade Zahl  
**Induktionsschluss:**  $(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2 = (n^2+n) + (2n+2) = (n^2+n) + 2(n+1)$   
 ist eine gerade Zahl, da der erste Summand nach Induktionsvoraussetzung gerade und der zweite Summand ein Vielfaches von 2 sind.

**Behauptung:**  $n^3 + 2n$  ist für alle natürlichen Zahlen  $n$  durch 3 teilbar.

Induktionsanfang, -voraussetzung und -behauptung analog zu oben.

**Induktionsschluss:**  
 $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 =$   
 $= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$

**Behauptung:**  $4n^3 - n$  ist für alle natürlichen Zahlen  $n$  durch 3 teilbar.

Induktionsanfang, -voraussetzung und -behauptung analog zu oben.

**Induktionsschluss:**  
 $4(n+1)^3 - (n+1) = 4(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 =$   
 $= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3 = 4n^3 - n + 3(4n^2 + 4n + 1)$

**Behauptung:**  $n^3 - n$  ist für alle natürlichen Zahlen  $n$  durch 6 teilbar.

Induktionsanfang, -voraussetzung und -behauptung analog zu oben.

**Induktionsschluss:**  
 $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - n + 3n(n+1)$

Der erste Summand ist durch 6 teilbar, der zweite durch 3 und da entweder  $n$  oder  $n+1$  gerade ist, auch durch 2 und folglich durch 6.

**Satz:** Für alle natürlichen Zahlen  $n$  und alle reellen Zahlen  $x$  gilt  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  (Bernoullische Ungleichung)

**Induktionsanfang, Induktionsverankerung**

für  $n_0 = 1$  gilt das Gleichheitszeichen  
 für  $n_0 = 2$  wird  $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$

**Induktionsvoraussetzung**

für  $n = k$  gilt  $(1 + x)^k \geq 1 + kx$

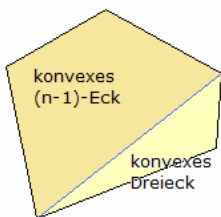
**Induktionsbehauptung**

dann gilt auch für  $n = k+1$ :  $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$

**Induktionsbeweis**

$(1 + x)^{k+1} = (1 + x^k)(1 + x) >$  Einsetzen der Induktionsvoraussetzung  
 $> (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 > 1 + (k + 1)x$

Da der Induktionsanfang und der Induktionsschritt gezeigt werden konnten, gilt die Aussage.



Aufgabe: Zeige, dass die Zahl  $d(n)$  der Diagonalen in einem ebenen, konvexen  $n$ -Eck durch die Formel

$$d(n) = n/2 \cdot (n-3)$$

berechnet werden kann! Für welche  $n$  gilt die Formel?

Induktionsanfang für ein Dreieck:

Ein Dreieck hat keine Diagonalen, also  $d(3) = 0 = 3/2 \cdot (3 - 3)$ . Für  $n = 3$  ist die Behauptung richtig.

Induktionsschritt

Gegeben sei ein ein konvexes  $n$ -Eck, z.B. ein Fünfeck. In dieses zeichnet man eine Diagonale von einem beliebigen Eckpunkt zu einem übernächsten Eckpunkt, also so, dass ein Dreieck und ein  $(n-1)$ -Eck entsteht.

Das Dreieck hat keine und das  $(n-1)$ -Eck hat  $d(n-1)$  Diagonalen (Induktionsvoraussetzung).

Außerdem muss man noch die Diagonalen von der Ecke des Dreiecks, die nicht eine Ecke des  $(n-1)$ -Ecks ist, zu allen Ecken des  $(n-1)$ -Ecks, die nicht Eckpunkt des Dreiecks sind, zählen - und nicht zu vergessen die eine Diagonale, mit der das Dreieck abgeteilt wurde. Folgt:

$$d(n) = d(n-1) + (n-3) + 1 = (n-1)/2 \cdot ((n-1)-3) + (n-3) + 1 =$$

$$= (n-1) \cdot (n-4)/2 + n - 2 = (n^2 - 5n + 4)/2 + n - 2 =$$

$$= (n^2 - 3n)/2 = (n \cdot (n-3)) / 2 \quad \text{qed}$$

Der Induktionsanfang wurde für  $n = 3$  gemacht. Für kleinere  $n$  kann man den Induktionsschluss nicht durchführen. Ein Polygon mit weniger als 4 Ecken erlaubt nicht das Einzeichnen einer Diagonale von einer Ecke zu einer übernächsten Ecke.

**Behauptung:**  $n$  Geraden in einer Ebene, die in allgemeiner Position zueinander liegen, bilden  $n \cdot (n+1)/2 + 1$  Gebiete.

dabei verstehen man unter einer allgemeinen Position, dass keine zwei Geraden parallel sind und keine 3 Geraden sich im gleichen Punkt schneiden.

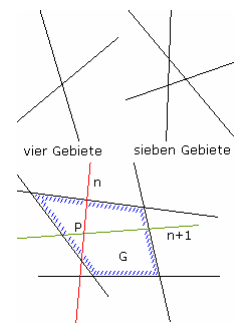
Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweist man den Hilfssatz: Durch Hinzufügen einer Geraden zu  $n-1$  Geraden in allgemeiner Position in der Ebene erhöht sich die Anzahl der Gebiete um  $n$ .

Beweis:

Angenommen, es gibt  $n$  Geraden und die  $n$ -te Gerade fügte  $n$  Gebiete hinzu. Was passiert, wenn die  $(n+1)$ -te Gerade hinzukommt?

Wegen allgemeiner Lage gilt, dass eine Gerade entweder ein Gebiet in zwei Teile schneidet oder das Gebiet nicht einmal berührt. Damit muss gezeigt werden, dass Gerade  $n+1$  genau  $n+1$  Gebiete schneidet.

Angenommen, Gerade  $n$  wäre nicht vorhanden. Dann würde die  $(n+1)$ -te Gerade  $n$  neue Gebiete (Induktionsannahme) hinzufügen. Es muss also nur gezeigt werden, dass die Gegenwart von Gerade  $n$  verursacht, dass die  $(n+1)$ -te Gerade ein zusätzliches Gebiet addiert.



Es existiert genau ein Gebiet, wo sich  $n$ -te und  $(n+1)$ -te Gerade schneiden (Schnittpunkt P). Gerade  $n+1$  addiert ein neues Gebiet in G; schneidet es in zwei; wenn Gerade  $n$  nicht vorhanden, aber addiert zwei neue Gebiete; schneidet G in vier Teile; wenn Gerade  $n$  vorhanden ist.

G ist die einzige Region, die so beeinflusst wird. Also gilt: Die Gerade  $n+1$  addiert  $n$  Gebiete ohne Gerade  $n$  und  $n+1$  Gebiete mit der Geraden  $n$ .

Damit folgt unmittelbar: Die Gesamtzahl der Gebiete für  $n$  Geraden in allgemeiner Lage ist

$$2 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = n \cdot (n+1) / 2 + 1$$

Behauptung: Sei  $M$  eine beliebige Menge und  $m = |M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ . Dann ist  $|P(M)| = 2^m$ .

Lösung:

Die Potenzmenge  $P(M)$  ist die Menge aller Teilmengen von  $M$ . Damit ist zu bestimmen, wie viele verschiedene Teilmengen man aus  $m$  Elementen bilden kann.

A) Wenn  $M = \emptyset$ , also  $|M| = 0$ , dann ist  $P(M) = \{\emptyset\}$ , denn nur die leere Menge ist Teilmenge der leeren Menge. Also  $|P(M)| = 1 = 2^0$ .

B) Sei nun  $|M| = n+1$ . Sei  $x$  ein bestimmtes Element aus  $M$ . Man bildet die Teilmengen, indem man die Teilmengen aufteilt:

- a) die Teilmengen, die  $x$  nicht enthalten,
- b) die Teilmengen, die  $x$  enthalten.

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Anzahl der Teilmengen bei a)  $= 2^n$  ist, denn es handelt sich um Teilmengen einer Menge mit  $n$  Elementen.

In allen Teilmengen aus b) kann man das Element  $x$  entfernen. Dann ist die Anzahl dieser Mengen ebenfalls  $= 2^n$ , denn es handelt sich auch hier um alle Teilmengen einer Menge mit  $n$  Elementen.

Addition der Anzahlen für a) und b):  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ .

Behauptung: 47 ist ein Teiler von  $7^{2n} - 2^n$

Der Induktionsanfang ist offensichtlich. Die Induktionsbehauptung ist dann

$$A(n+1): 47 \text{ ist ein Teiler von } 7^{2n+2} - 2^{n+1}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} 7^{2n+2} - 2^{n+1} &= 7^2 (7^2)^n - 2 \cdot 2^{n+1} \\ &= (7^2)^n \cdot (7^2 - 2) + 2 \cdot (7^2)^n - 2 \cdot 2^n = (7^2)^n \cdot (7^2 - 2) + 2 \cdot ((7^2)^n - 2^n) \end{aligned}$$

Jeder der beiden Summanden enthält einen Faktor, der nach Induktionsvoraussetzung durch 47 teilbar ist. Folglich ist der gesamte Ausdruck durch 47 teilbar.

### Geschichte der vollständigen Induktion

Der erste Mathematiker, der einen formalen Beweis durch vollständige Induktion angab, war der italienische Geistliche Franciscus Maurolicus (16.9.1494 - 21./22.7.1575). Er war Abt von Messina und wurde als größter Geometer des 16. Jahrhunderts angesehen. In seinem 1575 veröffentlichten Buch Arithmetik benutzte Maurolicus die vollständige Induktion unter anderem dazu, für jede positive ganze Zahl  $n$  die Gültigkeit von  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$  zu beweisen. Die Induktionsbeweise von Maurolicus waren in einem knappen Stil geschrieben, dem man nur schwer folgen kann.

Eine bessere Darstellung dieser Methode wurde von dem französischen Mathematiker Blaise Pascal angegeben. In seinem 1662 erschienen Buch "Traite du Triangle Arithmetique" bewies er eine Formel über die Summe von Binomialkoeffizienten mittels vollständiger Induktion. Er benutzte diese Formel dann um das heute nach ihm benannte Pascalsche Dreieck zu entwickeln.

Obwohl die Methode der vollständigen Induktion also bereits 1575 bekannt war, wurde der Name dafür erst 1838 erstmalig gebraucht. In jenem Jahr veröffentlichte Augustus de Morgan, einer der Begründer der Mengenlehre, den Artikel Induction (Mathematics) in der Londoner Zeitschrift "Penny Cyclopaedia". Am Ende dieses Artikels benutzte er den Namen für die vollständige Induktion erstmals im heute üblichen Sinn. Jedoch fand diese Bezeichnung erst in unserem Jahrhundert ihre weite Verbreitung.

zitiert nach "Vollständige Induktion", Prof. Dr. rer. nat. Udo Hebisch

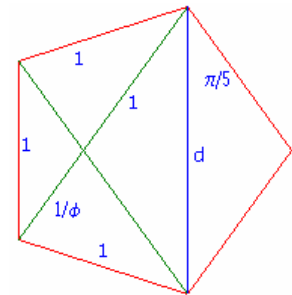
**Grundgleichung der Zahlentheorie**

Für alle ganzen Zahlen a und b existiert genau ein Paar ganzer Zahlen q und r, so dass

$$a = q * b + r \text{ und } 0 \leq r < b$$

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a, b > 0$  existiert genau ein Paar q, r  $\in \mathbb{Z}$  mit

$$a = q * b + r \text{ und } 0 \leq r < b$$



**Ganzzahliger Anteil** q ist der ganzzahlige Anteil der Division von a mit b  
**Rest** r ist der bei der ganzzahligen Division verbleibende Rest

Der Rest r kann mit der Integer-Funktion aus a und b ermittelt werden:

$$\text{Aus } a = qb + r \text{ mit } 0 \leq r < |b| \text{ folgt } a/|b| = q b/|b| + r/|b| \rightarrow [a/|b|] = q \operatorname{sgn}(b) \rightarrow$$

$$\rightarrow q = [a/|b|] \operatorname{sgn}(b) \rightarrow r = a - [a/|b|] |b|$$

**Kommensurabilität**

Zwei Zahlen a und b heißen **kommensurabel**, d.h. mit gleichem Maß messbar, wenn sie ganzzahlige Vielfache einer dritten Zahl c sind, d.h. aus  $a = mc$  und  $b = nc$  folgt  $a/b = m/n$  (x rational). Im entgegengesetzten Fall sind a und b **inkommensurabel**.

Im regelmäßigen Fünfeck, dem Pentagramm, sind die Seite und die Diagonale inkommensurable Strecken. Bei einer Seitenlänge von  $a = 1$  wird die Diagonale  $d = \phi = 1/2(1 + \sqrt{5})$ , also irrational. Man glaubt, dass Hippasos von Metapont an diesem Beispiel die irrationalen Zahlen entdeckt hat. Die Länge einer Diagonale und die Seitenlänge eines Quadrates sind ebenfalls inkommensurabel, da sie die irrationale Zahl  $\sqrt{2}$  als Quotienten bilden.

**Größter gemeinsamer Teiler**

$$\operatorname{ggT}(a,b) \Leftrightarrow \text{größter gemeinsamer Teiler von a und b}$$

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(a,b) = a*x + b*y \quad \forall a > b \Rightarrow \operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(a-b,b)$$

**Kleinstes gemeinschaftliches Vielfache**

$$\operatorname{kgV}(a,b) \Leftrightarrow \text{kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von a und b } \operatorname{kgV}(a,b) = a*b / \operatorname{ggT}(a,b)$$

**Eigenschaften des ggT**

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(b,a) \quad \operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(-a,b)$$

$$\operatorname{ggT}(a,0) = |a| \quad \operatorname{ggT}(0,0) = 0$$

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(a-b,b) \text{ falls } a > b \quad \operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(a,b-a) \text{ falls } a < b$$

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(b, a \bmod b) \text{ falls } b \neq 0$$

**Theorem von Séroul, Theorem von Bézout**

Für zwei ganze Zahlen a und b existieren stets ganzzahlige u, v, so dass  $au + bv = \operatorname{ggT}(a,b)$  gilt. Zwei ganze Zahlen a und b sind **relativ prim** zueinander, wenn zwei ganze Zahlen u,v existieren, so dass  $au + bv = 1$  gilt.

**Euklidischer Algorithmus**

Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen

$$\operatorname{ggT}(a,b) = \operatorname{ggT}(b, a \bmod b), \text{ falls } b \neq 0 \quad \operatorname{ggT}(a, 0) = a, \text{ falls } b = 0$$

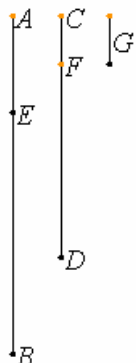
**Beispiel** 2862 : 504 = 5 Rest 342      504 : 342 = 1 Rest 162  
 342 : 162 = 2 Rest 18      162 : 18 = 9 Rest 0 d.h. ggT = 18

**Ablaufplan**

$x = a; y = b;$   
 Solange  $y > 0$  ist, wiederhole  $r = x \bmod y$  ;  $x = y$  ;  $y = r$   
 Ergebnis x

**Lamé-Theorem**

Die maximal notwendige Schrittzahl des Euklidischen Algorithmus für Paare (a,b) mit  $a, b < n$  beträgt  $\leq 4,785 \lg 10 + 1,6723$ , d.h. die maximale Schrittzahl ist höchstens 5 mal so groß, wie die Ziffernzahl der kleineren Zahl.  
 mittlere Schrittzahl für (n,b) mit  $b < n \dots 0,843 \lg n$   
 Der schlechteste Fall (worst case) tritt für zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen auf!



**Euklidischer Algorithmus (2)**

Im Buch VII § 2 (A. 1) der "Elemente" gibt Euklid erstmals die Beschreibung des nach ihm benannten Euklidischen Alorithmus zur Bestimmung des ggT zweier Zahlen.

**Aufgabe: Zu zwei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, ihr größtes gemeinsames Maß zu finden.**

Die zwei gegebenen Zahlen, die nicht prim gegeneinander sind, seien AB, CD. Man soll das größte gemeinsame Maß von AB, CD finden.

Wenn CD hier AB misst - sich selbst misst es auch - dann ist CD gemeinsames Maß von CD, AB. Und es ist klar, dass es auch das größte ist; denn keine Zahl  $> CD$  kann CD messen.

Wenn CD aber AB nicht misst, und man nimmt bei AB, CD abwechselnd immer das kleinere vom größeren weg, dann muss schließlich eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst. Die Einheit kann nämlich nicht übrig bleiben; sonst müssten AB, CD gegeneinander prim sein (VII, 1), gegen die Voraussetzung.

Also muss eine Zahl übrig bleiben, die die vorangehende misst. CD lasse, indem es BE misst, EA, kleiner als es selbst, übrig; und EA lasse, indem es CD misst, FC, kleiner als es selbst, übrig; und CF messe AE.

Da CF AE misst und AE DF, muss CF auch DF messen, es misst aber auch sich selbst, muss also auch das Ganze CD messen. CD misst aber BE, also misst CF auch BEM es misst aber auch EA, muss also auch das Ganze BA messen.

Und es misst auch CD; CF misst also AB und CD; also ist CF gemeinsames Maß von AB CD. ...

### Euklidischer Algorithmus Tabelle

Die Tabelle enthält jeweils die kleinsten Paare, für welche k Schritte im Euklidischen Algorithmus notwendig sind:

k	Paare
1	(3,2), (4,3), (5,2), (5,4), (6,4), (6,5), (7,2), (7,3), (7,6), (8,6) ...
2	(5,3), (7,4), (7,5), (8,3), (9,5), (9,7), (10,6), (10,7), (11,3), (11,4) ...
3	(8,5), (11,7), (11,8), (12,7), (13,5), (14,9), (14,11), (15,11), (16,9), (16,10) ...
4	(13,8), (18,11), (18,13), (19,11), (19,12), (21,8), (23,14), (23,18), (25,14), (25,16) ...
5	(21,13), (29,18), (29,21), (30,19), (31,18), (31,19), (34,13), (37,23), (37,29), (39,25) ...
6	(34,21), (47,29), (47,34), (49,30), (49,31), (50,29), (50,31), (55,21), (60,37), (60,47) ...
7	(55,34), (76,47), (76,55), (79,49), (79,50), (80,49), (81,47), (81,50), (89,34), (97,60) ...
8	(89,55), (123,76), (123,89), (128,79), (128,81), (129,79), (129,80), (131,76), (131,81), (144,55) ...
9	(144,89), (199,123), (199,144), (207,128), (207,131), (208,129), (209,128), (209,129), ...
10	(233,144), (322,199), (322,233), (335,207), (335,212), (337,208), (337,209), (338,207), ...
11	(377,233), (521,322), (521,377), (542,335), (542,343), (545,337), (545,338), (546,337), ...
12	(610,377), (843,521), (843,610), (877,542), (877,555), (882,545), (882,547), (883,545), ...
13	(987,610), (1364,843), (1364,987), (1419,877), (1419,898), (1427,882), (1427,885), ...
14	(1597,987), (2207,1364), (2207,1597), (2296,1419), (2296,1453), (2309,1427), (2309,1432), ...

Die Zahlen der jeweils genannten zweiten Paare gehören zu der Lucas-Zahlenfolge, welche mit der Fibonacci-Folge verwandt ist.

### Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der euklidische Algorithmus kann zur Lösung einer Diophantischen Gleichung (Theorem von Bézout) der Form

$$s a + t b = \text{ggt}(a,b)$$

genutzt werden. Eine eindeutige, nicht triviale Lösung s und t existiert, wenn a und b teilerfremd sind, d.h.  $\text{ggt}(a,b) = 1$ .

Der euklidische Algorithmus wird dazu erweitert (Eingabe a, b):

```

s ← 1, t ← 0, b1 ← 0, b2 ← 1
while b ≠ 0 do
  q = a div b, r = a mod b
  a ← b, b ← r
  r1 ← s - q b1, r2 ← t - q b2
  s ← b1, t ← b2, b1 ← r1, b2 ← r2
return(s,t)

```

Die Rückgabewerte s und t sind die Funktionswerte der Bézout-Funktion  $\text{bézout}(a,b)$ . Dabei sind  $s = \text{bézout}(a,b)$  und  $t = \text{bézout}(b,a)$ .

Für die Bézout-Funktion gilt  $\text{bézout}(x, \pm x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x)$   $\text{bézout}(-x,y) = -\text{bézout}(x,y)$  ;  $\text{bézout}(x,-y) = \text{bézout}(x,y)$

### Berlekamp-Algorithmus, Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Der erweiterte Euklidische Algorithmus wird in der Literatur auch Berlekamp-Algorithmus genannt.

Algorithmus: Berlekamp(a, b)

```

1   if b = 0 then return (a, 1, 0)
2   (d', x', y') ← Berlekamp(b, a mod b)
3   (d, x, y) ← (d', y' x' - [a/b] y)
4   return (d, x, y)

```

Das Tupel (d, x, y) stellt eine Lösung der Gleichung  $ax + by = \text{ggt}(a,b)$  dar.

Sofern der größte gemeinsame Teiler von a und b gleich 1 ist, ist x das bezüglich b modulare Inverse zu a, welches im RSA-Verfahren zur Bestimmung des privaten Schlüssels benötigt wird. Wie der Euklidische Algorithmus besitzt auch der Berlekamp-Algorithmus eine Bit-Komplexität von  $O(n^3)$ .

### Spezielle ggT-Gleichung

Die Lösung der einfach formulierten, aber sehr komplizierten Ungleichung

$$\text{ggT}((n-1)^a + b, n^a + b) \neq 1$$

kann schon für kleine a und b als kleinste ganzzahlige Lösungen n zu extrem großen Zahlen führen. Für a = 17 und b = 9 ist das erste erfüllende n =

8424432925592889329288197322308900672459420460792433.

Die Tabelle enthält die jeweils erste Lösung n für ausgewählte a und b (Dezember 2005, Polster). Der Eintrag \*\*\* steht für das oben angegebene Ergebnis.

a	b=1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	2	7	9	2	3	15	2	19
3	6	52	57	211	6	2	321	6	534
4	9	2	4	2	2	49	57	2	2
5	7	40334	30	83	533361	10	675114	5238150	33
6	3	2	97	129	2	2	225	2	289
7	5	435	1159824	>100 Mill.	56	20	14	24748	485
8	6	2	385	2	2	15	6	2	2
9	3	17	10	23	8	2	284	6	365
10	3	2	4	9	2	3	34	2	7
11	11	1235	>21 Mill.	>15 Mill.	>15 Mill.	>15 Mill.	193	>15 Mill.	176428
12	9	2	14	2	2	2	27	2	2
13	7	78608	248	>15 Mill.	42	1944	243	>15 Mill.	31240
14	3	2	7	7785	2	3	6	2	534
15	4	8311	16	101	6	2	3	6	9
16	7	2	4	2	2	6	11	2	2
17	15	817173	1257	>15 Mill.	3776	>6 Mill.	141	9381	***
18	3	2	5	9	2	2	6	2	31
19	38	474	>6 Mill.	180	42297	>6 Mill.	51	87941	16562
20	7	2	16	2	2	10	143	2	2

### ggT-Bestimmung mit Primfaktoren

In den Klassenstufe 5 und 6 werden der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen oft nicht mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus bestimmt.

Vielmehr geht man den Weg, ggT und kgV aus den Primfaktorzerlegungen der Zahlen zu bestimmen. Für kleinere Zahlen kann dies einen kleinen Vorteil erbringen, da effektiv auch ggT und kgV mehrerer Ausgangszahlen ermittelt werden. Für größere Zahlen scheidet das Verfahren am Problem der Primfaktorzerlegung, die sehr aufwendig sein kann. Es gilt:

Der ggT zweier oder mehrerer Zahlen ist das Produkt der niedrigsten Potenzen ihrer gemeinsamen Primfaktoren.

Das kgV zweier oder mehrerer Zahlen ist das Produkt aus den höchsten Potenzen aller vorhandenen Primfaktoren.

### Beispiele

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$396 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$\text{ggT}(168, 180, 396) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$$

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{kgV}(48, 56, 180) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$$

Mitunter wird das kleinste gemeinsame Vielfache auch aus der Beziehung

$$\text{kgV}(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) / \text{ggT}(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

gewonnen.

### Erweiterter größter gemeinsamer Teiler, eggT

Nach der klassischen Definition des größten gemeinsamen Teilers gilt

$$\text{ggT}(x \cdot p, x \cdot q) = x \cdot \text{ggT}(p, q)$$

Damit ist es möglich den ggT auf beliebige rationale Zahlen  $a/b$ ,  $c/d$  zum erweiterten größten gemeinsamen Teiler zu erweitern. Ist  $h$  der Hauptnenner von  $b$  und  $d$ , so kann dieser aus  $\text{ggT}(a/b, c/d)$  als Faktor ausgeklammert werden. Die weitere Berechnung erfolgt analog.

Beispiel:  $\text{eggT}(2/3, 1/2) = \text{eggT}(4/6, 3/6) = 1/6 \cdot \text{eggT}(4, 3) = 1/6$

Über die Beziehung  $p \cdot q = \text{ggT}(p, q) \cdot \text{kgV}(p, q)$  erhält man das erweiterte kleinste gemeinsame Vielfache  $\text{ekgV}$ :

$$\text{ekgV}(a/b, c/d) = a/b \cdot c/d / \text{eggT}(a/b, c/d)$$

Beispiel:  $\text{ekgV}(2/3, 1/2) = 2/3 \cdot 1/2 / \text{eggT}(2/3, 1/2) = 1/3 / 1/6 = 2$

Für reelle Zahlen  $r$  und  $s$  definiert man, dass beide kommensurabel sind, wenn diese proportional zu zwei ganzen Zahlen sind. Sind  $r$  und  $s$  nicht kommensurabel, so definiert man  $\text{eggT}(r, s) = 0$ .

Zur näherungsweisen Überprüfung der Inkommensurabilität zweier reeller Zahlen  $x$  und  $y$  setzt man eine untere Grenze des  $\text{eggT}$ , zum Beispiel:  $\text{eggT}(x, y) < \varepsilon = 10^{-100}$

### Teilbarkeitssätze

Für alle ganzen Zahlen  $a$  und  $b$  existiert genau ein Paar ganzer Zahlen  $q$  und  $r$ , so dass  $a = q \cdot b + r$  und  $0 \leq r < b$ . Ist  $r = 0$ , so heißt  $b$  Teiler von  $a$ ,  $b \mid a$ . Es gilt:

1.  $a \mid b$  und  $b \mid a \Rightarrow a = b$
2.  $a \mid b$  und  $b \mid c \Rightarrow a \mid c$  (Transitivität)
3.  $a \mid b$  und  $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$
4.  $a \mid b$  und  $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid c$
5.  $a \mid b$  und  $a \mid c \Rightarrow a \mid b \cdot c$
6.  $a \mid c$  und  $b \mid c$  und  $\text{ggT}(a, b) = 1 \Rightarrow a \cdot b \mid c$
7.  $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c$  und  $b \mid c$

### Das "Mäuseproblem"

Eine Stadt wird von einer Mäuseplage heimgesucht.

Deshalb beschließen die Einwohner Katzen anzusiedeln. Jede Katze frisst nun gleichviel Mäuse und mehr Mäuse, als es Katzen sind. Insgesamt werden 10001 Mäuse gefressen und die Stadt von der Plage erlöst. Frage: Wie viele Katzen waren es?

Lösung: Die Aufgabe verlangt die Suche nach einer natürlichen Zahl  $K$ , die Anzahl der Katzen. Ist  $M$  die Anzahl der von jeder Katze gefressenen Mäuse, so ist  $K \cdot M = 10001$ .

D.h. es sind echte Teiler von 10001 zu suchen. Da 10001 nur die Teiler 1, 73, 137 und 10001 hat, und von mehr als einer Katze die Rede ist, müssen es  $K = 73$  Katzen gewesen sein. Jede Katze beseitigte jeweils 137 Mäuse.

Anmerkung: Diese einfache Aufgabe der Zahlentheorie ist nur eindeutig lösbar, da 10001 genau 2 echte Teiler hat. Z.B. gebe es für 10004 Mäuse fünf verschiedene Lösungen.  $10004 = 2 \cdot 2 \cdot 41 \cdot 61$  und da  $K < M$  mit den Lösungspaaren  $(K, M) = (61, 164), (41, 244), (82, 122), (4, 2501)$  und  $(2, 5002)$ , wobei die letzten beiden ziemlich unrealistisch sind.

### Professor Suzuki und seine drei Kinder

Professor Suzuki und Professor Baba begegnen sich in der Mensa der Waseda-Universität.

Suzuki: "Guten Abend, mein Bester. Wie geht es Ihnen?"

Baba: "Hervorragend, danke. Und Ihnen?"

Suzuki: "Sehr gut. Sie wissen, dass ich inzwischen drei Kinder habe ..."

Baba: "Wirklich? Wie alt sind sie denn?"

Suzuki: "Nun, Sie als guter Mathematiker und Logiker dürften es rasch herausbekommen."

Das Produkt ihrer Lebensalter ist 36, und die Summe ihrer Lebensalter ist identisch mit der Nummer des Hauses, das sie in Osaka bewohnen."

Baba (nach einer Pause): "Diese Informationen reichen mir nicht."

Suzuki: "Sie haben recht. Also das älteste Kind spielt Klavier."

Baba: "Aha, jetzt weiß ich, wie alt sie sind."

Wie alt sind die Kinder im einzelnen?

Da Alter der drei Leute soll natürlich als ganzzahlig angenommen werden. Es gibt 8 verschiedene Möglichkeiten, aus einem Produkt von drei natürlichen Zahlen als Ergebnis 36 zu erhalten. Die folgende Tabelle zeigt diese Produkte zusammen mit der Summe:

$$1 \cdot 1 \cdot 36 = 36; \text{ Summe: } 38 \quad 1 \cdot 2 \cdot 18 = 36; \text{ Summe: } 21$$

$$1 \cdot 3 \cdot 12 = 36; \text{ Summe: } 16 \quad 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36; \text{ Summe: } 14$$

$$1 \cdot 6 \cdot 6 = 36; \text{ Summe: } 13 \quad 2 \cdot 2 \cdot 9 = 36; \text{ Summe: } 13$$

$$2 \cdot 3 \cdot 6 = 36; \text{ Summe: } 11 \quad 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36; \text{ Summe: } 10$$

Nur wenn die Summe 13 beträgt, reichen die Informationen noch nicht zur Lösung aus, weil dann das Ergebnis noch nicht eindeutig ist. Da es aber ein ältestes Kind geben soll, kommt nur die folgende Lösung in Frage: 9, 2 und 2

## Der Bischof und die drei Kirchenbesucher

Ein Pfarrer sagt zum Organisten: "Heute waren nur drei Leute in der Kirche."

Organist: "Wie alt waren denn die drei?"

Pfarrer: "Also, wenn du die jeweiligen Alter miteinander multiplizierst, dann ergibt das 2450. Zusammen genommen sind sie so alt wie du."

Organist: "Hmm, also mit diesen Informationen kann ich das ja wohl noch nicht lösen!"

Pfarrer: "Ach ja, ich muss noch erwähnen, dass alle drei jünger waren als unser Bischof!"

Organist: "Aha, jetzt hab ich's!"

Wie alt ist der Bischof?

Das Alter der drei Kirchenbesucher soll als ganzzahlig angenommen werden. Es gibt 20 verschiedene Möglichkeiten, aus einem Produkt von drei natürlichen Zahlen als Ergebnis 2450 zu erhalten. Die folgende Tabelle zeigt diese Produkte zusammen mit der Summe, wobei 8 Fälle nur theoretische Bedeutung haben:

1 · 1 · 2450; Summe: 2452	1 · 2 · 1225; Summe: 1228
1 · 5 · 490; Summe: 496	1 · 7 · 350; Summe: 358
1 · 10 · 245; Summe: 256	1 · 14 · 175; Summe: 190
1 · 25 · 98; Summe: 124	1 · 35 · 70; Summe: 106
1 · 49 · 50; Summe: 100	2 · 5 · 245; Summe: 252
2 · 7 · 175; Summe: 184	2 · 25 · 49; Summe: 76
2 · 35 · 35; Summe: 72	5 · 5 · 98; Summe: 108
5 · 7 · 70; Summe: 82	5 · 10 · 49; Summe: 64 #
5 · 14 · 35; Summe: 54	7 · 7 · 50; Summe: 64 #
7 · 10 · 35; Summe: 52	7 · 14 · 25; Summe: 46

Da der Organist die Aufgabe mit diesen Informationen noch nicht lösen kann, muss er 64 Jahre alt sein. Denn nur wenn die Summe 64 (mit # gekennzeichnet) beträgt, ist das Produkt nicht eindeutig.

Da die zusätzliche Information besagt, dass der Bischof älter als die Kirchenbesucher ist, muss er mindestens 50 Jahre alt sein.

Wäre der Bischof 51 Jahre oder älter, kämen beide Möglichkeiten für das Alter der Kirchenbesucher in Frage und der Organist könnte die Aufgabe immer noch nicht lösen.

Damit kann der Bischof nur 50 Jahre alt sein. Die Kirchenbesucher sind 5 Jahre, 10 Jahre und 49 Jahre alt.

## Luzifer-Rätsel

Das Luzifer-Rätsel ist ein mathematisches Rätsel aus dem Bereich der Zahlentheorie, das auf den Mathematiker Hans Freudenthal zurückgeht.

Das Rätsel demonstriert, wie bereits einfach formulierte und allgemein erscheinende Voraussetzungen der Ausgangspunkt zu komplexen mathematischen Überlegungen sein können und auch eine präzise und eindeutige Lösung liefern.

Es ist deshalb recht weit verbreitet als Übungsaufgabe in der mathematischen Ausbildung oder als intelligentes Preisrätsel.

**Rätsel:** Eine populäre Fassung, die zur Bezeichnung "Luzifer-Rätsel" führte, lautet in etwa folgendermaßen:

Die berühmten Mathematiker Carl Friedrich Gauß und Leonhard Euler landen nach ihrem Tod in der Hölle. Luzifer verspricht ihnen die Freiheit, wenn sie die beiden ganzen Zahlen zwischen 1 und 100 (d.h. im Bereich 2,3,...,99) erraten, die er sich ausgedacht hat. Er nennt Gauß das Produkt und Euler die Summe der beiden Zahlen; darauf entwickelt sich zwischen den Mathematikern folgender Dialog:

Gauß: "Ich kenne die beiden Zahlen nicht."

Euler: "Das war mir klar."

Gauß: "Jetzt kenne ich die beiden Zahlen."

Euler: "Dann kenne ich sie jetzt auch."

Unabhängig von der Frage, ob Gauß und Euler aus der Hölle entkommen, lautet die Aufgabe, allein aus diesen Angaben die beiden Ausgangszahlen zu ermitteln.

**Lösung des Rätsels:** <http://de.wikipedia.org/wiki/Luzifer-R%C3%A4tsel>

## Teilerfremde Reste

Die kleinsten positiven Reste (mit Rest 0), welche bei der Division beliebiger natürlicher Zahlen mit der Zahl  $m$  auftreten können, sind  $0, 1, 2, \dots, m-1$

Unter diesen finden sich stets Reste, welche zu  $m$  relativ prim (teilerfremde Reste) sind, z.B. immer die 1. Die Menge der zum Modul  $m$  relativ primen Reste heißt reduziertes Restsystem mod  $m$ .

Die Anzahl seiner Elemente wird mit  $\phi(m)$  bezeichnet und die eindeutige Abbildung  $m \rightarrow \phi(m)$  als Eulersche Funktion bezeichnet.

Zahl $m$	$\phi(m)$
Primzahl $m$	$m - 1$
$m = p^a q^b$	$m (1 - 1/p) (1 - 1/q)$
$m = p^a q^b r^c$	$m (1 - 1/p) (1 - 1/q) (1 - 1/r)$

und allgemein  $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$   $\phi(m) = m (1 - 1/p_1) (1 - 1/p_2) \dots (1 - 1/p_k)$

Tabelle der Funktionswerte  $\phi(m)$  der ersten zusammengesetzten Zahlen

$\phi(m)$	m	$\phi(m)$	m	$\phi(m)$	m	$\phi(m)$	m
2	4, 6	4	8, 10, 12	6	9, 14, 18	8	15, 16, 20, 24, 30
10	22	12	21, 26, 28, 36	16	32, 34, 16	18	27, 38
20	25, 33	24	35, 39				

### Restklassen

Sei p eine natürliche Zahl. Man kann - ohne in Widersprüche zu geraten - beim Addieren und Multiplizieren von ganzen Zahlen jede auftretende Zahl durch den Rest, der sich bei Division durch p ergibt, ersetzen.

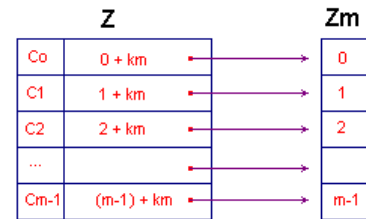
Ist etwa  $p = 3$ , so wird nicht mehr zwischen 2 und 5 unterschieden !

Das kann auch in der Form  $5 = 2 \text{ mod}(3)$  ausgedrückt werden. Unter diesem Gesichtspunkt gibt es nur drei verschiedene Zahlen, nämlich 0, 1 und 2. Diese drei Objekte heißen Restklassen modulo 3.

Tatsächlich steht 0 nicht nur für die Zahl 0, sondern für alle ganzzahligen Vielfachen von 3 (1 steht für alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 ergeben, und 2 steht für alle ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 2 ergeben.) Daher heißen sie "Klassen".

Die Menge der Restklassen modulo 3 hat also 3 Elemente und wird als  $Z_3$  bezeichnet. Für eine beliebige natürlichen Zahl p führt dies zur Menge  $Z_p$  der Restklassen modulo p. Falls p eine Primzahl ist, kann innerhalb dieser Menge sogar dividiert werden. Sie hat dann die Struktur eines Körpers (Restklassenkörper).

In der Darstellung wird die Menge der ganzen Zahlen Z in die Restklassen 0, 1, ..., m-1 von  $Z_m$  aufgeteilt.



### Prime Restklassen

Eine Restklasse  $[a]_m$  mit  $\text{ggT}(a, m) = 1$  nennt man eine prime Restklasse modulo m. Ist p eine Primzahl, dann sind alle von  $[0]_p$  verschiedenen Restklassen prime Restklassen modulo p.

Die primen Restklassen modulo p bilden bezüglich der Restklassenmultiplikation eine Abelsche Gruppe, die prime Restklassengruppe modulo m. Die Ordnung dieser Gruppe ist  $\phi(m)$ .

### Kongruenz

Zwei ganze Zahlen a und b, die bei der Division durch eine ganze Zahl m ( $m > 0$ ) denselben Rest lassen, nennt man

**kongruent nach dem Modulo m.**

$$a \equiv b \text{ mod } m \quad \text{oder} \quad a \equiv b \pmod{m}$$

### Eigenschaften

$$a \equiv a \pmod{m} \quad \text{Reflexivität}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m} \quad \text{Symmetrie}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ und } b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m} \quad \text{Transitivität}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ und } c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ und } c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a * c \equiv b * d \pmod{m}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

$$a * b \equiv 0 \pmod{p} \text{ und } p \text{ ist Primzahl} \Rightarrow a \equiv 0 \text{ oder } b \equiv 0 \pmod{p}$$

$$a * c \equiv b * c \pmod{m} \text{ und } c \neq 0 \text{ und } \text{ggT}(c, m) = d \Rightarrow a \equiv b \pmod{m/d}$$

$$a * c \equiv b * c \pmod{m} \text{ und } c \neq 0 \text{ und } \text{ggT}(c, m) = 1 \Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

**Achtung! Folgende Beziehungen gelten im Allgemeinen nicht !**

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ und } c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a^c \equiv b^d \pmod{m} \quad a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow n^a \equiv n^b \pmod{m}$$

### Sätze über Kongruenzen

1.  $\text{ggT}(a, m) = d$  und  $ap \equiv aq \pmod{m} \Rightarrow p \equiv q \pmod{m/d}$

2.  $\text{ggT}(a, m) = 1$  und  $ap \equiv aq \pmod{m} \Rightarrow p \equiv q \pmod{m}$

3.  $\text{ggT}(b, m) = 1 \Rightarrow$  es gibt genau ein x mit  $bx \equiv 1 \pmod{m}$

4. Wenn  $\text{ggT}(b, m) = 1$  gilt, so ist die Kongruenz  $bx \equiv a \pmod{m}$  eindeutig lösbar.  $x \equiv a/b \pmod{m}$

Hinweis:  $a/b$  steht hier für die Restklasse und nicht für die rationale Zahl (Bruch)  $a:b$ .

5.  $a/b + c/d \equiv (ad+bc)/bd \pmod{m}$

6.  $a/b - c/d \equiv (ad-bc)/bd \pmod{m}$

7.  $a/b * c/d \equiv ac/bd \pmod{m}$

8.  $a/b : c/d \equiv ad/bc \pmod{m}$ , für  $\text{ggT}(bc, m) = 1$  !

9.  $a/b \equiv ac/bc \pmod{m}$

Satz von Wilson:  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow p$  ist eine Primzahl

Kleiner Satz von Fermat: Ist p eine Primzahl und a kein Vielfaches von p, so gilt  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

10. für jede ungerade Zahl a gilt:  $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$

11. für jede ganze Zahl gilt entweder  $a^3 \equiv 0 \pmod{9}$  oder  $a^3 \equiv 1 \pmod{9}$  oder  $a^3 \equiv 8 \pmod{9}$

12. für jede ganze Zahl gilt entweder  $a^3 \equiv 0 \pmod{7}$  oder  $a^3 \equiv 1 \pmod{9}$  oder  $a^3 \equiv 6 \pmod{9}$



13. für jede ganze Zahl gilt entweder  $a^4 \equiv 0 \pmod{5}$  oder  $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$   
 14. sei  $p$  eine Primzahl mit  $n < p < 2n$ . Dann gilt  $\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p}$   
 15. sei  $a$  eine ungerade ganze Zahl. Ferner sei  $n > 0$ . Dann gilt:  $a^{2n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$

### Beispielaufgaben zu Kongruenzen

Beispiel 1: Mit welcher Ziffer endet die Zahl  $333^{222}$ ?

Es ist  $333 \equiv 3 \pmod{10}$ . Daraus folgt mit der Potenzregel ( $a = 333, b = 3, m = 10, n = 222$ ):

$$333^{222} \equiv 3^{222} \pmod{10}$$

Es gilt  $3^2 \equiv -1 \pmod{10}$ . Erneute Anwendung der Potenzregel ( $a = 3^2, b = -1, m = 10, n = 111$ ) liefert:

$$3^{222} \equiv 3^{2 \cdot 111} \equiv (-1)^{111} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}; \text{ die Endziffer lautet } 9.$$

Beispiel 2: Ist  $2^{20} - 1$  durch 41 teilbar?

Es ist  $2^5 \equiv -9 \pmod{41}$ . Daraus folgt mit der Potenzregel ( $a = 2^5, b = -9$ ):

$$(2^5)^4 \equiv (-9)^4 \equiv 81 \cdot 81 \pmod{41}$$

Andererseits gilt  $81 \equiv -1 \pmod{41}$ . Die Potenzregel liefert  $81^2 \equiv 1 \pmod{41}$  und insgesamt

$$2^{20} - 1 \equiv 81 \cdot 81 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{41}; 2^{20} - 1 \text{ ist durch } 41 \text{ teilbar.}$$

Beispiel 3: Behauptung, dass  $2^{340} - 1$  durch 341 teilbar ist. Diese Eigenschaft besagt, dass die Zahl 341 eine Fermatsche Pseudoprimzahl zur Basis 2 ist.

$$2^{10} = 1024 = 3 \cdot 341 + 1 \equiv 1 \pmod{341} \Rightarrow 2^{340} \equiv 1 \pmod{341} \Rightarrow 2^{340} - 1 \equiv 0 \pmod{341}$$

Beispiel 4: Welcher Rest ergibt sich, wenn man die Summe  $s(9999) := 1! + 2! + 3! + \dots + 9999!$  durch 12 teilt?

Gesucht wird ein  $n$  mit  $s(9999) \equiv n \pmod{12}$ . Es gilt

$$1! + 2! + 3! \equiv 9 \pmod{12} \text{ und } 4! \equiv 0 \pmod{12}$$

Daraus folgt mit der Multiplikationsregel für  $k > 3$

$$k! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot k \equiv 0 \pmod{12}$$

Anwendung der Additionsregel liefert  $s(9999) = 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 9999! \equiv 9 \pmod{12}$

Wenn man  $s(9999)$  durch 12 teilt, bleibt als Rest 9 übrig.

Beispiel 5: Für jede ganze Zahl  $a$  gilt  $a^3 \equiv a \pmod{6}$ , d.h. teilt man  $a^3$  durch 6, dann bleibt als Rest die Zahl  $a \pmod{6}$  selbst.

Es ist  $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$ . Dieses Produkt ist sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, daher auch durch 6. Damit gilt  $a^3 - a \equiv 0 \pmod{6}$

Beispiel 6: Zeige, dass  $z = 43^7 - 87^{13}$  durch 44 teilbar ist.

Es genügt  $z \equiv 0 \pmod{44}$  zu zeigen. Da  $87 \equiv 43 \equiv -1 \pmod{44}$  gilt, wird  $z \equiv (-1)^7 - (-1)^{13} = (-1) - (-1) = 0 \pmod{44}$

Beispiel 7: Auf welche 3 Ziffern endet die Zahl  $2^{100}$ ?

Es ist  $2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} \equiv 24 \pmod{1000}$ , d.h.

$$2^{100} \equiv 24^{10} = (24^3)^3 \cdot 24 \pmod{1000}$$

Da  $24^3 = 13824 \equiv 824 \pmod{1000}$  ist wird

$$2^{100} \equiv 824^3 \cdot 24 = (824^2) (824 \cdot 24) \pmod{1000} \equiv 976 \cdot 776 = 757376 \equiv 376 \pmod{1000}$$

Die Zahl endet auf die drei Ziffern 376.

Analog findet man, dass  $2^{1000}$  auf 376 und  $3^{1000}$  auf 001 enden.

Beispiel 8: Zeige, dass eine Quadratzahl bei Division durch 4 nur den Rest 0 oder 1 lassen kann!

Eine Quadratzahl hat immer die Gestalt  $a^2$  mit einer natürlichen Zahl  $a$ . Da es bei ihrem Rest  $(\pmod{4})$  nur auf den Rest von  $a$  ankommt, kann man die Aussage durch vollständige Fallunterscheidung lösen:

$a \pmod{4}$	$a^2 \pmod{4}$
0	0
1	1
2	$4 \equiv 0$
3	$9 \equiv 1$

Analog kann man beweisen:

Beispiel 9: Zeige, dass die Summe zweier ungerader Quadratzahlen niemals eine Quadratzahl sein kann.

Beispiel 10: Beweise folgende Aussage: Ist die Summe zweier Quadratzahlen durch 3 teilbar, so auch jeder der beiden Summanden.

### Modulares Inverses

Sei  $m > 1$  und sei  $a$  eine ganze Zahl. Gibt es eine Zahl  $b$ , sodass  $ab \equiv 1 \pmod{m}$ , so heißt  $a$  invertierbar modulo  $m$  und  $b$  heißt modulares Inverses von  $a$ . Man schreibt

$$b = a^{-1} \pmod{m}.$$

Nach dem Lemma von Bézout gilt: Sind  $a$  und  $m$  teilerfremd, dann gibt es ganze Zahlen  $x$  und  $y$  mit

$$xa + ym = 1$$

Dann ist aber

$$xa = 1 + (-y)m \equiv 1 \pmod{m}.$$

Das heißt, der Bézout-Koeffizient  $x$  ist das modulare Inverse von  $a$ .

Satz von der Existenz des modularen Inversen:

Sei  $m > 1$  und sei  $a$  eine ganze Zahl. Dann ist  $a$  genau dann invertierbar modulo  $m$ , wenn  $a$  und  $m$  teilerfremd sind. Das Inverse von  $a$  lässt sich dann mithilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen.

### Neunerprobe

Bei der Division durch 9 sind alle 9 verschiedenen Reste  $\{0, 1, 2, \dots, 8\}$  möglich. Nach den Rechenregeln für Kongruenzen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) ist damit der Neunerrest einer Summe gleich der Summe der Neunerreste der Summanden.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, relativ leicht Fehler bei Rechnungen zu vermindern. Dazu bestimmt man die Neunerreste der Operanden, deren Rechenergebnis und den Rest der eigentlichen Berechnungsaufgabe.

Stimmen die Reste nicht überein, so ist die Rechnung mit Sicherheit falsch. Bei übereinstimmenden Resten ist die Richtigkeit des Resultates nicht unbedingt sicher, aber wahrscheinlich, da z.B. Zahlendreher mit der Neunerprobe nicht entdeckt werden können.

### Beispiel:

Aufgabe:  $48 + 53 = 101$  ?

Reste:  $48 \equiv 3 \pmod{9}$ ,  $53 \equiv 8 \pmod{9}$ ,  $101 \equiv 2 \pmod{9}$ , da  $3 + 8 = 11 \equiv 2 \pmod{9}$  ist, ergibt die Neunerprobe ein wahrscheinlich richtiges Ergebnis.

Aufgabe:  $17 \cdot 23 \cdot 19 = 7439$  ?

Reste:  $17 \equiv 8 \pmod{9}$ ,  $23 \equiv 5 \pmod{9}$ ,  $19 \equiv 1 \pmod{9}$  und  $7439 \equiv 7 \pmod{9}$ . Für das Produkt der Rest wird  $8 \cdot 5 \cdot 1 = 40 \equiv 4 \pmod{9}$  und damit eine Abweichung vom Neunerrest von 7439. Das Ergebnis ist falsch. Korrekt ist 7429.

### Elferprobe

So wie die Quersumme den Neunerrest einer Zahl liefert, so erhält man durch die alternierende Quersumme den Elferrest, wobei darauf zu achten ist, welche Stellen einen Beitrag zum Minuenden und welche einen zum Subtrahenden der alternierenden Quersumme liefern.

### Neunerprobe bei Adam Ries (1492 bis 1559)

```

7869
8796
-----
16665

```



"Mach ein creutz zum ersten. Nimm die prob von der oberenn Zal, als von 7869 setz die in ein veld des creutz,



Nun nimm die proba von der andernnn Zahl, das ist von 8796 ist auch 3; setz vff das ander veldtt neben vber,



Addir nun zusammen  $3 + 3$  wirtt 6, setz obenn wie hi (siehe Abbildung)



So du nun die prob von beyden Zalnn oben gesatzet genumen und zusammen addirt hast, so Nime alsdann prob auch von dem, das so auß dem addirn komen ist, das ost von der vntersten Zal vnder der linihen akss 16665.

Nim hinweg 9, so offt du magst, pleibn 6 übrig die setz vnden in das ledige feltt. Ist gleich souil sam oben stett.



So weniger oder mer komen wer, so hattest du im nicht recht gethan."

### Lineare Kongruenz

Definition: Sind  $a$ ,  $b$  und  $m > 0$  ganze Zahlen, dann wird  $ax \equiv b \pmod{m}$  lineare Kongruenz in der Unbekannten  $x$  genannt.

Eine ganze Zahl  $x^*$ , die die Bedingung  $ax^* \equiv b \pmod{m}$  erfüllt, ist eine Lösung dieser Kongruenz. Jede ganze Zahl, die zu  $x^*$  kongruent modulo  $m$  ist, ist ebenfalls eine Lösung. Will man alle Lösungen von  $ax \equiv b$  angeben, dann genügt, die paarweise modulo  $m$  inkongruenten ganzen Zahlen zu finden, die die Kongruenz erfüllen.

Die Kongruenz ist genau dann lösbar, wenn  $\text{ggT}(a,m)$  ein Teiler von  $b$  ist. Die Anzahl der Lösungen modulo  $m$  ist dann gleich  $\text{ggT}(a,m)$ . Ist insbesondere der  $\text{ggT}(a,m)=1$ , dann ist die Kongruenz modulo  $m$  eindeutig lösbar.

Lösungsverfahren: Es gibt verschiedene Lösungsverfahren für lineare Kongruenzen. Z.B. kann man die Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$  in die diophantische Gleichung  $ax + my = b$  umformen und zunächst eine spezielle Lösung  $(x_0, y_0)$  der linearen diophantischen Gleichung  $a'x + m'y = b'$  mit  $a' = a/\text{ggT}(a,m)$ ,  $m' = m/\text{ggT}(a,m)$  und  $b' = b/\text{ggT}(a,m)$  ermitteln.

Die Kongruenz  $a'x \equiv b' \pmod{m'}$  ist wegen  $\text{ggT}(a',m')=1$  modulo  $m'$  eindeutig lösbar, und es gilt:  $x \equiv x_0 \pmod{m'}$

Die Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$  hat modulo  $m$  genau  $\text{ggT}(a,m)$  Lösungen:  $x_0, x_0 + m, x_0 + 2m, \dots, x_0 + (\text{ggT}(a,m)-1)m$

Beispiel:  $114x \equiv 6 \pmod{315}$  ist lösbar, denn  $\text{ggT}(114,315)=3$  ist Teiler von 6; es gibt 3 Lösungen modulo 315.

$38x \equiv 2 \pmod{105}$  ist eindeutig lösbar,  $x \equiv 94 \pmod{105}$ . Also sind 94, 199 und 304 die Lösungen von  $114x \equiv 6 \pmod{315}$ .

### Vollständiges Restsystem

Die Menge  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$  wird vollständiges Restsystem mod  $m$  genannt, wenn die  $x_i$  Elemente der Restklassen  $C_i$  (mit  $i=0, 1, \dots, m-1$ ) sind und alle Restklassen vertreten sind.

Zum Beispiel ist  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ein vollständiges Restsystem mod 7, aber  $\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ . Dann gilt:

Ist  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$  ein vollständiges Restsystem (mod  $m$ ) dann ist auch  $\{ax_0 + b, ax_1 + b, \dots, ax_{m-1} + b\}$  ein vollständiges Restsystem (mod  $m$ ), wenn  $\text{ggd}(a,m) = 1$  und  $b$  beliebig.

Sind  $\{x_1, \dots, x_m\} \pmod{m}$  und  $\{y_1, \dots, y_n\} \pmod{n}$  vollständige Restsysteme, dann ist auch

$$\{nx_i + my_j \mid i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$$

ein vollständiges Restsystem (mod  $mn$ ), wenn  $\text{ggd}(m,n) = 1$ .

### Reduziertes Restsystem

Unter einem reduzierten Restsystem mod  $m$  versteht man dann die Teilmenge eines vollständigen Restsystems mod  $m$ , die gerade aus den  $\phi(m)$  Restklassen besteht, deren Elemente zu  $m$  relativ prim sind.

Beispiele:

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ist ein vollständiges Restsystem mod 7.

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ist ein reduziertes Restsystem mod 7, d.h.  $\phi(7) = 6$ .

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  ist ein vollständiges Restsystem mod 10.

$\{1, 3, 7, 9\}$  ist ein reduziertes Restsystem mod 10, d.h.  $\phi(10) = 4$ .

### Restsystem (2)

Ist  $\{x_1, x_2, \dots, x_{\phi(m)}\}$  ein reduziertes Restsystem mod  $m$ , dann ist auch  $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_{\phi(m)}\}$  ein reduziertes Restsystem mod  $m$ , wenn  $\text{ggT}(a,m) = 1$  gilt.

Sind  $\{x_1, x_2, \dots, x_{\phi(m)}\} \pmod{m}$  und  $\{y_1, y_2, \dots, y_{\phi(n)}\} \pmod{n}$  reduzierte Restsysteme, dann ist

$$\{nx_i + my_j \mid \dots\}$$

ein reduziertes Restsystem mod  $mn$  mit  $\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$  Elementen.

### Satz von Euler

Wenn  $\text{ggT}(a, m) = 1$ , so ist  $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ .

Beweis:

Es sei  $n = \phi(m)$  und  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ein reduziertes Restsystem mod  $m$ . Dann ist

$$\{ax_1, ax_2, \dots, ax_n\}$$

ebenfalls ein reduziertes Restsystem mod  $m$ . Für alle  $x_i$  und  $ax_j$  gilt  $x_j \equiv ax_i \pmod{m}$  für verschiedene  $i$  und  $j$ . Multiplikation ergibt

$$ax_1 ax_2 \dots ax_n \equiv x_1 x_2 \dots x_n \pmod{m}$$

$$a^n x_1 x_2 \dots x_n \equiv x_1 x_2 \dots x_n \pmod{m}$$

Mit  $\text{ggd}(x_1, x_2, \dots, x_n, m) = 1$  ergibt sich somit

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{m} \quad \text{qed}$$

### Kleiner Satz von Fermat

Als Folgerung ergibt sich:

Ist  $p$  eine Primzahl und  $\text{ggT}(a, p) = 1$ , so gilt  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  für alle ganzen  $a$

Beweis: Der Satz ergibt sich aus dem Satz von Euler, da für eine Primzahl  $p$  stets  $\phi(p) = p-1$  ist.

a \ n=	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1
2	4	1	2	4	1	2
3	2	6	4	5	1	3
4	2	1	4	2	1	4
5	4	6	2	3	1	5
6	1	6	1	6	1	6

### Ordnung einer Zahl

Wenn der  $\text{ggT}(a,m) = 1$  ist, dann heißt die kleinste positive ganze Zahl  $r$  mit  $a^r \equiv 1 \pmod{m}$  die Ordnung von  $a$  modulo  $m$ .

Aus dem Satz von Euler folgt, dass  $r \leq \phi(m)$  ist. Ist der  $\text{ggT}(a,m)$  größer als 1, so existiert  $r$  im Allgemeinen nicht.

In der Abbildung ist die Tabelle  $a^n \pmod{m}$  für  $m = 7$ ,  $\phi(7) = 6$ , zu sehen. Ein reduziertes Restsystem mod 7 ist  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Damit ergibt sich

Ordnung r	für a =	Ordnung r	für a =
1	1	2	6
3	2, 4	6	3, 5

In diesem Beispiel treten alle Teiler von  $\phi(m)$  als Ordnung auf. Es gilt: Die Ordnung  $r$  einer Zahl  $a$  mod  $m$  ist ein Teiler von  $\phi(m)$ .

Die Umkehrung gilt nicht! Für  $m = 21$ ,  $\phi(21) = 21(1-1/3)(1-1/7) = 2 \cdot 6 = 12$ , ist ein reduziertes Restsystem  $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$ . Auswertung der Tabelle  $a^n \pmod{21}$  ergibt

Ordnung r	für a =	Ordnung r	für a =
1	1	2	8, 13, 20
3	4, 16	4	existiert nicht
6	2, 5, 10, 11, 17, 19	12	existiert nicht

Allgemein gilt:

Ist der  $\text{ggT}(a,m) = 1$  und ist  $r$  die Ordnung von  $a \pmod{m}$ , dann gilt

- (1)  $1, a, a^2, \dots, a^{r-1}$  sind inkongruent  $\pmod{m}$
- (2) Für  $n > 0$  existiert eine eindeutige ganze Zahl  $s$  mit  $0 \leq s < r$ , so dass  $a^n \equiv a^s \pmod{m}$
- (3)  $a^n \equiv 1 \pmod{m}$  genau dann, wenn  $r \mid n$
- (4) Wenn  $b \equiv a \pmod{m}$ , dann ist die Ordnung von  $b \pmod{m}$  gleich der Ordnung von  $a \pmod{m}$

Als Folgerung ergibt sich: Wenn  $r$  die Ordnung von  $a \pmod{m}$  ist, so gilt  $r \mid \phi(m)$ .

### Quadratische Reste

$p$  sei eine Primzahl und  $p > 2$ . Als quadratische Reste werden die Reste bezeichnet, welche Quadratzahlen bei der Division durch  $p$  lassen. Die Reste modulo  $p$ , die bei keiner Quadratzahl auftreten, heißen quadratische Nichtreste.

Es gilt:  $a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \Leftrightarrow (a \equiv b \pmod{p})$  oder  $(a \equiv -b \pmod{p})$

d.h. es gibt genau  $(p-1)/2$  verschiedene quadratische Reste modulo  $p$ . Die Reste sind bis auf Symmetrie verschieden.

Es gilt: Ist  $p=4k+1$  und  $c$  ein quadratischer Rest modulo  $p$ , so ist  $-c$  ebenfalls ein quadratischer Rest modulo  $p$ . Hat  $p$  die Form  $p=4k+3$ , so gilt dies nicht.

### Simultane Kongruenzen ganzer Zahlen

Eine simultane Kongruenz ganzer Zahlen ist ein System von linearen Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \dots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

Gesucht sind alle  $x$ , die sämtliche Kongruenzen gleichzeitig lösen. Wenn eine Lösung  $x$  existiert, dann sind mit  $M = \text{kgV}(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n)$  die Zahlen  $x + k \cdot M$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) genau alle Lösungen. Es kann aber auch sein, dass es keine Lösung gibt.

### Teilerfremde Moduln

Die Originalform des chinesischen Restsatzes aus einem Buch des chinesischen Mathematikers Ch'in Chiu-Shao aus dem Jahr 1247 ist eine Aussage über simultane Kongruenzen für den Fall, dass die Moduln teilerfremd sind:

Seien  $m_1, \dots, m_n$  paarweise teilerfremde ganze Zahlen, dann existiert für jedes Tupel ganzer Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  eine ganze Zahl  $x$ , die die folgende simultane Kongruenz erfüllt:

$$x \equiv a_i \pmod{m_i}, \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Alle Lösungen dieser Kongruenz sind kongruent modulo  $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_n$ . Das Produkt  $M$  stimmt hier wegen der Teilerfremdheit mit dem kgV überein.

### Finden einer Lösung

Eine Lösung  $x$  kann man wie folgt ermitteln. Für jedes  $i$  sind die Zahlen  $m_i$  und  $M_i = M/m_i$  teilerfremd, also kann man z.B. mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus zwei Zahlen  $r_i$  und  $s_i$  finden, so dass

$$r_i m_i + s_i M_i = 1$$

Setzt man  $e_i = s_i M_i$ , dann gilt

$$\begin{aligned} e_i &\equiv 1 \pmod{m_i} \\ e_i &\equiv 0 \pmod{m_j}, \quad i \neq j \end{aligned}$$

Die Zahl  $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$

ist dann eine Lösung der simultanen Kongruenz.

### Chinesischer Restesatz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $\text{ggT}(m,n) = 1$
2. Zu jedem  $a,b$  gibt es genau ein natürliches  $x$ ,  $x < m \cdot n$  mit  $x \equiv a \pmod{n}$  und  $x \equiv b \pmod{m}$
3. Es gibt eine ganze Zahl  $x$ , so dass  $x \equiv 1 \pmod{n}$  und  $x \equiv 0 \pmod{m}$  ist

Die Originalform des chinesischen Restsatzes stammt aus dem Buch Sun Zi Suanjing ("Sun Zis Handbuch der Arithmetik") des Mathematikers Sun Zi (3.Jahrhundert) und wurde 1247 von Qin Jiushaos in "Mathematische Abhandlung in neun Kapiteln" wiederveröffentlicht.

Es gibt Hinweise, dass dieser Satz schon im antiken Griechenland bekannt war.

### Satz über simultane Kongruenzen

Sind  $s$  und  $t$  teilerfremd, so existiert eine Lösung  $z$  des Systems von Kongruenzen  $x \equiv a \pmod{s} \wedge x \equiv b \pmod{t}$ . Man erhält dann alle Lösungen durch  $x_k = z + k \cdot s \cdot t$

Es seien die paarweise teilerfremden Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gegeben.

Um alle Zahlen  $x$  mit  $x \equiv r_1 \pmod{a_1}, x \equiv r_2 \pmod{a_2}, \dots, x \equiv r_n \pmod{a_n}$  zu finden, bestimme man die Zahl  $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  sowie die Zahlen  $b_1 = a/a_1, b_2 = a/a_2, \dots, b_n = a/a_n$ . Dann bestimme man die Zahlen  $x_i$  in den Gleichungen  $x_i \cdot b_i + y_i \cdot a_i = 1$  für  $i=1, \dots, n$ . Dann gilt:  $x_k = x_1 \cdot b_1 \cdot r_1 + \dots + x_n \cdot b_n \cdot r_n + k \cdot a$ .

### Quadratische Reste modulo $m$

Die Kongruenzen  $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}$  sind lösbar, wenn alle Kongruenzen  $x^2 \equiv a \pmod{m}$  lösbar sind.  
 $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow (2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac \pmod{m}$

Man betrachtet zunächst quadratische Reste modulo  $m$ : Sei  $m \in \mathbb{N}, m > 1$  und  $a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, m) = 1$ . Die Zahl  $a$  heißt quadratischer Rest modulo  $m$ , wenn es ein  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $x^2 \equiv a \pmod{m}$  gibt. Ist die kanonische Primfaktorenzerlegung von  $m$  gegeben, d.h.

$$m = \prod p_i^{\alpha_i}; \text{Produktbildung von } i = 1 \text{ bis } \infty$$

so ist  $r$  genau dann quadratischer Rest modulo  $m$ , wenn  $r$  quadratischer Rest modulo  $p_i^{\alpha_i}$  für  $i = 1, 2, 3, \dots$  ist.

### Legendre-Symbol

Ist  $a$  quadratischer Rest modulo einer Primzahl  $p$ , dann schreibt man dafür auch kurz  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ . Ist  $a$

nicht quadratischer Rest modulo  $p$ , dann schreibt man  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$  ... Legendre-Symbol. Beispiel: Die

Zahlen 1, 4, 7 sind quadratische Reste modulo 9.

### Modulare Quadratwurzel

Während lineare Gleichungen

im Ring  $\mathbb{Z}_p$  für  $\text{ggT}(a, p) = 1$  eine eindeutige Lösung

besitzen, ist es nicht mehr so einfach, die quadratische Gleichung

zu lösen. Eine Lösung  $x$  wird modulare Quadratwurzel genannt.

Ist  $x$  eine modulare Quadratwurzel, so ist es auch  $p-x$ . Zahlen, die eine modulare Quadratwurzel besitzen, werden quadratische Reste genannt.

Für sehr große  $p$  ist es durch den hohen Rechenaufwand praktisch unmöglich, eine modulare Quadratwurzel zu bestimmen. Dagegen ist die Umkehrung, die Bestimmung der  $a$  für verschiedene  $x$  relativ einfach. Dies wird auch in der modernen Kryptografie verwendet.

$$ax + b \equiv c \pmod{p}$$

$$x = a^{-1} \pmod{p} (c - b)$$

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

### Quadratisches Reziprozitätsgesetz

(Gauß 1796): Sind  $p$  und  $q$  zwei verschiedene ungerade Primzahlen, dann gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2 * (q-1)/2}$$

Beispiel:  $\left(\frac{65}{307}\right) = \left(\frac{5}{307}\right) * \left(\frac{13}{307}\right) = \left(\frac{307}{5}\right) * \left(\frac{307}{13}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) * \left(\frac{8}{13}\right) = (-1)^{(5^2-1)/8} \left(\frac{2^3}{13}\right) = -\left(\frac{2}{13}\right) = -(-1)^{(13^2-1)/8} = 1$

Der Satz wurde unabhängig von Euler (1722), Legendre (1785) und Gauß empirisch entdeckt. Den ersten vollständigen Beweis gab Gauß. Dieses Reziprozitätsgesetz gehört mit seinen weitreichenden Verallgemeinerungen auf algebraische Zahlkörper zu den tiefsten Gesetzmäßigkeiten der Zahlentheorie.

### Eigenschaften quadratischer Kongruenzen

Ist  $p$  kein Teiler von  $ab$  und  $a \equiv b \pmod{p}$  gilt:  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$

$$\left(\frac{1}{p}\right) = 1 \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2} \quad \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) * \left(\frac{b}{p}\right) \quad \left(\frac{ab^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$$

### Unitärer Teiler

Eine natürliche Zahl  $a$  ist ein unitärer Teiler einer Zahl  $b$ , wenn  $a$  und  $b/a$  zueinander prim sind, d.h.  $\text{ggT}(a, b/a) = 1$  gilt.

Zum Beispiel ist 5 ein unitärer Teiler von 60, da 5 und  $60/5 = 12$  den ggT 1 haben. Dagegen ist der Teiler 6 von 60 nicht unitär, da 6 und  $60/6 = 10$  den größten gemeinsamen Teiler 2 haben.

Die 1 ist trivialerweise unitärer Teiler jeder Zahl.

Zahlen, deren Summe der unitären Teiler gleich der Zahl selbst ist, heißen unitäre vollkommene Zahlen. Die Summe der unitären Teiler einer Zahl  $n$  wird mit  $\sigma^*(n)$  bezeichnet. Für die ersten natürlichen Zahlen  $n = 1, 2, \dots$  ergibt  $\sigma^*(n)$  die Werte: 1, 3, 4, 5, 6, 12, 8, 9, 10, 18, 12, 20, 14, 24, 24, 17, 18, 30, 20, 30,

32, 36, 24, 36, 26, 42, 28, 40, 30, 72, 32, 33, 48, 54, 48, 50, 38, 60, 56, 54, 42, 96, 44, 60, 60, 72, 48, 68, 50, 78, 72, 70, 54, 84, 72, 72, 80, 90, 60, 120, 62, 96, 80, 65, 84, 144, 68, 90, 96, 144, ...  
 Die Anzahl der unitären Teiler einer Zahl  $n$  ist  $2^k$ , wobei  $k$  die Anzahl der Primfaktoren von  $n$  ist.

### Quadratische Modulgleichung

Die Sicherheit modernen Verschlüsselungsverfahren beruht u.a. auf der schwierigen Lösbarkeit sogenannter quadratischer Modulgleichungen. Ein quadratische Modulgleichung ist eine Gleichung in ganzen Zahlen der Form

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{n}$$

Insbesondere für sehr große  $n$  ist die Suche nach einer Lösung im Intervall  $0 < x < n$  nur mit extremen Computereinsatz möglich.

Durch Hidenori Kuwakado und Hatsukazu Tanaka von der Universität Kobe wurde 1997 ein Algorithmus angegeben, durch den eine effektive Berechnung möglich wird.

### Quersumme

Die Quersumme ist die Summe der Ziffern einer Zahl.

Bildet man von einer mehrstelligen Quersumme erneut die Quersumme und wiederholt dies, bis eine einstellige Zahl vorliegt, so spricht man von einer totalen Quersumme der Ausgangszahl. Die alternierende Quersumme (auch Wechselquersumme) ergibt sich aus der abwechselnden Addition und Subtraktion der Ziffern der Zahl.

Beispiel: Zahl 123456701 ... alternierende Quersumme =  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 0 + 1 = 5$

Quersumme 2.Stufe ...  $Q_2(n) = (a_1a_0)_{10} + (a_3a_2)_{10} + \dots$

Alternierende Quersumme 2.Stufe ...  $Q'_2(n) = (a_1a_0)_{10} - (a_3a_2)_{10} + \dots$

### Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl  $a$  ist durch  $n$  teilbar, wenn

<b>a</b>	<b>Regel</b>
2:	die letzte Ziffer (gerade Zahl)
3:	ihre Quersumme
4:	die Zahl aus ihren letzten 2 Ziffern
5:	die letzte Ziffer ist 0 oder 5
6:	diese gerade und durch 3 teilbar ist.
8:	die Zahl aus ihren letzten 3 Ziffern
9:	die Quersumme
10:	die letzte Ziffer ist 0
11:	die alternierende Quersumme
12:	die Zahl durch 3 und 4 teilbar ist
16:	die Zahl aus ihren letzten 4 Ziffern

durch  $n$  teilbar ist.

### Digitale Wurzel

$n$  sei eine natürliche Zahl. Bildet man von  $n$  die Quersumme, von dieser wieder die Quersumme, und so weiter, bis man eine einziffrige Zahl erhält, so heißt diese Zahl digitale Wurzel von  $n$ , geschrieben  $w(n)$ . Die Anzahl der Quersummenbildungen bis zur digitalen Wurzel heißt additive Hartnäckigkeit (engl. additive persistence).

Beispiel: Für  $n = 37854$  wird  $3+7+8+5+4 = 27 \rightarrow 2+7 = 9$

$w(37854) = 9$  ist digitale Wurzel von 37854 mit der additiven Hartnäckigkeit von 2.

Die digitalen Wurzeln der ersten natürlichen Zahlen  $n = 1, 2, \dots, 20$  sind

$$w(n) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, \dots$$

Die digitale Wurzel  $w(n)$  einer Zahl kann berechnet werden:

$$w(n) = n \bmod 9, \text{ falls } n \text{ ungleich } n \bmod 9$$

$$w(n) = 9, \text{ falls } n \text{ gleich } n \bmod 9$$

Durch andere Mathematiker wird der Begriff der additiven Hartnäckigkeit auch additive Beharrlichkeit genannt. Die digitale Wurzel nennt man dann Ziffernwurzel. Die kleinsten natürlichen Zahlen mit einer additiven Hartnäckigkeit von 0, 1, 2, ... sind 0, 10, 19, 199, 19999 999999 999999 999999, ...

### Teilbarkeit durch 7

Eine Zahl mit der Ziffernfolge  $a_n \dots a_3 a_2 a_1 a_0$  ist durch 7 teilbar, wenn die Zahl  $r$  mit

$$r = (a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + \dots) + \dots \text{ durch 7 teilbar ist.}$$

### Teilbarkeit durch 13

Eine Zahl mit der Ziffernfolge  $a_n \dots a_3 a_2 a_1 a_0$  ist durch 13 teilbar, wenn die Zahl  $r$  mit

$$r = (a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5) + (a_6 - 3a_7 + \dots) + \dots \text{ durch 13 teilbar ist.}$$

Anmerkung: Dass die Teilbarkeitsregel für 7 so kompliziert ist, liegt an der Wahl des Positionssystems, also am Dezimalsystem. Im Oktalsystem mit der Basis 8 gilt zum Beispiel, dass eine Zahl durch 7 teilbar

ist, wenn deren Quersumme durch 7 teilbar ist. Im Achtersystem ist eine Zahl dann restlos durch 9 teilbar, wenn die alterierende Quersumme teilbar ist.

### Weitere Sätze

Jede sechsstellige Zahl mit einer Ziffernfolge abcabc ist durch 7, 11 und 13 teilbar.

Jede achtstellige Zahl mit einer Ziffernfolge abcdabcd ist durch 73 und 137 teilbar.

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\begin{array}{llll} 2 \mid n^2+n & 6 \mid n^3-n & 12 \mid n^4-n^2 & 3 \mid n^3+2n \\ 8 \mid 3^{2n}+7 & 9 \mid 10^n+3 \cdot 4^{n+2}+5 & 3 \mid 4n^3-n & 6 \mid n^3-n \\ 6 \mid 7^n-1 & 3 \mid n^3-6n^2+14n & 133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1} & \\ 9 \mid n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 & & 11 \mid 5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n} & \end{array}$$

### Beweis der Quersummenregel im Zahlensystem zur Basis n

Darstellung der Zahl z mit den Ziffern  $z_k, z_{k-1}, \dots, z_2, z_1, z_0$  im Zahlensystem-Basis n:

$$\begin{aligned} z &= z_k n^k + z_{k-1} n^{k-1} + \dots + z_2 n^2 + z_1 n + z_0 \\ &= z_k (n^k - 1) + z_{k-1} (n^{k-1} - 1) + \dots + z_2 (n^2 - 1) + z_1 (n - 1) + (z_k + z_{k-1} + \dots + z_2 + z_1 + z_0) \\ &\text{(Quersumme)} \\ &= z_k (n - 1) (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1} (n - 1) (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + z_2 (n - 1) \\ &\text{(n + 1) + z}_1 \text{(n - 1) + Quersumme} \\ &= (n - 1) (z_k (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1} (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + \\ &\quad + z_2 (n + 1) + z_1) + \text{Quersumme} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von  $n - 1$  und der Quersumme aufspalten lässt. Ist also im Zahlensystem der Basis n die Quersumme einer Zahl z durch  $n - 1$  teilbar, dann ist auch z selbst durch  $n - 1$  teilbar. Ebenso ist z genau dann durch jeden Teiler von  $n - 1$  teilbar, wenn die Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die Quersummenregel im Hexadezimalsystem für die Zahlen 3, 5 und 15 verwendet werden.

Analog lässt sich zeigen, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von  $n + 1$  und der alternierenden Quersumme aufspalten lässt.

$$z = (n + 1) (z_k (n^{k-1} - n^{k-2} + \dots - n^2 + n - 1) + z_{k-1} (n^{k-2} - n^{k-3} + \dots + n^2 - n + 1) + \dots + z_2 (n + 1) + z_1) + \text{alternierende Quersumme}$$

Ist also im Zahlensystem zur Basis n die alternierende Quersumme einer Zahl z durch  $n + 1$  teilbar, dann ist auch z selbst durch  $n + 1$  teilbar. Ebenso ist z genau dann durch jeden Teiler von  $n + 1$  teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die alternierende Quersummenregel im Hexadezimalsystem nur für die Zahl 17 verwendet werden. Für den Beweis wurde eine ungerade Anzahl von Ziffern vorausgesetzt.

### Teilbarkeit-Beispiel

Aufgabe: Zeige, dass der folgende Term  $f(n)$ , für alle natürlichen Zahlen n stets einen ganzzahligen Wert besitzt!

$$f(n) = n^5/120 - n^3/24 + n/30$$

Lösung: Im ersten Schritt wird der Faktor  $n/120$  ausgeklammert

$$f(n) = n/120 \cdot (4 - 5 \cdot n^2 + n^4)$$

Durch systematisches Probieren und Polynomdivision bestimmt man die Nullstellen des Polynoms  $p(n)$

$$p(n) = 4 - 5 \cdot n^2 + n^4$$

Es wird  $n_1 = -2, n_2 = -1, n_3 = 1, n_4 = 2$ . Damit kann die Funktion  $f(n)$  als fortlaufendes Produkt geschrieben werden

$$f(n) = (n - 2) \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) / 120$$

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  ist die Funktion offensichtlich Null. Setzt man nun  $n = n + 2$  wird, da die Zahl  $120 = 5!$  ist

$$f(n) = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) \cdot (n + 4) / 5!$$

Von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist mindestens eine durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar. Damit ist der Term ganzzahlig.

### Beispiele zur Teilbarkeit von Termen

n sei eine natürliche Zahl größer 0. Dann sind nachfolgende Terme stets durch verschiedene Zahlen teilbar. Der Beweis ist durch vollständige Induktion möglich.

$$\begin{array}{ll} n^2 + n \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar} & n^3 + 2n \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar} \\ 4n^3 - n \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar} & n^3 - n \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar} \\ 2n^3 + 3n^2 + n \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar} & n^3 - 6n^2 + 14n \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar} \\ 3^n - 3 \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar} & n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ ist durch } 9 \text{ teilbar} \\ 7^{2n} - 2^n \text{ ist durch } 47 \text{ teilbar} & 5^n + 7 \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar} \\ 5^{2n} - 3^{2n} \text{ ist durch } 8 \text{ teilbar} & 2^{3n} + 13 \text{ ist durch } 7 \text{ teilbar} \\ n^7 - n \text{ ist durch } 7 \text{ teilbar} & 3^{n+1} + 2^{3n+1} \text{ ist durch } 5 \text{ teilbar} \\ 3n^5 + 5n^3 + 7n \text{ ist durch } 15 \text{ teilbar} & 3^{2n} + 7 \text{ ist durch } 8 \text{ teilbar} \\ n^3 + 5n \text{ ist durch } 6 \text{ teilbar} & n^4 - 4n^2 \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar} \\ 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 \text{ ist durch } 9 \text{ teilbar} & 4^n + 15n - 1 \text{ ist durch } 9 \text{ teilbar} \end{array}$$

$5^{2n} + 24n - 1$  ist durch 48 teilbar

$11^{n+1} + 12^{2n-1}$  ist durch 133 teilbar

### Gewichtete Quersumme

Eine Verallgemeinerung der Quersummen sind gewichtete Quersummen, bei denen die Ziffern erst mit den Werten einer Zahlenfolge multipliziert und diese Ergebnisse dann addiert werden.

Es wird mit der niederwertigsten Ziffer begonnen. Die Wichtungsfolge kann periodisch oder nichtperiodisch sein. Ein Beispiel ist die Folge 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

Die gewichtete Quersumme der Zahl 422625 ist dann

$$5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 5 + 6 + 12 - 2 - 6 - 8 = 7$$

Die so gewichtete Quersumme liefert eine Teilbarkeitsregel für die Zahl 7. Auch für andere natürliche Zahlen kann man solche periodischen Folgen finden, z. B.

für 11 die Folge +1, -1, ... ; diese liefert die alternierende Quersumme

für 13 die Folge 1, -3, -4, -1, 3, 4, ...

Für die meisten Teiler ist es wenig praktikabel, die Teilbarkeit mittels Quersummenbildung zu überprüfen, weil es nur wenige gut merkbare periodische Wichtungsfolgen gibt.

Möchte man eine entsprechende Teilbarkeitsregel für die natürliche Zahl  $m$  finden, so betrachtet man die Reste der Zehnerpotenzen bei der Division mit  $m$ . Die Reste entsprechen den gesuchten Gewichten.

Beispiel:  $m = 7$

$$1 \equiv 1 \pmod{7} \quad 10 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$100 \equiv 2 \pmod{7} \quad 1000 \equiv -1 \pmod{7}$$

$$10000 \equiv -3 \pmod{7} \quad 100000 \equiv -2 \pmod{7}$$

$$1000000 \equiv 1 \pmod{7} ; \text{ ab hier wiederholen sich die Reste}$$

Die Wichtungsfolge lautet damit 1, 3, 2, -1, -3, -2, ...

Rechts werden Wichtungsfolge für ungerade  $n$  bis 20000 berechnet.

### Teilbarkeitsregeln nach Briggs

1999 veröffentlichte C.C. Briggs von der Penn State University neuartige, sehr einfache Teilbarkeitsregeln für alle Primzahlen bis 1000.

Ist eine ganze Zahl  $M$  nicht durch 2 oder 5 teilbar, dann teilt  $M$  eine beliebige ganze Zahl  $N$ , wenn  $M$  auch

$$N' = (N - N \bmod 10) / 10 + (m + A \times M) \times (N \bmod 10) = (N - M \times (m' - 10 \times A) \times (N \bmod 10)) / 10$$

mit  $m = (1 - m' \times M) / 10$  teilt.

$A$  ist eine ganze Zahl und für  $M > 0$

$$m' = [3 \times (M \bmod 10) - 2 \times M] \bmod 10$$

Mit  $A = 0$  ergibt sich dann folgende Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl  $z$  ist teilbar durch eine Primzahl  $p$ , verschieden 2 und 5, wenn  $z/10 - k \times$  (letzte Ziffer) durch  $p$  teilbar ist. Dabei ist  $k$  eine zu  $p$  gehörende natürliche Zahl. Es gilt: Die Zahl  $z$  ist ...

- 3) durch 3 teilbar, wenn die Subtraktion der 2-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 3 teilbar ist
- 7) durch 7 teilbar, wenn die Subtraktion der 2-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 7 teilbar ist
- 11) durch 11 teilbar, wenn die Subtraktion der letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 11 teilbar ist
- 13) durch 13 teilbar, wenn die Subtraktion der 9-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 13 teilbar ist
- 17) durch 17 teilbar, wenn die Subtraktion der 5-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 17 teilbar ist
- 19) durch 19 teilbar, wenn die Subtraktion der 17-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 19 teilbar ist
- 23) durch 23 teilbar, wenn die Subtraktion der 16-fachen letzten Ziffer vom Rest der Zahl durch 23 teilbar ist

Die Tabelle enthält alle von Briggs angegebenen Werte für  $p$  und  $k$ :

Dieses Ergebnis kann so erweitert werden, dass auch  $k$ -fache der letzten Ziffer addiert werden.

**Satz:** Eine natürliche Zahl  $z = 10A + E$  mit  $A \in \mathbb{N}$ ,  $E \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq E \leq 9$  ist genau dann durch  $t \in \mathbb{N}$  mit  $t = 10a + e$  ( $a, e \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq e \leq 9$ ) teilbar, wenn  $t$  auch  $D = A + F \cdot E$  teilt.  $F$  ist eine  $t$ -spezifische ganze Hilfszahl.

$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$	$t$	$F(t)$
3	+1	7	-2	9	+1	43	+13	11	-1	13	+4
17	-5	19	+2	21	-2	23	+7	27	-8	29	+3
31	-3	33	+10	37	-11	39	+4	41	-4	43	+13
47	-14	49	+5	51	-5	53	+16	57	-17	59	+6
61	-6	63	+19	67	-20	69	+7	71	-7	73	+22
77	-23	79	+8	81	-8	83	+25	87	-26	89	+9
91	-9	93	+28	97	-29	99	+10	101	-10	103	+31
107	-32										

Dieser Satz ist auf das Abtrennen von mehr als 1 Ziffer  $E$  erweiterbar: Ansatz  $z = 100A + K$  mit  $0 \leq K \leq 99$  Hilfszahlen  $F$



t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)	t	F(t)
37	+10	43	-3	67	-2	101	-1	157	+11	167	-5
367	-11	1001	-1								

Ansatz  $z = 1000A + R$  mit  $0 \leq R \leq 999 \dots t=37 \dots F(37) = 1$

### Primfaktorzerlegung

Ist  $n > 1$ , so heißt  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$  mit Primzahlen  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$  und  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  die Primfaktorzerlegung von  $n$ .  $\alpha_i$  heißt die Vielfachheit von  $p_i$ . Die Primzahlen  $p_i$  werden Primfaktoren der Zahl genannt.

Ist  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$  die Primfaktorzerlegung von  $n$ , so gilt für die Anzahl  $t$  der Teiler von  $n$ :  
 $t = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$

Die Primfaktorzerlegung einer Zahl wird auch kanonische Darstellung einer Zahl genannt.

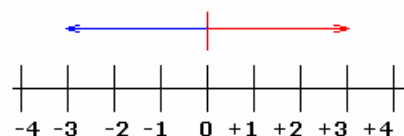
### Fundamentalsatz der Zahlentheorie

Jede natürliche Zahl  $n > 1$  besitzt eine bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutige Primfaktorzerlegung.

### Primfaktorzerlegung-Anwendung

Aufgabe:

Ein Onkel und seine Nichte treffen sich auf einer Festlichkeit. Irgendwann kommen sie auf das alte Thema "das Alter". Der Onkel möchte sein Alter nicht direkt verraten und gleichzeitig seine Nichte testen. So erzählt er:



"Ich habe mich gestern mit 3 Personen unterhalten. Wenn man das Alter dieser drei Personen multipliziert, erhält man 2450. Addiert man das Alter der drei Personen, kommt genau das doppelte Deines Alters heraus."

"Nun" sagt die Nichte, "das reicht aber noch nicht, um das Alter der drei Personen herauszubekommen". Der Onkel stimmt zu. "Eine der drei Personen feierte in diesem Jahr einen ganz besonderen Geburtstag. Ich habe dieses Fest schon fünf Jahre hinter mir."

Wie alt sind Onkel und Nichte?

Lösung: Für das Alter der drei Personen  $x, y$  und  $z$  gilt

$$x \cdot y \cdot z = 2450 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \quad ; \text{ Primfaktorenzerlegung}$$

Wir können davon ausgehen, dass die Nichte ihr Alter kennt. Da sie sagt, es reicht noch nicht, ist die Zerlegung der Zahl 2450 in drei Faktoren dergestalt, dass die Summe zwar ihr doppeltes Alter ergibt, aber mehr als eine Zerlegung dieses Ergebnis hat.

Also zerlegt man 2450 in drei Faktoren und bestimmt die Summe:

1	1	2450	2452	2	25	49	76
5	7	70	82	5	10	49	64
7	7	50	64	7	14	25	46

Die anderen Zerlegungen muss man nicht in Betracht ziehen, wenn man bedenkt, dass kaum jemand älter als 120 Jahre wird.

Alle Summen sind eindeutig bis auf die Summe 64.

Das "besondere" Alter, das sich durch Multiplikation der Primfaktoren ergibt, ist  $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ . Die drei Personen sind damit 50, 7 und 7 Jahre alt; der Onkel ist  $55 = 50 + 5$ ; die Nichte ist  $32 = (50 + 7 + 7) / 2$ .

### Betrag einer rationalen Zahl

Der Betrag (auch absoluter Betrag) ist stets eine positive Zahl

$$|a| = a \text{ für } a \geq 0$$

$$|a| = -a \text{ für } a < 0$$

In der Skizze haben +3 und -3 den gleichen Abstand vom Nullpunkt und damit den gleichen absoluten Betrag 3. Beide Zahlen heißen zueinander entgegengesetzt.

### Entgegengesetzte Zahl

die Zahlen  $a$  und  $-a$  heißen zueinander entgegengesetzt

Für alle rationalen Zahlen  $a, b$  gilt:

$$\text{"Dreiecksungleichung"} \quad |a| + |b| \leq |a - b| \leq |a - b| \leq |a| + |b| \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

Wenn  $a > 0$ , dann  $a + 1/a \geq 2$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad |a \cdot b| \leq 1/2 (a^2 + b^2) \quad (a + b)^2 = |a + b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

Für  $a < b$  ist  $a < (a+b)/2 < b$

$|a|$  ist der Abstand der Zahl  $a$  vom Nullpunkt und  $|a - b|$  ist der Abstand der Zahl  $a$  von der Zahl  $b$

### Bernoullische Ungleichung

Für alle reellen  $x$  und ganzen Zahlen  $m$  gilt  $(1 + x)^m > 1 + mx$  für  $m \geq 2$  und  $x \neq 0$  und  $x > -1$

## Beweis unter Verwendung vollständiger Induktion

Induktionsanfang  $m_0=1 : 1 + x \leq (1+x)^1 = 1 + x$  ; gilt für  $x \geq -1$   
Induktionsannahme Die Behauptung gelte für ein  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $1 + nx \leq (1+x)^n$   
Induktionsschluss Zu zeigen ist, dass die Behauptung dann auch für  $n + 1$  gilt,  
also  $1 + (n+1)x \leq (1+x)^{n+1}$   
Es gilt:  $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1 + (n+1)x$   
Damit ist die Gültigkeit der Bernoullischen Ungleichung bewiesen.

## Binomische Ungleichung Youngsche Ungleichung

für alle reellen Zahlen a und b gilt:  $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$

Für alle reellen Zahlen a und b und alle reellen p, q mit  $1/p + 1/q = 1$  gilt  
 $|ab| \leq 1/p |a|^p + 1/q |b|^q$

Für  $p = q = 2$  geht die Youngsche Ungleichung in die binomische Ungleichung über.

**Signum-Funktion** Vorzeichenfunktion einer Zahl  $\operatorname{sgn} a = 1$  für  $a > 0$ ,  $-1$  für  $a < 0$  bzw.  $0$  für  $a = 0$

## Beweismethoden

Ein Beweis ist in der Mathematik der formal korrekte Nachweis, dass aus einem Satz von Aussagen eine weitere Aussage folgt.

Ein Beweis ist eine vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage.

In der Mathematik werden vier Beweismethoden betrachtet: direkter Beweis, indirekter Beweis, vollständige Induktion, konstruktiver Beweis.

**Behauptung:** Eine natürliche Zahl und ihr Nachfolger haben außer 1 keinen gemeinsamen Teiler.

**Beweisidee:** (indirekt) GA:  $a=bx$  und  $a+1=by$  und  $b \neq 1 \Rightarrow bx+1=by \Rightarrow b=1/(y-x) \Rightarrow b=1$  Widerspruch

**Behauptung:** Für jedes natürliche n ist auch  $n/3 + n^2/2 + n^3/6$  natürliche Zahl.

**Beweisidee:**  $= n/6 (n^2+3n+2) = n/6 (n+1)(n+2) \Rightarrow$  von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen ist mindestens eine durch 2 und eine durch 3 teilbar.

**Behauptung:** Die um zwei verminderte Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ungerader natürlicher Zahlen ist durch 8 teilbar.

**Beweisidee:**  $(2a-1)^2 + (2a+1)^2 - 2 = 8a^2 \Rightarrow 8$  teilt die Summe-2

**Behauptung:** Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist nie Quadratzahl.

**Beweisidee:**  $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) = (n^2+3n+1)^2 - 1$

**Behauptung:** Für jede natürliche Zahl n ist der Term  $(n^3-2n^2-4n+8)$  durch  $(n+2)$  ohne Rest teilbar.

**Beweisidee:** Partialdivision, Ergebnis  $(n-2)^2$

**Behauptung:**  $2x^5 + 3y^5 \geq 5x^2y^3$ , wobei x,y positiv rational

**Beweisidee:**  $(2x^5 + 3y^5)/5 \geq \sqrt[5]{(x^5x^5y^5y^5y^5)} = x^2y^3$  (Satz von Cauchy)

## Q.E.D.

... Abkürzung für quod erat demonstrandum, was zu beweisen war.

Erstmals wurde in den "Elementen" des Euklid jeder Beweis mit dem Schlusssatz beendet. Bei Euklid lautet dieser griechisch  $\text{οπερ εδει δεϊξαι}$  (hoper edei deik sai).

In einer Euklid-Übersetzung von 1505 verwendet Bartholemew Zamberti erstmals die lateinische Form.

Galilei nutzte in den "Dialogen" wahlweise quod erat intantum, quod erat demonstrandum, quod erat probandum, quod erat ostendendum, quod erat faciendum, quod erat determinandum und quod erat propositum. Seit Newton hat sich die Abkürzung q.e.d. durchgesetzt. Im deutschsprachigen Raum wird of w.z.b.w. („was zu beweisen war“) verwendet.

## Direkter Beweis

Beim direkten Beweis beweist man die Behauptung durch Anwenden von bewiesenen Aussagen, Definitionen und durch logische Folgerungen.

### Beispiel 1

Behauptung: Das Quadrat jeder geraden natürlichen Zahl n ist gerade.

Beweis: n sei eine gerade natürliche Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als  $n = 2k$  darstellen (k ist eine natürliche Zahl). Darauf folgert man  $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$

$n^2$  ist daher das Doppelte einer natürlichen Zahl und damit gerade.

### Beispiel 2

Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist ungerade.

Beweis: n sei eine ungerade Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als  $n = 2k+1$  darstellen (k ist eine natürliche Zahl oder 0). Daraus folgert man  $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$\rightarrow n^2$  ist ungerade.

### Beispiel 3

Behauptung: Für jede natürliche Zahl  $m$  der Form  $m = 2n+1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , gilt  $(m^2) \bmod 8 = 1$

Beweis: Es gilt  $m = 2n+1$ . Folglich gilt:  $m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$

Fallunterscheidung:

1) Sei  $n$  gerade, dann gilt  $4n \bmod 8 = 0$  und damit  $4n(n+1) \bmod 8 = 0$ . Folglich gilt:  $m^2 \bmod 8 = (4n(n+1)+1) \bmod 8 = 1$

2) Sei  $n$  ungerade, dann gilt  $4(n+1) \bmod 8 = 0$  und damit  $4n(n+1) \bmod 8 = 0$ . Folglich gilt:  $m^2 \bmod 8 = (4n(n+1)+1) \bmod 8 = 1$

### Indirekter Beweis

In einem indirekten Beweis geht man von der Negation  $\neg A$  des zu beweisenden Satzes  $A$  aus und folgert daraus einen Widerspruch  $C$  und  $\neg C$ . Daraus kann man auf  $A$  schließen. Beim indirekten Beweis nimmt man also an, dass das Gegenteil der Behauptung wahr ist. Danach führt man diese Annahme mit den gleichen Folgerungen und Methoden wie beim direkten Beweis zu einem Widerspruch und damit ist die Behauptung bewiesen.

### Standardbeispiel

Man beweise den Satz: Es gibt keine rationale Zahl  $x$ , für die  $x^2=2$  gilt.

Beweis: Wenn der Satz nicht gilt, muss es eine rationale Zahl  $z$  mit  $z^2=2$  geben. Man kann  $z$  sogar als positiv ansehen.

Jede positive rationale Zahl lässt sich durch einen gekürzten Bruch darstellen:  $z = p/q$ . Da sich der Bruch nicht mehr kürzen lässt, haben  $p$  und  $q$  keinen gemeinsamen Teiler. Aus  $z^2=2$  folgt  $p^2/q^2 = 2$  und somit nach Umformung  $p^2 = 2q^2$ .

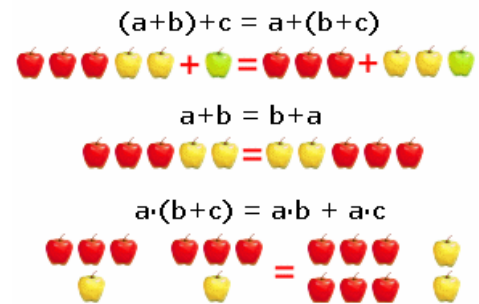
Nun überlegt man sich, wie oft der Primfaktor 2 in die Zahl  $p^2$  passt und wie oft  $2q^2$  auftreten kann:

In  $p$  kann der Faktor 2 keinmal oder einmal oder zweimal oder dreimal ... vorkommen. In  $p^2$  muss er dann doppelt so oft wie in  $p$  auftreten, also keinmal oder zweimal oder viermal oder sechsmal usw... In  $q^2$  kann entsprechend der Primfaktor 2 keinmal oder 2mal oder 4mal oder 6mal usw. auftreten, in  $2q^2$  also einmal oder dreimal oder 5mal oder 7mal usw. In  $p^2$  tritt der Primfaktor 2 also in anderer Anzahl auf als in  $2q^2$ , obgleich  $p^2 = 2q^2$  und beide Zahlen links und rechts vom Gleichheitszeichen gleich sind.

Das ist ein Widerspruch.

Es gibt aber nur zwei Möglichkeiten: Entweder der Satz gilt oder er gilt nicht. Die zweite Möglichkeit führt zu einem Widerspruch.

Es bleibt nur die erste bestehen. Der Satz ist bewiesen.



### Für beliebige reelle Zahlen $a, b, c$ und $d$ gilt:

#### Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

#### Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$$a + b = b + a \quad a * b = b * a$$

#### Distributivgesetz (Gesetz der Verteilung)

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

#### Klammerauflösung, Ausmultiplizieren

$$(a + b) * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d$$

#### Binomische Formel

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2*a*b + b^2$$

$$(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3*a^2*b + 3*a*b^2 \pm b^3$$

#### Existenz der Einheits-elementes

$$a + 0 = 0 + a = a \quad a * 1 = 1 * a = a$$

#### Monotonie

$$\text{Aus } a > b \text{ und } c > 0, d > 0 \Rightarrow a+c > b+c \wedge a*c > b*c$$

Das Kommutativ- und das Distributivgesetz wurden erstmals von Francois-Joseph Servois (1767-1847), das Assoziativgesetz von William Hamilton (1805-1865) formuliert. Die Bezeichnung distributiv wird vom lateinischen "distributus" = verteilbar abgeleitet, kommutativ von "commutativus" = vertauschbar.

### Vorzeichenregeln

Für das Produkt reeller Zahlen gilt

$$(+a)*(+b) = (+ab) \quad (+a)*(-b) = (-a)*(+b) = (-ab) \quad (-a)*(-b) = (+ab)$$

"plus mal plus = minus mal minus = plus"

"plus mal minus = minus mal plus = minus"

## Klammer-Regeln

1. Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, so bleibt die Klammer einfach weg. Steht dagegen ein Minuszeichen davor, so sind beim Weglassen der Klammer alle in ihr vorkommenden Vor- und Rechenzeichen umzukehren.

$$B: 6a - (4a - b) = 6a - 4a + b$$

2. Man multipliziert algebraische Summen miteinander, indem man jedes Glied der einen Summe mit jedem Glied der anderen multipliziert und diese Produkte zueinander addiert.

$$(a + b) * (c + d) = a * (c + d) + b * (c + d) = a * c + a * d + b * c + b * d$$

3. Ein Binom wird durch ein Monom dividiert, indem jeder Summand des Binoms durch das Monom geteilt wird.

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

## Ausklammern

In der elementaren Algebra ist es häufig sinnvoll, Summen oder Differenzen in Produkte umzuwandeln. Dies gilt beispielsweise dann, wenn man einen Bruchterm durch Kürzen gemeinsamer Faktoren von Zähler und Nenner vereinfachen will. Eine wichtige Methode in diesem Zusammenhang ist das Ausklammern.

Ausklammern bedeutet, dass man einen gemeinsamen Faktor sucht, der in allen Gliedern der gegebenen Summe oder Differenz enthalten ist, und für diesen Faktor das Distributivgesetz anwendet:

Das Ausklammern ist die Umkehrung des Ausmultiplizierens. Da eine algebraische Summe in ein Produkt verwandelt wird, spricht man auch von Produktzerlegung oder Faktorenzersetzung.

Beispiel 1:  $2x^2 + 5x$

Der Faktor  $x$  ist in beiden Summanden enthalten und kann daher ausgeklammert werden:

$$2x^2 + 5x = x(2x + 5)$$

Die Summanden der Klammer erhält, indem man die einzelnen Summanden der gegebenen Summe jeweils durch den ausgeklammerten Faktor dividiert.

Durch Ausmultiplizieren lässt sich leicht die Richtigkeit der Umformung überprüfen.

Beispiel 2:  $12a^3b^2 + 30a^4bc + 18a^2b^3c^2$

Die Koeffizienten 12, 30 und 18 haben den größten gemeinsamen Teiler 6. Die Variable  $a$  tritt in den Potenzen  $a^3$ ,  $a^4$  und  $a^2$  auf.

Die Potenz mit dem kleinsten Exponenten ist  $a^2$  und wird daher ebenfalls ausgeklammert. Bei den Potenzen von  $b$  wählt man die Potenz mit dem kleinsten Exponenten aus. Da  $c$  im ersten Summanden nicht auftritt, wird  $6a^2b$  ausgeklammert.

$$12a^3b^2 + 30a^4bc + 18a^2b^3c^2 = 6a^2b(2ab - 5a^2c + 3b^2c^2)$$

## Termumformung-Übung

### Aufgabe

$$3a + (2b - c) - (2a + 3c - b)$$

$$2x + 5y - (y - 3x + 2) + (x - 8)$$

$$3a - 8b + (11a + 4) - (5b - a + 3)$$

$$9 + 3e - 5f - (e + f - 1) + (7 - 4e)$$

$$2a^2 + 3a - (a + 5) - (1 - 3a^2)$$

$$y^3 - 6y + (2y^2 + 3y - 4) - (y^3 - 5)$$

$$3x^2 + y^2 - (x^2 - xy - y^2) + (5y^2 - 5xy)$$

$$3ab + 6 + (a^2 - 2ab - 5) - (4b^2 - a^2 + 1)$$

$$2(2a + 3b) + 3(3a - 2b)$$

$$6(a - 2b) - 2(a - 5b)$$

$$5(3a + 2b - 2) + 3(10 - a) - 5(b - a)$$

$$(-4) \cdot (2b - c + 3a) - 3(a + 3b - 2c)$$

$$3a(a + 4b) + 2b(6b - 5a)$$

$$4m(3n + 5) - 7n(m + 8)$$

$$2e(e^2 - 2ef) + f^2(5e - 2) - 6f(-e^2 + 3ef)$$

$$(-5u)(2u^2 - uv + 3v^2) + 4v(-u^2 + 3uv - 7v^2)$$

$$x^2(x - 2) + x(2x + 1)$$

$$2x^2(x^2 + 2x - 1) - 3x(x^2 - x + 2)$$

$$4y(y^2 - 2) + 3y^2(2y + 1) - 5(3 - y^2)$$

$$3(z^2 - 4 + 2z) + 5z(2z - 1) - z^2(7 - z)$$

$$(3p + 6)(p - 2)$$

$$(-3p + 1)(2 + 4p)$$

$$(5a - 7b)(9a - 2b)$$

$$(12a + 5b)(3b - 4a)$$

$$(u^2 + v^2)(2u^2 - v^2)$$

$$(3u^2 - 2v)(u - 4v^2)$$

### Lösung

$$= a + 3b - 4c$$

$$= 6x + 4y - 10$$

$$= 15a - 13b + 1$$

$$= 17 - 2e - 6f$$

$$= 5a^2 + 2a - 6$$

$$= 2y^2 - 3y + 1$$

$$= 2x^2 - 4xy + 7y^2$$

$$= 2a^2 + ab - 4b^2$$

$$= 13a$$

$$= 4a - 2b$$

$$= 17a + 5b + 20$$

$$= -15a - 17b + 10c$$

$$= 3a^2 + 2ab + 12b^2$$

$$= 5mn + 20m - 56n$$

$$= 2e^3 + 2e^2f - 13ef^2 - 2f^2$$

$$= -10u^3 + u^2v - 3uv^2 - 28v^3$$

$$= x^3 + x$$

$$= 2x^4 + x^3 + x^2 - 6x$$

$$= 10y^3 + 8y^2 - 8y - 15$$

$$= z^3 + 6z^2 + z - 12$$

$$= 3p^2 - 12$$

$$= -12p^2 - 2p + 2$$

$$= 45a^2 - 73ab + 14b^2$$

$$= -48a^2 + 16ab + 15b^2$$

$$= 2u^4 + u^2v^2 - v^4$$

$$= 3u^3 - 12u^2v^2 - 2uv + 8v^3$$

$$\begin{aligned}
(g - 5h)(2g + 3h) &= 2g^2 - 7gh - 15h^2 \\
(2a - 3b)(-3a - b) + (4a - b)(2a + 5b) &= 2a^2 + 25ab - 2b^2 \\
(2a + 3b)(-3a + b) - (4a - b)(2a + 5b) &= -14a^2 - 25ab + 8b^2 \\
(10x + 3)(2x - 5) - (8 - 3x)(4x + 9) &= 32x^2 - 49x - 87 \\
(10x - 3)(2x + 5) + (8 - 3x)(4x - 9) &= 8x^2 + 103x - 87 \\
(3r^2 - s^2)(2r + 3s) - (2r + 5s)(4r^2 - 2s^2) &= -2r^3 - 11r^2s + 2rs^2 + 7s^3 \\
(-3r^2 - s^2)(2r - 3s) + (-2r + 5s)(4r^2 - 2s^2) &= -14r^3 + 29r^2s + 2rs^2 - 7s^3 \\
(3z^2 - 5z + 2)(1 - 7z) + (4z - 7)(6z^2 + z) &= 3z^3 - 26z + 2 \\
(3z^2 + 5z - 2)(1 - 7z) - (4z - 7)(6z^2 - z) &= -45z^3 + 14z^2 + 12z - 2 \\
(z + 8)^2 &= z^2 + 16z + 64 \\
(3a + 1)^2 &= 9a^2 + 6a + 1 \\
(4k + 3)^2 &= 16k^2 + 24k + 9 \\
(5b + 3c)^2 &= 25b^2 + 30bc + 9c^2 \\
(7x + 2y)^2 &= 49x^2 + 28xy + 4y^2 \\
(10ab - 2a)^2 &= 100a^2b^2 - 40a^2b + 4a^2 \\
(3a + 5)(3a - 5) &= 9a^2 - 25 \\
(10x - 3z)(10x + 3z) &= 100x^2 - 9z^2 \\
(r^2 + 1)(r^2 - 1) &= r^4 - 1 \\
(7 - x)(7 + x) &= 49 - x^2 \\
(p + q)^2 + (p - q)^2 &= 2p^2 + 2q^2 \\
(3p + 2q)^2 - (2p - 3q)^2 &= 5p^2 + 24pq - 5q^2 \\
(a + 3b)^2 + (3a + b)(3a - b) &= 10a^2 + 6ab + 8b^2 \\
(5x + z)(5x - z) - (2x - 5z)^2 &= 21x^2 + 20xz - 26z^2 \\
(2a + 1)^2 - (a - 3)^2 &= 3a^2 + 10a - 8 \\
(c + 2d)(c - 2d) + (c - d)(2c + d) &= 3c^2 - cd - 5d^2 \\
(3x + 2)(1 - x) - (x - 4)^2 &= -4x^2 + 9x - 14 \\
5(y - 2)^2 - 3(y + 2)^2 &= 2y^2 - 32y + 8
\end{aligned}$$

### Konstruktion eines Produkts

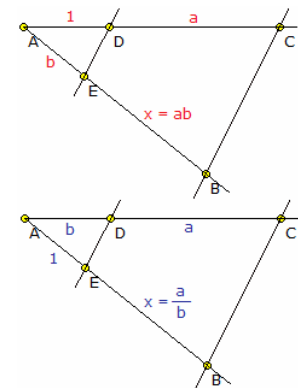
Gegeben seien zwei rationale Zahlen  $a$  und  $b$ , die durch zwei Strecken der entsprechenden Länge dargestellt sind.

Deren Summe  $a+b$  und deren Differenz  $a-b$  sind durch einfache Streckenaddition und -subtraktion zu erreichen. Die Konstruktion des Produktes  $a \cdot b$  und des Quotienten  $a/b$  ist über den Strahlensatz möglich.

In deren oberen Konstruktion wird auf einem Strahl zuerst eine Einheit als Strecke und anschließend  $a$  abgetragen. Auf einem zweiten Strahl wird  $b$  abgetragen und mit dem Endpunkt der Einheitsstrecke verbunden.

Parallelverschiebung durch den Endpunkt von  $a$  schneidet den 2. Strahl in einem Punkt. Dieser ist der Endpunkt der gesuchten Strecke der Länge  $a \cdot b$ .

Nach dem Strahlensatz gilt  $1 : a = b : x$ , d.h.  $x = a \cdot b$



### Konstruktion eines Quotienten

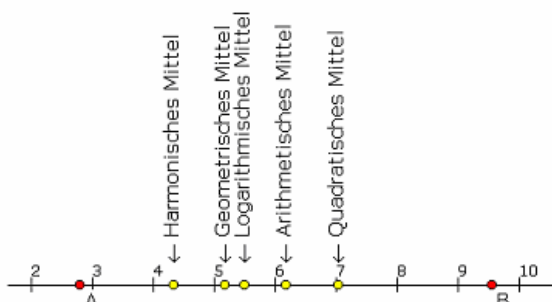
Für die Konstruktion einer Strecke der Länge  $a/b$  ist die untere Konstruktion zu verwenden. Auf dem 1. Strahl werden  $a$  und  $b$  angetragen, auf dem zweiten die Einheitsstrecke.

Nach dem Strahlensatz gilt hier  $b : a = 1 : x$ , d.h.  $x = a/b$

Auch bei dieser Konstruktion ist ein Term  $a/0$  unbestimmt. Ist die Strecke  $b = 0$ , so ist eine Parallelverschiebung durch den Endpunkt von  $a$  nicht möglich.

Zahl A = 2.8  
 Arithmetisches Mittel = 6.18  
 Harmonisches Mittel = 4.33  
 Logarithmisches Mittel = 5.51

Zahl B = 9.56  
 Geometrisches Mittel = 5.17  
 Quadratisches Mittel = 7.04



### Mittelwerte

Sind  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  positive rationale Zahlen, so wird definiert:

$$\begin{aligned}
\text{arithmetisches Mittel AM} &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) / n \\
\text{geometrisches Mittel GM} &= \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \\
\text{harmonisches Mittel HM} &= n / (1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \dots + 1/a_n) \\
\text{quadratisches Mittel} &= \sqrt{[(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) / n]}
\end{aligned}$$

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen  $a$  und  $b$  ist die Zahl  $m$ , für die gilt:  $m - a = b - m$  d.h.  $m$  ist von  $a$  und  $b$  gleichweit entfernt. Das geometrische Mittel

zweier Zahlen  $a$  und  $b$  ist die Zahl  $g$ , für die gilt:  $a : g = g : b$ . Das harmonische Mittel zweier Zahlen  $a$

und  $b$  ist die Zahl  $h$ , für die gilt:  $(h - a) : (b - h) = a : b$ , d.h. die Abstände von  $h$  zu den Zahlen  $a$  und  $b$  verhalten sich so wie die ursprünglichen Zahlen.

Das geometrische Mittel zweier Zahlen  $a$  und  $b$  heißt auch die mittlere Proportionale von  $a$  und  $b$ .  $a$ , das arithmetische Mittel und  $b$  bilden eine arithmetische Folge 1. Ordnung.  $a$ , das geometrische Mittel und  $b$  ergeben eine geometrische Folge.

*Harmonisches Mittel < Geometrisches Mittel < Logarithmisches Mittel < Arithmetisches Mittel < Quadratisches Mittel*

**Satz vom harmonischen, geometrischen und arithmetisches Mittel, Satz von Cauchy**

Für alle positiven rationalen Zahlen  $a, b$  gilt

$$\text{Minimum}(a,b) \leq 2/(1/a + 1/b) \leq \sqrt{a \cdot b} \leq (a+b)/2 \leq \sqrt{[(a^2+b^2)/2]} \leq \text{Maximum}(a,b)$$

$$\text{GM} = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{[2/(1/a + 1/b) \cdot (a+b)/2]} = \sqrt{(\text{HM} \cdot \text{AM})}$$

$$a - \text{AM} = \text{AM} - b; a/\text{GM} = \text{GM}/b; (a - \text{HM})/(\text{HM} - b) = a/b$$

**logarithmisches Mittel zweier Zahlen = (b - a) / (ln b - ln a)**

Es gilt  $(a + b) / 2 > (b - a) / (\ln b - \ln a) > \sqrt{ab}$

**Arithmetisches Mittel**

Sind  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  positive rationale Zahlen, so wird definiert:

$$\text{arithmetisches Mittel AM} = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) / n$$

Das arithmetische Mittel wird bei Gleichverteilungen als Erwartungswert genutzt. Der in der Umgangssprache benutzte Begriff "Durchschnitt" ist nicht korrekt.

Es gilt:  $\text{AM}(a_1+c, a_2+c, \dots, a_n+c) = c + \text{AM}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$$\text{AM}(a,b) \geq \text{Geometrisches Mittel GM}(a,b) \geq \text{Harmonisches Mittel HM}(a,b)$$

Beweis:

Für  $a, b > 0$  gilt sicher  $(1/\sqrt{a} - 1/\sqrt{b})^2 \geq 0$

$$1/a - 2/\sqrt{ab} + 1/b \geq 0$$

$$1/a + 1/b \geq 2/\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab} \geq 2 / (1/a + 1/b)$$

$$\text{GM} \geq \text{HM}$$

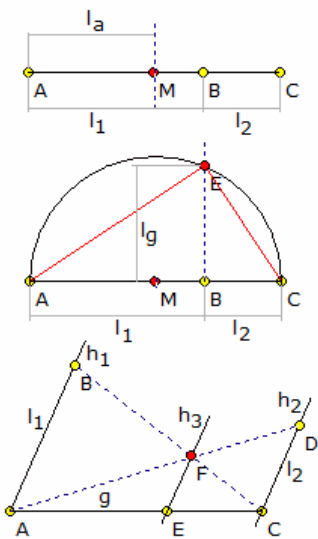
$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{ab}$$

$$\text{AM} \geq \text{GM}$$

Die Gleichheitszeichen gelten für  $a = b$ .

Anmerkung: Für das arithmetische Mittel gibt es kein Assoziativgesetz, d.h.  $\text{AM}(a, \text{AM}(b, c)) \neq \text{AM}(\text{AM}(a, b), c)$ .



**Mittelwerte, Konstruktion**

Aufgabe: Das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel zweier Zahlen  $l_1$  und  $l_2$  ist zu konstruieren.

**Arithmetisches Mittel**

1. Die Strecken  $AB = l_1$  und  $BC = l_2$  werden auf einer Geraden abgetragen und der Mittelwert der Strecke  $AC$  konstruiert. Die Streckenlänge  $AM$  ist das arithmetische Mittel.

$$\text{arithmetisches Mittel AM} = (l_1 + l_2)/2$$

**Geometrisches Mittel**

Konstruktionsgrundlage: Höhensatz

- Über der Strecke  $l_1 + l_2$  wird der Thaleskreis gezeichnet.
  - Im Punkt  $B$  der Strecke  $AB = l_1$  wird eine Senkrechte errichtet, die den Kreis in  $E$  schneidet.
  - Die Streckenlänge  $BE$  ist dann das geometrische Mittel.
- $$\text{geometrisches Mittel GM} = \sqrt{l_1 \cdot l_2}$$

**Harmonisches Mittel**

Konstruktionsgrundlage: Strahlensatz

- an zwei Punkten  $A$  und  $C$  einer Geraden werden die Strecken  $l_1$  und  $l_2$  so abgetragen, dass  $h_1$  und  $h_2$  parallel sind
  - die Geraden  $BC$  und  $AD$  schneiden sich im Punkt  $F$
  - durch  $F$  wird eine Parallele zu den Strecken  $l_1$  und  $l_2$  gezogen. Diese Parallele schneidet die Ausgangsgerade in  $E$ .
  - Die Streckenlänge  $EF$  entspricht dann dem halben harmonischen Mittel
- $$\text{harmonisches Mittel HM} = 2 / (1/l_1 + 1/l_2)$$

**Harmonisches Mittel (2)**

Das harmonische Mittel  $\text{HM} = n / (1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \dots + 1/a_n)$  vereinfacht sich bei zwei Werten zu

$$\text{HM} = 2 / (1/a_1 + 1/a_2)$$

In der harmonischen Reihe

$$1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$$

ist ab dem zweiten Summanden jeder Summand das harmonische Mittel seiner benachbarten Summanden:

$$2/(1/n + 1/(n+2)) = 2 / (n + n + 2) = 1/(n+1)$$

Damit ist der Name "harmonische Reihe" gerechtfertigt.

Der Name harmonisches Mittel leitet sich aus der Musiktheorie ab.

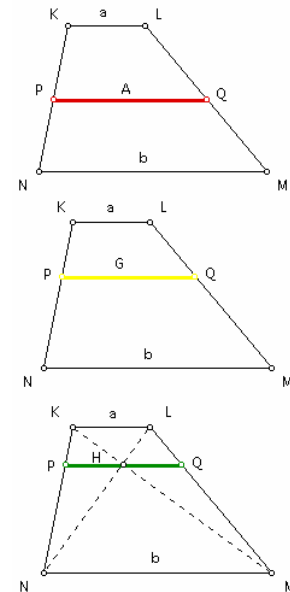
Die guten Konsonanzeigenschaften der von Didymus (um 63 v.u.Z.) gefundenen diatonischen oder reinen Tonskala wurden von dem italienischen Musiktheoretiker Gioseffo Zarlino (1517-1590) 1558 damit begründet, dass man fast alle Frequenzverhältnisse, die vom Grundton aus zu als konsonant akzeptierten Intervallen gehörten, mit einem Zahlenpaar aus {1, 2, 3, 4, 5, 6} beschreiben kann. Zum Beispiel ist die 3 das harmonische Mittel von 2 und 6 oder die 4 das harmonische Mittel von 3 und 6. Die diatonische Tonskala wird auch harmonische Tonskala genannt.

Der Begriff harmonische Teilung bezieht sich ebenfalls auf die Musik. Drei gleichartige und gleich stark gespannte Saiten, deren Längen einer harmonischen Teilung unterliegen, ergeben gerade einen harmonischen Wohlklang.

Bei der harmonischen Teilung von 5:1 verhalten sich die Saitenlängen wie 10:12:15 und die Schwingungszahlen wie  $1/10:1/12:1/15 = 6:5:4$ .

### Mittelwerte am Trapez

1992 gab Howard Eves in "An Introduction to the History of Mathematics" (Saunders College Publishing) eine Möglichkeit an, alle bekannten Mittelwerte auch an einem Trapez einzuführen.



### arithmetisches Mittel

arithmetisches Mittel  $A = (a + b)/2$

Sind die Seitenlängen der parallelen Seiten des Trapezes a und b, so ergibt sich für das arithmetische Mittel die Mittellinie des Trapezes, d.h. die Strecke zwischen den Mittelpunkten der Seiten NK und LM

### geometrisches Mittel

geometrisches Mittel  $G = \sqrt{a \cdot b}$

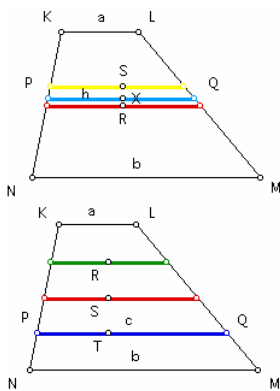
Im Trapez mit den Grundseiten a und b ergibt sich das geometrische Mittel als die Strecke, die das Ausgangstrapez in zwei ähnliche Teiltrapeze teilt.

### harmonisches Mittel

harmonisches Mittel  $H = 2 / (1/a + 1/b) = 2ab / (a+b)$

Das harmonische Mittel H ergibt sich als Strecke parallel zu den Grundseiten durch den Schnittpunkt der Trapezdiagonalen NL und KM.

### Heronisches Mittel



Das Heronische Mittel h von zwei reellen Zahlen ist der Wert  $h = (a + \sqrt{(ab) + b}) / 3$ .

In einem Trapez ist die Strecke h gleich der Parallelen zu den Grundseiten a und b, deren Abstand zur Mittellinie  $1/3$  des Abstandes zur Parallelen des geometrischen Mittels ist.

### Kontraharmonisches Mittel

Das kontraharmonische Mittel c zweier reelle Zahlen a und b wird berechnet mit

$$c = (a^2 + b^2)/(a + b).$$

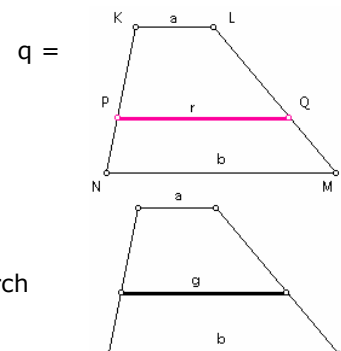
Auch das kontraharmonische Mittel findet man in einem Trapez.

Es ist die Parallele zu a, für die die Mittellinie des Trapezes das arithmetische Mittel von harmonischem und kontraharmonischem Mittel ist, d.h. Symmetrieachse.

### Quadratisches Mittel

Das quadratische Mittel q zweier reeller Zahlen a und b ergibt sich durch  $\sqrt{(a^2 + b^2) / 2}$

Dieses quadratische Mittel tritt als Länge der Strecke auf, die parallel zur Grundseite a ist, und die Fläche des Trapezes halbiert.



### Zentriertes Mittel

Das zentrierte Mittel g von zwei reellen Zahlen a, b ist der Wert

$$g = 2(a^2 + ab + b^2) / (3a + 3b)$$

Im Trapez findet man das zentrierte Mittel als die Länge der Strecke, die durch den Schwerpunkt des Trapezes verläuft.

## Pythagoreische Mittelwerte

Der Pythagoreer Nikomachos von Gerasa unterschied 10 verschiedene Proportionen bzw. Mittelwerte zweier Zahlen bzw. zweier Strecken. Die wichtigsten waren

das arithmetische Mittel	$A = (a + b)/2$
das geometrische Mittel	$G = \sqrt{a \cdot b}$
das harmonische Mittel	$H = 2ab / (a+b)$

Der Zusammenhang der 3 Mittelwerte  $G^2 = A \cdot H$  war bekannt. Die Kennzahlen  $\{6, 8, 9, 12\}$  eines Würfels spielten dabei eine besondere Rolle.

Die Eckenzahl 8 und die 9 bilden das arithmetische und harmonische Mittel der Flächenzahl 6 und der Kantenzahl 12.

Außerdem erfüllen sie Proportionen der pythagoreischen Harmonielehre:

$$\begin{aligned} 8 / 6 &= 12 / 9 = 4 / 3 = \text{Quarte} \\ 9 / 6 &= 12 / 8 = 3 / 2 = \text{Quinte} \\ 12 / 6 &= 2 / 1 = \text{Oktave} \end{aligned}$$

Aus diesem Grund wurden Zahlen und Strecken  $a, b$  als harmonisch angesehen, wenn sie  $a : H = G : b$  erfüllen.

Iamblichos schrieb später einen Kommentar zu Nikomachos Werk und erweiterte die Mittelwerte um das musikalische Mittel zweier Zahlen  $a, b$ . Im musikalischen Mittel befinden sich diese, wenn  $a : A = G : b$  gilt.

## Tschebyschowsche Ungleichung

Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  positive reelle Zahlen, so gilt für  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  und  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  oder  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  und  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n * (b_1 + b_2 + \dots + b_n) / n \leq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) / n$$

sowie für  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  und  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) / n * (b_1 + b_2 + \dots + b_n) / n \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) / n$$

Verallgemeinerung: Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  positive reelle Zahlen, so gilt für  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  und  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  oder  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$  und  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ :

$${}^k\sqrt{[(a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k) / n]} * {}^k\sqrt{[(b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k) / n]} \leq {}^k\sqrt{[(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \dots + (a_n b_n)^k] / n}$$

sowie für  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  und  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ :

$${}^k\sqrt{[(a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k) / n]} * {}^k\sqrt{[(b_1^k + b_2^k + \dots + b_n^k) / n]} \geq {}^k\sqrt{[(a_1 b_1)^k + (a_2 b_2)^k + \dots + (a_n b_n)^k] / n}$$

## Hölder-Mittel

Das Hölder-Mittel oder der Höldersche Mittelwert (nach Otto Hölder, 1859-1937) ist ein verallgemeinerter Mittelwert. Der Mittelwert wird auch  $k$ -tes Mittel, Mittel der Ordnung  $k$  genannt.

Das Hölder-Mittel verallgemeinert die Mittelwerte wie das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel durch Einführung eines Parameters  $p$ .

Unter dem Hölder-Mittel zur Stufe  $p > 0$  der Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  versteht man

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = (1/n \sum_{i=1}^n x_i^p)^{1/p} = {}^p\sqrt{((x_1^p + \dots + x_n^p) / n)}$$

Für  $p = 0$  wird gesetzt  $M_0(x_1, \dots, x_n) = \lim_{a \rightarrow 0} M_a(x_1, \dots, x_n)$ .

Mittels Wahl eines geeigneten Parameters  $p$  ergeben sich die bekannten Mittelwerte

Minimum	$\lim_{p \rightarrow -\infty} M_p(x_1, \dots, x_n) = \min \{x_1, \dots, x_n\}$
harmonisches Mittel	$M_{-1}(x_1, \dots, x_n) = n / (1/x_1 + \dots + 1/x_n)$
geometrisches Mittel	$M_0(x_1, \dots, x_n) = {}^n\sqrt{x_1 \dots x_n}$
arithmetisches Mittel	$M_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n) / n$
quadratisches Mittel	$M_2(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{((x_1^2 + \dots + x_n^2) / n)}$
Maximum	$\lim_{p \rightarrow \infty} M_p(x_1, \dots, x_n) = \max \{x_1, \dots, x_n\}$

## Hölder-Ungleichung

Wenn  $p > 1, q > 1$  und  $1/p + 1/q = 1$ , dann gilt  $\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q}$

und  $\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{1/q}$

## Stolarsky-Mittel

Der Stolarskysche Mittelwert, kurz das Stolarsky-Mittel, ist ein von Kenneth B. Stolarsky eingeführter Mittelwert, der das logarithmische Mittel verallgemeinert. Für zwei Zahlen  $x, y$  und einem Parameter  $p$  ist das Stolarsky-Mittel definiert als

$$S_p(x, y) = ((x^p - y^p) / ((x-y) p))^{1/(p-1)}$$

Für Werte von  $p$ , für die teilweise eine Definitionslücke vorliegt, wird der Grenzwert gegen  $p$  betrachtet.

Das Stolarsky-Mittel hat folgende Spezialfälle:

Minimum (Grenzwert)	$S_{-\infty}(x, y) = \min x, y$
geometrisches Mittel	$S_{-1}(x, y) = \sqrt{xy}$



logarithmisches Mittel (Grenzwert)  $S_0(x,y) = (x-y) / (\log x - \log y)$

Hölder-Mittel mit 1/2  $S_{1/2}(x,y) = ((\sqrt{x} + \sqrt{y}) / 2)^2$

identric mean (Grenzwert)  $S_1(x,y) = 1/e (y^y / x^x)^{1/(y-x)}$

arithmetisches Mittel  $S_2(x,y) = (x+y) / 2$

Maximum (Grenzwert)  $S_\infty(x,y) = \max \{x, y\}$

Der Mittelwert identric mean (nicht identric mean) wurde 1988 von Bullen bei der Lösung verschiedener Ungleichungen eingeführt.

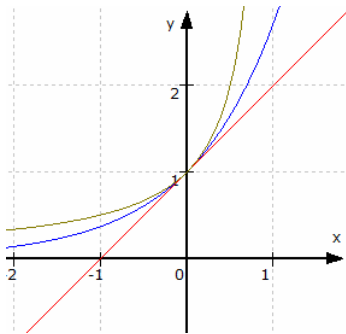
### Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Für reelle  $x_k, y_k$  gilt  $(\sum_{k=1}^n x_k y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n y_k^2$

Diese Ungleichung wurde von Bunjakowski 25 Jahre vor Cauchy und Schwarz entdeckt und wird deshalb in einigen Fachbüchern als Bunjakowski-Schwarz-Ungleichung bezeichnet.

### Minkowskische Ungleichung

Für reelle  $x_k, y_k$  gilt und allgemein  $\sqrt{(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2)} \leq \sqrt{(\sum_{k=1}^n x_k^2)} + \sqrt{(\sum_{k=1}^n y_k^2)}$   
 $(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n y_k^p)^{1/p}$



### Ungleichungen für e-Funktion und Logarithmus

$$1 + x \leq e^x \leq 1 / (1-x) ; \text{ für } x < 1$$

$$x / (1+x) \leq \ln(1+x) \leq x ; \text{ für } x > -1$$

Das bedeutet, dass die Exponentialfunktion für Argumente  $x < 1$  von den zwei Funktionen

$$y = 1+x \text{ und } y = 1/(1-x)$$

$$y = e^x$$

eingeschlossen wird.

### Jensensche Ungleichung

Die Jensensche Ungleichung ist eine elementare Ungleichung für konvexe und konkave Funktionen. Sie ist wegen ihrer Allgemeinheit Grundlage

vieler bedeutender Ungleichungen, vor allem in der Analysis und Informationstheorie.

Die Ungleichung ist nach dem dänischen Mathematiker Johann Ludwig Jensen benannt, der sie am 17. Januar 1905 bei einer Konferenz der Dänischen Mathematischen Gesellschaft präsentierte.

Die Jensensche Ungleichung besagt, dass der Funktionswert einer konvexen Funktion an einer endlichen Konvexkombination von Stützstellen stets kleiner oder gleich einer endlichen Konvexkombination von den Funktionswerten der Stützstellen ist. Dies bedeutet insbesondere, dass das gewichtete arithmetische Mittel der Funktionswerte an  $n$  Stellen größer oder gleich dem Funktionswert am Mittel dieser  $n$  Stellen ist.

Satz: Für eine konvexe Funktion  $f(x)$  und für positive  $\lambda_i$  mit  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$  gilt

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Da für konkave Funktionen  $f(x)$  die Funktion  $-f(x)$  konvex ist, gilt für konkave Funktionen die Jensensche Ungleichung in umgekehrter Richtung, d.h. für jede konkave Funktion  $f(x)$  und für positive  $\lambda_i$  mit  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$  gilt

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Die stetige Variante der Jensenschen Ungleichung für im Intervall  $[a,b]$  konvexe Funktion  $f(x)$  ist

$$f(1/(b-a) \int_a^b y(x) dx) \leq 1/(b-a) \int_a^b f(y(x)) dx$$

Die Jensensche Ungleichung ist auch auf Erwartungswerte anwendbar. Ist  $f(x)$  konvex und  $X$  eine Zufallsvariable, dann gilt

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

Mit der Jensenschen Ungleichung gelingt es auch, die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel zu beweisen.

### Muirhead-Ungleichung

Die Muirhead-Ungleichung ist eine Verallgemeinerung der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel.

Für einen gegebenen reellen Vektor

$$a = (a_1, \dots, a_n)$$

wird der Ausdruck

$$[a] = 1/n! \sum_{\sigma} x_{\sigma_1}^{a_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_n}^{a_n}$$

wobei über alle Permutationen  $\sigma$  von  $\{1, \dots, n\}$  summiert wird, als  $a$ -Mittel  $[a]$  der nichtnegativen reellen Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  bezeichnet.

Für den Fall  $a = (1, 0, \dots, 0)$ , ergibt das genau das arithmetische Mittel der Zahlen  $x_1, \dots, x_n$ ; für den Fall  $a = (1/n, \dots, 1/n)$  ergibt sich genau das geometrische Mittel.

Eine  $n \times n$  Matrix  $P$  wird doppelt stochastisch genannt, wenn sie aus nichtnegativen Zahlen besteht und sowohl die Summe jeder Zeile als auch die Summe jeder Spalte gleich eins sind.

### Muirhead-Ungleichung

Die Muirhead-Ungleichung besagt, dass  $[a] \leq [b]$  für alle  $x_i \geq 0$  genau dann ist, wenn eine doppelt stochastische Matrix  $P$  existiert, für die  $a = Pb$  gilt.

Quelle: Godfrey Harold Hardy, John Edensor Littlewood, G. Polya: Inequalities, Cambridge University Press, 1952

### Umordnungs-Ungleichung

**Satz:** Gegeben seien zwei n-Tupel reeller Zahlen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  mit  $x_1 \leq \dots \leq x_n$  und  $y_1 \leq \dots \leq y_n$ .

Das Tupel

$$x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

sei eine Permutation des Tupels  $x$ . Fasst man nun die n-Tupel als Vektoren auf und betrachtet deren Skalarprodukt, so besagt die Umordnungs-Ungleichung, dass

$$x_{\sigma(n)}y_n \geq x_n y_1 + \dots + x_1 y_n$$

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \geq x_{\sigma(1)} y_1 + \dots +$$

Das Skalarprodukt ist also maximal, wenn die Elemente der n-Tupel gleich geordnet sind, und minimal, wenn sie entgegengesetzt geordnet sind. Es sind keine Voraussetzungen für die Vorzeichen von  $x_i$  und  $y_i$  notwendig.

### Nachweis

Die Beweisidee besteht darin, das kleinste  $i$ , das  $\sigma(i) \neq i$  erfüllt und jenes  $j$  mit  $i = \sigma(j)$  zu betrachten.

Dann sind  $\sigma(i) > i$  und  $j > i$  und somit  $x_{\sigma(j)} \leq x_{\sigma(i)}$  und  $y_i \leq y_j$ , d.h.

$$(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) (y_i - y_j) \leq 0$$

und daher

$$x_{\sigma(i)} y_i + x_{\sigma(j)} y_j \leq x_{\sigma(j)} y_i + x_{\sigma(i)} y_j = x_i y_i + x_{\sigma(i)} y_j$$

Solange ein  $i$  mit  $\sigma(i) \neq i$  existiert, lässt sich die Summe für gleich geordnete Tupel vergrößern.

Analog zeigt man, dass sich die Summe für entgegengesetzt geordnete Tupel verkleinern lässt, solange ein  $i$  mit  $\sigma(i) \neq i$  existiert.

Viele bekannte Ungleichungen lassen sich aus der Umordnungs-Ungleichung beweisen, beispielsweise die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Tschebyschow-Summenungleichung.

### Ordnung der reellen Zahlen, Größerrelation

$a, b$  reelle Zahlen:  $a$  heißt größer  $b$  ( $a > b$ ), wenn es eine positive reelle Zahl  $c$  gibt, mit  $a = b + c$ . Die Menge der rationalen bzw. reellen Zahlen ist linear geordnet.

Die Menge der reellen Zahlen lässt sich als Zahlengerade darstellen. Jede reelle Zahl wird durch einen Punkt auf der Zahlengeraden repräsentiert.

Der Nullpunkt, teilt die Zahlengerade in positive und negative reelle Zahlen ein. Positive Zahlen liegen rechts, negative links vom Nullpunkt, Schreibweise:  $x > 0$ , wenn  $x$  positiv und  $x < 0$ , wenn  $x$  negativ. Die Null ist weder positiv noch negativ.

### Arithmetisch-harmonisches Mittel

Für zwei reelle Startwerte  $a_0$  und  $b_0$  wird gebildet:

$$a_{n+1} = (a_n + b_n) / 2$$

$$b_{n+1} = 2 a_n b_n / (a_n + b_n)$$

Dann wird das arithmetisch-harmonische Mittel zu

$$A(a_0, b_0) = \lim a_n = \lim b_n = \sqrt{(a_0 b_0)}$$

also dem geometrischen Mittel von  $a_0$  und  $b_0$ .

## Bruchrechnung

### Bruch-Definition

Eine gebrochene Zahl ist die Klasse aller Brüche, die durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervorgehen. Der Kürzungs- bzw. Erweiterungsfaktor ist eine natürliche Zahl.

Für 2 Brüche einer Klasse gilt:  $a \cdot d = b \cdot c$  (wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ )

Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der gebrochenen Zahlen. Uneingeschränkt ausführbare Rechenoperationen sind: Addition, Multiplikation und Division (ausgenommen ist die Division durch 0).

### Bruchrechnung , Gebrochene Zahlen

$\frac{a}{b}$  heißt Bruch; a ... Zähler, b ... Nenner

**Reziprokes**  $\frac{b}{a}$  heißt Kehrwert (Reziprokes) von  $\frac{a}{b}$       **Erweitern**  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$  mit  $c \neq 0$

Schreibweise: Zur Erleichterung der Schreibweise von Brüchen wird sehr oft der waagerechte Strich durch einen Schrägstrich ersetzt, z.B.  $a/b$ .

### Kürzen

... Umkehrung des Erweiterns. Zähler und Nenner werden durch denselben mathematischen Ausdruck dividiert.

### Echter Bruch

Ein Bruch heißt echter Bruch, wenn  $|a/b| < 1$  ist, andernfalls unechter Bruch.

### Gleichnamige Brüche

Brüche mit gleichen Nennern heißen gleichnamig, andernfalls

ungleichnamig.

### Hauptnenner

Der Hauptnenner zweier Brüche ist das kgV der beiden einzelnen Nenner

### Rechnen mit Brüchen

#### Addition und Subtraktion

Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie durch Erweitern und/oder Kürzen auf einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) bringt, die neuen Zähler addiert bzw. subtrahiert und den Nenner beibehält.

Beispiel:  $2/6 + 7/4 = ?$  Der Hauptnenner beider Brüche ist 12, das bedeutet  $2/6 + 7/4 = 4/12 + 21/12 = 25/12$ .

#### Multiplikation

Brüche werden multipliziert, indem jeweils Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden. Regel: "Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner"

#### Division

Brüche werden durcheinander dividiert, indem mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert wird.

### Doppelbruch

Zähler und Nenner von Brüchen können selbst Brüche sein, zum Beispiel  $3 / (7/5)$ ;  $(1/3) / 9$ ;  $(2/5) / (3/8)$ .

Wegen der umständlichen Schreibung führt man solche Doppelbrüche auf einfache zurück, indem man den Hauptbruchstrich durch das Divisionszeichen ersetzt. Es ist wichtig, dass man den Hauptbruchstrich hervorhebt, indem man ihn etwas länger macht und bei Rechnungen in Höhe von Gleichheits- und Rechenzeichen setzt.

Doppelbrüche können als Division zweier Brüche aufgefasst werden. Doppelbrüche werden aufgelöst, indem man das Produkt der Außenglieder (a und d) durch das Produkt der Innenglieder (b und c) dividiert.

$$(a / b) / (c / d) = (ad) / (bc)$$

Merkregel: Durch Differenzen und durch Summen kürzen nur die Dummen.

$$(a + c) / (b + c) \neq a / b$$

### Dezimalbruch

Darstellung eines Bruches in der Form  $n, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \dots$

sind ab einem m alle weiteren Dezimalstellen 0, so heißt der Bruch endlich oder abbrechend.

### Sprechweise

Die Nachkommastellen von Dezimalbrüchen sollen ziffernweise gesprochen werden, d.h. zum Beispiel für 3,75

"drei Komma sieben fünf" und nicht "drei Komma fünfsiebzig", wie die Scherzfrage deutlich macht: "Welche Zahl ist größer, drei-Komma-elf oder drei-Komma-neun?"

## Periodische Dezimalbrüche

Ist  $p/q$  ein gekürzter Bruch, und enthält  $q$  auch von 2 und 5 verschiedene Primzahlen, so ist der zugehörige Dezimalbruch periodisch, und seine Periode hat höchstens  $q-1$  Ziffern.

Sofortperiodische Dezimalbrüche ... Ziffernfolge bricht nicht ab, wiederholt sich aber ständig

Beispiel:  $1/11 = 0,090909090909\dots$

Nichtsofortperiodische Dezimalbrüche ... unregelmäßige Ziffernfolge, gefolgt von sich wiederholender Sequenz von Ziffern

Beispiel:  $19/15 = 1,2666666666\dots$

Alle rationalen Zahlen sind als abbrechende, sofortperiodische oder nichtsofortperiodische Dezimalbrüche darstellbar.

## Midy's Theorem

Ist  $a/p$  ein vollständig gekürzter Bruch,  $p$  eine Primzahl und hat die Periode eine geradzahlige Länge, so kann die Periode in zwei Hälften zerlegt werden, deren Ziffernaddition eine Folge von '9' ergibt.

Zum Beispiel ist  $1/7 = 0,142857142857\dots$  mit der Periode 142857. Halbierung ergibt 142 und 857 und die Addition 999.

## Umrechnung periodischer Dezimalbrüche

1. Sofortperiodischer Dezimalbruch der Periodenlänge  $m$  mit der Periode  $a_1a_2\dots a_m$

$$0,a_1a_2\dots a_m = [a_1a_2\dots a_m] / [9999\dots 9999] ; m \text{ mal eine } 9$$

2. Nichtsofortperiodischer Dezimalbruch der Periodenlänge  $m$  mit der Periode  $a_1a_2\dots a_m$  und der Vorperiode  $b_1b_2\dots b_n$

$$0,b_1b_2\dots b_n a_1a_2\dots a_m =$$

$$= [b_1b_2\dots b_n a_1a_2\dots a_m - b_1b_2\dots b_n] / [9999\dots 99990000\dots 0000] ; m \text{ mal eine } 9, n \text{ mal die } 0$$

$$24:7 = 3,428571\dots$$

$$\begin{array}{r} -21 \\ \underline{30} \\ -28 \\ \underline{20} \\ -14 \\ \underline{60} \\ -56 \\ \underline{40} \\ -35 \\ \underline{50} \\ -49 \\ \underline{10} \\ -7 \\ \underline{30} \end{array}$$

### Bestimmung der Periode

Die Periode eines Bruchs wird durch schriftliche Division bestimmt. Erscheint während des Algorithmus ein Rest auf, der schon einmal auftrat, so kann man die Division beenden. Die Dezimalziffern, die zwischen den gleichen Resten berechnet wurden, bilden dann die Periode des Bruchs. Im Beispiel hätte  $24/7$  eine Periode 428571 der Länge 6.

Anmerkung: Zur Kontrolle der Rechnung prüft man, ob die gefundene Periodenlänge ein Teiler des Zählers-1 ist. Ist dies nicht der Fall, war die Rechnung fehlerhaft.

### Neunerperiode

Im Dezimalsystem sind für periodische Brüche alle Perioden, bis auf die Neunerperiode, möglich. Es gilt:

$$0,9999999\dots = 1$$

Nachweis:  $1/3 = 0,3333\dots \mid \cdot 3$

$$3/3 = 0,9999\dots$$

$$1 = 0,9999\dots$$

bzw.  $x = 0,9999\dots \mid \cdot 10$

$$10x = 9,9999\dots$$

Subtraktion beider Gleichungen ergibt  $9x = 9$ , d.h.  $x = 1$

Ebenso wird  $0,9999\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 9/10^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/10^n) =$

$$1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1/10^n) = 1$$

Allgemein gilt, dass in einem Positionssystem zu einer Basis  $b$  der  $g$ -adische Bruch  $0,[b-1][b-1][b-1][b-1]\dots$  gleich 1 ist.

## Darstellung von Dezimalzahlen

Es ist üblich, Dezimalzahlen in der Form

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m \dots \cdot 10^n$$

anzugeben, wobei  $a_0$  eine Ziffer von 1 bis 9 darstellt.

Dies wird erreicht, indem das Komma so lange nach links bzw. rechts verschoben wird, bis genau eine Ziffer von 1 bis 9 auf der linken Seite vom Komma steht.

Die Anzahl der Verschiebungen stellt die Zahl  $n$  der abgetrennten Zehnerpotenzen dar. Die Ziffern rechts vom Komma sind sogenannte Dezimalziffern. Ist die Zahl  $z < 1$  erfolgt die Verschiebung nach rechts und  $n$  wird negativ.

Im englischsprachigen Raum wird das Dezimalkomma durch einen Dezimalpunkt ersetzt. Diese Schreibweise verbreitet sich durch den Einsatz von Computern sehr stark und wird auch in diesem Text genutzt.

### Achtung !

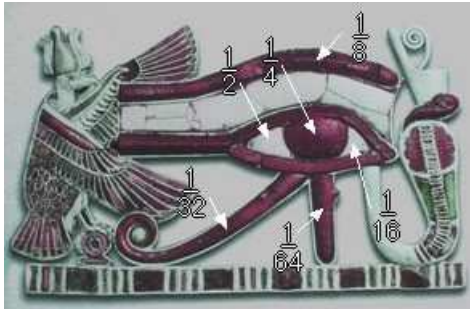
Bei verschiedenen Taschenrechnern und in Computerprogrammen wird für  $x \cdot 10^n$  die Schreibweise  $x E n$  genutzt;

**z.B. -4.67E+0013 für  $-4,67 \cdot 10^{13}$ .**

Ist in einem Computerprogramm die Potenzschreibweise  $10^n$  gestattet, so ist sehr oft das "Hochstellen" des Exponenten durch das "Potenzzeichen"  $^$  (Computersprache !) zu kennzeichnen, d.h. zum Beispiel  $3.45 \cdot 10^5$  für die Zahl  $3,45 \cdot 10^5$ .

### Auge des Horus

Schon auf altägyptischen Papyri der 6. Dynastie (um 2200 v.u.Z.) finden sich besondere Zeichen für Stammbrüche, wie  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ,  $1/32$  und  $1/64$  und somit die Anfänge der Bruchrechnung.



Im Papyrus Rhind wurden diese Zeichen noch als Zeichen für Getreidehohlmaße verwendet.

Berühmt ist das Horus-Auge, auch Udschat-Auge = heiles Auge, das zum Beispiel auf einer Kette des Pharaos Tutenchamun gefunden wurde. Dieses Auge war neben dem Skarabäus das wichtigste Amulett.

In diesem Auge sind die Stammbruchzeichen für  $1/2$  bis  $1/64$  vereinigt.

Die etwas blutrünstige, mythologische Legende erzählt, dass Horus, der Sohn des Osiris und der Isis, mit seinem Onkel Seth um die Herrschaft in Ägypten kämpfte. Seth riss in Gestalt eines schwarzen Schweins seinem Neffen Horus das Auge aus und zerstückelte es in sechs Teile.

Thot, der Gott der Weisheit, der auch die Zahlen und die Mathematik erfunden hatte, setzte aus den gefundenen Bruchteilen das Auge wie abgebildet zusammen.

Die Summe der Einzelteile ergibt  $63/64$ . Das fehlende  $1/64$  fügte auch Thot auf magische Weise hinzu und ergänzte es damit zu einem "heilen Auge".

In der Abbildung wird das Horus-Auge links von der Geiergöttin Nechbet von Elkab, der Göttin Oberägyptens, und rechts von der Schlangengöttin Uto mit der unterägyptischen Krone flankiert.

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots + \frac{1}{b_n}}}}$$

### Kettenbruch

Seien  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  ganze Zahlen mit  $b_k > 0$  für  $k > 0$ . Unter dem Kettenbruch n-ter Ordnung

$$[b_0; b_1; b_2; \dots; b_n]$$

mit den Teilennern  $b_1, b_2, \dots, b_n$  und dem Anfangsglied  $b_0$  versteht man ... (siehe Abbildung)

### Sätze

Jede rationale Zahl lässt sich durch einen Kettenbruch darstellen.

Jede reelle Zahl lässt sich durch einen Kettenbruch approximieren. Quadratische Irrationalzahlen haben periodische Kettenbrüche.

Jede Quadratwurzel ist in einen unendlichen, periodischen Kettenbruch entwickelbar.

### Kettenbruchkonstruktion

Ist  $a_0/a_1 =$  (siehe Abbildung)

ein Kettenbruch, so können die  $b_i$  mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus konstruiert werden:

$$a_0 / a_1 = b_0 + a_2/a_1 \text{ mit } 0 < a_2/a_1 < 1$$

$$a_1 / a_2 = b_1 + a_3/a_2 \text{ mit } 0 < a_3/a_2 < 1 \dots$$

$$a_{n-2} / a_{n-1} = b_{n-2} + a_n / a_{n-1} \text{ mit } 0 < a_n/a_{n-1} < 1$$

Dabei müssen die  $a_k$  natürliche Zahlen verschieden 0 sein.

$$\text{Beispiel: } 15/94 = 0 + 15/94 \rightarrow 94/15 = 6 + 4/15 \rightarrow 15/4 = 3 + 3/4 \rightarrow 4/3 = 1 + 1/3 \rightarrow 3/1 = 3 + 0, \text{ d.h. } 15/94 = [0, 6, 3, 1, 3]$$

### Kettenbrüche der Quadratwurzeln von n

Jede Quadratwurzel ist in einen unendlichen, periodischen Kettenbruch entwickelbar. Die Liste enthält für die ersten Quadratwurzeln natürlicher Zahlen diese Kettenbruchzerlegung.

$\sqrt{n}$	$b_0$	Periode	$\sqrt{n}$	$b_0$	Periode	$\sqrt{n}$	$b_0$	Periode
2	1	2	3	1	1, 2	5	2	4
6	2	2, 4	7	2	1, 1, 1, 4	8	2	1, 4
10	3	6	11	3	3, 6	12	3	2, 6
13	3	1, 1, 1, 6	14	3	1, 2, 1, 6	15	3	1, 6
17	4	8	18	4	4, 8	19	4	2, 1, 3, 1, 2, 8
20	4	2, 8	21	4	1, 1, 2, 1, 1, 8	22	4	1, 2, 4, 2, 1, 8
23	4	1, 3, 1, 8	24	4	1, 8	26	5	10
27	5	5, 10	28	5	3, 2, 3, 10	29	5	2, 1, 1, 2, 10

Längere Perioden (Länge l) treten z.B. auf, für

$\sqrt{n}$	l	$b_0$ , Periode
166	22	12; 1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 7, 1, 24

151	20	12; 3, 2, 7, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 11, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 7, 2, 3, 24
139	18	11; 1, 3, 1, 3, 7, 1, 1, 2, 11, 2, 1, 1, 7, 3, 1, 3, 1, 22
163	18	12; 1, 3, 3, 2, 1, 1, 7, 1, 11, 1, 7, 1, 1, 2, 3, 3, 1, 24
157	17	12; 1, 1, 7, 1, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 5, 1, 7, 1, 1, 24
94	16	9; 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18
124	16	11; 7, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 3, 1, 1, 1, 2, 7, 22
133	16	11; 1, 1, 7, 5, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 7, 1, 1, 22
109	15	10; 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20
134	14	11; 1, 1, 2, 1, 3, 1, 10, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 22

### Näherungsbruch k-ter Ordnung

Mit  $A_0 = b_0, A_{-1} = 1, A_{-2} = 0, B_0 = 0, B_{-1} = 0, B_{-2} = 1$  wird  $A_k = b_k \cdot A_{k-1} + A_{k-2}$  und  $B_k = b_k \cdot B_{k-1} + B_{k-2}$ . Die Näherungsbrüche  $A_k/B_k$  approximieren den Endbruch abwechselnd von unten und von oben mit wachsender Genauigkeit. Es wird

$$P_1 / Q_1 = a_1/1$$

$$P_2 / Q_2 = a_1 + 1/a_2 = (a_1 a_2 + 1)/a_2$$

$$P_3 / Q_3 = (a_3 (a_1 a_2 + 1) + a_1)/(a_2 a_3 + 1) = (a_3 P_2 + P_1) / (a_3 Q_2 + Q_1)$$

...  $P_k / Q_k = (a_k P_{k-1} + P_{k-2}) / (a_k Q_{k-1} + Q_{k-2})$

Beispiel: Für den Kettenbruch  $A = [3, 7, 2, 5, 11]$  ergeben sich damit als Näherungsbrüche

k	0	1	2	3	4	5
$a_k$	3	7	2	5	11	
$P_k/Q_k$	1/0	3/1	22/7	47/15	257/82	2874/917

und somit  $A = 2874/917$

Für  $A = P_n / Q_n$  ergibt sich aus  $P_k/Q_k - P_{k+1}/Q_{k+1} = (-1)^k / (Q_k Q_{k+1})$

weiterhin  $P_n / Q_n = a_1 + 1/(Q_1 Q_2) - 1/(Q_2 Q_3) + \dots + (-1)^n 1/(Q_{n-1} Q_n)$

### Nichtabbrechende Kettenbrüche

Die Näherungsbrüche nichtabbrechender Kettenbrüche  $[b_0; b_1; b_2; \dots]$  konvergieren gegen eine reelle Zahl

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

### Goldener Schnitt als Kettenbruch

Der Goldene Schnitt ist eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die Lösungen sind  $x_1 = (1 + \sqrt{5})/2, x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$

$$x_1 = 1.61803\dots, x_2 = -0.61803\dots$$

wobei  $x_1$  den Wert des Goldenen Schnitts  $\phi$  darstellt.

Die quadratische Gleichung lässt sich umformen zu

$$x^2 = x + 1 \text{ und } x = 1 + 1/x$$

Indem jetzt immer wieder  $x$  in den Nenner dieses Bruchs eingesetzt wird, entwickelt sich langsam ein unendlicher Kettenbruch (siehe Abbildung) bzw. in Kurzform **[1; 1; 1; 1; 1; ...]**

Dieser Kettenbruch ist die Lösung  $x_1$  der genannten quadratischen Gleichung und entspricht damit  $\phi$ .

Dieser goldene Kettenbruch ist die Lösung  $x_1$  der genannten quadratischen Gleichung und entspricht damit  $\phi$ . Entwickelt man den Kettenbruch in Näherungsbrüche, so erhält man wie zu erwarten

$$3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, \dots$$

d.h. gemeine Brüche, deren Zähler und Nenner aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen sind.

### Taschenrechnerberechnung

Aus der Struktur dieses Kettenbruchs kann man eine einfache Methode zur Berechnung von  $\phi$  auf dem Taschenrechner angeben.

Ausgehend von 1; oder jeder anderen beliebigen positiven Zahl; werden abwechselnd das Reziproke gebildet (Taste  $1/x$ ) und zum Reziproken 1 addiert, wieder das Reziproke gebildet usw. Das Ergebnis nähert sich dann immer weiter  $\phi$  an.

### Kettenbruchkonstante

Für einen unendlichen Kettenbruch dessen Komponenten eine arithmetische Reihe bilden, gilt:

$$[A+D, A+2D, A+3D, \dots] = I_{A/D}(2/D) / I_{1+A/D}(2/D)$$

wobei  $I_n(x)$  die modifizierte Bessel-Funktion 1. Art darstellt. Insbesondere gilt:

$$[0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots] = I_1(2)/I_0(2) = 0.697774658\dots = C$$

C heißt Kettenbruchkonstante.

### Satz von Lochs

Der Satz von Lochs gibt eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit von Kettenbruchdarstellungen reeller Zahlen. Der Satz wurde 1964 von Gustav Lochs bewiesen.

Es gilt: Für fast alle reellen Zahlen in dem Intervall (0,1) gilt für die Anzahl der Terme m der Kettenbruchdarstellung einer Zahl, die dazu benötigt wird, die ersten n Stellen der Dezimaldarstellung der Zahl darzustellen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m/n = 6 \ln 2 \ln 10 / \pi^2 = 0,970270114392033925740256...$$

Dieser Grenzwert wird Lochs Konstante genannt.

Da dieser Grenzwert kleiner ist als 1, gilt, dass jeder neue Term in der Kettenbruchdarstellung einer typischen reellen Zahl die Genauigkeit der Darstellung um etwa eine Dezimalstelle erhöht.

Das Dezimalsystem ist das letzte Stellenwertsystem, in dem eine neue Ziffer weniger Wert bringt als ein neuer Quotient der Kettenbruchdarstellung; im Elfersystem ist Lochs Konstante mit 1,0104321 etwas größer als 1.

Für ein Stellenwertsystem der Ordnung k gilt für die Konstante

$$\text{Lochs Konstante } L_k = 6 \ln 2 \ln k / \pi^2$$

Der Kehrwert des Grenzwertes  $\pi^2 / (6 \ln 2 \ln 10)$  ist das Doppelte des Zehner-Logarithmus der Lévy'schen Konstante und wird dezimale Kettenbruchkonstante genannt:

$\pi^2 / (6 \ln 2 \ln 10) = 1,030\ 640\ 834\ 100\ 712\ 935\ 881\ 776\ 094\ 116\ 936\ 840\ 925\ 920\ 311\ 120\ 726\ 281\ 770\ 060\ 952\ 234\ 954\ 428\ 004\ 799\ 767\ 518\ 360\ 808\ 395\ 658\ 654\ 762\ 632\ 898\ 370\ 773\ 717\ 620\ 963\ 045\ 016\ 167\ 826\ 875\ 528\ 903\ 211\ 607\ 189\ 244\ ...$

Zum Beweis des Satzes von Lochs siehe:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}}}}}$$

$$b_0 + \frac{|a_1|}{|b_1|} + \frac{|a_2|}{|b_2|} + \dots + \frac{|a_n|}{|b_n|}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

<http://books.google.de/books?id=66CkhlamuNoC&printsec=frontcover#PPA174,M1>

### Allgemeiner Kettenbruch

Sind die Zähler der Teilbrüche eine beliebige ganze Zahl  $a_i$  und nicht immer gleich 1, so spricht man von einem allgemeinen Kettenbruch.

Für diese hat man kürzere Schreibweisen entwickelt, die als zweite und dritte Abbildung zu sehen sind.

Die Zähler  $a_i$  dieses Kettenbruchs heißen Teilzähler, die Nenner  $b_i$  heißen Teilnenner. Alle Teilzähler und Teilnenner sind ganzzahlig, aber verschieden von Null. Das erste Glied  $b_0$  wird freies Glied genannt. Sind alle  $a_i = 1$  liegt ein Kettenbruch im eigentlichen Sinne vor, der auch regelmäßiger oder einfacher Kettenbruch genannt wird.

### Kettenbrüche einiger Konstanten

Konstante	reeller Wert	Kettenbruch
$\pi$	3.141 592 653 59	[3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,...]
$\pi/180$	0.017 453 292 519 94	[0,57,3,2,1,1,1,2,40,2,1,1,5,1,2,1,7,2,2,1,...]
$\pi^2$	9.869 604 401 089	[9,1,6,1,2,47,1,8,1,1,2,2,1,1,8,3,1,10,...]
$\sqrt{\pi}$	1.772 453 850 906	[1,1,3,2,1,1,6,1,28,13,1,1,2,18,1,1,1,83,...]
$\sqrt{2\pi}$	2.506 628 274 631	[2,1,1,37,4,1,1,1,1,9,1,1,2,8,6,1,2,2,1,3, ...]
$1/\pi$	0.318 309 886 183 8	[0, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, ...]
$1/\sqrt{\pi}$	0.564 189 583 547 8	[0,1,1,3,2,1,1,6,1,28,13,1,1,2,18,1,1,1,83,...]
$\sqrt[3]{\pi}$	1.464 591 887 562	[1,2,6,1,1,3,1,1,1,2,2,1,1,2,7,1,5,5,3,3,...]
$e$	2.718 281 828 459	[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1, ...]
$e^2$	7.389 056 098 931	[7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, ...]
$\sqrt{e}$	1.648 721 270 7	[1,1,1,1,5,1,1,9,1,1,13,1,1,17,1, 1,21,1,1, ...]
$e^\pi$	23.140 692 632 78	[23, 7, 9, 3, 1, 1, 591, 2, 9, 1, 2, 34, ...]
$e^{-\pi}$	0.043 213 918 263 77	[0, 23, 7, 9, 3, 1, 1, 591, 2, 9, 1, 2, 34, ...]
$1/e$	0.367 879 441 171 4	[0,2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,...]
$1/(e-1)$	0.581976706	[0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 2i, ...]
$1/(\sqrt[k]{e} + 1)$		[0, k-1, 3k-1, ..., (2i-1)k-1, ...]
$1/2(\sqrt{10} - 2)$		[0, 2, 2, 2, 2, 2, ...]
$1/2(\sqrt{((k+1)^2+1)}-k)$		[0, k, k, k, k, k, k, k, k, ...]
$(\sqrt{5}+1)/2$	Goldener Schnitt	[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]
$(\sqrt{5}-1)/2$		[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]

## Stammbbruch

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbbruch. Für einen Stammbbruch der Form  $1/p$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist, ist die Länge  $l$  dieser Periode ein Teiler von  $p-1$ , d.h.  $l$  kann maximal gleich  $p-1$  werden.

Stammbüche wurden vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt. Dabei wurde ein Bruch der Form  $a/b$  in eine Summe von Stammb Brüchen umgewandelt. z.B.

$$13/37 = 1/3 + 1/56 + 1/6216$$

1880 bewies James J.Sylvester, dass jeder Dezimalbruch in mindestens eine Zerlegung als Summe von Stammb Brüchen dargestellt werden kann. Die Frage, ob für Dezimalbrüche mit ungeradem Nenner stets eine Zerlegung mit nur ungeraden Stammbbruchennennern existiert, konnte bis heute weder bewiesen noch widerlegt werden.

Die ersten derartigen Zerlegungen findet man schon im berühmten Papyrus Rhind (1650 v.Chr.). Dort wird die Zerlegung von  $1/8$  demonstriert:

$$\begin{aligned} 1/8 &= 1/25 \cdot 25/8 = 1/5 \cdot 25/40 = 1/5 \cdot (3/5 + 1/40) = 1/5 \cdot (1/5 + 2/5 + 1/40) \\ &= 1/5 \cdot (1/5 + 1/3 + 1/15 + 1/40) = 1/25 + 1/15 + 1/75 + 1/200 \end{aligned}$$

Zwei Brüchen  $1/a$  und  $1/b$  werden benachbart genannt, wenn deren Differenz gerade ein Stammbbruch ist, z.B.  $1/2$  und  $1/3$  mit  $1/2 - 1/3 = 1/6$ .

## Stammbbruchsumme

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbbruch. Stammbüche wurden vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt.

Dabei wurde ein Bruch der Form  $a/b$  in eine Summe von Stammb Brüchen umgewandelt. z.B.

$$13/37 = 1/3 + 1/56 + 1/6216$$

Während auf der vorhergehenden Seite Stammbbruchsummen mit beliebigem Nenner betrachtet werden, kann man auch nach Zerlegungen fragen, bei denen alle Nenner ungerade Zahlen sind.

Rechts können gemeine Brüche, deren Zähler echt kleiner als der Nenner ist, in eine derartige Summe von Stammb Brüchen umgewandelt werden.

Dabei stellt man schnell fest, dass derartige Summen oft sehr viel mehr Summanden enthalten und deren Zähler auch schnell sehr groß werden.

Zum Beispiel erhält man für  $3/179$  mit dem hier implementierten Standardalgorithmus nur eine "kürzeste" Summendarstellung mit 19 Brüchen, von denen der größte Nenner mehr als 500000 Ziffern besitzt (hier nicht berechenbar).

Durch Eppstein wurde mit einem anderen Verfahren

$$3/179 = 1/171 + 1/209 + 1/285 + 1/895 + 1/1611 + 1/1969 + 1/2685$$

gefunden.

Einige gemeine Brüche erweisen sich bei der Zerlegung in eine Summe von Stammb Brüchen mit dem einen oder anderen Verfahren als problematisch.

Zum Beispiel erhält man für  $3/179$  mit dem Standardalgorithmus (siehe Stammbbruchsumme (2)) nur eine "kürzeste" Summendarstellung mit 19 Brüchen, von denen der größte Nenner mehr als 500000 Ziffern besitzt.

Durch Eppstein wurde mit einem anderen Verfahren

$$3/179 = 1/171 + 1/209 + 1/285 + 1/895 + 1/1611 + 1/1969 + 1/2685$$

gefunden. Weitere Zerlegungen sind zum Beispiel

$$3/179 = 1/105 + 1/189 + 1/525 + 1/33831 + 1/93795$$

$$3/179 = 1/105 + 1/189 + 1/525 + 1/31325 + 1/120825$$

$$3/179 = 1/105 + 1/175 + 1/675 + 1/33831 + 1/93795$$

$$3/179 = 1/105 + 1/175 + 1/675 + 1/31325 + 1/120825$$

$$3/179 = 1/75 + 1/525 + 1/675 + 1/33831 + 1/93795$$

$$3/179 = 1/75 + 1/525 + 1/675 + 1/31325 + 1/120825$$

$$3/179 = 1/75 + 1/315 + 1/4725 + 1/33831 + 1/93795$$

$$3/179 = 1/75 + 1/315 + 1/4725 + 1/31325 + 1/120825$$

$$3/179 = 1/63 + 1/1575 + 1/4725 + 1/33831 + 1/93795$$

$$3/179 = 1/63 + 1/1575 + 1/4725 + 1/31325 + 1/120825$$

## Ägyptische Zahlen

Eine natürliche Zahl  $n$  heißt ägyptische Zahl, wenn sie als Summe der Nenner einer Zerlegung der 1 in eine Summe von Stammb Brüchen dargestellt werden kann.

Zum Beispiel ist 11 eine ägyptische Zahl, da  $1 = 1/2 + 1/3 + 1/6$  und  $11 = 2 + 3 + 6$

Nichtägyptische Zahlen sind 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21 und 23.

Eine Zahl heißt streng ägyptisch, wenn die Nenner der Stammbbruchsumme aller Brüche verschieden sind. 1963 bewies Graham, dass alle natürlichen Zahlen  $> 77$  streng ägyptisch sind. Weitere streng ägyptische Zahlen sind: 11, 24, 30, 31, 32, 37, 38, 43, 45, 50, 52 bis 55, 57, 59 bis 62, 64 bis 67, 69, 71, 73 bis 76, ...

Gegenbeispiele: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12. Die Liste enthält für die ersten natürlichen Zahlen jeweils eine Zerlegung als streng ägyptische Zahl.





Zahl n	Nenner der Stammbrüche	Zahl n	Nenner der Stammbrüche
11	6, 3, 2	24	12, 6, 4, 2
30	15, 10, 3, 2	31	20, 5, 4, 2
32	18, 9, 3, 2	37	24, 8, 3, 2
38	20, 6, 5, 4, 3	43	15, 12, 10, 4, 2
45	20, 12, 6, 5, 2	50	24, 12, 8, 4, 2
52	18, 12, 9, 6, 4, 3	53	30, 10, 6, 5, 2
54	42, 7, 3, 2	55	28, 14, 7, 4, 2
57	24, 12, 8, 6, 4, 3	59	20, 18, 9, 5, 4, 3
60	18, 15, 10, 9, 6, 2	61	28, 21, 6, 4, 2

### Ägyptische Zerlegung

Die Zerlegung einer Zahl n in eine ägyptische oder streng ägyptische Darstellung wird auf der rechten Seite durchgeführt.

Diese Berechnung kann auch auf schnellen Computern sehr lang dauern und liefert mitunter sehr viele verschiedene Zerlegungen.

In der Liste sind 16 mögliche Zerlegungen der Zahl 100 zu finden, darunter nur drei streng ägyptische. Zur Berechnung mussten 810 Millionen Partitionen untersucht werden.

### Nenner der Stammbrüche

60, 12, 6, 6, 6, 5, 5	56, 21, 8, 7, 6, 2	Streng ägyptische Zerlegung
56, 14, 8, 7, 7, 4, 4	55, 11, 11, 10, 5, 4, 4	
48, 16, 12, 12, 4, 4, 4	45, 24, 9, 8, 6, 5, 3	Streng ägyptische Zerlegung
45, 18, 18, 6, 5, 4, 4	45, 14, 9, 7, 7, 7, 6, 5	
45, 12, 12, 10, 10, 9, 2	45, 10, 10, 10, 9, 6, 5, 5	
45, 10, 10, 9, 8, 8, 6, 4	44, 22, 11, 11, 4, 4, 4	
42, 24, 12, 8, 7, 4, 3	Streng ägyptische Zerlegung	42, 18, 9, 7, 6, 6, 6, 6
42, 15, 12, 12, 10, 7, 2	42, 15, 10, 10, 7, 6, 5, 5	

Die Darstellung gebrochener Zahlen als Summe von Stammbrüchen kann auch auf irrationale Zahlen erweitert werden.

Für die gebrochenen Anteile nachfolgender irrationaler Zahlen erhält man als Nenner der Stammbrüche

Konstante	Nenner der Stammbrüche
$\sqrt{2}$	3, 13, 253, 218201, 61323543802, 5704059172637470075854, 178059816815203395552917056787722451335939040, ...
$\sqrt{3}$	2, 5, 32, 1249, 5986000, 438522193400489, 3126430743599145840898147625516, 10008815260914521335142941393259537613217919681721512170785592, ...
$1/\sqrt{2}$	2, 5, 141, 68575, 32089377154, ...
e	2, 5, 55, 9999, 3620211523, 25838201785967533906, 3408847366605453091140558218322023440765, ...
$1/e$	3, 29, 15786, 513429610, 339840390654894740, ...
$\gamma$	2, 13, 3418, 52016149, 153922786652714666, ...
$\phi$	2, 9, 145, 37986, 2345721887, 26943815937041299094, 811625643619814151937413504618770581764, 697120590223140234675813998970770820981012350673738243594006422610850113672220, ...
$\ln 2$	2, 6, 38, 6071, 144715221, 58600453312405245, 28261174043083404192255923187258021, ...
$\pi$	8, 61, 5020, 128541455, 162924332716605980, 28783052231699298507846309644849796, 871295615653899563300996782209332544845605756266650946342214549769447, ...
$1/\pi$	4, 15, 609, 845029, 1010073215739, 1300459886313272270974271, 1939680952094609786557359582286462958434022504402, ...

### Guys ägyptische Zerlegungen

Durch Richard K. Guy wurde in "Unsolved Problems in Number Theory" folgendes Problem gestellt.

Gesucht sind Zerlegungen der 1 in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$$1 = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n$$

Dabei sollen die  $a_i$  paarweise verschieden sein und außerdem eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen bilden.

Gesucht ist die Zerlegung, bei der das  $a_n$  den kleinst möglichen Wert annimmt. Diese Zerlegung wird optimal genannt.

Durch Milo Gardner wurden folgende Ergebnisse als optimal nachgewiesen:

n	Nenner der Stammbrüche
3	2 3 6
4	2 4 6 12
5	2 4 10 12 15
6	3 4 6 10 12 15
7	3 4 9 10 12 15 18
8	3 5 9 10 12 15 18 20
9	4 5 8 9 10 15 18 20 24
10	5 6 8 9 10 12 15 18 20 24
11	5 6 8 9 10 15 18 20 21 24 28
12	6 7 8 9 10 14 15 18 20 24 28 30

Hinweis: Die Berechnung der optimalen Lösungen ist extrem aufwendig und nur unter massivem Computereinsatz in realistischer Zeit durchführbar.

### Papyrus Rhind-Bruchzerlegungen

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbruch. Stammbrüche wurden vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt. Durch Milo Gardner wurden Zerlegungen von Brüchen der Form  $2/n$  in Stammbruchsummen im Papyrus Rhind gefunden. Die besten sind:

$2/3 = 1/2 + 1/6$	$2/5 = 1/3 + 1/15$
$2/7 = 1/4 + 1/28$	$2/9 = 1/6 + 1/18$
$2/11 = 1/6 + 1/66$	$2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104$
$2/15 = 1/10 + 1/30$	$2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68$
$2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114$	$2/21 = 1/14 + 1/42$
$2/23 = 1/12 + 1/276$	$2/25 = 1/15 + 1/75$
$2/27 = 1/18 + 1/54$	$2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$
$2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155$	$2/33 = 1/22 + 1/66$
$2/35 = 1/25 + 1/30 + 1/42$	$2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296$
$2/39 = 1/26 + 1/78$	$2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328$
$2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301$	$2/45 = 1/30 + 1/90$
$2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470$	$2/49 = 1/28 + 1/196$
$2/51 = 1/34 + 1/102$	$2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795$
$2/55 = 1/30 + 1/330$	$2/57 = 1/38 + 1/114$
$2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531$	$2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610$
$2/63 = 1/42 + 1/126$	$2/65 = 1/39 + 1/195$
$2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536$	$2/69 = 1/46 + 1/138$
$2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710$	$2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365$
$2/75 = 1/50 + 1/150$	$2/77 = 1/44 + 1/308$
$2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790$	$2/81 = 1/54 + 1/162$
$2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498$	$2/85 = 1/39 + 1/195$
$2/87 = 1/58 + 1/174$	$2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890$
$2/91 = 1/70 + 1/130$	$2/93 = 1/62 + 1/186$
$2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570$	$2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776$
$2/99 = 1/66 + 1/198$	$2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606$

Gardner vermutet, dass der ägyptische Schreiber Ahmes die Zerlegungen über  $2/pq = (1/q + 1/pq) \cdot 2/(p + 1)$  und

$$2/pq = 2/A \cdot A/pq \text{ mit } A = (p + 1) \text{ und } (p + q) \text{ gefunden hat.}$$

Über die Zerlegungstabelle von Brüchen der Form  $2/n$  in Stammbrüche gelang es den ägyptischen Mathematikern, auch Brüche mit größerem Zähler in eine Summe von Stammbrüchen zu verwandeln.

Zum Beispiel wird für  $7/29$  mit  $7 = 1 + 2 + 2 + 2$

$$\begin{aligned}
 7/29 &= 1/29 + (1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232) + (1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232) + (1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232) \\
 &= 1/29 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + (2/24 + 2/58 + 2/174 + 2/232) \\
 &= 1/29 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/12 + 1/29 + 1/87 + 1/116 \\
 &= 2/29 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/12 + 1/87 + 1/116 \\
 &= 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/12 + 1/87 + 1/116 \\
 &= 2/24 + 2/58 + 2/174 + 2/232 + 1/12 + 1/87 + 1/116 \\
 &= 1/12 + 1/29 + 1/87 + 1/116 + 1/12 + 1/87 + 1/116 \\
 &= 2/12 + 1/29 + 2/87 + 2/116 \\
 &= 1/6 + 1/58 + 1/174 + 1/58 + 1/29 \\
 &= 2/58 + 1/6 + 1/29 + 1/174 \\
 &= 1/29 + 1/6 + 1/29 + 1/174 \\
 &= 2/29 + 1/6 + 1/174 \\
 &= 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 + 1/6 + 1/174
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2/174 + 1/24 + 1/58 + 1/232 + 1/6 \\
&= 1/87 + 1/24 + 1/58 + 1/232 + 1/6 \\
&= 1/6 + 1/24 + 1/58 + 1/87 + 1/232
\end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise ist zwar nicht elegant, führt aber zum gewünschten Ergebnis. Beachtet man, dass dies vor mehr als 3500 Jahren gefunden wurde, kann man die ägyptischen Mathematiker nur bewundern. Allerdings können die kürzeren Formen  $7/29 = 1/5 + 1/29 + 1/145 = 1/5 + 1/25 + 1/725$  nicht ermittelt werden.

### Ägyptische Brüche

Ein gemeiner Bruch, dessen Zähler = 1 ist, heißt Stammbruch oder ägyptischer Bruch, da diese vor allem im antiken Ägypten zur Darstellung gebrochener Zahlen genutzt wurden.

Gesucht sind Zerlegungen eines Bruchs  $p/q$  in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$$p/q = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n$$

Der einfachste Algorithmus ist ein Zerlegungsalgorithmus (engl. splitting method) auf der Grundlage von

$$1/x = 1/(x+1) + 1/(x(x+1))$$

Verfahren:  $p/q$  sei kleiner 1 und vollständig gekürzt.

- 1)  $p/q$  wird als Summe von  $p$  Stammbrüchen der Form  $1/q$  geschrieben
- 2) Treten gleiche Stammbrüche auf, so werden, bis auf den ersten, alle anderen mit der obigen Gleichung zerlegt
- 3) Schritt 2 wird so lange wiederholt, bis nur verschiedene Stammbrüche auftreten

$$\begin{aligned}
\text{Beispiel: } 3/7 &= 1/7 + 1/7 + 1/7 \\
&= 1/7 + (1/8 + 1/56) + (1/8 + 1/56) \\
&= 1/7 + 1/8 + 1/8 + 1/56 + 1/56 \\
&= 1/7 + 1/8 + (1/9 + 1/72) + 1/56 + (1/57 + 1/3192) \\
&= 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/56 + 1/57 + 1/72 + 1/3192
\end{aligned}$$

1977 wurde von Campbell bewiesen, dass der Algorithmus immer endet. Allerdings ist die gefundene Zerlegung eine der schlechtesten, da sie sehr viele Stammbrüche enthält.

### Fibonacci-Sylvester Algorithmus

Erneut sind Zerlegungen eines Bruchs  $p/q$  in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$$p/q = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n$$

gesucht. Durch Fibonacci wurde 1202 nachfolgender Algorithmus angegeben, welcher zwar effektiver als der Zerlegungsalgorithmus ist, jedoch nicht optimal. 1880 bewies Sylvester, dass der Algorithmus korrekt ist und stets terminiert.

Verfahren:  $p/q$  sei kleiner 1 und vollständig gekürzt.

- 1) Ist  $p = 1$ , stoppt der Algorithmus, andernfalls wird  $q = s p + r$  mit  $r < p$  berechnet
- 2) Dann ist  $p/q = 1/(s+1) + (p-r)/(q(s+1))$ , d.h.  $s+1$  Nenner eines der gesuchten Stammbrüche
- 3) Mit  $p = p - r$  und  $q = q(s+1)$  und vollständiger Kürzung von  $p/q$  wird bei Schritt 1 wieder begonnen

$$\text{Beispiel: } 3/7 = 1/3 + 2/21 = 1/3 + 1/11 + 1/231$$

Zwar ist der Fibonacci-Sylvester Algorithmus für eine Vielzahl von Brüchen einsetzbar, liefert aber sehr große Nenner, wenn mehr als 5 Stammbrüche auftreten.

$$\text{Für } 5/121 \text{ würde man erhalten } = 1/25 + 1/757 + 1/763309 + 1/873960180912 + 1/1527612795642093418846225$$

$$\text{und nicht die optimale Zerlegung } 5/121 = 1/33 + 1/121 + 1/363$$

Der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus liefert im Allgemeinen nicht die beste Zerlegung des Bruchs.

Fibonacci selbst fand als Zerlegung  $4/49 = 1/13 + 1/319 + 1/637$

Günstiger ist  $4/49 = 1/14 + 1/98$

Der Fibonacci-Sylvester-Algorithmus ermittelt nur  $4/49 = 1/13 + 1/213 + 1/67841 + 1/9204734721$

Die kleinsten Brüche, für die der Algorithmus mindestens  $n$  Teilbrüche ergibt, sind

$n$	kleinster Bruch $n$	kleinster Bruch
1	1/2	2
2	3/7	4
3	5/31	6
4	7/253	8
5	9/271	10
6	11/199	10

### Golomb Algorithmus

Erneut sind Zerlegungen eines Bruchs  $p/q$  in eine Summe von Stammbrüchen der Form

$$p/q = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n$$

gesucht. Durch Golomb wurde 1962 in "An Algebraic Algorithm For The Representation Problems of the Ahmes Papyrus" ein Algorithmus angegeben, welcher wesentlich leistungsstärker als der von Fibonacci-Sylvester ist.

Verfahren:  $p/q$  sei kleiner 1 und vollständig gekürzt.

1) Ist  $p = 1$ , stoppt der Algorithmus, andernfalls wird  $p s = q r + 1$  mit  $0 < s < q$  berechnet, d.h.  $s$  ist das multiplikativ Inverse zu  $p$  modulo  $q$

2) Dann ist  $p/q = 1/(s q) + r/s$ , d.h.  $s q$  Nenner eines der gesuchten Stammbrüche

3) Mit  $q = s$  und  $p = r$  wird bei Schritt 1 wieder begonnen

Beispiel:  $3/7 = 1/3 + 2/21 = 1/3 + 1/15 + 1/35$

### Srinivasan-Algorithmus

Eine positive ganze Zahl  $m$  wird praktische Zahl genannt, wenn jede natürliche Zahl  $n < m$  als Summe von verschiedenen, positiven Teilern von  $m$  dargestellt werden kann. Praktische Zahlen können zur Bestimmung ägyptischer Zerlegungen genutzt werden.

Liegt ein Bruch  $p/q$  vor, dessen Nenner  $q$  praktische Zahl ist und  $p < q$ , so kann eine Zerlegung in ägyptische Brüche angegeben werden. Zum Beispiel ist 20 eine praktische Zahl und damit  $9/20 = (4+5)/20 = 1/5 + 1/4$ .

Ist  $n$  eine praktische Zahl und ein ungerades  $q < 2n$  eine zu  $n$  relativ prime Zahl, dann ist auch  $q \cdot n$  praktisch. Ist  $q$  gerade, so muss die praktische Zahl  $n > q$  sein.

Algorithmus: Man wählt eine praktische Zahl  $n$ , die den Bedingungen entspricht.

Zähler und Nenner werden mit der praktischen Zahl erweitert und für den Zähler die entsprechende Summendarstellung ermittelt.

Die Zähler und Nenner der Teilbrüche sind vollständig kürzbar, so dass eine ägyptische Zerlegung entsteht.

Beispiel: Für  $5/23$  wird die praktische Zahl 12 gewählt. Dann wird

$$5/23 = 5 \cdot 12 / (23 \cdot 12) = (46 + 12 + 2) / (23 \cdot 12) = 1/6 + 1/23 + 1/238$$

### Binärer Algorithmus

Es sei ein Bruch  $p/q$  gegeben, der ägyptisch zerlegt werden soll.

Ist  $q$  eine Zweierpotenz  $n^k$ , so wird  $p$  als Summe von  $k$  oder weniger Teilern von  $q$  geschrieben.

Beispiel:  $5/16 = (1 + 4)/16 = 1/16 + 4/16 = 1/16 + 1/4$

Ist  $q$  keine Zweierpotenz, so wählt man die kleinste Zweierpotenz  $N = n^k$  mit  $q < n^k$  und erweitert  $p/q$  mit dieser. Dann wird für natürliche Zahlen  $s$  und  $r$

$$p/q = N p / (N q) = (q s + r) / (N q) = s/N + r/(N q)$$

Der Teilbruch  $s/N$  wird wie oben beschrieben als Summe von Stammbrüchen geschrieben. Auch der zweite Bruch  $r/(N q)$  ist als Summe von Teilern von  $N$  nun darstellbar und damit zum Stammbruch kürzbar.

Beispiel:  $5/21: 16 < 21 < 32$

$$\begin{aligned} 5/21 &= 5 \cdot 32 / (21 \cdot 32) = (7 \cdot 21 + 13) / (21 \cdot 32) = 7/32 + 13 / (21 \cdot 32) = \\ &= (1 + 2 + 4)/32 + (1 + 4 + 8) / (21 \cdot 32) = \\ &= 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/84 + 1/168 + 1/672 \end{aligned}$$

Dieser Algorithmus garantiert eine Zerlegung in Stammbrüchen mit Nennern von maximal  $q \cdot (q-1)$ .

### Farey-Algorithmus

Es sei ein Bruch  $p/q$  gegeben, der ägyptisch zerlegt werden soll. Grundlage der Zerlegung sind hier die Farey-Reihen.

Ist  $p/q$  vollständig gekürzt, so wird in der  $q$ -ten Farey-Folge der Bruch  $r/s$  gesucht, der unmittelbar vor  $p/q$  auftritt. Dann ist  $p/q = 1/(qs) + r/s$  und  $1/(qs)$  ist ein Summand der Zerlegung. Nun wird  $p/q = r/s$  gesetzt und das Verfahren solange wiederholt bis  $r = 1$  ist.

Beispiel für  $5/21$ : In der 21.Farey-Reihe steht  $4/17$  vor  $5/21$ , d.h.

$$5/21 = 4/17 + 1/(21 \cdot 17)$$

In der 17.Reihe findet man vor  $4/17$  den Bruch  $3/13$  und bei weiterer Wiederholung der gebrochenen Zahlen  $2/9$  und  $1/5$ .

$$\begin{aligned} 5/21 &= 3/13 + 1/(17 \cdot 13) + 1/(21 \cdot 17) \\ 5/21 &= 2/9 + 1/(13 \cdot 9) + 1/(17 \cdot 13) + 1/(21 \cdot 17) \\ 5/21 &= 1/5 + 1/(9 \cdot 5) + 1/(13 \cdot 9) + 1/(17 \cdot 13) + 1/(21 \cdot 17) \\ 5/21 &= 1/5 + 1/45 + 1/117 + 1/221 + 1/357 \end{aligned}$$

Dieser Algorithmus garantiert eine Zerlegung in Stammbrüchen mit Nennern von maximal  $q \cdot (q-1)$  und erzeugt die gleiche Zerlegung wie der Golomb Algorithmus.

### Ägyptische Zerlegung (3)

Bei der Suche nach ägyptischen Zerlegungen werden vor allem Darstellungen mit möglichst wenig Stammbruchsummanden gesucht. Für Brüche der Form  $2 / (2i+1)$

existiert stets eine Zerlegung in genau zwei Summanden. Es ist

$$\frac{1}{i+1} + \frac{1}{(i+1)(2i+1)} = \frac{(2i+1+1)}{(i+1)(2i+1)} = \frac{(2i+2)}{(i+1)(2i+1)} = \frac{2(i+1)}{(i+1)(2i+1)} = \frac{2}{2i+1}$$

und damit zum Beispiel

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120} = \frac{1}{9} + \frac{1}{45} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91}$$

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}$$

### Ägyptisches 4/n-Problem

Eine offene Frage der ägyptischen Zerlegungen ist es, ob für Brüche der Form  $\frac{4}{2i+1}$  stets eine ägyptische Darstellung mit höchstens 3 Stammbrüchen gefunden werden kann.

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Erdős und Straus gaben als erste diese Vermutung an. Durch Nicola Franceschini wurden alle Zähler  $n \leq 10^8$  erfolgreich getestet.

Mordell gab 1969 einen ersten Beweis, allerdings nicht für prime Zähler  $n$ , die kongruent 1,  $11^2$ ,  $13^2$ ,  $17^2$ ,  $19^2$  oder  $23^2$  modulo 840 sind.

### Ägyptisches k/n-Problem

Außer der Frage nach der Zerlegung von Brüchen der Form  $\frac{2}{n}$  und  $\frac{4}{n}$  in eine ägyptische Darstellung mit höchstens 3 Stammbrüchen interessiert man sich auch für den allgemeinen Fall  $\frac{k}{n}$ .

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Sierpinski vermutete, dass  $\frac{5}{n}$  als Summe von drei Stammbrüchen dargestellt werden kann. Durch Stewart wurden alle  $n \leq 1057438801$  erfolgreich geprüft.

Im Fall  $\frac{6}{n}$  gab Webb zumindest einen Teilbeweis für alle  $n \equiv 1, 61$  oder  $541$  modulo 660.

Allgemein wird vermutet, dass für alle  $4 \leq k \leq 7$  nur 3 Brüche benötigt werden, für  $8 \leq k \leq 12$  vier Brüche.

Nach Sierpinski existiert für jedes  $k$  ein  $N$ , so dass die ägyptische Zerlegung von  $\frac{k}{n}$  mit  $n > N$  stets nur 3 Stammbrüche benötigt.

Der kleinste Bruch, der nicht mit 3 Summanden darstellbar ist, ist  $\frac{8}{11}$ . Die kleinsten Brüche mit mindestens 5, 6 und 7 Summanden sind  $\frac{16}{17}$ ,  $\frac{77}{79}$  und  $\frac{728}{739}$ .

### Kürzeste ägyptische Zerlegungen

Je nach Wahl des Algorithmus zur Zerlegung in ägyptische Brüche:

Fibonacci-Sylvester Algorithmus, Golomb Algorithmus, Srinivasan-Algorithmus erhält man unterschiedliche Summendarstellungen, jedoch nicht unbedingt die kürzeste.

Die nachfolgende Übersicht zeigt die kürzesten Zerlegungen für  $\frac{p}{q}$  und  $q$  bis 11. Als Schreibweise werden die Zähler der Stammbrüche in eckige Klammern gesetzt, z.B.  $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = [2,4,20]$ :

$$\frac{2}{3} = [2,6]$$

$$\frac{2}{5} = [3,15]$$

$$\frac{2}{7} = [4,28]$$

$$\frac{2}{9} = [5,45] = [6,18]$$

$$\frac{2}{11} = [6,66]$$

$$\frac{3}{4} = [2,4]$$

$$\frac{3}{5} = [2,10]$$

$$\frac{3}{7} = [3,11,231] = [3,12,84] = [3,14,42] = [3,15,35] = [4,6,84] = [4,7,28]$$

$$\frac{3}{8} = [3,24] = [4,8]$$

$$\frac{3}{10} = [4,20] = [5,10]$$

$$\frac{3}{11} = [4,44]$$

$$\frac{4}{5} = [2,4,20] = [2,5,10]$$

$$\frac{4}{7} = [2,14]$$

$$\frac{4}{9} = [3,9]$$

$$\frac{4}{11} = [3,33]$$

$$\frac{5}{6} = [2,3]$$

$$\frac{5}{7} = [2,5,70] = [2,6,21] = [2,7,14]$$

$$\frac{5}{8} = [2,8]$$

$$\frac{5}{9} = [2,18]$$

$$\frac{5}{11} = [3,9,99] = [3,11,33] = [4,5,220]$$

$$\frac{6}{7} = [2,3,42]$$

$$\frac{6}{11} = [2,22]$$

$$\frac{7}{8} = [2,3,24] = [2,4,8]$$

$$\frac{7}{9} = [2,4,36] = [2,6,9]$$

$$\frac{7}{10} = [2,5]$$

$$\frac{7}{11} = [2,8,88] = [2,11,22]$$

$$\frac{8}{9} = [2,3,18]$$

$$\frac{8}{11} = [2,5,37,4070] = [2,5,38,1045] = [2,5,40,440] = [2,5,44,220] = [2,5,45,198] = [2,5,55,110]$$

$$= [2,5,70,77] = [2,6,17,561] = [2,6,18,198] = [2,6,21,77] = [2,6,22,66] = [2,7,12,924] = [2,7,14,77]$$

$$= [2,8,10,440] = [2,8,11,88] = [3,4,7,924]$$

$$\frac{9}{10} = [2,3,15]$$

$$\frac{9}{11} = [2,4,15,660] = [2,4,16,176] = [2,4,20,55] = [2,4,22,44] = [2,5,10,55]$$

$$\frac{10}{11} = [2,3,14,231] = [2,3,15,110] = [2,3,22,33]$$

### Orientalisches Kamelproblem

Problem: Ein orientalischer Kaufmann verfügt in seinem Testament, dass seine 17 Kamele unter seinen drei Söhnen wie folgt aufgeteilt werden. Der erste Sohn erhält  $\frac{1}{2}$  der Herde, der zweite Sohn  $\frac{1}{3}$  und der dritte  $\frac{1}{9}$ .

Da der Testamentsvollstrecker keine "armes" Kamel teilen will, stellt er eines seiner Kamele zu den 17 und teilt nun die die Herde von 18 Kamelen nach dem Testament auf. Der erste Sohn erhält 9 Kamele,

der zweite 6 Kamele und der dritte 2 Kamele. Am Ende bleibt ein Kamel übrig, welches der Testamentsvollstrecker wieder nimmt.

Alle sind zufrieden, da jeder Sohn mehr erhielt, als ihm nach dem Testament zustand. Zum Beispiel erhielt der erste Sohn 9 Kamele anstelle von  $8 \frac{1}{2}$  Kamelen usw. Wie ist dies möglich?

Der scheinbare Widerspruch löst sich, wenn man beachtet, dass nach dem Testament gar nicht die ganze Herde aufgeteilt wird. Denn es ist

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}.$$

Allgemein besteht bei dieser Problemart die Forderung, dass drei Stammbrüche  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{c}$  mit unterschiedlichen Nennern gerade eine Summe der Form  $\frac{d}{(d+1)}$  ergeben. Entsprechend den orientalischen Gepflogenheiten sollte  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$  gelten, da der älteste Sohn natürlich am meisten erhält. Beschränkt man die Gesamtzahl der Kamele auf ein normales Maß ( $< 10000$  Kamele), so existieren erstaunlicherweise nur sieben mögliche Lösungen für  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Lässt man gleiche Werte für  $a$ ,  $b$ ,  $c$  zu, so kommen noch 5 weitere Möglichkeiten hinzu. In allen Fällen kann durch Hinzufügen eines Kamels zur Herde die Verteilung durchgeführt werden, wobei dieses ein Kamel am Ende wieder übrig bleibt.

Kamelzahl	1.Sohn	2.Sohn	3.Sohn	Kamelzahl	1.Sohn	2.Sohn	3.Sohn
41	2	3	7	23	2	3	8
17	2	3	9	11	2	3	12
19	2	4	5	11	2	4	6
7	2	4	8				
Möglichkeiten mit gleichen Anteilen							
9	2	5	5	5	2	6	6
11	3	3	4	3	4	4	4
5	3	3	6				



### Kamelproblem bei Brecht

#### Bertold Brecht: Freundschaftsdienste

Als Beispiel für die richtige Art, Freunden einen Dienst zu erweisen, gab Herr K. folgende Geschichte zum besten:

"Zu einem alten Araber kamen drei junge Leute und sagten ihm: 'Unser Vater ist gestorben. Er hat uns siebzehn Kamele hinterlassen und im Testament verfügt, daß der Älteste die Hälfte, der Zweite ein Drittel und der Jüngste ein Neuntel der Kamele bekommen soll.

Jetzt können wir uns über die Teilung nicht einigen; übernimm Du die Entscheidung!'

Der Araber dachte nach und sagte: 'Wie ich sehe, habt ihr, um gut teilen zu können, ein Kamel zu wenig. Ich habe selbst nur ein einziges Kamel, aber es steht euch zur Verfügung. Nehmt es und teilt dann, und bringt mir nur, was übrigbleibt.'

Sie bedankten sich für diesen Freundschaftsdienst, nahmen das Kamel mit und teilten die achtzehn Kamele nun so, daß der Älteste die Hälfte, das sind neun, der Zweite ein Drittel, das sind sechs, und der Jüngste ein Neuntel, das sind zwei Kamele bekam. Zu ihrem Erstaunen blieb, als sie ihre Kamele zur Seite geführt hatten, ein Kamel übrig. Dieses brachten sie, ihren Dank erneuernd, ihrem alten Freund zurück."

Herr K. nannte diesen Freundschaftsdienst richtig, weil er keine besonderen Opfer verlangte. (aus Gesammelte Werke, Band 12, Prosa I)

### Allgemeines Kamelproblem

Das orientalische Kamelproblem der vorhergehenden Seite kann verallgemeinert werden.

Der Kaufmann verfügt in nun seinem Testament, dass seine  $n$  Kamele unter seinen  $m$  Söhnen aufgeteilt werden sollen. Dabei können nun auch 2, 4 oder mehr Söhne vorhanden sein. Erneut sollen die Söhne entsprechende Anteile erhalten, wobei der erste wieder mehr erhält als der zweite, der zweite mehr als dritte usw.

Soll das Problem wieder durch Hinzufügen eines Kamels, dass nach der Aufteilung wieder übrig geteilt, gelöst werden, so gibt es für 2 Söhne nur genau zwei Lösungen. Für mehr als 3 Söhne steigt die Anzahl der Lösungen stark an.

Die Liste enthält alle gefundenen Zerlegungen bis zu einer Maximalzahl von 250 Kamelen. Angegeben werden die Herdenstärke und als Summe die Anteile der Söhne; ab 6 Brüdern nur noch eine Lösung je Herdenstärke.

#### Ausgewählte Lösungen

2 Brüder:	$3 : \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	$5 : \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$
4 Brüder:	$15 : \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	
5 Brüder:	$23 : \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$	
6 Brüder:	$35 : \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$	
7 Brüder:	$59 : \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$	
8 Brüder:	$59 : \frac{1}{60} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$	
9 Brüder:	$89 : \frac{1}{90} + \frac{1}{45} + \frac{1}{30} + \frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$	
10 Brüder:	$119 : \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$	
11 Brüder:	$119 : \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{30} + \frac{1}{24} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$	

12 Brüder: 179 :  $1/90 + 1/60 + 1/45 + 1/36 + 1/20 + 1/18 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/9 + 1/5 + 1/4$   
 13 Brüder: 179 :  $1/90 + 1/60 + 1/45 + 1/36 + 1/30 + 1/20 + 1/18 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/9 + 1/6 + 1/4$   
 14 Brüder: 239 :  $1/120 + 1/80 + 1/48 + 1/40 + 1/30 + 1/24 + 1/20 + 1/16 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/8 + 1/6 + 1/5$   
 15 Brüder: 239 :  $1/240 + 1/120 + 1/80 + 1/60 + 1/40 + 1/30 + 1/24 + 1/20 + 1/16 + 1/15 + 1/12 + 1/10 + 1/8 + 1/6 + 1/5$

### Räuber-Beute-Stammbrüche

**Aufgabe:** Drei Räuber wollen ihre Beute aufteilen. Der zweite Räuber soll weniger als der erste und der dritte weniger als der zweite bekommen. Ihre Anteile sollen aber Stammbrüche der gesamten Beute sein, also  $1/2, 1/3, 1/4$ , usw.. Wie viel bekommt jeder?

#### Lösung:

Wenn alle Räuber gleich viel erhielten, betrüge jeder Anteil  $1/3$ . Da aber der erste Räuber mehr als die anderen bekommen soll, muss sein Anteil an der Beute  $1/2$  betragen. Würden die beiden anderen Räuber vom Rest jeweils die Hälfte bekommen, betrüge ihr Anteil  $1/4$ . Da der zweite aber mehr als der dritte und weniger als der erste bekommen soll, kommt für ihn nur  $1/3$  in Frage. Für den dritten Räuber bleibt dann nur  $1/6$ , was tatsächlich auch ein Stammbruch ist. Die Anteile und damit die Stammbrüche lauten also:

$1/2, 1/3$  und  $1/6$

Wollten vier Räuber die Beute nach den gleichen Regeln unter sich aufteilen, hätten sie die Auswahl unter insgesamt sechs Kombinationen von jeweils vier Stammbrüchen:

$$\begin{aligned} 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1 & \quad 1/2 + 1/3 + 1/8 + 1/24 = 1 & \quad 1/2 + 1/3 + 1/9 + 1/18 = 1 \\ 1/2 + 1/3 + 1/10 + 1/15 = 1 & \quad 1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/20 = 1 & \quad 1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/12 = 1 \end{aligned}$$

Mit steigender Anzahl der Räuber vermehrt sich die Anzahl der Lösungen rasch. Fünf Räuber könnten schon auf 72 Arten jeweils fünf verschiedene Stammbrüche so kombinieren, dass ihre Summe eins ergäbe. Der Liste der Nennerkombinationen:

2, 3, 7, 43, 1806	2, 3, 7, 44, 924	2, 3, 7, 45, 630	2, 3, 7, 46, 483
2, 3, 7, 48, 336	2, 3, 7, 49, 294	2, 3, 7, 51, 238	2, 3, 7, 54, 189
2, 3, 7, 56, 168	2, 3, 7, 60, 140	2, 3, 7, 63, 126	2, 3, 7, 70, 105
2, 3, 7, 78, 91	2, 3, 8, 25, 600	2, 3, 8, 26, 312	2, 3, 8, 27, 216
2, 3, 8, 28, 168	2, 3, 8, 30, 120	2, 3, 8, 32, 96	2, 3, 8, 33, 88
2, 3, 8, 36, 72	2, 3, 8, 40, 60	2, 3, 8, 42, 56	2, 3, 9, 19, 342
2, 3, 9, 20, 180	2, 3, 9, 21, 126	2, 3, 9, 22, 99	2, 3, 9, 24, 72
2, 3, 9, 27, 54	2, 3, 9, 30, 45	2, 3, 10, 16, 240	2, 3, 10, 18, 90
2, 3, 10, 20, 60	2, 3, 10, 24, 40	2, 3, 11, 14, 231	2, 3, 11, 15, 110
2, 3, 11, 22, 33	2, 3, 12, 13, 156	2, 3, 12, 14, 84	2, 3, 12, 15, 60
2, 3, 12, 16, 48	2, 3, 12, 18, 36	2, 3, 12, 20, 30	2, 3, 12, 21, 28
2, 3, 14, 15, 35	2, 4, 5, 21, 420	2, 4, 5, 22, 220	2, 4, 5, 24, 120
2, 4, 5, 25, 100	2, 4, 5, 28, 70	2, 4, 5, 30, 60	2, 4, 5, 36, 45
2, 4, 6, 13, 156	2, 4, 6, 14, 84	2, 4, 6, 15, 60	2, 4, 6, 16, 48
2, 4, 6, 18, 36	2, 4, 6, 20, 30	2, 4, 6, 21, 28	2, 4, 7, 10, 140
2, 4, 7, 12, 42	2, 4, 7, 14, 28	2, 4, 8, 9, 72	2, 4, 8, 10, 40
2, 4, 8, 12, 24	2, 4, 9, 12, 18	2, 4, 10, 12, 15	2, 5, 6, 8, 120
2, 5, 6, 9, 45	2, 5, 6, 10, 30	2, 5, 6, 12, 20	3, 4, 5, 6, 20

Für sechs Räuber konnten mittels Computer 2035 Möglichkeiten berechnet werden, zum Beispiel als 6-Tupel der Nenner

$$1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/46 + 1/484 + 1/233772 = 1$$

$$1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/10 + 1/12 + 1/15 = 1$$

2, 3, 7, 46, 490, 33810	2, 3, 7, 46, 492, 26404	2, 3, 7, 47, 395, 779730
2, 3, 7, 47, 396, 130284	2, 3, 7, 47, 399, 37506	2, 3, 7, 47, 402, 22043
2, 3, 7, 47, 420, 6580	2, 3, 7, 47, 423, 5922	2, 3, 7, 47, 434, 4371
2, 3, 7, 47, 483, 2162	2, 3, 7, 48, 337, 113232	2, 3, 7, 48, 338, 56784
2, 3, 7, 48, 339, 37968	2, 3, 7, 48, 340, 28560	2, 3, 7, 48, 342, 19152
2, 3, 7, 48, 343, 16464	2, 3, 7, 48, 344, 14448	2, 3, 7, 48, 345, 12880
2, 3, 7, 48, 348, 9744	2, 3, 7, 48, 350, 8400	2, 3, 7, 48, 352, 7392
2, 3, 7, 48, 354, 6608	2, 3, 7, 48, 357, 5712	2, 3, 7, 48, 360, 5040
2, 3, 7, 48, 364, 4368	2, 3, 7, 48, 368, 3864	2, 3, 7, 48, 372, 3472
2, 3, 7, 48, 378, 3024	2, 3, 7, 48, 384, 2688	2, 3, 7, 48, 385, 2640

Für sieben Räuber ergaben sich zum Beispiel

2, 3, 7, 68, 196, 250, 624750	2, 3, 7, 69, 189, 249, 103086
2, 3, 7, 69, 190, 247, 198835	2, 3, 7, 69, 196, 238, 76636
2, 4, 5, 25, 167, 250, 83500	2, 4, 5, 25, 168, 248, 65100
2, 4, 5, 25, 168, 250, 21000	2, 4, 5, 25, 169, 245, 828100

2, 5, 6, 9, 55, 248, 122760	2, 5, 6, 9, 55, 249, 41085
2, 5, 6, 9, 55, 250, 24750	2, 5, 6, 9, 56, 230, 57960
2, 6, 7, 8, 17, 152, 13566	2, 6, 7, 8, 17, 153, 8568
2, 6, 7, 8, 17, 168, 1428	2, 6, 7, 8, 17, 238, 408

### Anomal kürzbare Brüche

Durch R.P.Boas wurde 1979 in "Mathematical Plums" folgendes Problem gestellt:  
 Gesucht sind alle Brüche mit zweistelligen Nenner und Zähler, die durch Wegstreichen einer gleichen Ziffer im Nenner und Zähler ihren Wert nicht verändern. Außer den trivialen Fällen  $33/11 = 3/1$  usw. existieren im Dezimalsystem genau 4 derartige anomal kürzbare Brüche:

$$16 / 64 = 1 / 4 \quad 26 / 65 = 2 / 5 \quad 19 / 95 = 1 / 5 \quad 49 / 98 = 1 / 2$$

und deren Reziproke.

Erweitert man die Fragestellung auf beliebige Positionssysteme zu verschiedenen Basen, so zeigt sich, dass für eine Primzahlbasis keine Lösung existiert, für Nichtprimzahlen jedoch mehrere. Bis zur Basis 36 sind die Ziffern größer als 9 in der üblichen Schreibweise (A=10, B=11, ...) angegeben. Für höhere Basen bedeutet ein Eintrag <xx> die Ziffer xx in diesem Positionssystem.

Basis	Bruch	Dezimalbruch	
4	13 / 32	7 / 14 = 1 / 2	Anzahl = 1
6	15 / 53	11 / 33 = 1 / 3	
6	25 / 54	17 / 34 = 1 / 2	Anzahl = 2
8	17 / 74	15 / 60 = 1 / 4	
8	37 / 76	31 / 62 = 1 / 2	Anzahl = 2
9	14 / 43	13 / 39 = 1 / 3	
9	28 / 86	26 / 78 = 1 / 3	Anzahl = 2
10	16 / 64	16 / 64 = 1 / 4	
10	26 / 65	26 / 65 = 2 / 5	
10	19 / 95	19 / 95 = 1 / 5	
10	49 / 98	49 / 98 = 1 / 2	Anzahl = 4
12	1B / B6	23 / 138 = 1 / 6	
12	2B / B8	35 / 140 = 1 / 4	
12	3B / B9	47 / 141 = 1 / 3	
12	5B / BA	71 / 142 = 1 / 2	Anzahl = 4

### Geschichte der Bruchrechnung

Die Lehre von den gemeinen Brüchen und dem Rechnen mit ihnen ist das Werk der Inder (Brahmagupta, um 600). Von hier nahmen die Brüche ihren Weg über die Araber und die italienischen Kaufleute. Jedoch zeigt schon das Rechenbuch des Ahmes eine erstaunlich gut entwickelte Bruchrechnung. Die Babylonier nutzten Sechzigerbrüche. Die Griechen haben kein eigenes Bruchsystem entwickelt. Dürftig war das Bruchsystem der Römer, das eigentlich nur Brüche mit dem Nenner 12 kennt, abgeleitet von dem Gewichtsmaß 1 As = 12 Unzen. In Deutschland bürgerten sich die gemeinen Brüche erst im Mittelalter ein; es dauerte jedoch bis etwa 1700, ehe die Bruchrechnung zum Unterrichtsgegenstand allgemeinbildender Schulen wurde.

Als Begründer der Lehre von den Dezimalbrüchen gilt allgemein der holländische Kaufmann und Ingenieur Simon Stevin. In seinem Werk, das den Dezimalbrüchen in Anlehnung an das dekadische Positionssystem zum Durchbruch verhalf, forderte er u.a. die Einführung dezimal geteilter Münz-, Maß- und Gewichtssysteme in den Ländern.



### Punktierbare Brüche (engl. dotted fractions)

Ein punktierbarer Bruch ist in gemeiner Dezimalbruch, z.B.  $416/21879$ , für den es möglich ist, zwischen die Ziffern des Zählers und Nenners Multiplikationspunkte einzuführen, ohne dass sich der Wert ändert, zum Beispiel

$$416 / 21879 = 4 \cdot 16 / (2 \cdot 187 \cdot 9)$$

Lässt sich ein Bruch mit N Zählerziffern und D Nennerziffern mittels Multiplikationspunkte in  $n_1 n_2 \dots n_k$  stellige Zählerfaktoren und  $d_1 d_2 \dots d_m$  stellige Nennerfaktoren zerlegen, so wird vom Typ N/D und dem Untertyp  $n_1 n_2 \dots n_k / d_1 d_2 \dots d_m$  gesprochen. Das obere Beispiel ist vom Typ 3/5 und Untertyp 12/131. Für einen Typ N/D sind theoretisch maximal  $(2^{N-1} - 1)(2^{D-1} - 1)$  Untertypen möglich. Ein punktierbarer Bruch heißt zusätzlich primitiv, wenn er kleiner als 1 ist und sowohl Nenner als auch Zähler nicht als letzte Ziffer eine Null besitzen.

Zur Bestimmung punktierbarer Brüche sind nichtlineare diophantische Gleichungen zu lösen. Für den Untertyp 12/112 mit den Zählerziffern a,b,c und den Nennerziffern d,e,f,g ergibt sich

$$(100a + 10b + c) / (1000d + 100e + 10f + g) = a \cdot (10b + c) / (d \cdot e \cdot (10f + g))$$



die diophantische Gleichung

$$1000adef + 100adeg + 100bdef + 10bdeg + 10cdef + cdeg = 10000abd + 1000acd + 1000abe + 100aec + 100abf + 10acf$$

für welche alle natürlichen Lösungen zu suchen sind, wobei a, c, d und g zwischen 1 und 9, b, e und f zwischen 0 und 9 liegen.

Durch Computereinsatz ermittelt man zum Beispiel für den Typ 3/3 die möglichen Untertypen

Untertyp	Anzahl der Brüche	Untertyp	Anzahl der Brüche	Untertyp	Anzahl der Brüche
12 / 12	8	12 / 21	12	12 / 111	37
21 / 12	23	21 / 111	17	111 / 12	16
111 / 21	1	111 / 11159			

Insgesamt findet man 173 Möglichkeiten und da einige Brüche mehrfach auftreten genau 156 primitive punktierbare Brüche des Typs 3/3. Überraschend ist, dass es keinen Untertyp 21/21 gibt. Auch für andere Typen D/N gibt es nicht auftretende Untertypen:

N	D	fehlende Untertypen	N	D	fehlende Untertypen
2	2	keine	2	3	keine
2	4	keine	2	5	11/41
2	6	11/51, 11/411	3	3	21/21
3	4	21/31	3	5	21/41, 12/41, 111/41
4	4	31/31, 121/31, 1111/31	4	5	31/41, 31/32, 11111/41
5	5	32/41, 32/32, 41/41, 41/32, 41/311, 41/11111, 311/41, 311/32, 1121/41, 2111/41, 11111/41			

Für die Anzahl primitiver punktierbarer Brüche findet man

N=	2	3	4	5
D=2	7			
	3	53	156	
	4	127	1219	3364
	5	323	2856	22754
	6	458		

Punktierbare Brüche sind sehr selten. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bruch mit einem fünfziffrigen Zähler und fünfziffrigen Nenner punktierbar ist, beträgt nur 0.00002. Die nachfolgende Aufstellung enthält alle primitiven punktierbaren Brüche des Typs 3/3:

Untertyp 21/12

124/248 = 12\*4/2\*48 128/784 = 12\*8/7\*84 147/675 = 14\*7/6\*75  
 147/972 = 14\*7/9\*72 165/264 = 16\*5/2\*64 166/664 = 16\*6/6\*64  
 184/345 = 18\*4/3\*45 186/372 = 18\*6/3\*72 189/896 = 18\*9/8\*96  
 198/495 = 19\*8/4\*95 199/995 = 19\*9/9\*95 214/642 = 21\*4/6\*42  
 217/775 = 21\*7/7\*75 243/432 = 24\*3/4\*32 248/496 = 24\*8/4\*96  
 249/996 = 24\*9/9\*96 266/665 = 26\*6/6\*65 285/456 = 28\*5/4\*56  
 424/742 = 42\*4/7\*42 486/864 = 48\*6/8\*64 499/998 = 49\*9/9\*98  
 545/654 = 54\*5/6\*54 637/975 = 63\*7/9\*75

Untertyp 21/111

102/255 = 10\*2/2\*5\*5 123/984 = 12\*3/9\*8\*4 153/357 = 15\*3/3\*5\*7  
 164/287 = 16\*4/2\*8\*7 166/498 = 16\*6/4\*9\*8 181/362 = 18\*1/3\*6\*2  
 182/364 = 18\*2/3\*6\*4 182/637 = 18\*2/6\*3\*7 183/366 = 18\*3/3\*6\*6  
 184/368 = 18\*4/3\*6\*8 204/459 = 20\*4/4\*5\*9 243/648 = 24\*3/6\*4\*8  
 322/483 = 32\*2/4\*8\*3 324/486 = 32\*4/4\*8\*6 326/489 = 32\*6/4\*8\*9  
 424/795 = 42\*4/7\*9\*5 565/678 = 56\*5/6\*7\*8

Untertyp 12/21

142/213 = 1\*42/21\*3 165/264 = 1\*65/26\*4 166/664 = 1\*66/66\*4  
 196/245 = 1\*96/24\*5 198/495 = 1\*98/49\*5 199/995 = 1\*99/99\*5  
 235/423 = 2\*35/42\*3 266/665 = 2\*66/66\*5 284/426 = 2\*84/42\*6  
 421/842 = 4\*21/84\*2 484/847 = 4\*84/84\*7 499/998 = 4\*99/99\*8

Untertyp 12/12

132/825 = 1\*32/8\*25 172/645 = 1\*72/6\*45 175/448 = 1\*75/4\*48  
 175/945 = 1\*75/9\*45 225/324 = 2\*25/3\*24 325/624 = 3\*25/6\*24  
 448/945 = 4\*48/9\*45 675/972 = 6\*75/9\*72

Untertyp 12/111

102/612 = 1\*02/6\*1\*2 105/315 = 1\*05/3\*1\*5  
 106/371 = 1\*06/3\*7\*1 108/162 = 1\*08/1\*6\*2 108/324 = 1\*08/3\*2\*4  
 116/145 = 1\*16/1\*4\*5 116/435 = 1\*16/4\*3\*5 118/236 = 1\*18/2\*3\*6  
 118/944 = 1\*18/9\*4\*4 125/175 = 1\*25/1\*7\*5 148/666 = 1\*48/6\*6\*6  
 164/287 = 1\*64/2\*8\*7 204/714 = 2\*04/7\*1\*4 205/615 = 2\*05/6\*1\*5  
 208/624 = 2\*08/6\*2\*4 215/344 = 2\*15/3\*4\*4 218/436 = 2\*18/4\*3\*6  
 218/763 = 2\*18/7\*6\*3 225/864 = 2\*25/8\*6\*4 232/348 = 2\*32/3\*4\*8  
 236/295 = 2\*36/2\*9\*5 256/768 = 2\*56/7\*6\*8 305/915 = 3\*05/9\*1\*5  
 306/816 = 3\*06/8\*1\*6 308/924 = 3\*08/9\*2\*4 315/735 = 3\*15/7\*3\*5

318/636 = 3*18/6*3*6	324/864 = 3*24/8*6*4	345/368 = 3*45/3*6*8
408/918 = 4*08/9*1*8	416/728 = 4*16/7*2*8	418/836 = 4*18/8*3*6
432/648 = 4*32/6*4*8	475/798 = 4*75/7*9*8	524/655 = 5*24/6*5*5
632/948 = 6*32/9*4*8	742/795 = 7*42/7*9*5	
Untertyp 111/21		
388/485 = 3*8*8/48*5		
Untertyp 111/12		
123/205 = 1*2*3/2*05	129/215 = 1*2*9/2*15	
164/615 = 1*6*4/6*15	195/325 = 1*9*5/3*25	195/624 = 1*9*5/6*24
229/916 = 2*2*9/9*16	249/332 = 2*4*9/3*32	265/424 = 2*6*5/4*24
273/416 = 2*7*3/4*16	288/648 = 2*8*8/6*48	328/615 = 3*2*8/6*15
378/648 = 3*7*8/6*48	466/932 = 4*6*6/9*32	492/615 = 4*9*2/6*15
498/664 = 4*9*8/6*64	693/924 = 6*9*3/9*24	
Untertyp 111/111		
116/232 = 1*1*6/2*3*2	123/615 = 1*2*3/6*1*5	
124/217 = 1*2*4/2*1*7	126/525 = 1*2*6/5*2*5	127/762 = 1*2*7/7*6*2
128/672 = 1*2*8/6*7*2	129/344 = 1*2*9/3*4*4	135/144 = 1*3*5/1*4*4
138/184 = 1*3*8/1*8*4	138/345 = 1*3*8/3*4*5	139/973 = 1*3*9/9*7*3
145/435 = 1*4*5/4*3*5	147/945 = 1*4*7/9*4*5	148/185 = 1*4*8/1*8*5
161/322 = 1*6*1/3*2*2	162/324 = 1*6*2/3*2*4	163/326 = 1*6*3/3*2*6
164/328 = 1*6*4/3*2*8	164/492 = 1*6*4/4*9*2	165/264 = 1*6*5/2*6*4
166/664 = 1*6*6/6*6*4	168/448 = 1*6*8/4*4*8	168/784 = 1*6*8/7*8*4
178/267 = 1*7*8/2*6*7	182/819 = 1*8*2/8*1*9	183/244 = 1*8*3/2*4*4
183/427 = 1*8*3/4*2*7	184/345 = 1*8*4/3*4*5	186/248 = 1*8*6/2*4*8
186/465 = 1*8*6/4*6*5	187/748 = 1*8*7/7*4*8	198/495 = 1*9*8/4*9*5
199/995 = 1*9*9/9*9*5	216/432 = 2*1*6/4*3*2	218/981 = 2*1*8/9*8*1
236/944 = 2*3*6/9*4*4	244/427 = 2*4*4/4*2*7	248/465 = 2*4*8/4*6*5
266/665 = 2*6*6/6*6*5	273/728 = 2*7*3/7*2*8	276/575 = 2*7*6/5*7*5
285/684 = 2*8*5/6*8*4	288/378 = 2*8*8/3*7*8	316/632 = 3*1*6/6*3*2
318/424 = 3*1*8/4*2*4	318/742 = 3*1*8/7*4*2	327/872 = 3*2*7/8*7*2
328/492 = 3*2*8/4*9*2	364/637 = 3*6*4/6*3*7	412/721 = 4*1*2/7*2*1
416/832 = 4*1*6/8*3*2	424/742 = 4*2*4/7*4*2	436/763 = 4*3*6/7*6*3
448/784 = 4*4*8/7*8*4	455/546 = 4*5*5/5*4*6	484/847 = 4*8*4/8*4*7
499/998 = 4*9*9/9*9*8	545/654 = 5*4*5/6*5*4	618/824 = 6*1*8/8*2*4

Die zweite Tabelle enthält für ausgewählte Typen und Untertypen jeweils ein existierendes Beispiel:

Typ 2/2: 11/11	14/63 = 1*4/6*3	
Typ 2/3: 11/21	28/126 = 2*8/12*6	11/12 13/325 = 1*3/3*25
	11/111 13/195 = 1*3/1*9*5	
Typ 2/4: 11/31	79/2528 = 7*9/252*8	11/22 15/1734 = 1*5/17*34
	11/211 13/1664 = 1*3/16*6*4	11/13 15/3375 = 1*5/3*375
	11/121 13/3328 = 1*3/3*32*8	11/112 11/2816 = 1*1/2*8*16
	11/1111 14/2688 = 1*4/2*6*8*8	
Typ 2/5: 11/41	-	11/32 27/18252 = 2*7/182*52
	11/311 43/14147 = 4*3/141*4*7	11/23 11/91091 = 1*1/91*091
	11/221 12/53424 = 1*2/53*42*4	11/212 11/11616 = 1*1/11*6*16
	11/2111 15/96768 = 1*5/96*7*6*8	11/14 17/74375 = 1*7/7*4375
	11/131 13/64116 = 1*3/6*411*6	11/122 14/16275 = 1*4/1*62*75
	11/1211 21/33075 = 2*1/3*30*7*5	11/113 12/37296 = 1*2/3*7*296
	11/1121 13/86528 = 1*3/8*6*52*8	11/1112 12/48384 = 1*2/4*8*3*84
	11/11111 22/78848 = 2*2/7*8*8*4*8	
Typ 2/6: 11/51	-	11/42 58/138069 = 5*8/1380*69
	11/411 -	11/33 13/231231 = 1*3/231*231
	11/321 11/137137 = 1*1/137*13*7	11/312 11/191191 = 1*1/191*1*91
	11/3111 14/123984 = 1*4/123*9*8*4	11/24 13/312325 = 1*3/31*2325
	11/231 11/119911 = 1*1/11*991*1	11/222 13/315146 = 1*3/31*51*46
	11/2211 13/156975 = 1*3/15*69*7*5	11/213 11/111925 = 1*1/11*1*925
	11/2121 18/138996 = 1*8/13*8*99*6	11/2112 18/149688 =
		1*8/14*9*6*88
	11/21111 31/218736 =	11/15 11/309375 = 1*1/3*09375
	3*1/21*8*7*3*6	
	11/141 14/155568 = 1*4/1*5556*8	11/132 11/135135 = 1*1/1*351*35
	11/1311 11/370128 = 1*1/3*701*2*8	11/123 11/111925 = 1*1/1*11*925
	11/1221 13/297596 = 1*3/2*97*59*6	11/1212 12/141696 =
		1*2/1*41*6*96
	11/12111 32/297984 =	11/114 14/275625 = 1*4/2*7*5625
	3*2/2*97*9*8*4	

11/1131	$12/774396 = 1*2/7*7*439*6$	11/1122	$22/898128 = 2*2/8*9*81*28$
11/11211	$11/437976 = 1*1/4*3*79*7*6$	11/1113	$11/893376 = 1*1/8*9*3*7*6$
11/11121	$22/869616 = 2*2/8*6*9*61*6$	11/11112	$21/777924 = 2*1/7*7*7*9*24$
11/111111	$41/247968 = 4*1/2*4*7*9*6*8$		
Typ 3/3: 21/21	-	21/12	$124/248 = 12*4/2*48$
21/111	$102/255 = 10*2/2*5*5$	12/21	$142/213 = 1*42/21*3$
12/12	$132/825 = 1*32/8*25$	12/111	$102/612 = 1*02/6*1*2$
111/21	$388/485 = 3*8*8/48*5$	111/12	$123/205 = 1*2*3/2*05$
111/111	$116/232 = 1*1*6/2*3*2$		
Typ 3/4: 21/31	-	21/22	$105/6048 = 10*5/60*48$
21/211	$101/2525 = 10*1/25*2*5$	21/13	$104/1625 = 10*4/1*625$
21/121	$103/5665 = 10*3/5*66*5$	21/112	$101/2525 = 10*1/2*5*25$
21/1111	$103/5768 = 10*3/5*7*6*8$	12/31	$285/1026 = 2*85/102*6$
12/22	$119/7616 = 1*19/76*16$	12/211	$101/1111 = 1*01/11*1*1$
12/13	$105/6048 = 1*05/6*048$	12/121	$101/1111 = 1*01/1*11*1$
12/112	$101/1111 = 1*01/1*1*11$	12/1111	$103/1236 = 1*03/1*2*3*6$
111/31	$187/1683 = 1*8*7/168*3$	111/22	$117/2106 = 1*1*7/21*06$
111/211	$117/5616 = 1*1*7/56*1*6$	111/13	$127/7112 = 1*2*7/7*112$
111/121	$114/7182 = 1*1*4/7*18*2$	111/112	$115/9315 = 1*1*5/9*3*15$
111/1111	$114/1824 = 1*1*4/1*8*2*4$		
Typ 3/5: 21/41	-	21/32	$115/13248 = 11*5/132*48$
21/311	$115/18768 = 11*5/187*6*8$	21/23	$126/72576 = 12*6/72*576$
21/221	$105/76608 = 10*5/76*60*8$	21/212	$121/51425 = 12*1/51*4*25$
21/2111	$122/10675 = 12*2/10*6*7*5$	21/14	$113/14125 = 11*3/1*4125$
21/131	$101/45652 = 10*1/4*565*2$	21/122	$112/18144 = 11*2/1*81*44$
21/1211	$122/96075 = 12*2/9*60*7*5$	21/113	$101/12625 = 10*1/1*2*625$
21/1121	$123/49815 = 12*3/4*9*81*5$	21/1112	$121/45375 = 12*1/4*5*3*75$
		12/41	-
21/11111	$141/17766 = 14*1/1*7*7*6*6$	12/311	$119/13328 = 1*19/133*2*8$
12/32	$147/37632 = 1*47/376*32$	12/221	$116/19285 = 1*16/19*28*5$
12/23	$115/11132 = 1*15/11*132$	12/2111	$105/21168 = 1*05/21*1*6*8$
12/212	$105/28224 = 1*05/28*2*24$	12/131	$103/14111 = 1*03/1*411*1$
12/14	$156/24375 = 1*56/2*4375$	12/1211	$101/21816 = 1*01/2*18*1*6$
12/122	$108/12636 = 1*08/1*26*36$	12/1121	$103/46144 = 1*03/4*6*14*4$
12/113	$105/16128 = 1*05/1*6*128$	12/11111	$101/43632 = 1*01/4*3*6*3*2$
12/1112	$105/77175 = 1*05/7*7*1*75$	111/32	$154/13013 = 1*5*4/130*13$
111/41	-	111/23	$126/12096 = 1*2*6/12*096$
111/311	$117/11232 = 1*1*7/112*3*2$	111/212	$114/12312 = 1*1*4/12*3*12$
111/221	$118/58174 = 1*1*8/58*17*4$	111/14	$135/91125 = 1*3*5/9*1125$
111/2111	$112/17136 = 1*1*2/17*1*3*6$		
111/131	$115/11224 = 1*1*5/1*122*4$	111/122	$114/77805 = 1*1*4/7*78*05$
111/1211	$118/23364 = 1*1*8/2*33*6*4$	111/113	$114/21375 = 1*1*4/2*1*375$
111/1121	$115/13248 = 1*1*5/1*3*24*8$	111/1112	$115/14352 = 1*1*5/1*4*3*52$
111/11111	$111/42624 = 1*1*1/4*2*6*2*4$		
Typ 3/6: 21/51	-	21/42	$158/114076 = 15*8/1140*76$
21/411	$245/184877 = 24*5/1848*7*7$	21/33	$104/385385 = 10*4/385*385$
21/321	$104/557557 = 10*4/557*55*7$	21/312	$104/577577 = 10*4/577*5*77$
21/3111	$106/470799 = 10*6/470*7*9*9$		



$$=10 \cdot 101 + 10 \cdot 45 + 10 \cdot 202 + 10 \cdot 45 + \dots + 10 \cdot 909 + 10 \cdot 45 =$$

$$=10 \cdot 101 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + 10 \cdot 45 \cdot 9 =$$

$$=10 \cdot 101 \cdot 45 + 10 \cdot 45 \cdot 9 = 45450 + 4050 = 49500 \dots \text{ Summe der dreistelligen Spiegelzahlen}$$

Vierstellige Spiegelzahlen haben die Form  $xyyx$  mit  $x$  von 1 bis 9,  $y$  von 0 bis 9. Auch hier gibt es 90 Stück.

$$(1001+1111+1221+1331+\dots+1991)+(2002+2112+\dots)+\dots+9999=$$

$$=(1001+1001+110+1001+220+\dots+1001+990)+(2002+2002+110+\dots+2002+990)+\dots=$$

$$=10 \cdot 1001 + 110 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + 10 \cdot 2002 + 110 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + \dots =$$

$$=10 \cdot 1001 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + 110 \cdot 45 \cdot 9 =$$

$$=10 \cdot 1001 \cdot 45 + 110 \cdot 45 \cdot 9 = 450450 + 44550 = 495000 \dots \text{ Summe der vierstelligen Spiegelzahlen}$$

Anmerkung: Als Spiegelzahlen werden auch Zahlen mit folgender Eigenschaft bezeichnet

$$102^2 = 10404 \text{ und}$$

$$201^2 = 40401$$

$$103^2 = 10609 \text{ und}$$

$$301^2 = 90601$$

$$211^2 = 44521$$

$$113^2 = 12769 \text{ und}$$

$$311^2 = 96721$$

$$1012^2 = 1024144 \text{ und } 2101^2 = 4414201$$

$$1112^2 = 1236544 \text{ und } 2111^2 = 4456321$$

$$1212^2 = 1468944 \text{ und } 2121^2 = 4498641$$

$$2012^2 = 4048144 \text{ und } 2102^2 = 4418404$$

$$12^2 = 144 \text{ und } 21^2 = 441$$

$$13^2 = 169 \text{ und } 31^2 = 961$$

$$112^2 = 12544 \text{ und}$$

$$211^2 = 44521$$

$$113^2 = 12769 \text{ und}$$

$$311^2 = 96721$$

## Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

### Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$$a^k = a * a * \dots * a \text{ ( k Faktoren, } k > 1, k \in \mathbb{N} \text{)}$$

$$0^k = 0, \forall k \neq 0, 0^0 \text{ ist nicht erklärt !}$$

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad a^{-k} = 1/a^k$$

radix 9 = 3  
 $\sqrt{9} = 3$   
 $\sqrt[2]{9} = 3$   
 $\sqrt[3]{9} = 3$








### Potenzen mit rationalen Exponenten / Wurzeln

Definition:  ${}^n\sqrt{a}$ ,  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , ist diejenige nichtnegative reelle Zahl  $b$ , für die  $b^n = a$  gilt.

$$a^{1/n} = {}^n\sqrt{a}, \text{ für } n \in \mathbb{N}, n > 0, a \in \mathbb{R}, a \geq 0$$

Das Wurzelzeichen  $\sqrt{\quad}$  entstand aus einem r, dem ersten Buchstaben von lateinisch radix = "Wurzel". siehe Abbildung

### Entstehung des Wurzelzeichens

Jahr	Autor	Schreibweise	Quelle	
1145	Palto De Trivoli	latus quadratum 9	Liber Embadorum	1 
1427	Petri Ramus	Abb. 1 Arithmetica Libri duo et Geometrie		
1465	Regiomontanus	Radix quadratum 9	Carta de Regiomontanus	2 <b>R. 9</b>
1490	Johann Widman	ra. 9	Deutsche Algebra	
1494	Luca Pacioli	Abb. 2 Summa de Arithmetica		3 
1520	Andreas Alexander	Abb. 3 Algebrae Arabis Arithmetici	Göttingen Codex	
1525	Christoff Rudolff	Abb. 4 Coss		4 
1550	Raffaele Bombelli	R.q.9	L'Algebra 1572	
1577	Guillaume Gosselin	L 9	De Arte Magna	5 
1580	Bernardus Salignacus	Abb. 1 Algebrae Libri		
1591	John Napier	Abb. 5 De Arte Logistica		6 <b>lc 27</b>
1592	Lazarus Schonero	Abb. 6, latus cubicum	Arithmetica Logarithmica	
1624	Henry Briggs	Abb. 7 Arithmetica Logarithmica		7 <b>l<sub>3</sub>27</b>
1635	James Hume	Quarré de quarré 16	Algèbre	8 
1637	René Descartes	Abb. 8 La Géométrie		
1670	Johann Caramuel	Abb. 9, Radix cubica	Joannis Caramvelis Mathesis Biceps	9 
1696	Samuel Jeake	Abb. 10, 3.Wurzel	Arithmetick	
1732	Simon de la Loubère	Abb. 11, racine cubique	De La Résolution Des Equations	10 
				11 

### Potenzgesetze

Gültigkeitsbereich:  $a, b, m, n \in \mathbb{R}$  und  $a, b > 0$  oder  $m, n \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

#### 1. Basen gleich

$$a^m * a^n = a^{m+n} \quad a^m / a^n = a^{m-n}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert.

#### 2. Exponenten gleich

$$a^m * b^m = (a * b)^m \quad a^m / b^m = (a / b)^m$$

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert und der Exponenten gleich bleibt.

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und der Exponenten gleich bleibt.

#### 3. Zwei Exponenten

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$

Potenzen werden potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

### Näherungsformeln für $a \gg b$

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + b/(2a) \quad \sqrt[3]{a^3 + b} \approx a + b/(3a^2)$$

Anmerkung: Die größte mit 3 Ziffern und den Grundrechenarten aufschreibbare Zahl ist  $9^{(9^9)} = 9^{387420489}$ . Diese Zahl hat

369693100 Stellen, beginnt mit der Ziffernfolge 428124773175747048036511046881... und würde rund 33 Bücher mit je 800 Seiten und 14000 Ziffern je Seite füllen oder eine Streifen Papier, der etwa von Leipzig bis Helsinki reicht.

### Allgemeine Beziehungen

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$



489266466344238819545868088398566945584921822586685371455477008985472229109685072681  
 17381704646657 /  
 345963636159190997653185453890148615173898600719883426481871047662465656945254697683  
 25292176831232, ...

Die Tabelle enthält die ersten rationalen Näherungsbrüche für  $\sqrt[n]{n}$ :

Iteratio n	n = 3	n = 5	n = 7	n = 10
1.	2 / 1	3 / 1	4 / 1	11 / 2
2.	7 / 4	7 / 3	23 / 8	161 / 44
3.	97 / 56	47 / 21	977 / 368	45281 / 14168
4.	18817 / 10864	2207 / 987	1902497 / 719072	4057691201 / 1283082416
5.	708158977 / 408855776	4870847 / 2178309	7238946623297 / 2736064645568	32927862745156792961 / 10412704459122043232
6.	1002978273411373 057 / 5790697761454023 04	237251504974 07 / 106102098577 23	10480469642803305665744 8577 / 39612451854313553433195 392	21684882864940854781 54... 297235187389205761 / 68573620647170548302 28... 31680917430579904

Beispielprogramm zur Bestimmung der Näherungsbrüche für  $\sqrt[n]{n}$  bis zur q.ten Iteration:

```
function w2(q,n:integer):integer;
var g,i,a,b,aalt:integer;
begin  a:=1; b:=1;
      for i:=1 to q do    aalt:=a;    a:=a*a+n*b*b;    b:=2*aalt*b;    g:=gcd(a,b);
                        a:=a div g;
                        b:=b div g;    writeln(i,".Näherungsbruch für Wurzel ",n);
                        writeln("Zähler");    writeln(a);    writeln("Nenner");    writeln(b);
end; end;
```

### Quadratwurzeln

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
2	1.41421356	3	1.73205081	4	2.00000000	5	2.23606798
6	2.44948974	7	2.64575131	8	2.82842712	9	3.00000000
10	3.16227766	11	3.31662479	12	3.46410161	13	3.60555128
14	3.74165739	15	3.87298335	16	4.00000000	17	4.12310562
18	4.24264069	19	4.35889894	20	4.47213595	21	4.58257569
22	4.69041576	23	4.79583152	24	4.89897949		

### Heronsche Wurzelformel, Näherungsberechnung von n.ten-Wurzeln

Die numerische Berechnung von Quadratwurzeln hat eine lange Geschichte. Vor etwa 4000 Jahren kannten die Sumerer und Babylonier die iterative Gleichung  $x_{n+1} = \frac{1}{2} (x_n + a/x_n)$  zur Berechnung der Quadratwurzel von a. Verallgemeinert man diese Formel auf beliebige n.te Wurzel, so erhält man die schon dem griechischen Mathematiker Heron von Alexandria (um 130) bekannte einfache Rechenvorschrift

$$x_{n+1} = 1/p ((p-1) x_n + a/x_n^{p-1})$$

### Babylonisches Wurzelziehen

Vor 4000 Jahren kannten die Sumerer und Babylonier die iterative Gleichung  $x_{n+1} = \frac{1}{2} (x_n + a/x_n)$  zur Berechnung der Quadratwurzel von a. Diese Beziehung wird heute nach Heron benannt. Alternativ dazu wurde von babylonischen Mathematikern eine Quadratwurzel zwischen 0 und 2 durch folgendes Verfahren berechnet. Soll aus  $a = 1-x$  die Quadratwurzel  $w = 1-y$  ermittelt werden, wird

$$(1 - y)^2 = 1 - 2y + y^2 = 1 - x$$

$$2y = x + y^2$$

und als Iterationsformel

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} (x + y_n^2)$$

Beginnend mit  $y_1 = 0$  können damit Quadratwurzeln approximativ berechnet werden. Allerdings konvergiert das Verfahren nur, wenn y zwischen -1 und 1 liegt.

Beispiel: Gesucht ist  $\sqrt{(1/2)}$ . Mit  $1/2 = 1 - 1/2$  wird  $x = 1/2$  und die Rekursionsformel zu

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} (1/2 + y_n^2) = 1/4 + 1/2 y_n^2$$

Die ersten Näherungswerte sind

$$y_2 = 0,25 ; y_3 = 0,28125 ; \dots ; y_9 = 0,29289$$

Mit  $w = 1-y$  wird  $w_9 = 0,70711$ ; eine gute Näherung für  $\sqrt{(1/2)}$ .

Scheinbar versagt das Verfahren zum Beispiel bei  $\sqrt{10}$ . Mit  $3 \sqrt{(10/9)} = \sqrt{10}$  rechnet man mit  $x = -1/9$  und multipliziert die Näherungswurzel am Ende mit 3.



Das Verfahren des babylonischen Wurzelziehens kann auch alternativ genutzt werden. Dazu wird die Zahl  $w$  in die Form  $a^2 + b$  gebracht und iterativ die Näherung  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + b/(2a)$  wiederholt genutzt. Die natürliche Zahl  $b$  sollte dabei im ersten Schritt möglichst klein sein. Ergibt sich für die Wurzel  $\sqrt{w}$  im  $n$ -ten Schritt der Näherungsbruch  $x/y = a + b/(2a)$  so erhält man nach der nächsten Iteration  $x_{\text{neu}}/y_{\text{neu}} = (x^2 + wy^2) / (2xy)$  mit einer ständig besseren Näherung an  $\sqrt{w}$ .

### Eulersches Wurzelverfahren

Durch Leonhard Euler wurden 1802 in "Vollständige Anleitung zur Algebra" Näherungsformeln zur Bestimmung von  $n$ -ten Wurzeln aus den Taylor-Entwicklungen der Potenzfunktionen hergeleitet. Im Allgemeinen ergeben sich die gleichen Iterationsalgorithmen, wie bei einer Herleitung mittels Newton-Verfahren, zum Beispiel für die dritte Wurzel  $\sqrt[3]{a}$  (1)  $x_{n+1} = 1/3 (2 x_n + a / x_n^2)$

Die Zahlen  $x_n$  und  $a/x_n^2$  werden dabei im Verhältnis 2:1 gewichtet.

Vertauscht man die Gewichte und passt die Formel entsprechend an, wird

(2)  $x_{n+1} = 1/3 (x_n + 2 \sqrt[3]{a / x_n})$

Dieses Verfahren ist schneller als die Ausgangsgleichung, hat aber den großen Nachteil, dass in der Rekursion die Quadratwurzel benötigt wird.

### Schulmethode aus früheren Zeiten zur Berechnung einer Quadratwurzel

Von der Form her ist es eine Art schriftliches Dividieren.

1.  $\sqrt{17424}$  Teile die Zahl von rechts aus in Ziffernpaare.
2.  $\sqrt{17424} = 1$  Suche die Quadratzahl, die unter oder gleich dem linken Paar liegt. Das ist hier trivialerweise 01. Subtrahiere die Quadratzahl. Die Differenz ist 0.
3.  $\sqrt{17424} = 1$  Hole das nächste Zahlenpaar ähnlich wie beim schriftlichen Dividieren herunter. Dividiere in einer Nebenrechnung 074 durch das Zehnfache der verdoppelten Quadratzahl, die oben rechts in der ersten Zeile steht. Diese Zahl ist 20. Der Quotient ist 3. Der Rest bei der Division interessiert nicht.  
74: 20 = 3 + Rest
4.  $\sqrt{17424} = 13$  Die Nebenrechnung oben nimmt man normalerweise im Kopf vor. Addiere die dabei gefundene Zahl 3 zum letzten Divisor (20), und es ergibt sich 23. Schreibe die 3 der Nebenrechnung auch in die erste Zeile.
5.  $\sqrt{17424} = 13$  Bilde wie beim schriftlichen Dividieren  $3 \cdot 23$ , schreibe das Produkt in die nächste Zeile und subtrahiere. Es ergibt sich 5.
6.  $\sqrt{17424} = 13$  Hole das nächste Paar 24 herunter. Dividiere in einer Nebenrechnung die entstehende Zahl 524 durch das Zehnfache des doppelten Produkts der Zahl 13 der ersten Zeile. Das ist 260. Es ergibt sich 2, ein Rest bleibt.  
524: 260 = 2 + Rest
7.  $\sqrt{17424} = 132$  Schreibe die Zwei in die erste Zeile rechts und addiere sie zu 260. Dividiere die Zahl 524 unten durch 262 wie beim schriftlichen Dividieren. Bilde die Differenz. Sie ist Null. Es gilt also  $\sqrt{17424} = 132$ .

$$\begin{array}{r} a \cdot a \text{ --- } a^2 \\ (2a+b)b \text{ --- } 2ab \quad b^2 \\ [2(a+b)+c]c \text{ --- } 2ac+2bc \quad c^2 \end{array} = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$$

Die Erklärung dieser Methode ergibt sich aus der "trinomischen Formel"  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ . Setzt man  $a=100$ ,  $b=30$  und  $c=2$ , so erhält man das Zahlenbeispiel. Bevor es Taschenrechner gab, war diese Methode die Standard-Methode in der Schule und wurde ausgiebig geübt. Heute wird sie in manchen Lehrbüchern noch als Unikum geführt.

### Quadratwurzel-Aufgaben

Einfache Übungsaufgaben zum Vereinfachen von Termen, die Wurzeln enthalten:

- 1)  $(\sqrt{11} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{7}) - (\sqrt{11} - \sqrt{7})^2 = 2\sqrt{77} - 14$
- 2)  $(\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{7}) - (\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = -7$
- 3)  $(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})^2 = 4 \sqrt{a^2 - b^2}$
- 4)  $(3 - 1/\sqrt{3})^2 - (3 + 1/\sqrt{3})^2 = -4 \sqrt{3}$
- 5)  $(3/2 - \sqrt{2/3})^2 - (3/2 + \sqrt{2/3})^2 = -2 \sqrt{6}$
- 6)  $((3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})/\sqrt{6} - (3 + \sqrt{6})/\sqrt{3})^2 = 8$
- 7)  $((\sqrt{27} - \sqrt{8})/\sqrt{12} - 3/2)^2 - (\sqrt{2/3} - 1/\sqrt{2}) (\sqrt{2/3} + 1/\sqrt{2}) = 1/2$
- 8)  $(25 - 5\sqrt{5})/\sqrt{5} - \sqrt{80}/(3 + \sqrt{5}) - 10 \sqrt{1/5} = 0$
- 9)  $(12 + 2\sqrt{3})/\sqrt{3} - 6 \sqrt{1/3} - \sqrt{48}/(\sqrt{3} - 1) = -4$
- 10)  $(15 - 7\sqrt{6})/\sqrt{6} - \sqrt{54}/(\sqrt{6} + 3) + 3 \sqrt{1/6} = -1$
- 11)  $1/\sqrt{2} + 1/(2\sqrt{2} - 4) - (1 - \sqrt{2})/(2\sqrt{2}) = 0$

- 12)  $(-\sqrt{3} - \sqrt{6})/\sqrt{2} - (\sqrt{6} + \sqrt{2})/\sqrt{3} - 1/\sqrt{6} (1/\sqrt{2} - 3/\sqrt{12}) = 1/2$   
 13)  $a^{3/4} : (a^{2/3} : a) = a^{3/4} : (a^{2/3-1}) = a^{3/4} : a^{-1/3} = a^{13/12}$   
 14)  $(a^{1/4} : a^{1/5}) \cdot a^{1/10} = a^{1/20} \cdot a^{1/10} = a^{3/20}$   
 15)  $12^{2/3} \cdot 12^{3/2} = 12^{13/6}$   
 16)  $7^{1,4} \cdot 7^{1,5} \cdot 7^{0,6} = 7^{3,5} = 7^3 \cdot \sqrt{7}$   
 17)  $4\sqrt{2^9 \cdot 5} \cdot \sqrt{2^9} = 2^{81/20} = 16 \cdot 2^0 \cdot \sqrt{2}$   
 18)  $(2n)^{0,25} \cdot (8n^2)^{0,25} \cdot n^{1,25} = 2n^2$   
 19)  $(24^{1/3} + 2 \cdot 8^{1/3} - 3 \cdot 192^{1/3}) : 31/3 = -4$   
 20)  $(2a^4b^2)^{1/3} \cdot (4a^8b^7)^{1/3} = 2a^4b^3$

### Quadratwurzeln durch Intervallschachtelung

Zur Berechnung der Quadratwurzeln können Näherungsverfahren herangezogen werden. Eine einfache Methode besteht in dem Verfahren der Intervallschachtelung.

Das Verfahren sei am Beispiel 2 erläutert. Nach einer ersten Schätzung liegt 2 zwischen 1 und 2, d.h. im Intervall [1 ; 2]. Jetzt unterteilt man dieses Intervall in 10 Teile und prüft, für welchen Intervallwert das Quadrat kleiner bzw. größer als 2 ist. Man findet

$$1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2,$$

d.h. 2 liegt im Intervall [1.4 ; 1.5]. Unterteilung dieses Intervalls und prüfen der Intervallgrenzen liefert

$$1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2,$$

Setzt man dies fort, so gewinnt man je Intervall eine weitere Dezimalziffer Genauigkeit hinzu.

### Dezimalstellen von $\sqrt{2}$

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388  
 503875343276415727350138462309122970249248360558507372126441214970999358314132226659  
 275055927557999505011527820605714701095599716059702745345968620147285174186408891986  
 095523292304843087143214508397626036279952514079896872533965463318088296406206152583  
 523950547457502877599617298355752203375318570113543746034084988471603868999706990048  
 150305440277903164542478230684929369186215805784631115966687130130156185689872372352  
 885092648612494977154218334204285686060146824720771435854874155657069677653720226485  
 447015858801620758474922657226002085584466521458398893944370926591800311388246468157  
 082630100594858704003186480342194897278290641045072636881313739855256117322040245091  
 227700226941127573627280495738108967504018369868368450725799364729060762996941380475  
 654823728997180326802474420629269124859052181004459842150591120249441341728531478105  
 80360337107730918286931471017111683916581726889419758716582152128229518488472089694  
 633862891562882765952635140542267653239694617511291602408715510135150455381287560052  
 631468017127402653969470240300517495318862925631385188163478001569369176881852378684  
 052287837629389214300655869568685964595155501644724509836896036887323114389415576651  
 040883914292338113206052433629485317049915771756228549741438999188021762430965206564  
 211827316726257539594717255934637238632261482742622208671155839599926521176252698917  
 54098815934864008345708518147223181420407042650905653233398436457865796796519267292  
 39987536661721598257886026336361782749599421940377753681426217738799194551397231274  
 066898329989895386728822856378697749662519966583525776198939322845344735694794962952  
 168891485492538904755828834526096524096542889394538646625744927556381964410316979833  
 061852019379384940057156333720548068540575867999670121372239475821426306585132217408  
 832382947287617393647467837431960001592188807347857617252211867490424977366929207311  
 096369721608933708661156734585334833295254675851644710757848602463600834449114818587  
 655554286455123314219926311332517970608436559704352856410087918500760361009159465670  
 676883605571740076756905096136719401324935605240185999105062108163597726431380605467  
 010293569971042425105781749531057255934984451126922780344913506637568747760283162829  
 6055232422426957534529028838768446429173282770888318087025339852338122749990812371892  
 540726475367850304821591801886167108972869229201197599880703818543332536460211082299  
 279293072871780799888099176741774108983060800326311816427988231171543638696617029999  
 34161614878686018045505539869131151860103863753250045581860448040750241195184305674  
 533683613674597374423988553285179308960373898915173195874134428817842125021916951875  
 593444387396189314549999906107587049090260883517636224749757858858368037457931157339  
 802099986622186949922595913276423619410592100328026149874566599688874067956167391859  
 572888642473463585886864496822386006983352642799056283165613913942557649062065186021  
 647263033362975075697870606606856498160092718709292153132368281356988937097416504474  
 590960537472796524477094099241238710614470543986743647338477454819100872886222149589  
 529591187892149179833981083788278153065562315810360648675873036014502273208829351341  
 387227684176678436905294286984908384557445794095986260742499549168028530773989382960  
 362133539875320509199893607513906444495768456993471276364507163279154701597733548638  
 939423257277540038260274785674172580951416307159597849818009443560379390985590168272  
 154034581581521004936662953448827107292396602321638238266612626830502572781169451035  
 379371568823365932297823192986064679789864092085609558142614363631004615594332550474  
 49397593999125419532300932175304476533964706627611661753518754646209676345587386164  
 880198848497479264045065444896910040794211816925796857563784881498986416854994916357

614484047021033989215342377037233353115645944389703653166721949049351882905806307401  
346862641672470110653463493916407146285567980177933814424045269137066609777638784866  
238003392324370474115331872531906019165996455381157888413808433232105337674618121780  
142960928324113627525408873729051294073394794330619439569367020794295158782283493219  
316664111301549594698378977674344435393377099571349884078908508158923660700886581054  
709497904657229888808924612828160131337010290802909997456478495815456146487155163905  
024198579061310934587833062002622073724716766854554999049940857108099257599288932366  
154382719550057816251330381531465779079268685008069844284791524242754410268057563215  
653220618857512251130639370253629271619682512591920252160587011895967322442392674237  
344907646467273753479645988191498079317180024238554538860383683108007791824664627541  
174442500187277795181643834514634612990207633430179685543856316677235183893366670422  
221109391449302879638128398893117313084300421255501854985065294556377660314612559091  
046113847682823595924772286290426427361632645854433928772638603431498048963973633297  
548859256811492968361267258985738332164366634870234773026101061305072986115341299488  
087744731112295426527516536659117301423606265258690771982170370981046443604772267392  
829874152593069562063847108274082184906737233058743029709242899481739244078693752844  
010443990485208788519141935415129006817351703069386970590047425157655248078447362144  
105016200845444122255956202984725940352801906798068098300396453985685930458625260637  
797453559927747299064888745451242496076378010863900191058092874764720751109238605950  
195432281602088796215162338521612875228518025292876183257037172857406763944909825464  
422184654308806610580201584728406712630254593798906508168571371656685941300533197036  
596403376674146104956376510308366134893109478026812935573318905519705201845150399690  
986631525124116111925940552808564989319589834562331983683494880806171562439112866312  
797848371978953369015277600549805516635019785557110140555297633841275044686046476631  
832661165182067501204766991098721910444744032689436415959427921994423553718704299559  
240314091712848158543866005385713583639816309452407557009325168243441682408361979273  
372825215462246961533217026829950979089034594858878349439616204358422497397187113958  
927305092197054917176961600445580899427878880369169432894595147226722926124850696173  
163809410821860045286102696547576304310256027152313969482135519821409716549097319992  
834925674097490392297126348693414574933198041718076111963902278664075922434167762466  
236238913110270343304576368141128321326308582239456219598086612939996201234156176318  
174312420089014983848560480879864608393596492366514296812577314322914568716827621996  
118278269531574983802624651759054103976181287604216386134502213262727756612441133610  
775195557749508656360673786650623185640699122801875741785494661253275997697960597760  
590756489106661015838417202818530432119044657752554277543798726054881736198267581686  
283295260789932226683602838513512281059318591028641508157056319717315183136250243590  
414632122392176633982689368253150530059891547029095371932662073411234947433678846902  
01390497842852163414429214589558287847669394662467812219049785636355263368278051860  
098699248937786002398769169807656621943898544370805946433362333810587458162354756001  
365924352426571430834655457680023708146757325254702550747637471635067851599173693793  
251032682760628645914618204721486370370771926926823623334720379245964691810526139153  
086280291440965482563873092730426544662929045896063751918711469345361973324789572707  
031530930901921199199993615765003503984054067425387927527922724733566770607837911384  
488936261367657060263600315132952095395202854897384486256134924414708607086602676349  
978793420875836121947116994223848482595914304528107062601508969135303017720062717054  
402090669514915274597719705947695474095210287872557856880022193717743558110793930883  
384558648277291008629554566141306721230848740227121058686323388237413884428938155444  
647105755651468435702946635062893873569868688376480326519528414653517395302736120137  
420300986739838514321900436028982698293529399414129230580384565022707216815161941011  
449826301364900877048398488386090653368599054583895203185648041493272142390865164999  
431659207965953569430723112911629286797517156688905439322035691293324570208067194440  
497304943981408227829602799424541083166675921424835182723817205041039274288801556223  
380796147512433514731021284545944899444996000752437519570116683417447490795882099517  
836768023236517674972301487457742725994760962198432714835298611190272873584905217975  
908374197486026706053746231530039375212367867752848692195857137554269684827836317861  
109933680143915905974842858054516130230143979057016108898627779610750673332676048654  
929251399781390535882276893732204941483940135560356560442140176120605131806891989962  
606184831853401836237821726637580455247196266174925422852804571442048578342113228008  
528704205488992341278554812367615377071042544698685219911228354266349997127483660762  
462418207364666171283947484732804744304033441072004287271275670279567582429262719454  
58053002664899650795697781786219421720052371653694677041951119127046248360511302890  
4643775114869488784...

### Rationalmachen des Nenners

... des Nenners; bei Ausdrücken der Gestalt

$$Z/N = Z / (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$$

können die Wurzeln aus dem Nenner entfernt werden. Dazu wird mit  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  bzw.  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  erweitert

#### Grundregeln zum Rationalmachen des Nenners

$$\begin{aligned} 1 / \sqrt{a} &= \sqrt{a} / a & 1 / \sqrt[n]{a} &= \sqrt[n]{a^{n-1}} / a \\ 1 / (b + \sqrt{a}) &= (b - \sqrt{a}) / (b^2 - a) & 1 / (b - \sqrt{a}) &= (b + \sqrt{a}) / (b^2 - a) \\ 1 / (\sqrt{a} + \sqrt{b}) &= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) / (a - b) & 1 / (\sqrt{a} - \sqrt{b}) &= (\sqrt{a} + \sqrt{b}) / (a - b) \end{aligned}$$

### Wurzelvereinfachung

Ineinander verschachtelte Wurzelterme der Form

$$\sqrt{(a \pm b \sqrt{c})}$$

können mitunter vereinfacht werden zu

$$\sqrt{(a \pm b \sqrt{c})} = \sqrt{d} \pm \sqrt{e}$$

Quadrieren ergibt  $a \pm b \sqrt{c} = d + e \pm \sqrt{d e}$  und somit  $a = d + e$  und  $b^2 c = 4 d e$ :

$$d, e = 1/2 (a \pm \sqrt{(a^2 - b^2 c)})$$

Zum Beispiel ergeben sich

$$\sqrt{(5 + 2 \sqrt{6})} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \sqrt{(3 - 2 \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1$$

### Wurzelvereinfachung

Ineinander verschachtelte Wurzelterme der Form

$$\sqrt{(a \pm b \sqrt{c})}$$

können mitunter vereinfacht werden zu

$$\sqrt{(a \pm b \sqrt{c})} = \sqrt{d} \pm \sqrt{e}$$

Quadrieren ergibt  $a \pm b \sqrt{c} = d + e \pm \sqrt{d e}$  und somit  $a = d + e$  und  $b^2 c = 4 d e$ :

$$d, e = 1/2 (a \pm \sqrt{(a^2 - b^2 c)})$$

Zum Beispiel ergeben sich

$$\sqrt{(5 + 2 \sqrt{6})} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \sqrt{(3 - 2 \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1$$

Die Tabelle enthält eine Vielzahl von ganzzahligen a, b, c und d, e, für die diese Transformation möglich ist.

a	b	c	d	e	a	b	c	d	e
2	1	4	1	1	3	1	8	2	1
3	2	2	2	1	4	1	12	3	1
4	1	16	2	2	4	2	3	3	1
4	2	4	2	2	5	1	16	4	1
5	1	24	3	2	5	2	4	4	1
5	2	6	3	2	6	1	20	5	1
6	1	32	4	2	6	1	36	3	3
6	2	5	5	1	6	2	8	4	2
6	2	9	3	3	6	3	4	3	3
6	4	2	4	2	7	1	24	6	1
7	1	40	5	2	7	1	48	4	3

Wurzelterme der Form  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  bzw.  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  können u.U. zu einer Wurzel zusammengefasst werden. Dazu können die Umrechnungsformeln  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{(a + b \pm 2 \sqrt{ab})}$  für  $0 \leq a \leq b$  genutzt werden.

Diese waren in geometrischer Form schon Euklid bekannt, die im Buch X der "Elemente" aufgenommen sind. In algebraischer Form sind sie im Euklid-Kommentar des al-Nayrizi (gest. 922) und im indischen "Bidscha-ganita" ("Samen der Rechenkunst") von Bhaskara dem II. zu finden. Ist der Term a b eine Quadratzahl, so gelingt die Umwandlung in eine Wurzel. Historisch verbürgt sind auch komplexere Umwandlungen:

$$\sqrt{(3 - 2 \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1$$

$$\sqrt{(4 \sqrt{5} + 9)} = \sqrt{5} + 2$$

$$\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{2}$$

Abu Kamil (um 850-920) in "al-kitab fi al-dschabr wa-'l-muqabala"

$$\sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{50}$$

$$\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})} - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \sqrt{(2 \sqrt{3} - 2)} \quad \text{arabisch um 1100}$$

$$(\sqrt{(\sqrt{40} + 6)} + \sqrt{(\sqrt{40} - 6)})^2 = 4 \sqrt{10} + 4 \quad \text{Luca Pacioli 1494 in "Summa"}$$

$$(\sqrt{(12 + \sqrt{6})} + \sqrt{(12 - \sqrt{6})})^2 = 2 \sqrt{138} + 24$$

Michael Stifel 1544 in "Arithmetica integra"

### Zweierpotenzen

Werden die Zweierpotenzen  $2^n$  berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.

Zum Beispiel enthält die Potenz  $2^{6801}$  hintereinander sieben Nullen; oder  $2^{9933}$  in allen Ziffern 342 mal eine Null, also mit 11,4 % wesentlich mehr als die zu erwartenden 10 %.

n Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz  $2^n$  (gesucht bis n = 50000, Juni 2013 Polster):

#### Ziffer n bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern

0 10, 53, 242, 377, 1491, 1492, 6801, 14008, ...

1 4, 40, 42, 313, 485, 1841, 8554, 8554, ...

2	1, 43, 43, 314, 314, 2354, 8555, 13326, ...
3	5, 63, 83, 219, 221, 2270, 11020, 18843, ...
4	2, 18, 44, 192, 315, 3396, 8556, 13327, ...
5	8, 16, 41, 41, 973, 973, 6838, 25265, ...
6	4, 46, 157, 220, 220, 2269, 18842, ...
7	15, 24, 24, 181, 317, 972, 972, 25264, ...
8	3, 19, 39, 180, 316, 971, 6836, 13328, 25263, ...
9	12, 33, 50, 421, 422, 2187, 15554, 42483, 42485, 42486, ...

### Zweierpotenzensumme

Die Summe zweier aufeinanderfolgender Zweierpotenzen ist immer durch drei teilbar.

Beispiele:  $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24 = 3 \cdot 8$        $2^6 + 2^7 = 64 + 128 = 192 = 3 \cdot 64$

Die Summe dreier aufeinanderfolgender Zweierpotenzen ist immer durch sieben teilbar.

Beispiele:  $2^3 + 2^4 + 2^5 = 8 + 16 + 32 = 56 = 7 \cdot 8$        $2^6 + 2^7 + 2^8 = 64 + 128 + 256 = 448 = 7 \cdot 64$

Die Summe zweier mittelbar aufeinanderfolgender Zweierpotenzen (eine Zweierpotenz übersprungen) ist immer durch fünf teilbar.

Beispiele:  $2^4 + 2^6 = 16 + 64 = 80 = 5 \cdot 16$        $2^5 + 2^7 = 32 + 128 = 160 = 5 \cdot 32$

Soll die Summe von verschiedenen Zweierpotenzen durch eine Zahl  $n$  teilbar sein, so transformiert man  $n$  in die Binärdarstellung und multipliziert diese mit der Zweierpotenz  $2^n$ . Die Einsen in der Binärdarstellung geben an, welche aufeinander folgende Zweierpotenzen zu addieren sind.

Zum Beispiel wird für  $n = 11$

$$11 = 1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$2^n \cdot 11 = 2^n (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+3}$$

Damit ist die Summe, bestehend aus einer Zweierpotenz, der Nachfolgerin sowie deren übernächster Nachfolgerin immer durch elf teilbar.

### Dreierpotenzen

Werden die Dreierpotenzen  $3^n$  berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.

Zum Beispiel tritt in  $3^{7721}$  die Ziffer Drei 8 mal hintereinander auf.

$n$  Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz  $3^n$  (gesucht bis  $n = 25000$ , Juni 2013 Polster):

#### Ziffer $n$ bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern

0	10, 35, 148, 332, 540, 540, 7723, 22793, ...
1	4, 30, 93, 334, 841, 3404, 7271, 7720, ...
2	3, 19, 148, 253, 330, 2124, 2124, 22791, 22791, ...
3	1, 31, 119, 185, 511, 2341, 7721, 7721, ...
4	5, 12, 55, 308, 510, 2340, 7286, 9670, ...
5	8, 27, 33, 33, 274, 2076, 5173, 8880, ...
6	8, 33, 34, 275, 539, 539, 8881, 22792, ...
7	3, 11, 112, 184, 721, 3520, 6643, 12793, ...
8	4, 23, 32, 215, 538, 538, 4797, 17612, ...
9	2, 34, 35, 276, 1520, 2342, 8882, ...

### Fünferpotenzen

Werden die Fünferpotenzen  $5^n$  berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.

Zum Beispiel tritt in  $5^{2225}$  die Ziffer Sechs 6 mal hintereinander auf.

$n$  Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz  $5^n$  (gesucht bis  $n = 25000$ , Juni 2013 Polster):

#### Ziffer $n$ bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern

0	8, 39, 67, 228, 1194, 3374, 10065, 19699, ...
1	5, 23, 53, 121, 185, 2440, 7683, ...
2	2, 13, 52, 126, 197, 1087, 2788, 2794, 2800, 2800, ...
3	5, 35, 52, 161, 653, 3746, 11474, 23048, ...
4	11, 12, 51, 125, 125, 2277, 2787, 2793, 2799, 2799, ...
5	1, 23, 54, 122, 186, 2274, 2790, 2790, 2796, 2802, 2802, ...
6	4, 31, 102, 146, 652, 2225, 9356, 19636, ...
7	7, 24, 56, 95, 187, 2275, 2791, 2791, 2797, 2797, 2803, 2803, ...
8	7, 11, 50, 96, 454, 2276, 2786, 2792, 2798, 2798, 2804, ...
9	8, 44, 117, 120, 1265, 2861, 15843, 17388, ...

## Siebenerpotenzen

Werden die Siebenerpotenzen  $7^n$  berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.

Zum Beispiel tritt in  $7^{175}$  die Ziffer Sieben 6 mal hintereinander auf.

$n$  Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz  $7^n$  (gesucht bis  $n = 25000$ , Juni 2013 Polster):

### Ziffer $n$ bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern

0	5, 20, 74, 154, 510, 4412, 6985, 21195, ...
1	4, 6, 34, 162, 308, 2362, 6176, 6176, ...
2	4, 14, 69, 80, 357, 1239, 3041, 18737, ...
3	3, 16, 45, 194, 1191, 1558, 1961, ...
4	2, 18, 33, 144, 176, 1461, 5360, 17946, ...
5	7, 21, 47, 153, 172, 1375, 5220, 8451, ...
6	5, 20, 70, 148, 846, 1857, 2308, 17233, ...
7	1, 11, 31, 163, 175, 175, 6177, ...
8	5, 13, 48, 79, 309, 1426, 5482, 22229, ...
9	2, 15, 71, 71, 1677, 2633, 6263, 10986, ...

## Elferpotenzen

Werden die Elferpotenzen  $11^n$  berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.

Zum Beispiel tritt in  $11^{1293}$  die Ziffer Eins 6 mal hintereinander auf.

$n$  Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz  $11^n$  (gesucht bis  $n = 25000$ , Juni 2013 Polster):

### Ziffer $n$ bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern

0	5, 20, 20, 73, 99, 482, 2983, 2983, 24277, ...
1	1, 11, 22, 91, 400, 1293, 6220, 14086, ...
2	2, 13, 42, 211, 397, 2419, 6480, 6480, ...
3	3, 14, 51, 168, 190, 1324, 5263, 10848, ...
4	4, 17, 38, 202, 739, 1074, 5175, 13953, 16158, ...
5	5, 18, 40, 217, 239, 501, 3589, 12359, 24535, ...
6	4, 34, 42, 50, 156, 918, 1323, 17361, ...
7	6, 15, 39, 184, 488, 2258, 4177, 12358, ...
8	7, 8, 30, 169, 450, 961, 4184, 11440, ...
9	7, 17, 20, 281, 531, 1254, 4055, 9443, 9443, ...

## Dreizehnerpotenzen

Werden die Dreizehnerpotenzen  $13^n$  berechnet, so ergeben sich in deren Ziffernfolgen interessante Gruppierungen.

Zum Beispiel tritt in  $13^{5482}$  die Ziffer Acht 8 mal hintereinander auf.

$n$  Wiederholungen von Ziffern ergeben sich erstmals bei der Potenz  $13^n$  (gesucht bis  $n = 25000$ , Juni 2013 Polster):

### Ziffer $n$ bei 1, 2, 3, ... aufeinanderfolgenden gleichen Ziffern

0	6, 20, 64, 295, 434, 2038, 5906, 24206, ...
1	1, 15, 29, 123, 376, 728, ...
2	3, 12, 50, 177, 327, 327, 3560, 13946, ...
3	1, 17, 26, 26, 426, 2116, 6559, 15191, ...
4	6, 9, 54, 54, 227, 997, 4760, 16186, ...
5	4, 18, 46, 258, 258, 1210, 1544, 14624, ...
6	2, 16, 25, 25, 512, 512, 512, 16457, ...
7	3, 19, 72, 75, 727, 727, 3220, 5905, 5905, ...
8	4, 20, 49, 105, 726, 1209, 1209, 5482, 16661, ...
9	2, 9, 30, 189, 477, 1631, 3445, 11666, ...

## Logarithmen

Abbildung: Napiers Logarithmentafel

Definition:  $\log_a b$  ist diejenige reelle Zahl  $c$ , für die gilt  $a^c = b$ . ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ )

$a$  heißt Basis,  $b$  Numerus (Logarithmand) und  $c$  Logarithmus.

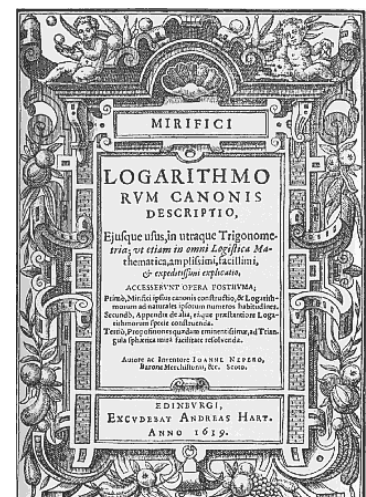
## Logarithmengesetze

$$a^{(\log_a b)} = b$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_1 a \text{ nicht erklärt}$$



Wenn  $b, c > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \log_a(b \cdot c) &= \log_a b + \log_a c & \log_a(b/c) &= \log_a b - \log_a c \\ \log_a b^r &= r \cdot \log_a b & \log_a \sqrt[n]{b} &= 1/n \cdot \log_a b \end{aligned}$$

Wenn  $a, b, c > 0$ , aber ungleich 1  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \log_b c &= \log_a c / \log_a b & \log_a c &= 1 / \log_c a \\ \log_{1/a} c &= - \log_a c & \log_a c &= \lg c / \lg a \\ a^x &= e^{x \cdot \ln a} \end{aligned}$$

1. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

2. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus dem Logarithmus des Dividenden und dem des Divisors.

3. Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Potenzexponenten multiplizierten Logarithmus der Potenzbasis.

4. Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem durch den Wurzelexponenten geteilten Logarithmus des Radikanden.

### Herleitung der Logarithmengesetze

Der Logarithmus von  $a$  zur Basis  $b$  ist diejenige Zahl  $x$ , mit der  $b$  potenziert werden muss, um  $a$  zu erhalten. Wenn  $b^x = a$  gilt, dann ist somit  $\log_b a = x$ . Wegen  $a = b^x$  ist daher  $\log_b b^x = \log_b a = x$

### Analogie zum 1. Potenzgesetz

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{beide Seiten werden zur Basis } a \text{ logarithmiert}$$

$$\log_a (a^m \cdot a^n) = \log_a (a^{m+n})$$

$$\log_a (a^m \cdot a^n) = m + n$$

Setzt man nun  $u = a^m$  und  $v = a^n$ , so wird  $\log_a u = m$  und  $\log_a v = n$ , und somit (7)

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

Der Logarithmus eines Produktes ist die Summe der Logarithmen der Faktoren.

Analog folgt aus dem 2. Potenzgesetz

$$\log_a (u/v) = \log_a u - \log_a v$$

Der Logarithmus eines Bruchs ist die Differenz aus den Logarithmen von Zähler und Nenner.

### Analogie zum 3. Potenzgesetz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \text{Logarithmieren zur Basis } a$$

$$\log_a ((a^m)^n) = \log_a a^{m \cdot n}$$

$$\log_a ((a^m)^n) = m \cdot n$$

Ersetzen von  $a^m$  durch  $u$  und  $m$  durch  $\log_a u$  und  $n$  durch  $v$  ergibt

$$\log_a u^v = v \cdot \log_a u$$

Der Logarithmus einer Potenz mit der Basis  $b$  und dem Exponenten  $x$  ist das Produkt aus dem Logarithmus der Basis und dem Exponenten.

### Basiswechsel

Für die Berechnung von Logarithmen findet man auf einem handelsüblichen Taschenrechner den dekadischen Logarithmus (zur Basis 10) und den natürliche Logarithmus zur Basis  $e = 2,71828182845905\dots$ . Häufig muss man aber Logarithmen zu anderen Basen berechnen.

Als Vorüberlegung interessiert der Term  $b^{\log_b x}$ . Die Definition des Logarithmus besagt, dass  $\log_b x$  diejenige Zahl ist, mit der man  $b$  potenzieren muss, um  $x$  zu erhalten. Da hier  $b$  eben genau damit potenziert wird, folgt sofort, dass gilt:  $b^{\log_b x} = x$

Logarithmiert man den Term  $b^{\log_b x}$  zu einer anderen Basis  $a$ , d.h.  $\log_a (b^{\log_b x})$

so wird zum einen

$$\log_a (b^{\log_b x}) = \log_a x$$

und außerdem

$$\log_a (b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot \log_a b$$

Damit ergibt sich

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$$

und somit

$$\log_b x = \log_a x / \log_a b$$

Rechts stehen nur Logarithmen zur Basis  $a$ , links steht ein einzelner Logarithmus der Zahl  $x$  zur Basis  $b$ .

Steht irgendein Logarithmus zur Verfügung, so kann mit diesem Zusammenhang jeder andere Logarithmus berechnet werden.

Man berechnet einfach den Logarithmus der gesuchten Zahl zur vorhandenen Basis und teilt das Ergebnis durch den vorhandenen Logarithmus der nicht vorhandenen Basis.

### Basis der natürlichen Logarithmen

Eulersche Zahl  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots$

Modul der dekadischen Logarithmen  $M_{10} = \lg e = 1/(\ln 10) = 0.43429\dots$

Modul der natürlichen Logarithmen  $\ln 10 = 1/M_{10} = 2.30259$

Cologarithmus  $\text{colog } x = \log (1/x) = - \log x$

### Spezielle Logarithmen

1. Logarithmen zur Basis 10 heißen dekadische oder Briggsche Logarithmen. Man schreibt  $\log_{10} x = \lg x$ . Das Symbol  $\lg x$  ist nach DIN 1302 als Bezeichnung des Zehnerlogarithmus vorgeschrieben.

2. Logarithmen zur Basis e heißen natürliche oder Nepersche Logarithmen. Man schreibt  $\log_e x = \ln x$ .  
 3. Logarithmen zur Basis 2 heißen Duallogarithmen oder binäre Logarithmen. Man schreibt  $\log_2 x = \text{lb } x$  bzw.  $\log_2 x = \text{ld } x$ .  
 Logarithmen ohne Basisangabe beziehen sich im allgemeinen auf den natürlichen Logarithmus.

### Dekadische Logarithmen der ersten Zahlen

n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)
2	0.301029996	3	0.477121255	4	0.602059991	5	0.698970004
6	0.778151250	7	0.845098040	8	0.903089987	9	0.954242509
11	1.04139268	12	1.07918125	13	1.11394335	14	1.14612804
15	1.17609126	16	1.20411998	17	1.23044892	18	1.25527250
19	1.27875360	20	1.30103000	21	1.32221929	22	1.34242268
23	1.36172784	24	1.38021124	25	1.39794001	26	1.41497335

### Natürliche Logarithmen der ersten Zahlen

n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)	n	lg(n)
2	0.693147180	3	1.09861229	4	1.38629436	5	1.60943791
6	1.79175947	7	1.94591015	8	2.07944154	9	2.19722458
10	2.30258509	11	2.39789527	12	2.48490665	13	2.56494936
14	2.63905733	15	2.70805020	16	2.77258872	17	2.83321334
18	2.89037176	19	2.94443898	20	2.99573227	21	3.04452244
22	3.09104245	23	3.13549422	24	3.17805383	25	3.21887582

### Binäre Logarithmen der ersten Zahlen

n	lb(n)	n	lb(n)	n	lb(n)	n	lb(n)
3	1.58496250	4	2.00000000	5	2.32192810	6	2.58496250
7	2.80735492	8	3.00000000	9	3.16992500	10	3.32192809
11	3.45943162	12	3.58496250	13	3.70043972	14	3.80735492
15	3.90689060	16	4.00000000	17	4.08746284	18	4.16992500
19	4.24792751	20	4.32192810	21	4.39231742	22	4.45943162
23	4.52356196	24	4.58496250	25	4.64385619	26	4.70043972

$\ln(10) = 2.30258509299404568401799145468436420760110148862877297603332790096...$   
 $\lg(2) = 0.301029995663981195213738894724493026768189881462108541310427461127...$   
 $\ln(2) = 0.693147180559945309417232121458176568075500134360255254120680009493...$   
 $\ln^2(2) = 0.48045301391820142466710252632666497173055295159454558686686413362...$   
 $\ln(2\pi) = 1.83787706640934548356065947281123527972279494727556682563430308096...$   
 $\ln(3) = 1.098612288668109691395245236922525704647490557822749451734694333637...$   
 $\ln(\pi) = 1.144729885849400174143427351353058711647294812915311571513623071472...$

**Näherungen** für  $3/4 \leq x \leq 4/3$  gilt  $\ln(x) \approx (x - 1)/\sqrt{x}$   
 für  $1/2 \leq x \leq 2$  gilt  $\ln(x) \approx (x - 1) (6 / (1 + 5x))$

### Logarithmusreihen

Zur exakten Berechnung von speziellen natürlichen Logarithmen wurden verschiedene Gleichungen gefunden, deren einzelne Terme durch unendliche Reihen entwickelt werden können. U.a. gilt nach Sebah (1997):

$$\begin{aligned} \ln 10 &= 6 \operatorname{arctanh}(1/3) + 2 \operatorname{arctanh}(1/9) \\ \ln 10 &= 46 \operatorname{arctanh}(1/31) + 34 \operatorname{arctanh}(1/49) + 20 \operatorname{arctanh}(1/161) \\ \ln 2 &= 4 \operatorname{arctanh}(1/6) + 2 \operatorname{arctanh}(1/99) \\ \ln 2 &= 4 \operatorname{arctanh}(1/7) + 2 \operatorname{arctanh}(1/17) \\ \ln 2 &= 18 \operatorname{arctanh}(1/26) - 2 \operatorname{arctanh}(1/4801) + 8 \operatorname{arctanh}(1/8749) \\ \ln 2 &= 10 \operatorname{arctanh}(1/17) + 4 \operatorname{arctanh}(13/449) \\ \ln 2 &= 144 \operatorname{arctanh}(1/251) + 54 \operatorname{arctanh}(1/449) - 38 \operatorname{arctanh}(1/4801) + 62 \\ &\quad \operatorname{arctanh}(1/8749) \\ \ln 2 &= 14 \operatorname{arctanh}(1/31) + 10 \operatorname{arctanh}(1/49) + 6 \operatorname{arctanh}(1/161) \end{aligned}$$

Über eine Maclaurin-Reihe können die arctanh-Terme beliebig genau berechnet werden:

$$\operatorname{arctanh} x = x + 1/3 x^3 + 1/5 x^5 + 1/7 x^7 + \dots$$

### Logarithmuseigenschaften

Für den natürlichen Logarithmus  $\ln x$  und den dekadischen Logarithmus  $\lg x$  einer reellen Zahl  $x$  gelten:

$$\begin{aligned} x / (1+x) &< \ln(1+x) < x; \text{ für } x > -1 \text{ und verschieden von } 0 \\ x &< -\ln(1-x) < x / (1-x); \text{ für } x < 1 \text{ und verschieden von } 0 \\ |\ln(1-x)| &< 3/2 x; \text{ für } 0 < x < 0,5828 \\ \ln x &\leq x - 1; \text{ für } x > 0 \\ \ln x &\leq n (\sqrt[n]{x} - 1); \text{ für } x > 0 \text{ und beliebiges } n > 0 \\ |\ln(1+x)| &\leq -\ln(1-|x|); \text{ für } |x| < 1 \end{aligned}$$



## Näherungsformeln

für  $1/\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$$\lg x = 0,86304 t + 0,36415 t^3 + R(x) ; t = (x-1)/(x+1) ; R(x) < 6 \cdot 10^{-4}$$

für  $1/\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

$$\lg x = 0,868591718 t + 0,289335524 t^3 + 0,177522071 t^5 + 0,094376476 t^7 + 0,191337714 t^9 + R(x)$$

$$t = (x-1)/(x+1) ; R(x) < 10^{-7}$$

für  $0 \leq x \leq 1$

$$\ln(1+x) = 0,99949556 x - 0,49190896 x^2 + 0,28947478 x^3 - 0,13606275 x^4 + 0,03215845 x^5 ;$$

$R(x) < 10^{-5}$

für  $0 \leq x \leq 1$

$$\ln(1+x) = 0,9999964249 x - 0,4998741238 x^2 + 0,3317990258 x^3 - 0,2407338084 x^4 + 0,1676540711 x^5 - 0,0953293897 x^6 + 0,0360884937 x^7 - 0,0064535442 x^8 ; R(x) < 3 \cdot 10^{-8}$$

Approximation mit Tschebyschow-Polynomen

für  $0 \leq x \leq 1$

$$T_n(x) = \cos n\theta, \cos \theta = 2x-1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x)$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$  wird

$$A_n = 0,476452813; 0,343145750; -0,029437252; 0,003367089; -0,000433276; 0,000059471; -0,000008503; 0,000001250; -0,000000188; 0,000000029; -0,000000004; 0,000000001$$

## Goldener Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis  $a = \phi = (\sqrt{5} + 1)/2$  mit  $b > 0$  wird goldener Logarithmus genannt und mit

$$l_{\phi} b = \log_{\phi} b = \ln(b) / \ln(\phi)$$

bezeichnet.

Spezielle Funktionswerte

n	$l_{\phi}(n)$	n	$l_{\phi}(n)$	n	$l_{\phi}(n)$	n	$l_{\phi}(n)$
2	1,4404200	3	2,2830118	4	2,8808401	5	3,3445518
6	3,7234319	7	4,0437704	8	4,3212602	9	4,5660236
10	4,7849719	11	4,9830348	12	5,1638520	13	5,3301877
14	5,4841905	15	5,6275637	16	5,7616803	17	5,8876635

Eine spezielle Eigenschaft des goldenen Logarithmus ergibt sich für Fibonacci-Zahlen, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_{n+1} / F_n) = 1/2 (1 + \sqrt{5})$$

gilt, wird

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_{\phi}(F_{n+1} / F_n) = 1, \text{ d.h. } l_{\phi}(F_{n+1}) \approx 1 + l_{\phi}(F_n)$$

goldener Logarithmus einer Fibonacci-Zahl

$$l_{\phi}(F_n) = l_{\phi}(1/\sqrt{5} (((1 + \sqrt{5})/2)^n - ((1 - \sqrt{5})/2)^n))$$

## Beispiel zur Logarithmenrechnung

**Aufgabe:** Bestimme das Alter eines Fossils, dessen gemessener C14-Anteil 1,4% des ursprünglichen Anteils ist! (Halbwertszeit von C14: 5730 Jahre.)

### 1.Lösung:

Ansatz:  $B(t) = A \cdot e^{-kt}$ ; B Bestand an C14, t Jahre

$$\text{Aus } B(0) = A \text{ und } B(5730) = A \cdot e^{-5730k} = 1/2 \cdot A \text{ folgt } e^{-5730k} = 1/2$$

$$\rightarrow -5730k = \ln 1/2 = -\ln 2 \rightarrow k = \ln 2 / 5703 \approx 0,000121$$

Für das Alter wird:

$$B(t) = A e^{-kt} = 1,4\% \text{ von } B(0) = 0,014 \cdot A \rightarrow e^{-kt} = 0,014 \rightarrow -kt = \ln 0,014, \text{ also } t = -\ln 0,014 / \ln 2 \cdot 5730 = 35\,288 \text{ Jahre.}$$

### 2.Lösung:

Ansatz:  $B(t) = A \cdot 2^{-kt}$ ; B Bestand an C14, t Jahre

$$\text{Aus } B(0) = A \text{ und } B(5730) = A \cdot 2^{-5730k} = 1/2 \cdot A \text{ folgt: } 2^{-5730k} = 1/2 \rightarrow -5730k = \lg 1/2 = -1 \rightarrow k = 1/5730 \approx 0,000175$$

$$\text{Somit ist } B(t) = A \cdot 2^{-kt} \text{ und } B(5730) = A \cdot 2^{-1} = A/2. B(t) = A \cdot 2^{-kt} = 1,4\% \text{ von } B(0) = 0,014 \cdot A \rightarrow 2^{-kt} = 0,014 \rightarrow -kt = \lg 0,014, \text{ also } t = -\lg 0,014 / \lg 2 \cdot 5730 = 35\,288 \text{ Jahre}$$

Ergebnis: Das Fossil ist rund 35 Tausend Jahre alt.

Aufgabe: Eine Kultur von ursprünglich 1000 Bakterien wächst exponentiell und verdoppelt ihre Größe jede Stunde. Zu welcher Zeit weist sie 7000 Bakterien auf?

Lösung: Die Zahl der Bakterien nach t Stunden beträgt  $A = 1000 \cdot 2^t$ . Die Frage, wann 7000 Bakterien vorhanden sind, führt auf die Gleichung  $1000 \cdot 2^t = 7000$

die nach t zu lösen ist. Die Gleichung  $2^t = 7$

wird auf beiden Seiten zur Basis 10 logarithmiert. Da der Logarithmus eine umkehrbare Funktion ist, handelt es sich um eine Äquivalenzumformung:

$$\lg(2^t) = \lg 7 \quad t \lg 2 = \lg 7$$

und  $t = \lg 7 / \lg 2 = 2,807\dots$

Nach 2,807 Stunden (2 Stunden und 48,4 Minuten) sind 7000 Bakterien vorhanden.

Aufgabe 2: Die Intensität eines radioaktiven Stoffs fällt in 5 Jahren auf 1/3 ihres ursprünglichen Werts ab. Wie groß ist die Halbwertszeit?

Lösung: Die Intensität I sinkt nach t Jahren um den Faktor  $2^{-t/T}$ , wobei T die Halbwertszeit in Jahren ist.

Nach 5 Jahren beträgt dieser Faktor  $2^{-5/T}$ , d.h.

$$2^{-5/T} = 1/3$$

Beide Seiten logarithmieren zur Basis e

$$\ln(2^{-5/T}) = \ln(1/3),$$

und  $T = 5 \ln 2 / \ln 3 \approx 3155$  Jahre.

### Binärer Logarithmus

Für den binären Logarithmus

$$\log_2 x = \text{lb } x \text{ bzw. } \log_2 x = \text{ld } x$$

gibt es eine einfache Möglichkeit, nacheinander die Ziffern der Binärdarstellung des Logarithmus zur Basis 2 zu bestimmen. Dieses Verfahren ist einfach zu implementieren, da es Divisionen vermeidet und auch leicht in Festkomma-Arithmetik umsetzbar ist.

Zunächst werden die Vorkommastellen des Zweierlogarithmus im Dualsystem der Zahl x bestimmt, und die Zahl x durch Schieben auf Werte zwischen 1 und 2 normiert.

Der Logarithmus von x hat danach die Darstellung

$$\log_2 x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

$$\log_2 x^2 = b_1, b_2 b_3 b_4 \dots, \text{ da } \log x^2 = 2 \log x$$

Quadrieren von x schiebt den Logarithmus um eine Binärstelle nach links, wodurch die Vorkommastelle möglicherweise Eins wird. Dies ist der Fall, wenn  $x^2 \geq 2$  ist. In diesem Falle wird x durch Division durch 2 wieder normiert.

### Additionslogarithmus, Subtraktionslogarithmus

Logarithmen wurden historisch zur schnellen Berechnung von komplizierten Rechenoperationen genutzt. Das klassische Beispiel ist der Rechenstab und ähnliche Geräte.

Bei numerischen Berechnungen mit Logarithmen mussten häufig der Logarithmus einer Summe  $\lg(a+b)$  ermittelt werden. Wurden a und b logarithmisch bestimmt, war es mühevoll, erst den Numerus von a und b zu ermitteln.

Aus diesem Grund wurden sogenannte Additionslogarithmen eingeführt. Mit der Umformung

$$(*) \quad \lg(a+b) = \lg a + \lg(1+b/a)$$

wird  $\lg(1+b/a)$  als Additionslogarithmus bezeichnet und tabelliert.

Kennt man  $\lg a$  und  $\lg b$ , so wurde  $\lg(1+b/a)$  abgelesen und mit (\*) weitergerechnet.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{1^2 x}{2 + \frac{1^2 x}{3 + \frac{2^2 x}{4 + \frac{2^2 x}{5 + \frac{3^2 x}{6 + \frac{3^2 x}{7 + \dots}}}}}}$$

### Additionslogarithmus = $\lg(1+b/a)$

Analog ergibt sich aus  $\lg(a-b) = \lg a - \lg(1/(1-b/a))$

der Subtraktionslogarithmus  $\lg(1/(1-b/a))$  mit  $a > b$ .

### Subtraktionslogarithmus = $\lg(1/(1-b/a))$

### Logarithmus als Kettenbruch

Ausgehend von der Potenzreihenentwicklung

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - + \dots$$

können Kettenbruchentwicklungen für  $\ln(1+x)$  und  $\ln[(1+x)/(1-x)]$  entwickelt werden. (siehe Abbildung)

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{4x^2}{5 - \frac{9x^2}{7 - \frac{16x^2}{9 - \dots}}}}}$$

### Spezielle Funktionswerte

Wird die Definition des natürlichen Logarithmus auf den komplexen Zahlenbereich erweitert, ergeben sich folgende spezielle Funktionswerte:

$$\ln(-1) = i \pi$$

$$\ln 0 = -\infty$$

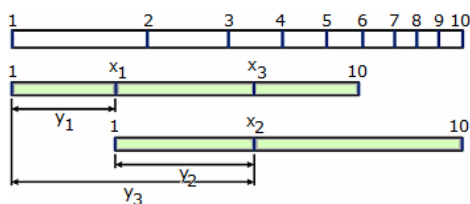
$$\ln 1 = 0$$

$$\ln i = 1/2 \pi i$$

$$\ln(-i) = -1/2 \pi i$$

$$\ln(-\pi) = \ln \pi + \pi i$$

### Skalen



Grundlage einer Skala ist eine Funktion  $y = f(x)$ . Zu dieser Funktion konstruiert man eine Skala, indem man auf einer Kurve, z.B. einer Geraden, die Funktionswerte y als Längen abträgt, aber mit dem Argument x bezieht. Man kann somit eine Skala als eindimensionale Darstellung der Wertetabelle einer Funktion auffassen.

Die Skalengleichung zur Funktion  $y = f(x)$  lautet:  $y = l[f(x) -$

$f(x_0)]$

Durch  $x_0$  wird der Anfangspunkt der Skala festgelegt. Mit dem Maßstabsfaktor l wird berücksichtigt, dass für eine konkrete Skala nur eine bestimmte Länge zur Verfügung steht.

## Logarithmische Skala

Für  $l = 10 \text{ cm}$  und  $x_0 = 1$  lautet ihre Skalengleichung  $y = 10(\lg x - \lg 1) = 10 \lg x$  in cm. Man erhält die abgebildete Skala.

Ihre wichtigste Anwendung, historisch gesehen, fand die logarithmische Skala beim logarithmischen Rechenschieber. Bei diesem werden Multiplikation und Division mit Hilfe zweier logarithmischer Skalen, die den gleichen Maßstabsfaktor haben und gegeneinander verschiebbar angebracht sind, durchgeführt.

Aus der Abbildung liest man ab:

$$y_3 = y_1 + y_2, \text{ d.h.}$$

$$y_1 = y_3 - y_2, \text{ d.h.}$$

$$\lg x_3 = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg x_1 x_2, \text{ also } x_3 = x_1 x_2$$

$$\lg x_1 = \lg x_3 - \lg x_2 = \lg x_3/x_2, \quad x_1 = x_3/x_2$$

## Logarithmenanwendung

Anwendungen des Logarithmus finden sich vielfach in der Wissenschaft, wenn der Wertebereich viele Größenordnungen umfasst. Daten werden entweder direkt mit einer logarithmischen Skala dargestellt, oder die Einheiten selbst sind logarithmisch.

Beispiele:

1) Logarithmische Spirale

In der Natur finden sich zahlreiche Beispiele logarithmischer Spiralen, so z.B. das Wachstum von Schneckenhäusern oder die Anordnung der Kerne auf der Sonnenblume.

2) pH-Wert

Der Säurewert von Lösungen. In der Chemie erkennt man logarithmische Skalen am vorangestellten p, z.B. beim pKs- oder pKb-Wert.

3) Dezibel (dB)

Messung von Lautstärke, elektronischer Dämpfung

4) Empfindlichkeit der Sinnesorgane

Die Empfindlichkeit der Sinnesorgane folgt dem logarithmischen Weber-Fechner-Gesetz der Psychophysik, wonach eine Vervielfachung der Reizstärke nur eine lineare Zunahme des wahrgenommenen Reizes bewirkt.

5) Sternhelligkeiten

Sternhelligkeiten werden in astronomischen Größenklassen angegeben, die ein logarithmisches Maß der tatsächlichen Strahlungsstärke darstellt.

6) Rechenstab, Rechenschieber

7) Benfordsches Gesetz

Die Verteilung der Ziffern von Zahlen in empirischen Datensätzen folgt einer logarithmischen Verteilung, dem Benford'schen Gesetz.

8) Informationseinheit

Messung der Informationsmenge; die Informationstheorie sagt, dass, wenn etwas mit Wahrscheinlichkeit  $p$  auftritt, das Wissen über das tatsächliche Auftreten davon eine Informationsmenge von  $\log_2 1/p$  bit ergibt.

9) Kryptographie

Der diskrete Logarithmus ist in endlichen Körpern und darauf definierten elliptischen Kurven erheblich aufwändiger zu berechnen als seine Umkehrfunktion, die diskrete Exponentialfunktion.

## Richter-Skala, Erdbeben-Skala

Durch den US-amerikanischen Seismologen Charles Francis Richter wurde 1935 eine nach ihm benannte Skala zur Messung der Stärke von Erdbeben vorgeschlagen.

Diese Erdbebenskala ist eine Magnitudenskala, die nach dem dekadischen Logarithmus aufgebaut ist.

Eine Erhöhung um Magnitude 1 bedeutet damit eine zehnfach höhere Energie des Erdbebens. Die Bestimmung der Magnitude eines Bebens erfolgt durch seismografische Messungen.

Ursprünglich endete die Richterskala bei 6. Zum Vergleich mit früheren Erdbeben und aus Gründen der Bekanntheit werden heute Messungen auf die Richterskala umgerechnet.

Sind  $M$  die Magnitude und  $E$  die äquivalente Energie in Tonnen TNT, so gilt  $M = 2 + 2/3 \lg E$ ,  
 $E = 10^{3/2(M-2)}$

Stärke	Wirkung
M 0	nicht fühlbar
M 1	unmerklich
M 2	kaum merklich
M 3	von einigen Menschen bemerkt
M 4	von den meisten Menschen im betroffenen Gebiet beobachtet
M 5	aufweckend
M 5,3-5,9	erschreckend, erste Schäden
M 6,0-6,9	Gebäudeschäden, einige Gebäudezerstörungen
M 7,0-7,3	allgemeine Gebäudeschäden, verbreitete Gebäudezerstörungen
M 7,4-7,7	allgemeine Gebäudezerstörungen. Ab M 7,5 reicht die Energie zur Auslösung von Tsunamis aus.
M 7,8-8,4	Verwüstungen, katastrophentartige Zerstörungen (San Francisco 1906: M 8)

M 8,5-8,9 landschaftsverändernde Vernichtungen  
M 9,0 Am 26.12.2004 löste ein Seebeben der Stärke M 9,0 vor der indonesischen Insel Sumatra einen Tsunami aus, der mehr als 230000 Todesopfer forderte.  
M 9,5 gilt nach heutigen Erkenntnissen als höchster zu erreichender Wert. (Chile 1960: M 9,5)  
Quelle: <http://www.code-knacker.de/erdbeben.htm>

### Logarithmus-Geschichte

1544 wies Michael Stifel im Werk "Arithmetica integra" (Gesamte Arithmetik) darauf hin, dass der Vergleich von

1	a	a <sup>2</sup>	a <sup>3</sup>	a <sup>4</sup>	...
0	1	2	3	4	...

es erlaubt, anstelle der Multiplikation der Zahlen der ersten Reihe, die zugehörigen Exponenten der zweiten Reihe zu addieren.

Dies ist die Grundidee des logarithmischen Rechnens. Dazu bemerkte Stifel:

"Man könnte ein ganz neues Buch über die wunderbaren Eigenschaften dieser Zahlen schreiben, aber ich muss mich an dieser Stelle bescheiden und mit geschlossenen Augen vorübergehen"

1614 veröffentlichte der schottische Mathematiker Neper die ersten noch unvollkommenen Logarithmentafeln. Er benutzte eine zu 1/e proportionale Basis. Diese Tafeln wurden schrittweise verbessert. Neper und Briggs einigten sich auf die Basiszahl 10. Im Jahre 1617 veröffentlichte Briggs eine 14stellige Logarithmentafel zur Basis 10.

Das Erscheinen von Logarithmentafeln war u.a. 1624 eine große Hilfe für Johannes Kepler bei der Fertigstellung seiner astronomischen "Rudolphinischen Tafeln". Heute sind Logarithmentafeln nur noch eine historische Episode, da Computer und Taschenrechner die aufwendigen Berechnungen (Multiplikation, Division, Radizieren) erleichtern.

### Iterierter Logarithmus

Der iterierte Logarithmus einer positiven Zahl n, bezeichnet mit log\* n (gesprochen „log Stern von n“), ist die Anzahl der wiederholten Anwendung der Logarithmusfunktion auf das Argument x bis das Ergebnis kleiner oder gleich 1 ist.

Definition:  $\log^* n := 1 + \log^* (\log n)$  für  $n > 1$  ; andernfalls = 0

Für die Basis 2 des Logarithmus wird auch lg\* n verwendet.

Der iterierte binäre Logarithmus ist eine sehr langsam steigende Funktion:

x	lg* x
(-∞, 1]	0
(1, 2]	1
(2, 4]	2
(4, 16]	3
(16, 65536]	4
(65536, 2 <sup>65536</sup> ]	5

## Eulersche Zahl, Zahl e

Die Eulersche Zahl ist die Basis der natürlichen Logarithmen. Benannt durch Leonhard Euler als Einheit der natürlichen Logarithmen.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots$$

oder  $e = \sum 1/k! = (\sum (-1)^k/k!)^{-1}$ ; Summe über alle  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$

Die Eulersche Zahl ist irrational (Euler) und transzendent (Hermite 1873). Es ist unbekannt, ob  $\pi+e$  und  $\pi/e$  irrational sind. Die Zahlenfolge  $(1 + 1/n)^n$  wird auch Eulersche Zahlenfolge genannt.

Durch Bailey wurde nur nachgewiesen, dass  $\pi+e$  und  $\pi/e$  keine Lösungen einer ganzrationalen Gleichung maximal 8. Grades für ganzzahlige Koeffizienten  $< 10^9$  sind.

**Eulersche Formel**  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  und mit  $x=\pi \rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

Die Beziehung

$$e^{i\pi} = -1$$

wurde zum wichtigsten mathematischen Satz aller Zeiten gewählt!

**Kettenbrüche**  $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$   $(e - 1)/(e + 1) = [2, 6, 10, 14, \dots]$

$$e - 1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots] \quad (e - 1)/2 = [0, 1, 6, 10, 14, \dots]$$

$$\sqrt{e} = [1, 1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, \dots]$$

Die Abbildung zeigt die ersten Glieder der Kettenbruchentwicklung von e als Folge von Binärzahlen.

### Näherungsbrüche für e

$3, 8/3, 11/4, 19/7, 87/32, 106/39, 193/71, 1264/465, 1457/536, 2721/1001, 23225/8544, 25946/9545, 49171/18089, 517656/190435, 566827/208524, 1084483/398959, 13580623/4996032, 14665106/5394991, 28245729/10391023, 410105312/150869313, 438351041/161260336, \dots$

### Reihenentwicklung der Eulerschen Zahl

Nach Definition der Eulerschen Zahl gilt

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

Entwickelt man den Grenzwert in eine Reihe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1/n^i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n/n + n \cdot (n-1) / (1 \cdot 2 \cdot n^2) + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3) + \dots) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1 + 1/(1 \cdot 2) (1 - 1/n) + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3) (1 - 1/n) (1 - 2/n) + \dots) \\ &= 1 + 1 + 1/(1 \cdot 2) + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3) + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + \dots \\ &= 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + \dots \end{aligned}$$

Wird zur näherungsweisen Berechnung von e die Reihe bei dem Term  $1/n!$  abgebrochen, so ist das Restglied  $R_n$  stets kleiner als  $1/n \cdot 1/n!$ . Für den Exponentialterm  $e^x$  wird analog

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i/n^i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + 1/(1 \cdot 2) (1 - 1/n) x^2 + 1/(1 \cdot 2 \cdot 3) (1 - 1/n) (1 - 2/n) x^3 + \dots) \\ &= 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots \end{aligned}$$

Erklärung: Die Zahl e soll bis auf 6 Dezimalstellen genau berechnet werden. Dazu geht man von der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion bei  $x_0 = 0$  aus

$$e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots + x^n/n! + \dots$$

Man berechnet  $e^1$  durch das Taylor-Polynom der Ordnung n

$$e^1 \approx p_n(1) = 1 + 1 + 1/2! + \dots + 1/n! + 1^n$$

Der Fehler ist nach dem Lagrangen Restglied

$$R_n(1) = 1/(n+1)! e^\xi \leq 1/(n+1)! e^1 < 3/(n+1)!, \text{ da } e^\xi \leq e^1 < 3.$$

Damit der Fehler kleiner als 6 Dezimalstellen wird, muss

$$\begin{aligned} R_n(1) &< 3/(n+1)! < 0,9 \cdot 10^{-6} \\ (n+1)! &> 3/(0,9 \cdot 10^{-6}) \approx 3\,333\,333. \end{aligned}$$

Dies ist für  $n \geq 9$  erfüllt, da  $(9 + 1)! = 3628800$  ist.

Für  $n = 9$  ist  $e_1$  bis auf 6 Dezimalstellen genau berechnet:  $e^1 \approx 2,7182815$ .

Vergleicht man diese Methode zur Berechnung der Zahl e mit der Folge  $(1 + 1/n)^n$ , so ist die Reihendarstellung sehr schnell konvergent. Es werden für eine Genauigkeit von 6 Dezimalstellen nur 9 Summenglieder benötigt, im Vergleich zu  $n > 105$  bei der Folgendarstellung.

### Eulersche Zahl Ziffern

e ist eine unendliche, nicht-periodische, irrationale Dezimalzahl, deren Transzendenz durch Hermite nachgewiesen wurde. Die ersten Dezimalziffern von e:

Aktueller Rekord: Durch den japanischen Mathematiker Shigeru Kondo wurden 2002 über 12,8 Milliarden Dezimalziffern von e auf einem normalen PC (Pentium III 1000) berechnet. Der Computer benötigte dafür 22 Tage.

Untersucht man das Auftreten aller n-stelligen Zahlen in der Ziffernfolge von e, so sind für  $n = 1,2,3,\dots$  die zuletzt auftretenden n-stelligen Zahlen 6, 12, 548, 1769, 92994, 513311, ..., die an der Position 21, 372, 8092, 102128, 1061613, 12108841, ... enden.

Mit dem Freeware-Programm PIFAST gelingt es auf einem normalen PC (1,7 GHz) in nur 50 Sekunden immerhin 20 Millionen Stellen der Eulerschen Zahl zu berechnen.

## Eulersche Zahl, Tröpfelalgorithmus

Für die Berechnung der Ziffern von e existiert ein Tröpfelalgorithmus.

Als Tröpfelalgorithmus bezeichnet man einen Algorithmus zur Berechnung mathematischer Konstanten wie  $\pi$  oder e, bei dem die Ziffern eine nach der anderen berechnet und anschließend nicht mehr benötigt werden, also "herausträpfeln".

### Tröpfelalgorithmus für die Eulersche Zahl

- Bestimme m so, dass m! mindestens n Stellen besitzt.
- Notiere zwei Zeilen A und B mit je m Spalten. Die erste Spalte bleibt jeweils frei, Zeile A wird mit m-1 Zahlen 1 gefüllt, Zeile B mit den Zahlen von 2 bis m.
- Notiere eine weitere Zeile, in der ersten Spalte eine 2, anschließend m-1 Mal die 1. Die 2 ist bereits die Ziffer vor dem Komma.
- Füge eine weitere Zeile unten an, und fülle sie mit den folgenden Schritten von rechts nach links:
  - Bestimme die nächste Zahl durch folgende Schritte:
    - Multipliziere die Zahl, die in der aktuellen Spalte in der vorherigen Zeile steht mit 10 und addiere den Übertrag von der vorherigen Spalte (rechts außen ist der Übertrag 0).
    - Dividiere das Ergebnis mit Rest durch die Zahl, die in der Zeile B steht, und notiere den Rest. Der ganzzahlige Quotient ist der nächste Übertrag. Wiederhole Schritt 4.1, bis die zweite Spalte gefüllt ist.
  - Notiere den Übertrag aus der zweiten Spalte in der ersten Spalte, es ist die nächste Ziffer von e. Wiederhole Schritt 4, bis du n Stellen berechnet hast.

### Eulersche Zahl Näherung

Werte für  $(1 + 1/n)^n$  für unterschiedliche n (ungültige Ziffern von e sind durch Leerzeichen getrennt).

Anmerkung: Für höhere n genügt die verwendete 192 bit-Arithmetik nicht mehr. Die nachfolgenden Werte weichen auf Grund

von Rundungsfehlern wieder stärker von e ab.

n	$(1 + 1/n)^n$	Abweichung von e
$10^0$	2. 0	0.71828182
$10^1$	2. 5937424601	0.12453936
$10^2$	2.7 0481382942152609326719471080753083367	0.01346799
$10^3$	2.71 692393223589245738308812194757718896	0.00135789
$10^4$	2.718 14592682522486403766467491314653611	$1.35901633 \cdot 10^{-4}$
$10^5$	2.7182 6823717448966803506482442604644797	$1.35912845 \cdot 10^{-5}$
$10^6$	2.71828 046931937688381979970845435639275	$1.35913966 \cdot 10^{-6}$ ...
$10^{27}$	2.7182818284590452353602874 6999278868470	$1.35987381 \cdot 10^{-27}$
$10^{28}$	2.71828182845904523536028747 121158476369	$1.41077734 \cdot 10^{-28}$

### Eulerscher Beweis der Irrationalität von e

1737 gab Euler einen elementaren Beweis für die Irrationalität von e, basierend auf der unendlichen Reihe

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + \dots + 1/n! + \dots$$

Angenommen  $e = p/q$  wäre rational mit  $q > 1$ , dann ist die Zahl

$$q! (e - 1 - 1/1! - 1/2! - \dots - 1/q!) = q! (1/(q+1)! + 1/(q+2)! + \dots + 1/(q+n)! + \dots)$$

eine von Null verschiedene ganze Zahl. Andererseits ist aber

$$1/(q+1) + 1/((q+1)(q+2)) + \dots + 1/((q+1)\dots(q+n)) + \dots < 1/2 + 1/2^2 + \dots 1/2^n + \dots = 1$$

und so garantiert kleiner als 1. Dieser Widerspruch führt dazu, dass e irrational sein muss.

### Eulersche Zahl - Weitere Beziehungen

#### Stirlingsche Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n!)^{(1/n)} / n) = 1/e$$

#### Näherungsformeln für e (nach Castellanos 1988)

$$e \approx 2 + (54^2 + 41^2)/80^2$$

$$e \approx (\pi^4 + \pi^5)^{1/6}$$

$$e \approx 271801/99990$$

$$e \approx (150 - (87^3 + 12^5)/83^3)^{1/5}$$

$$e \approx 4 - (300^4 - 100^4 - 1291^2 + 9^2) / 91^5$$

$$e \approx (1097 - (55^5 + 311^3 - 11^3) / 68^5)^{1/7}$$

Genauigkeit 6 Ziffern

7 Ziffern

9 Ziffern

10 Ziffern

12 Ziffern

15 Ziffern

#### Besonderer Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^n n! / (n^n \sqrt[n]{n})) = \sqrt[2]{2\pi}$$

### Konstante Größen

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

$$e/2 = 1.35914091422952261768014373567633124887862354684997...$$

$$2e = 5.43656365691809047072057494270532499551449418739991...$$

$$e^2 = 7.38905609893065022723042746057500781318031557055184...$$

$$e^3 = 20.08553692318766774092852965458171789698790783855415...$$

$$1/e = 0.36787944117144232159552377016146086744581113103176...$$

$\sqrt{e} = 1.64872127070012814684865078781416357165377610071014...$   
 $1/\sqrt{e} = 0.60653065971263342360379953499118045344191813548718...$   
 $e^\pi = 23.14069263277926900572908636794854738026610624260021...$   
 $e^{-\pi} = 0.04321391826377224977441773717172801127572810981063...$   
 $e^{\pi/2} = 4.81047738096535165547303566670383312639017087466453...$   
 $e^{-\pi/2} = 0.20787957635076190854695561983497877003387784163176...$   
 $e^e = 15.15426224147926418976043027262991190552854853685613...$   
 $e^{-e} = 0.065988035845312537076790187596846424938577048252796$

### Mnemonics (engl.)

... die Länge jedes Wortes gibt die in e auftretende Ziffer an

"By omnibus I traveled to Brooklyn" (6 Ziffern)

"To disrupt a playroom is commonly a practice of children" (10 Ziffern)

"I'm forming a mnemonic to remember a function in analysis" (10 Ziffern)

"He repeats: I shouldn't be tipping, I shouldn't be tipping here" (11 Ziffern)

### Bezeichnung der Eulerschen Zahl

Im Laufe der Geschichte wurde die Eulersche Zahl  $e = 2,71828...$  von verschiedenen Mathematikern unterschiedlich bezeichnet. Explizit berechnet wurde sie erstmals 1618 von Edward Wright.

Jahr	Bezeichnung	Mathematiker, Werk ...
1690	b	Leibniz, Brief an Huygens
1691	b	Leibniz, Brief an Huygens
1703	a	A reviewer Acta eruditorum
1727/8	e	Euler, Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper instituta
1736	e	Euler, Mechanica sive motus scientia analytice exposita
1747	c	D'Alembert, Histoire de l'Académie
1747	e	Euler, verschiedene Artikel
1751	e	Euler, verschiedene Artikel
1760	e	Daniel Bernoulli, Histoire de l'Académie r. d. sciences
1763	e	J. A. Segner, Cursus mathematici
1764	c	D'Alembert, Histoire de l'Académie
1764	e	J. H. Lambert, Histoire de l'Académie
1771	e	Condorcet, Histoire de l'Académie
1774	e	Abbé Sauri, Cours de mathématiques
1775	e	J. A. Fas, Inleiding tot de Kennisse en het gebruyk der Oneindig Kleinen
1782	e	P. Frisi, Operum tomus primus
1787	c	Daniel Melandri, Nova Acta Helvetica physico-mathematica

Euler benannte die Konstante nicht mit "e" als Anspielung auf den ersten Buchstaben seines Namens, sondern als Abkürzung für "Einheit". Ursprünglich wurde e Napiers-Konstante genannt. Erst nach Eulers Tod setzte sich die neue Bezeichnung allmählich durch.

### Ziffern der Eulerschen Zahl

2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945  
 713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286  
 279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680  
 82264800168477411853742345442437107539077449920695517027618386062613313845830007520  
 449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368190255151086  
 574637721112523897844250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931277  
 361782154249992295763514822082698951936680331825288693984964651058209392398294887933  
 203625094431173012381970684161403970198376793206832823764648042953118023287825098194  
 558153017567173613320698112509961818815930416903515988885193458072738667385894228792  
 284998920868058257492796104841984443634632449684875602336248270419786232090021609902  
 353043699418491463140934317381436405462531520961836908887070167683964243781405927145  
 635490613031072085103837505101157477041718986106873969655212671546889570350354021234  
 078498193343210681701210056278802351930332247450158539047304199577770935036604169973  
 297250886876966403555707162268447162560798826517871341951246652010305921236677194325  
 278675398558944896970964097545918569563802363701621120477427228364896134225164450781  
 824423529486363721417402388934412479635743702637552944483379980161254922785092577825  
 620926226483262779333865664816277251640191059004916449982893150566047258027786318641  
 551956532442586982946959308019152987211725563475463964479101459040905862984967912874  
 068705048958586717479854667757573205681288459205413340539220001137863009455606881667  
 400169842055804033637953764520304024322566135278369511778838638744396625322498506549  
 958862342818997077332761717839280349465014345588970719425863987727547109629537415211  
 151368350627526023264847287039207643100595841166120545297030236472549296669381151373

227536450988890313602057248176585118063036442812314965507047510254465011727211555194  
866850800368532281831521960037356252794495158284188294787610852639813955990067376482  
922443752871846245780361929819713991475644882626039033814418232625150974827987779964  
373089970388867782271383605772978824125611907176639465070633045279546618550966661856  
647097113444740160704626215680717481877844371436988218559670959102596862002353718588  
748569652200050311734392073211390803293634479727355955277349071783793421637012050054  
513263835440001863239914907054797780566978533580489669062951194324730995876552368128  
590413832411607226029983305353708761389396391779574540161372236187893652605381558415  
871869255386061647798340254351284396129460352913325942794904337299085731580290958631  
382683291477116396337092400316894586360606458459251269946557248391865642097526850823  
075442545993769170419777800853627309417101634349076964237222943523661255725088147792  
231519747780605696725380171807763603462459278778465850656050780844211529697521890874  
019660906651803516501792504619501366585436632712549639908549144200014574760819302212  
066024330096412704894390397177195180699086998606636583232278709376502260149291011517  
177635944602023249300280401867723910288097866605651183260043688508817157238669842242  
20102495055188169480322100251542649463981283067658927688163598312477886520141174110  
913601164995076629077943646005851941998560162647907615321038727557126992518275687989  
302761761146162549356495903798045838182323368612016243736569846703785853305275833337  
939907521660692380533698879565137285593883499894707416181550125397064648171946708348  
197214488898790676503795903669672494992545279033729636162658976039498576741397359441  
023744329709355477982629614591442936451428617158587339746791897571211956187385783644  
75844842355581050025611492391518893099463428413936080383091662818811503715284967059  
741625628236092168075150177725387402564253470879089137291722828611515915683725241630  
772254406337875931059826760944203261924285317018781772960235413060672136046000389661  
093647095141417185777014180606443636815464440053316087783143174440811949422975599314  
01188868314937482706553833004693290115744147563139997221703804617092894579096271662  
260740718749975359212756084414737823303270330168237193648002173285734935947564334129  
943024850235732214597843282641421684878721673367010615094243456984401873312810107945  
127223737886126058165668053714396127888732527373890392890506865324138062796025930387  
727697783792868409325365880733988457218746021005311483351323850047827169376218004904  
795597959290591655470505777514308175112698985188408718564026035305583737832422924185  
625644255022672155980274012617971928047139600689163828665277009752767069777036439260  
224372841840883251848770472638440379530166905465937461619323840363893131364327137688  
841026811219891275223056256756254701725086349765367288605966752740868627407912856576  
996313789753034660616669804218267724560530660773899624218340859882071864682623215080  
288286359746839654358856685503773131296587975810501214916207656769950659715344763470  
32085321560367482860837865680307306265763346977429563464371670939719306876963495328  
846833613038829431040800296873869117066666146800015121143442256023874474325250769387  
077775193299942137277211258843608715834835626961661980572526612206797540621062080649  
882918454395301529982092503005498257043390553570168653120526495614857249257386206917  
403695213533732531666345466588597286659451136441370331393672118569553952108458407244  
323835586063106806964924851232632699514603596037297253198368423363904632136710116192  
821711150282801604488058802382031981493096369596735832742024988245684941273860566491  
352526706046234450549227581151709314921879592718001940968866986837037302200475314338  
181092708030017205935530520700706072233999463990571311587099635777359027196285061146  
514837526209565346713290025994397663114545902685898979115837093419370441155121920117  
164880566945938131183843765620627846310490346293950029458341164824114969758326011800  
731699437393506966295712410273239138741754923071862454543222039552735295240245903805  
744502892246886285336542213815722131163288112052146489805180092024719391710555390113  
94331668151582884368760696110250517100739276238553386272553538830960671644662370922  
646809671254061869502143176211668140097595281493907222601112681153108387317617323235  
26360583817315103459573653822354992935822836851007810884634349983518404451704270189  
381994243410090575376257767571118090088164183319201962623416288166521374717325477727  
783488774366518828752156685719506371936565390389449366421764003121527870222366463635  
755503565576948886549500270853923617105502131147413744106134445544192101336172996285  
694899193369184729478580729156088510396781959429833186480756083679551496636448965592  
948187851784038773326247051945050419847742014183947731202815886845707290544057510601  
285258056594703046836344592652552137008068752009593453607316226118728173928074623094  
685367823106097921599360019946237993434210687813497346959246469752506246958616909178  
573976595199392993995567542714654910456860702099012606818704984178079173924071945996  
323060254707901774527513186809982284730860766536866855516467702911336827563107223346  
726113705490795365834538637196235856312618387156774118738527722922594743373785695538  
456246801013905727871016512966636764451872465653730402443684140814488732957847348490  
003019477888020460324660842875351848364959195082888323206522128104190448047247949291  
342284951970022601310430062410717971502793433263407995960531446053230488528972917659  
876016667811937932372453857209607582277178483361613582612896226118129455927462767137  
794487586753657544861407611931125958512655759734573015333642630767985443385761715333



462325270572005303988289499034259566232975782488735029259166825894456894655992658454  
762694528780516501720674785417887982276806536650641910973434528878338621726156269582  
654478205672987756426325321594294418039943217000090542650763095588465895171709147607  
437136893319469090981904501290307099566226620303182649365733698419555776963787624918  
852865686607600566025605445711337286840205574416030837052312242587223438854123179481  
388550075689381124935386318635287083799845692619981794523364087429591180747453419551  
420351726184200845509170845682368200897739455842679214273477560879644279202708312150  
156406341341617166448069815483764491573900121217041547872591998943825364950514771379  
399147205219529079396137621107238494290616357604596231253506068537651423115349665683  
715116604220796394466621163255157729070978473156278277598788136491951257483328793771  
571459091064841642678309949723674420175862269402159407924480541255360431317992696739  
157542419296607312393763542139230617876753958711436104089409966089471418340698362993  
675362621545247298464213752891079884381306095552622720837518629837066787224430195793  
793786072107254277289071732854874374355781966511716618330881129120245204048682200072  
344035025448202834254187884653602591506445271657700044521097735585897622655484941621  
714989532383421600114062950718490427789258552743035221396835679018076406042138307308  
774460170842688272261177180842664333651780002171903449234264266292261456004337383868  
3355553434530042648...

### Eulersche Zahl und Zinsrechnung

Angenommen man verleihe einen Betrag G an einen Bekannten und erhebe einen (Wucher-)Zins von 100% je Jahr. Dann erhält man nach einem Jahr den Betrag von

$$G_1 = G + 100/100 G = 2 G$$

zurück.

Senkt man den Zinssatz auf "nur" 50 %, erhebt aber halbjährlich die Zinsen, d.h. 2 Zinsperioden, so wird der Gesamtbetrag  $G_2$  größer als  $G_1$ :

$$G_2 = G (1 + 50/100) (1 + 50/100) = G (1 + 1/2)^2 = 2,25 G$$

Wird der Zinssatz auf 33 1/3 % mit drei Zinsperioden verändert wird

$$G_3 = G (1 + 1/3)^3 = 2,370370... G$$

Als Frage ergibt sich nun, ob man bei weiterem Absenken der Zinssätze und dem gleichzeitigen Verkürzen der Verzinsungszeiten, jeder beliebiger Betrag erzielt werden kann.

Es zeigt sich, dass dies nicht der Fall ist. Allgemein ist  $G_n = G (1 + 1/n)^n$

Strebt n nun gegen Unendlich, so strebt der Wert  $(1 + 1/n)^n$  gegen die Eulersche Zahl e.

Für sehr viele Verzinsungsabschnitte wird  $G_n = G (1 + 1/n)^n \approx 2,718281828... G$

### Lichtabsorption und Eulersche Zahl

Gegeben sei eine nicht vollkommen lichtdurchlässige Platte mit parallelen Flächen. Fällt ein Bündel paralleler Lichtstrahlen der Intensität  $I_0$  senkrecht auf eine Fläche, so tritt auf der anderen Seite Licht der Intensität  $pI_0$  aus.

p ist von der Wellenlänge des Lichts abhängig, jedoch nicht von  $I_0$ . Die Lichtabsorption ist proportional zur Lichtintensität.

Ist die Platte hinreichend dünn, so ist die Absorption proportional zur Plattendicke d, d.h.  $p = \alpha d$ .  $\alpha$  ist ein materialabhängiger Absorptionskoeffizient. Betrachtet man eine Platte der Dicke x, so kann diese in x/d Schichten geteilt werden. Die Intensität ist nach dem Durchgang von n Schichten  $I = I_0 (1 - \alpha d)^n$

d.h. für die ganze Platte

$$I = I_0 (1 - \alpha d)^{x/d}$$

Das Ergebnis wird für eine zunehmende Anzahl von Schichten genauer, und somit

$$I = I_0 \lim_{d \rightarrow 0} (1 + \alpha d)^{-x/d}$$

und mit  $\alpha d = -\varepsilon$

$$I = I_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{-ax/\varepsilon} = I_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}]^{ax}$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}$  entspricht der Eulerschen Zahl e, so dass sich insgesamt ergibt  $I = I_0 e^{ax}$

### E-Code-Tabelle

In Analogie zum sogenannten PI-Code kann man auch die Dezimalzifferfolge von e im 26er-System darstellen. Auch hier kann man nach dem Auftreten bestimmter Buchstabenfolgen suchen, die ein deutsches Wort darstellen. Nachfolgend sind solche drei- bis fünfbuchstabigen Worte mit ihrem erstmaligen Auftreten aufgelistet (Stand: Juni 2006, St.Polster).

5buchstabile Wörter

WANGE (2268), ANGEL (2269), VALID (17889), ESSIG (21212), ARITE (27381), PUMPE (28866)

4buchstabile Wörter

INCH (2249), GELB (2271), ZAHM (2338), TAUB (2962), PILZ (3232), WURM (3894), LAUT (4883), HELM (6006), DUFT (7051), TREU (8419), GIFT (8627), IDEE (9625), TORR (9639), EDAM (10027), EHRE (10045), RUHE (10209), JUDE (10608), STAB (10740), BOOT (11137), NAME (11178), FIRM (11271), PARK (12152), BIER (12484), HEXE (12801), NEST (12833), NACH (14282), GENF (15245), BROT (15358), VIEL (15393), KLAR (16470), BYTE (18371), GELD (20017), ZEUG (20049), ROBE (22376), HEHR (23060), HERR (23181), PUFF (24296), TIEF (24777), ZINS (25646), LAMM (27438), GANZ

(27607), TRIO (29215), HOHL (30957), BAUM (31542), ECHT (31670), REIN (31736), WOLF (32251), KUBA (32413), VERB (33101), DIEB (33974), FEST (34406)

3buchstabile Wörter

HEU (382), ENG (507), HUF (693), JUX (785), ABT (855), TUN (983), JOD (1026), LKW (1029), EIS (1140), TAL (1176), NUN (1537), DER (1541), ERZ (1542), LOB (1641), TAG (1706), NUR (1714), ICH (1762), FIX (1771), TAT (1896), NOT (2345), GIN (2564), ALT (2730), OHM (2820), AUS (2915), TAU (2962), AXT (3022), IHR (3572), MIT (3583), TON (3710), TOD (3909), AKT (4223), TOR (4242), SEE (4424), AUF (4522), GUT (4809), WIR (4954), ROH (5676), EIN (5752), TOT (5783), HAI (5887), BAR (6026), PIK (6104), AUE (6280), IHN (6301), UND (6371), SIE (7136), BUG (7362), GAR (7682), EKG (7886), ZUG (8447), PIA (9015), BUS (9540), WAS (10176), WEG (10471), RUF (10773), ARG (10979), KGV (11247), ARM (11490), IST (11762), ACH (12078), ALS (12200), UHR (12574), AMT (12849), ODE (12935), WAL (13107), WEH (13270), GGT (13483), VOR (13612), WUT (13717), IHM (13766), FEE (14292), SEX (14322), AHN (14677), GON (15122), BEI (15305), ROT (15359), BIS (15397), OHR (15414), MAL (15793), ORT (16154), KOT (16185), TEE (17085), BIT (18247), UHU (18436), REH (18691), BAI (18923), MUT (19293), BOA (19450), MAI (19567), HOF (19777), DIE (20371), PRO (20988), ROM (20989), ZAR (22984), RAD (23266), EID (23379)

e im 26er-System des E-Codes

Die Ziffernfolge der Eulerschen Zahl im Positionssystem zur Basis 26 mit der zusätzlichen Kodierung 0 = A, 1 = B, ..., 25 = Z lautet:

SRONOMLBJZWCUWZWHGRTWGJXKEZSRLNYTLNRYPOXJGTMLTFFDPEENWKNGCRPRLLJMRMFEMERTNTKQ  
FPGFPTHRLWIPNZZKAHBJBHNGKYONJHIMVTGFVEPOQLYTMCHDKGWQMEVJMFZCJQOUQHTNTTLETMTN  
SZIAKVTKBKHYKGSZMJMSYEIVMNOHOOCZGFEMKNTYXKJAOVDVYMFSEXODSUTDMUCGZEOLTOWRANZLWI  
ZODBAXGLGFREUOLXXRIMPEUKHYTFGZTRGXQBMFSRXUJMLFNHSHXKCVXRQBIGWFKHJRTMBRFFDYDJPV  
FYVXNJRYTQRDLVDEEQAQRKRPORDVAJMVLLLVLEGLNGQPFCEWJVEAKKVVETZNMZTQPEWVQPEIOHEUVVLH  
BPAMQHBTRIFLTGVCMRSTADJXWOAKMDJXEADPTQZBHNJHWVCRRFRMBBCXAUNUXVTIUUXNUTRFBKG  
XXCAGMRXILKFRLSOFRRDQWNCWVYDEXVDWSDXIPOENGGPPBJQCEWDKSLMNNQYKLWKQZDMQZPXZT  
LEQROECUSKHNAKGBZSDGMUJOATAACOGIBMCOZNNJGGNSWTZMPAANDINFZJQZLZCMZLXPHHXOUC  
QODHOKBGXIJNPOONZOFGLSCEYRGRUQCDCPXDDPZXMLBLBOWGHZRMHTPLMFETIBSGTDJIDJLAKFHUF  
OUFXIMVPFDFGCTFIGGMWMIWCAUASJJOVZBHPWOLPZAWSWYNVCUUPGHLFICBLIULJUJZVWWCBSUBXG  
WGLGZEGLUYCJUXAVOSJRSTFRKCMGZGGWNZCBPQIHBQEHJAVPQRVTXDZDNMAQDAGBCLVRVSKRMAEV  
HOJSNABTPTOZVKAXWONQTKADDHOSOPYAICJESVVUVMXUFSJIZBPPVOYFQRVIXTVGSJYHLQUQZLWI  
NIQCWLFYHREKNSJVSIMQGGIWHLYEZZTJQGGSNWQVCDWEBLLDAVFTUNCDRJTTPUIMQTYBZESFVOL  
VQZPCZEJXQUNPTVNQAKJODLKWAOIAQWGYRVVQHXMCXFVIZZJTUOEKQCHBRDJAALCINKCTCQFW  
QGMJPHIQNNIFNPNAGGLYZRTSXYPRFOHFVZJCFYZXIWHDVRYUCRZIQPWEISPHJPRNGTQBUIZCXVRAHF  
DEYGOHKPYDTEYALRWGFYTRVWPSYMAADYRLSLZGXWAZLWKLUYCDMLXNCRMWEMWPTENIGURVZIYB  
MPPZNCRKWSKTLMPJTKNXWTPHXUPLBHURMSSJXFJPLHIEWXTRXNEDQCIZPMPKFYQJYSUWOZWOQRVP  
AAJEDIPDXHCLKQWOQGLGERLWVESZIMSFRBNMPDBKLZYCBKLVPPRBJQSNCEPYHBPFCGGPSQKNBTOPV  
RKSJXBOQTEUNXKBYQGWFSGEWRJDDXXSBSPWOMACCULMPIOXMRXPOWBWOEMZMKRCEIRMAHITQFYO  
KYEHIYPZSCSFRYRBNZVEUAAJZWEVIFQBOTOZXOMHLIUEGGUDUIGBWNJKYSCPCSCNOEQNUNWDERZWX  
SQZJMEGECLQDGNVDGUCHDRVXLZSXBEPWONUOZREXRMJZVQEPCRIIGCLJKVWFQUSGGIDZFQJIYRDQX  
WMYZPCVIVMUFQHYJYLOBAQHKLHDHNWOZXLZVECCVGVOCRCQDRTTJMLRNGPZPBLDOQWPDJJIYFQZNX  
WRNQKTAGFTURZNURETTKPLUBFXUFFXLZBAMVJWRSTKHHFJCNFCPAXLMAGJSHYICHYMWQJBFIXFUGILJC  
VKXAUYEMSWUHWPFANYCUMRNTNXUSXJCSLZWUPGNBEACMXXVQAQLRXWLXVGVBGDQMMXGVATXRLTH  
BNCDREXYRTFLRRDOLGM...

Eulersche Zahl im Dualsystem

die ersten Dezimalziffern von e als 2-adischen Bruch sind:

101101111110000101010001011000101000101011101101001010100110101010111111011100010101  
100010000000100111001111010011110011110001110110001011100111000101100000111100111000  
10110100110110100101011010100111100001001101100100000100010100011001000011001111110  
1111001100100100111001110111001110001001001001101100111110111100101111101001011111  
10001101100011011000110000110001110101110110001111011010000001101100100000010101011  
1011000100011000010111101011010011110111100011110110101011101010111111010110010101  
1000010010010000110011111010100011111010111110000110011011101101000010000101011000  
1101100101010101010011110111011010001101011110011101101010101011100010011010111001  
111111010101111100100101101011000100111100001100011100001110000011100110100010  
1101101111110001010100110100010011101101011110011111011111101000011100100001110111  
110001010110001010000100110110101011011110011100110101001100001010110011001010010011  
1101001000001110100111100101111010101111000000101011000110000010101100110010010011  
1101101100001110100010000100010101001010010111011001011001000111000111111011101110  
01011010101101101010110111011000001101011111101000110100000011101010011110100001010  
100011110111100011100101001101111101001010111001010110111011011110011101100011011...

In der Dualdarstellung von  $e$  findet man natürlich die verschiedensten Dualzahlen, zum Beispiel ab Position 3 die Ziffern 1101, d.h. die Zahl 13. Die letzte auftretende einstellige Zahl ist die 9 ab Position 48, die letzte zweistellige Zahl die 80 ab Stelle 389, die letzte dreistellige Zahl ist die 549 ab Position 8642; die letzte vierstellige Zahl ab der 159955. Position ist die 9537. Die zu 272213 gehörige Dualzahl findet man unter den ersten 5 Million Dualstellen von  $e$  nicht. Die Tabelle enthält die wachsenden Dualzahlen, die in in den Kommastellen der eulerschen Zahl an einer späteren Stelle auftreten. (Polster, Juni 2006)

n	Position	n	Position	n	Position	n	Position
1	1	3	3	4	11	9	48
19	55	25	101	35	122	36	213
67	236	73	260	75	315	80	389
129	391	135	730	145	1064	255	1525
269	1859	293	3523	515	4330	549	8642
1098	11670	1107	12652	2066	12711	2092	16482
2197	16880	2258	18369	2301	21377	2411	23982
2475	31099	2970	45560	4395	46617	4677	58514
5941	67716	7569	72567	8325	78970	8619	111318
9537	159955	15399	164181	16484	201188	16549	224116
17034	231213	21024	253623	21928	278964	23557	292070
29152	315756	32855	353423	32941	362033	33153	421741
33501	454318	33917	454582	34096	485593	35391	519137
35984	589101	36825	832910	66557	1008020	67015	1055265
72144	1272280	81491	1470696	100462	1584032	131326	2079307
131993	2520535	148200	2808843	162615	3285753	262355	4762734

$e^e =$

15.154262241479264189760430272629911905528548536856139769140746405914830973730934432  
608456968357873460511587268852852295841083492664266576491187794797041548104617616229  
388368454821943265188236980675811312322990354613338335185965954216525072048711316948  
412488370282981016309404957477919913724532172853873219106809779147336581876999676941  
747786490381633905056120497761253480544666296079402019529877275185530879677728180527  
535931123975906005188808804151764154263227653969369419281681418048811050162285713125  
125736860841705024753725516254728475141045799649334649258377732997799526746207088566  
625779404589544900951646188503245155543276102551379333718085468414791771323547050692  
212614636013851810485295066335920575541400093728813275661177976041869730169672487165  
342920993670102150408829...

$e^\pi =$

23.140692632779269005729086367948547380266106242600211993445046409524342350690452783  
516971997067549219675952704801087773144428044414693835844717445879609849365327965863  
669242230268991013741764684401410395183868477243068059588162449844491430966778413671  
631963414784038216511287637731470347353833162821294047891936224820221006032065443362  
736557271823744989618858059591684872645479013397834026595101499643792422968160799565  
381423536206957600770590460899883002254304871211791300849327379580729427301931042601  
691939325853203428968661895283290521711157185185506802254197204566370865568386830544  
799278170407497768540367556534957218867882563994384718224585889428535247260568210271  
076018491534518468064887386774439630514005169440540665265430968869063937315359837311  
042174433023967896690035...

$1/e =$

0.3678794411714423215955237701614608674458111310317678345078368016974614957448998033  
571472743459196437466273252768439952082469757927901290086266535894940987830921943673  
773381150486389911251456163449877199786844759579397473025498924954532393662079648105  
146475206122942230891649265666003650745772837055328537383881068047876119568298934544  
973507393185992166174330035699372082071022775180215849942337816907156676717623366082  
303761229156237572094700070405097334256775762525280303768861651570936537995427406370  
717878445419467490931306980560163702111389774228214017380232832465287291389004660986  
659512444097699851459164287803720202510224578732111059537776807437112206240005167965  
280975444780286486006838564200433684662484349386918262062518994821970992423425207510  
492093445285124486022451...

$e^2 =$

7,3890560989306502272304274605750078131803155705518473240871278225225737960790577633  
84312485079121794773753161265478866123884603692781273374478392213398077749001228956  
074107537023913309475506820865818202696478682084042209822552348754246254141467992812  
933188807076330101933789974072998696009530330751532081882368469479302991355877144568  
312392327276460258833999646121284928520967890513882466398712281372686106473562637929

518222784294843458613528769386698575200154996014807507197129336941885199722888263625  
 597194109586619147987150432839769326461023511631238999001051378340676449866389268561  
 582186421557724849201119353162117195173174726979682934519985054184863197135685947022  
 91255739835611051497936814502...

$e^{1/e} =$

1,4446678610097661336583391085964302230585954532422531658205226643038549377186145055  
 735829230470988511429523184485575419803227050644507431903824515434045323348299589354  
 600565058450155229216855356115763888979191269527071068690455441925402327632452829115  
 155531294480526395191779440816753200019244730489909867275405109516334654321860031956  
 702982909430158801267338033175228207912837451102704873260814978988983190463351143854  
 405447262816274799749460481270356697908366707436286857745469285242239557660491219676  
 478966504162461997038023839327097318593376749353786144331818222839808355940598080149  
 837715987730914221376657228893083038653373796085635927418524207501700955503473378672  
 633650172532071964633094039805...

$e^{\gamma} =$

1,7810724179901979852365041031071795491696452143034302053576658765128410768135882937  
 075742164884182803348222452251457420010557945742481965008815685751264500115845957267  
 403582819679429095069157844524441049506247494646739544224939206129736671899296118178  
 171652864420491963881484122168597921107933464249196247355882269791909670291501543354  
 860869336933705469455901623274352953259837257660570361859915224391778002468660663586  
 117287927837192311367757393941040997516402036473484352386382021226506642476962500214  
 726344491448434885642417897496467227286134738816299081339986376016509512259304703457  
 447559506188914485699239660739751621563426286549551373909258141962310785511202080191  
 8897490327624494653995917320023...

**e-Primzahl**

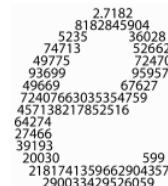
Unter einer e-Primzahl versteht man die von den Ziffern der Eulerschen Zahl e gebildeten natürlichen Zahlen, die Primzahl sind. Dabei wird stets mit der ersten Ziffer "2" begonnen.

Bekannt sind bis heute (Februar 2012):

2, 271, 2718281, 27182 81828 45904 52353 60287 47135 26624 97757 24709 36999 59574 96696  
 76277 24076 63035 35475 94571, ...

Die Zifferanzahl der bekannten e-Primzahlziffern sind 1, 3, 7, 85.

Die größte dieser Primzahlen wurde am 12.Mai 2003 durch Hisanori Mishima gefunden. Bis n = 250 gibt es keine weitere.



**Euler-Mascheroni-Konstante**

Die Euler-Mascheroni-Konstante ist eine wichtige Konstante der Analysis und Zahlentheorie.

Wert

$\gamma = 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992...$

$1/\gamma = 1,73245471460063347358302531586082968115577655226680...$

**Kettenbruchentwicklung**

$\gamma = [0, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 3, 13, 5, 1, 1, 8, 1, 2, 4, 1, 1, 40, ...]$

**Näherungsbrüche**

1, 1/2, 3/5, 4/7, 11/19, 15/26, 71/123, 228/395, 3035/5258, 15403/26685,  
 18438/31943, 33841/58628, 289166/500967, 323007/559595,  
 935180/1620157, 4063727/7040223, 4998907/8660380, ...

Es ist nicht bekannt, ob die Konstante irrational bzw. transzendent ist. U.a. gelten die links dargestellten Beziehungen.

$$\begin{aligned} \gamma &= -\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx \\ &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{1+x} - e^{-x} \right) dx \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{k} + \ln \left( \frac{k-1}{k} \right) \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \ln m \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} \\ &= \ln \left( \frac{4}{\pi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n+1)}{2^n (n+1)} \end{aligned}$$

1781 berechnete Euler 16 Stellen der Konstanten und benutzte das Symbol  $\gamma$ .  
 1790 ermittelte Mascheroni 32 Stellen, wobei nur die ersten 19 korrekt waren.  
 Der Fehler wurde 1809 von Johann von Soldner korrigiert.  
 1974 waren 7000 Ziffern, 1980 schon 20000 Stellen (R.P.Brent) bekannt.  
 Am 9.April 2007 veröffentlichte der 19jährige Alex J.Yee 116580041 berechnete  
 Dezimalstellen. In 38½ Stunden gelang ihm auf einem Laptop der gegenwärtige  
 Rekord (November 2007).

**Gamma-Primzahl**

Unter einer Gamma-Primzahl versteht man die von den Ziffern der Euler-Mascheroni-Konstanten  $\gamma$  gebildeten natürlichen Zahlen, die Primzahl sind.

Bekannt sind bis heute (Mai 2012): 5, 577,

5772156649015328606065120900824024310421, ...

Die Zifferanzahl der bekannten Gamma-Primzahlziffern sind 1, 3, 40, 185. Die nächste Gamma-Primzahl muss mehr als 250 Stellen besitzen.

### **Kettenbrüche Eulerscher Zahlen**

Durch J.L. Davison wurden 1978 in "An algorithm for the continued fraction of  $e^{1/m}$ " allgemeine Kettenbruchentwicklungen von Potenzen der Eulerschen Zahl  $e$  veröffentlicht.

Es gilt:  $e^{2/k} = [1, (k-1)/2 + 3\lambda, 6 + 12\lambda, (5k-1)/2 + 3\lambda, 1, \dots]$  für  $k > 1$

$= [7, 2 + 3\lambda, 1, 1, 3 + 4\lambda, 18 + 12\lambda, \dots]$  für  $k = 1$

$e^{1/k} = [1, (1 + 2\lambda)k - 1, 1, \dots]$  für  $k > 1$

$= [2, 1, 2 + 2\lambda, 1, \dots]$  für  $k = 1$

Dabei ist  $\lambda$  ein Parameter der ab 0 läuft.

## Kombinatorik

Zweig der Mathematik, der die verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung von Gegenständen und Zahlen untersucht. Sie ist Grundlage vieler Gebiete der Mathematik, insbesondere der beschreibenden Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Anordnungen oder Zusammenstellungen endlich vieler Elemente werden Komplexionen genannt. Dazu gehören die Permutationen, Variationen und Kombinationen.

### Fakultät, Fakultätsfunktion

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * (n-1) * n$$

Zusatzfestlegung

$$1! = 1 \text{ und } 0! = 1$$

n	Fakultät n!	n	Fakultät n!	n	Fakultät n!	n	Fakultät n!
1	1	2	2	3	6	4	24
5	120	6	720	7	5040	8	40320
9	362880	10	3628800	11	39916800	12	479001600
13	6227020800	14	87178291200	15	1307674368000	16	20922789888000

### Fakultätsbegriff n !

engl. Factorial, Übersetzung: Faktorielle

Für hinreichend große Fakultäten  $n!$  enden diese mit einer Vielzahl von Ziffern 0.

Für deren Anzahl  $Z$  wird:

$$Z = \text{Summe } [ n / 5^k ] \text{ von } k=1 \text{ bis } k = [ \ln n / \ln 5 ]$$

wobei  $[ ]$  den größten ganzzahligen Anteil des Terms darstellt.

Es gilt:  $n! = \Gamma(n+1)$ , wobei  $\Gamma(x)$  die Gaußsche Gammafunktion ist

Erweiterung des Fakultätsbegriffs  $n!$  auf reelle Zahlen  $x$  ( $x!$ ) und Einführung der Doppelfakultät  $x!!$  ergibt:

$$(-0,5)! = \sqrt{\pi}$$

$$(0,5)! = 1/2 \sqrt{\pi}$$

$$(n - 0,5)! = \sqrt{\pi}/2^n (2n - 1)!!$$

$$(n + 0,5)! = \sqrt{\pi}/2^{n+1} (2n + 1)!!$$

Reihenentwicklung

$$z! = \sqrt{(2\pi)} z^{(z+1)/2} e^{-z} (1 + 1/12 z^{-1} + 1/288 z^{-2} - 139/51840 z^{-3} + \dots)$$

$$\ln(z!) = 1/2 \ln(2\pi) + (z + 1/2) \ln z - z + 1/12 z^{-1} - 1/360 z^{-3} + 1/1260 z^{-5} - \dots$$

### Doppelfakultät

Verallgemeinerung der Fakultät  $n!$

$$n!! = n * (n-2) * \dots * 5 * 3 * 1; \text{ für ungerade } n$$

$$n!! = n * (n-2) * \dots * 6 * 4 * 2; \text{ für gerade } n$$

$$n!! = 1; \text{ für } n = -1 \text{ und } 0$$

Für  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  sind die ersten Werte

$$n!! = 1, 1, 2, 3, 8, 15, 48, 105, 384, \dots$$

Es gilt  $\Gamma(n + 1/2) = (2n - 1)!! / 2^n * \sqrt{\pi}$

$$(2n+1)!! = (2n+1)! / (2^n n!)$$

$$(2n)!! = 2^n n!$$

$$(2n-1)!! = (2n)! / (2^n n!)$$

$$n! = n!! (n-1)!!$$

Die Zahl  $n!!-1$  ist für folgende  $n$  Primzahl:  $n = 1, 3, 4, 6, 8, 16, 26, 64, 82, 90, 118, 194, 214, 728, 842, 888, 2328, 3326$  (5137 Ziffern), ... das nächste  $n$  ist größer als 4103 (Polster, Juni 2006)

Die Zahl  $n!!+1$  ist für folgende  $n$  Primzahl:  $n = 1, 2, 518, \dots$  das nächste  $n$  ist größer als 4103

### Mehrfachfakultät

Den Begriff der Doppelfakultät kann auch auf mehrfache Fakultäten erweitert werden, z.B.

$$n!!! = n * (n-3) * \dots * 7 * 4 * 1 \quad \text{für } n \equiv 1 \pmod{3}$$

$$n!!! = n * (n-3) * \dots * 8 * 5 * 2 \quad \text{für } n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$n!!! = n * (n-3) * \dots * 9 * 6 * 3 \quad \text{für } n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$n!!! = 1 \quad \text{für } n = -2, -1 \text{ und } 0$$

Analog definiert man auch Mehrfachfakultäten höherer Ordnung. Eine Liste der  $n$ , so dass diese Mehrfachfakultäten Primzahlen sind findet sich im Abschnitt *Multifaktorprimzahlen* unter *Primzahlen*.

### Partielle Fakultät

Die Idee der partiellen Fakultät (engl. falling factorial) ist, beginnend ab einem reellen oder komplexen Wert  $x$  für einen natürlichen Wert  $n$  das Produkt  $(x)_n = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-n+1)$  zu bilden. Mitunter wird  $(x)_n$  auch exakt übersetzt von einer fallenden Faktoriellen gesprochen.

Zum Beispiel ist  $(6)_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ .

Damit wird  $(n)_n = n!$  und  $(n)_{n+j} = 0$  für jedes positive, natürliche  $j$ .

Auch für nicht ganzzahlige  $x$  kann die partielle Fakultät berechnet werden, z.B.

$$(2\frac{1}{2})_3 = (2\frac{1}{2}) \cdot (1\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) = 15/8 \text{ oder}$$

$$(2\frac{1}{2})_4 = (2\frac{1}{2}) \cdot (1\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) = -15/16$$

$$(i+1)_3 = (i+1) \cdot i \cdot (i-1) = i \cdot (i^2-1) = -2i$$

Für die partielle Fakultät werden auch andere als die hier genannte Schreibweise genutzt.

In Analogie wird in der Fachliteratur  $(x)_n = x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot \dots \cdot (x+n-1)$  als steigende Faktorielle bezeichnet.

## Hyperfakultät

Unter der Hyperfakultät  $H(n)$  einer natürlichen Zahl  $n$  versteht man den Term

$$H(n) = \prod_{i=1}^n i! = 1^1 2^2 3^3 \dots n^n$$

Diese Zahl wächst auf Grund ihrer Definition sehr schnell. Die ersten Werte von  $H(n)$  für  $n = 1, 2, \dots$  sind  
1, 4, 108, 27648, 86400000, 4031078400000, 3319766398771200000,  
55696437941726556979200000, ...

Eine Verallgemeinerung stellt die K-Funktion  $K(n)$  dar, für die

$$K(n+1) = H(n)$$

gilt und die auf die komplexen Zahlen erweiterbar ist.

siehe dazu <http://mathworld.wolfram.com/K-Function.html>

## Alternierende Fakultät

Die alternierende Fakultät (engl. alternating factorial) ist definiert als Summe aufeinanderfolgender Fakultäten mit alternierenden Vorzeichen.  $a(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} k!$

Als rekursive Gleichung ergibt sich  $a(n) = n! - a(n-1)$

Die ersten Werte von  $a(n)$  für  $n = 1, 2, \dots$  sind

1, 1, 5, 19, 101, 619, 4421, 35899, 326981, 3301819, 36614981, 442386619, 5784634181,  
81393657019, 1226280710981, 19696509177019, 335990918918981, 6066382786809019,  
115578717622022981, 2317323290554617019, 48773618881154822981, ...

Die ersten Indizes  $n$ , für die  $a(n)$  Primzahl wird, sind

3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 19, 41, 59, 61, 105, 160, 661, 2653, 3069, 3943, 4053, 4998, 8275, 9158,  
11164, ...

Durch P. Jobling wurden 2004 bis  $n = 20331$  keine weiteren Primzahlen gefunden.

1999 bewies Živkovic, dass es nur endliche viele Primzahlen unter den alternierenden Fakultäten gibt.

## Permutation

Anzahl der Permutationen von  $n$  Elementen (Anzahl unterschiedlicher Reihenfolgen dieser Elemente)

$$\text{Anzahl} = n!$$

Permutationen sind damit Bijektionen einer endlichen Menge  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  auf sich. Die identische Permutation entspricht der identischen Abbildung. Unter einer Permutation ohne Wiederholung ist der hier definierte Begriff zu verstehen.

## Stirlingsche Näherungsformel

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

$n$	10	100	1000
$n!$	3628800	$9.33262154439 \cdot 10^{157}$	$4.02387260077 \cdot 10^{2567}$
Stirling-Wert	3598695.6	$9.32484762528 \cdot 10^{157}$	$4.02353729207 \cdot 10^{2567}$

## Inversion

Werden Elemente in einer bestimmten Anordnung permutiert, dann bilden zwei Elemente der Permutation eine Inversion, wenn die Reihenfolge gegenüber der ursprünglichen Reihenfolge umgekehrt ist.

gerade Permutation ... gerade Anzahl von Inversionen

ungerade Permutation ... ungerade Anzahl von Inversionen

Anzahl der möglichen geraden Permutationen = Anzahl der möglichen ungeraden Permutationen =  $n!/2$

## Permutation von k Elementen

Ist eine Menge  $M = \{1, 2, \dots, k\}$  von  $k$  Elementen gegeben, so lässt sich jede Permutation dieser

Elemente als zweizeilige Matrix schreiben:  $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_k \end{pmatrix}$

Dadurch wird es auch möglich, das Produkt zweier Permutationen als Nacheinanderausführung zweier Abbildungen zu definieren.

Dazu schreibt man beide Permutationen als Matrix und vertauscht die Spalten des zweiten Faktors so, dass die erste Zeile der zweiten Faktors mit der zweiten Zeile des ersten Faktors übereinstimmt. Die Matrix des Produktes besteht dann aus der ersten Zeile des ersten Faktors und der zweiten Zeile des zweiten Faktors:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_k \end{pmatrix}$$

Es gilt:

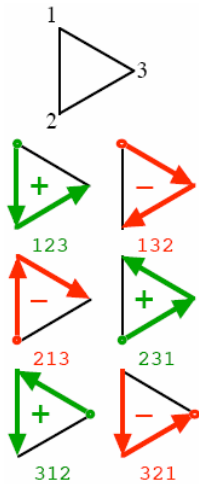
- 1) Zu je zwei Permutationen von  $k$  Elementen ist das Produkt eine eindeutig bestimmte Permutation.
- 2) Das Produkt ist eine assoziative, aber nicht kommutative, binäre Operation.
- 3) Die identische Permutation ist das neutrale Element des Produktes von Permutationen.
- 4) Zu jeder Permutation existiert eine inverse Permutation, die durch Vertauschung der zwei Zeilen entsteht.

Damit bilden alle Permutationen von  $k$  Elementen mit dem Produkt eine Gruppe der Ordnung  $k!$ , die Permutationsgruppe oder symmetrische Gruppe  $S_k$ .

Die Menge aller geraden Permutationen von  $\{1, \dots, k\}$  bildet eine Untergruppe von  $S_k$  von der Ordnung  $k!/2$ . Diese Untergruppe heißt alternierende Gruppe  $A_k$ .

### Permutation (2)

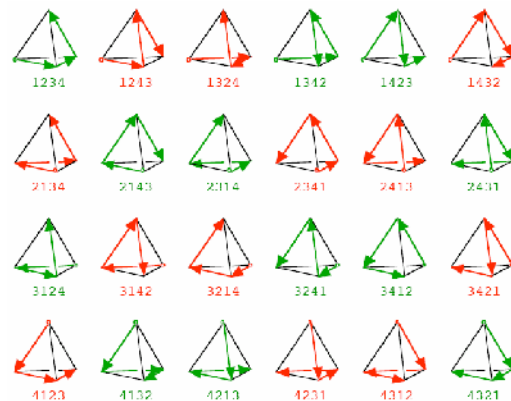
Für  $n = 3$  existieren  $3! = 6$  verschiedene Permutationen: 123 132 213 231 312 321  
 Diese lassen sich im Dreieck illustrieren. Man nummeriert die Dreiecksecken und zeichnet für jede Permutation einen Vektorzug (Abbildung).



Bei den geraden Permutationen (grün) haben die beiden aufeinander folgenden Vektoren einen Zwischenwinkel von  $2\pi/3$ , es geht im positiven Drehsinn herum; bei den ungeraden

Permutationen (rot) haben die beiden aufeinander folgenden Vektoren einen Zwischenwinkel von  $-2\pi/3$  und es geht im negativen Drehsinn herum. Alle grünen Vektorzüge lassen sich durch eine Drehung aufeinander abbilden, sie sind also gleich orientiert. Zwischen einem grünen und einem roten Vektorzug braucht es zusätzlich eine Geradenspiegelung.

Zur Kennzeichnung der 24 Permutationen von 4 Elementen kann man einen Tetraeder verwenden. Die entsprechenden Vektorzüge zeigt die nachfolgende Abbildung:  
 Abbildung: 24 Vektorzüge auf einem Tetraeder



### Permutationen mit Wiederholung

... Permutationen mit  $k$  Gruppen gleicher Elemente, Anzahl der Elemente je Gruppe  $p_i$

$$\text{Anzahl} = n! / (p_1! * p_2! * \dots * p_k!)$$

Beispiel: Wie viele verschiedene fünfstellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 3, 3, 5, 5 bilden?

$$P_{2,2}(5) = 5! / (2! 2!) = 30$$

Die bei Permutationen mit Wiederholung gebildeten Zahlen werden auch Multinomialzahlen genannt.

### Permutationen mit Fixpunkt

Ist  $P$  eine Permutation von  $n$  Elementen  $\{1, 2, \dots, i, \dots, n\}$ , so heißt jedes  $i$  aus dieser Menge Fixpunkt, wenn dieses Element innerhalb der Permutation an  $i$ .ter Stelle auftritt.

#### genau ein Fixpunkt:

$$P = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \binom{k}{i} i * (k - i)!$$

#### mindestens ein Fixpunkt:

$$P = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k - i)!$$

### k-Permutationen

Ordnet man die  $k$ -elementigen Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge in beliebiger Reihenfolge an, so ergeben sich die  $k$ -Permutationen dieser Menge.

Diese entsprechen den Variationen zur  $k$ -ten Klasse. Da es  $\binom{n}{k}$   $k$ -Teilmengen gibt, die je auf  $k!$  Arten angeordnet werden können, gibt es insgesamt  $\binom{n}{k} k! = n! / (n - k)!$   $k$ -Permutationen.

Einen Spezialfall der  $k$ -Permutationen stellen die Zeilen eines Primzahldreiecks dar.

Ein Dreieck, dessen Zeilen  $\{1, 2, \dots, n\}$  mit einer 1 beginnen und auf  $n$  enden, heißt Primzahldreieck, wenn die Summe benachbarter Zahlen stets eine Primzahl bildet. Dabei darf jede der Zahlen  $\{1, 2, \dots, n\}$  genau einmal in der Zeile auftreten, d.h., die Zahlen bilden eine Permutation.

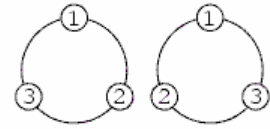
Im Lexikon finden Sie unter Primzahldreieck für  $n = 4, \dots, 14$  die Lösungen.

### k-Permutationen-Aufgabe

Gegeben ist eine Ausgangsmenge von nicht notwendig verschiedenen Ziffern, z.B.  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Gesucht sind alle natürlichen Zahlen  $a$  und  $b$ , die aus genau den gegebenen Ziffern bestehen und einen Quotienten  $q$  besitzen. Jede der gegebenen Ziffern muss dabei verwendet werden.



Ist  $q = 2$ , so findet man für  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  zum Beispiel die Zahlenpaare  
 (13485, 26970), (13548, 27096), ..., (48651, 97302), usw.  
 Für  $\{0,1,1,2,2,3,3,4,4,6\}$  und  $q = 3$  ergeben sich u.a. die Lösungen  
 (11342, 34026), (12134, 36402), ..., (20441, 61323)  
 Für die Mehrzahl der Eingaben ergeben sich allerdings keine Lösungen.

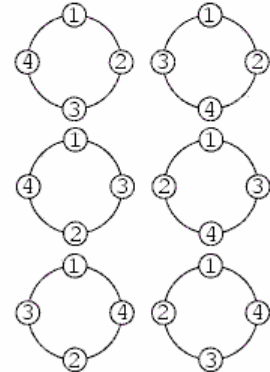


**Kreispermutation**

... oder zyklische Permutation  
 Auf wie viel verschiedene Arten der Reihenfolge können  $n$  Elemente auf einer Kreisperipherie angeordnet werden ?

**Lösung**

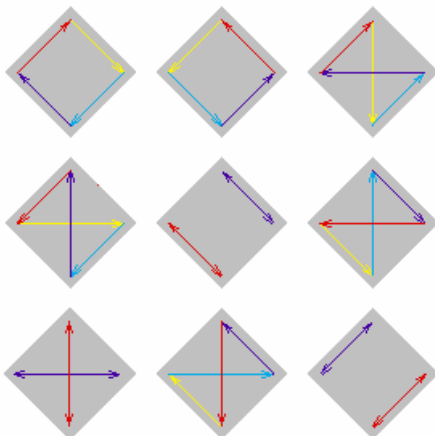
für 3 Elemente ... obere Abbildung  
 für 4 Elemente ... untere Abbildung  
 Allgemein gibt es  $P_n = (n-1)!$  Möglichkeiten  
 Bei Ausschluss der spiegelsymmetrischen Möglichkeiten reduziert sich die Anzahl der Lösungen auf  
 $P'_n = 1/2 * (n-1)!$   
 d.h. für  $n=3,4,5,6,\dots$  1, 3, 12, 60, 360, 2520, ...  
 Kreispermutationen



**Vollständige Permutationen**

Eine vollständige Permutation ist eine Permutation einer Menge, bei der kein Element auf seinem Ausgangsplatz verbleibt.  
 Die Anzahl  $D_n$  der vollständigen Permutationen von  $n$  Elementen ergibt sich zu  $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$   
 Explizite Darstellung  $D_n = n! (1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^n/n!)$   
 Im englischsprachigen Raum wird die Anzahl vollständiger Permutationen auch Subfactorial genannt und mit  $!n$  gekennzeichnet.

Für  $n = 3, 4, 5, \dots$  wird dann  
 $D_n = 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734, 7697064251745, 130850092279664, 2355301661033953, 44750731559645106, 895014631192902121, \dots$   
 In der Abbildung (nächste Seite) sind alle vollständigen Permutationen für 4 Elemente veranschaulicht.  
 Die Bestimmung der Anzahl fixpunktfreier Permutationen ist auch unter dem klassischen Namen "Problème des rencontres" bekannt.



**Subfactorial, Subfakultät**

Unter dem Begriff Subfactorial  $!n$ ; Subfakultät; versteht man die Anzahl vollständiger Permutation einer  $n$ -elementigen Menge, d.h. Permutationen, bei der kein Element auf seinem Ausgangsplatz verbleibt. Es gilt die explizite Darstellung

$$!n = n! (1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^n/n!)$$

Der Begriff wurde 1867 von Whitworth eingeführt; schon Euler berechnete 1809 die ersten 10 Terme.

Die ersten Werte von  $!n$  sind für  $n = 0, 1, 2, \dots$

1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734, 7697064251745, 130850092279664, 2355301661033953, 44750731559645106, 895014631192902121, 18795307255050944540, ...

Weiterhin ist:  $!n = n \cdot !(n-1) + (-1)^n = (n-1) (!(n-2) + !(n-1))$

$!n = [n! / e]$ , wobei  $[ ]$  die nächste ganze Zahl ist

$$!n = -1 \int_0^\infty x^n e^{-(x+1)} dx$$

Die einzige Subfakultätsprimzahl ist  $!3 = 2$ . Die einzige Zahl, die Summe der Subfakultäten ihrer Ziffern ist, ist

$$148349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9$$

**Problem der falschadressierten Briefe, Sekretärinnen-Problem**

Das Problem der falschadressierten Briefe besteht in der Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt,  $n$  Briefe in  $n$  Briefumschläge zu stecken, so dass kein einziger Brief im richtigen Umschlag ist.

Praktisch ist dies die Frage nach der Anzahl vollständiger Permutationen. siehe

Ist  $n$  die Anzahl der Briefe, so ergibt sich für die Anzahl der vollständigen fehlerhaften Adressierungen

$$A_n = n! (1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^n/n!)$$

Für  $n = 3, 4, 5, \dots$  ergeben sich als erste Lösungen 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961, 14684570, 176214841, 2290792932, 32071101049, 481066515734, 7697064251745, 130850092279664, 2355301661033953, 44750731559645106, 895014631192902121, ... Möglichkeiten. Mit wachsendem Wert von  $n$  nähert sich die Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass alle Briefe fehlerhaft adressiert sind

$$p = A_n / n! \approx e^{-1} = 0,367\ 879\ 441\ 171\ 442\ 321 \dots$$

### Variation

Jedes geordnete  $k$ -Tupel von voneinander verschiedenen Elementen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  ist eine Variation ohne Wiederholung  $V_k^n$  von  $n$  Elementen der Ordnung  $k$ .

Jede Variation ohne Wiederholung  $V_k^n$  ist eine eindeutige Abbildung von der geordneten Menge  $M = \{1, 2, \dots, k\}$  in die Menge  $M$ .

Aus der Definition folgt  $k \leq n$ . Für  $k = n$  erhält man die Permutationen von  $M$ . Die Auswahl von  $k$  Elementen aus  $n$  Elementen erfolgt mit Berücksichtigung der Anordnung.

#### Variation ohne Wiederholung

$$\text{Anzahl} = n! / (n-k)!$$

Jedes geordnete  $k$ -Tupel von Elementen einer  $n$ -elementigen Menge  $M$  heißt Variation mit Wiederholung von  $n$  Elementen der Ordnung  $k$ . Hier ist auch  $k > n$  möglich.

#### Variation mit Wiederholungen

$$\text{Anzahl} = n^k$$

Beispiel: Die Anzahl voneinander verschiedener; nicht unbedingt sinnvoller; Wörter mit drei Buchstaben eines Alphabets mit 26 Buchstaben beträgt:  $26^3 = 17576$ .

### Kombination

Eine Kombination ist eine Auswahl von  $k$  Elementen aus  $n$  Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung.

#### Kombination ohne Wiederholung

$$\text{Anzahl} = n! / ((n-k)! \cdot k!)$$

#### Kombination mit Wiederholungen

jede Kombination darf dasselbe Element mehrfach enthalten

$$\text{Anzahl} = (n+k-1)! / (k! \cdot (n-1)!)$$

jede Kombination darf von den  $n$  Elementen  $m$  vorgegebene enthalten

$$\text{Anzahl} = (n-m)! / ((k-m)! \cdot (n-k)!)$$

jede Kombination darf von den  $n$  Elementen  $m$  vorgegebene nicht enthalten

$$\text{Anzahl} = (n-m)! / (k! \cdot (n-m-k)!)$$

jede Kombination darf mindestens eines von den  $m$  vorgegebenen Elementen aus den  $n$  Elementen enthalten

$$\text{Anzahl} = n! / (k! \cdot (n-k)!) - (n-m)! / (k! \cdot (n-m-k)!)$$

### Kombinatorische Explosion

Ein verblüffendes Phänomen der Kombinatorik ist, dass sich oftmals wenige Objekte auf vielfältige Weise kombinieren lassen. Bei Rubiks Würfel können beispielsweise die 26 Elemente auf rund 43 Trillionen Arten kombiniert werden.

Dieses Phänomen wird als kombinatorische Explosion bezeichnet und ist zum Beispiel auch die Ursache für das sogenannte Geburtstagsparadoxon.

### Beispiele

Beispiel 1:  $n=56$ ;  $n! = 710\ 998\ 587\ 804\ 863\ 451\ 854\ 045\ 647\ 463\ 724\ 949\ 736\ 497\ 978\ 881\ 168\ 458\ 687\ 447\ 040\ 000\ 000\ 000\ 000$  bzw.  $n = 99999$ ;  $n! = 2.8241463805 \cdot 10^{456568}$  (eine Zahl mit 456569 Stellen !!)

Beispiel 2:  $n=56$ ,  $k=14$  ergibt für Variation ohne Wiederholung =  $5.0604661348 \cdot 10^{23}$ , ... mit Wiederholung  $2.9828566195 \cdot 10^{24}$

Beispiel 3:  $n=56$ ,  $k=14$  ergibt für Kombination ohne Wiederholung =  $5\ 804\ 731\ 963\ 800$ , mit Wiederholung  $1.5460300554 \cdot 10^{14}$

### Eiskugeln

Ein Eis-Café bietet 10 verschiedene Sorten Eis an. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Kugeln zu wählen, wenn auch mehrere Kugeln von einer Sorte sein können?

Lösung: Es liegt eine Kombination mit(!) Wiederholung vor, d.h. mit  $n = 10$  und  $k = 5$

$$(n+k-1)! / (k! \cdot (n-1)!) = (10+5-1)! / (5! \cdot 9!) = 14! / (5! \cdot 9!) = 2002 \text{ Möglichkeiten.}$$

### Würfel

$n=3$  maliges Würfeln mit Würfel mit  $k=6$  unterscheidbaren Flächen; entspricht Ziehung von  $n=3$  Kugeln mit Zurücklegen bei  $k=6$  unterscheidbaren Kugeln. Reihenfolge soll keine Rolle spielen.

Zahl der Möglichkeiten (nicht gleich wahrscheinlich)

$$N_k^{(n)} = (k+n-1)! / (n! \cdot (k-1)!) \text{ (Kombinationen mit Wiederholung)} = (6+3-1)! / (3! \cdot (6-1)!) = 8! / (3! \cdot 5!) = 56$$

6 Möglichkeiten mit 3 gleichen Flächen Häufigkeit = 1

30 Möglichkeiten mit 2 gleichen Flächen Häufigkeit = 3

20 Möglichkeiten mit verschiedenen Flächen Häufigkeit =  $6 \rightarrow 6 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 216$

Weitere Beispiele:  $N_6^{(1)}=6$ ;  $N_6^{(2)}=21$ ;  $N_6^{(3)}=56$ ;  $N_6^{(4)}=126$ ;  $N_6^{(5)}=252$ ;  $N_6^{(6)}=462$ ;  $N_6^{(7)}=792$ ;  $N_6^{(8)}=1287$ ;  $N_6^{(9)}=2002$ ;  $N_6^{(10)}=3003$ ;  $N_6^{(11)}=4368$

**Lotto 6 aus 49**

Ziehung von n=6 Kugeln (ohne Zurücklegen) bei k=49 unterscheidbaren Kugeln. Reihenfolge soll keine Rolle spielen, d.h. Lotto 6 aus 49

Zahl der Möglichkeiten (alle gleich wahrscheinlich):  $N = k! / (n!(k-n)!) = \binom{k}{n}$  (Kombinationen ohne Wiederholung)

=  $49! / (6! \cdot 43!) = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot 44 / (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1) = 13983816$

Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer bestimmten dieser Kombinationen:  $P = 1/N = 1/13983816$

**Blindenschrift**

Die Blindenschrift besteht aus 6 Punkten, welche erhaben oder gelocht in Papier gedruckt werden. Mit den 2 variierenden Elementen "Buckel" oder "Loch" zur 6.Klasse mit Wiederholungen können auf diese Weise  $2^6 = 64$  verschiedene Zeichen dargestellt werden.



**Skatspiel**

Eine Skatkarte enthält 32 Karten, die zu Gruppen von 3 mal 10 Karten und 2 Karten für den "Skat" ausgegeben werden. Da es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge ein Spieler seine Karten erhält (die Permutationen innerhalb der 10 Karten eines Spielers bedeuten dasselbe Spiel), ist die Anzahl aller möglichen Kartenverteilungen beim Skat eine Permutation von 32 Karten mit 10, 10, 10 und 2 gleichen Elementen. Damit existieren  $2.7532944082 \cdot 10^{15}$  Kartenverteilungen. Schafft ein Spieler täglich 200 Spiele, so kann er in 100 Jahren jedoch nur 7,3 Millionen Möglichkeiten spielen.

**Sitzordnung**

Fünf Personen nehmen an einem Tisch Platz, ohne die aufgestellten Tischkarten zu beachten. Insgesamt gibt es  $5! = 120$  verschiedene Sitzanordnungen, darunter 76 mit mindestens einem Fixpunkt, d.h. mindestens eine Person sitzt auf dem richtigen Platz, sowie 45 mit genau einem Fixpunkt, d.h. genau eine Person sitzt richtig.

**Grundfrage der klassischen Statistik**

Auf wieviel verschiedenen Arten kann man n nummerierte Teilchen so in g Zeilen legen, dass in der i-ten Zeile gerade  $n_i$  Teilchen liegen? Die Anordnung der Teilchen innerhalb jeder Zeile sei beliebig.

Lösung: Alle Anordnungen, die bei festgehaltenen Teilchenzahlen  $n_i$  möglich sind, ergeben sich durch Permutationen der n Teilchen. Vertauschungen innerhalb einer Zeile ergeben keine neue Anordnung, d.h.

Anzahl =  $n! / (n_1! n_2! \dots n_g!)$   
mit  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_g$

**Grundfrage der Fermi-Statistik**

Auf wieviel Arten kann man n nicht unterscheidbare Teilchen auf g fest angeordnete Zellen verteilen, wenn jede Zelle höchstens höchstens ein Teilchen aufnehmen kann? Dabei ist  $n < g-1$ .

Lösung: Von g gegebenen Zellen erhalten n ein Teilchen, d.h. Anzahl =  $\binom{g}{n}$

**Grundfrage der Bose-Einstein-Statistik**

Auf wieviel Arten kann man n nicht unterscheidbare Teilchen auf g fest angeordnete Zellen verteilen, wenn jede Zelle beliebig viele Teilchen aufnehmen kann?

Lösung: Anzahl =  $(g + n - 1)! / (n! (g-1)!)$



Ein Wandgemälde in der Wismarer Heiligen-Geist-Kirche zeigt in der Mitte den Buchstaben "D" und links unten ein "S". Bewegt man sich nach links bzw. unten, ergibt sich immer der Text "DEOGRACIAS" (deutsch: "Gott sei Dank").

Insgesamt geht man neun Schritte, davon muss man fünfmal einen Schritt nach rechts und viermal einen nach unten gehen, d.h.  $\binom{9}{5} = 126$  Möglichkeiten.

Nach links oben, rechts unten oder rechts oben kann ebenfalls das Wort gebildet werden. Damit ergeben sich insgesamt 504 verschiedene Wege.

**Kombinatorisches Wortproblem**

Aus k Buchstaben kann man genau  $k^n$

verschiedene Wörter der Länge n bilden.

Bezeichnet man zwei Wörter genau dann als äquivalent, wenn sie sich nur um eine Permutation der Buchstaben unterscheiden, dann ist die Anzahl der Klassen äquivalenter Wörter gleich

$\binom{n+k-1}{n}$  ... modifiziertes Wortproblem

Beispiel: Aus den beiden Zeichen 0 und 1 kann man  $2^2 = 4$  Wörter der Länge 2 bilden: 00, 01, 10, 11. Die Anzahl A der Klassen äquivalenter Wörter ist mit  $n = k = 2$ , also  $A = \binom{3}{2} = 3$ , z.B.: 00, 01, 11.

Wörter der Länge 3 gibt es  $2^3 = 8$ : 000, 100, 001, 101, 010, 110, 011, 111.  
 Die Anzahl der Klassen äquivalenter Wörter ist  $A = \binom{4}{3} = 4$ . Mögliche Repräsentanten sind 000, 001, 011, 111.

**Hintereinanderausführung von Permutationen**  
 $\pi_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$   $\pi_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$  Die Hintereinanderausführung von Permutationen wird auch als Multiplikation bezeichnet. Allerdings ist zu beachten, dass das Produkt von rechts nach links gebildet wird, da die Permutationen Abbildungen sind. In der Abbildung sind alle Permutationen von drei Elementen zu sehen. Dort ist  
 $\pi_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$   $\pi_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$   
 $\pi_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$   $\pi_6 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$   
 $\pi_2 \cdot \pi_5 = \pi_4$   
 $\pi_5 \cdot \pi_2 = \pi_6$   
 Die Multiplikation von Permutationen ist im Allgemeinen nicht kommutativ:

**Bahn einer Permutation, Zyklus einer Permutation**

Sei  $\pi$  eine Permutation. Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  heißt  $\{i, \pi(i), \pi^2(i), \dots\}$  die Bahn oder der Zyklus von  $\pi$ .  
 Beispiel: Die Permutation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  liefert die Bahn  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$   
 Je zwei Bahnen sind entweder disjunkt oder gleich.

**Zyklenschreibweise einer Permutation**

Eine Permutation  $\pi$  können wir daher als Menge von Zyklen schreiben. Damit die Darstellung eindeutig wird, werden die Bahnelemente in ihrer Reihenfolge geschrieben.

Beispiel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3 \ 5 \ 2)$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (1 \ 3)(2 \ 5 \ 6 \ 7)(4)$$

Zyklen der Länge 1 können auch weggelassen werden:  $(1 \ 3)(2 \ 5 \ 6 \ 7)(4) = (1 \ 3)(2 \ 5 \ 6 \ 7)$ . Damit bei der identischen Permutation nicht alle Zyklen wegfallen, schreibt man (1).

Jede Permutation lässt sich als Produkt von elementfremden Zyklen darstellen.

Für die Anzahl  $A(k, s)$  der Permutationen  $\pi$  von  $k$  Elementen, die eine Darstellung als Produkt von genau  $s$  Zyklen besitzen, gilt die Rekursionsformel:  $A(k, k) = 1$

$$A(k, 1) = (k-1)! \text{ für } k \geq 1$$

$$A(k, s) = A(k-1, s-1) + (k-1) A(k-1, s) \text{ für } k > s \geq 2$$

Beispiel: Es gibt  $A(3, 3) = 1$  Permutationen der  $S_3$  mit 3 Zyklen;  $A(3, 1) = 2$  Permutationen mit einem Zyklus und  $A(3, 2) = A(2, 1) + 2 A(2, 2) = 3$  Permutationen mit 2 Zyklen.

**Transposition einer Permutation**

Eine Vertauschung von zwei Elementen in einer Permutation von  $n$  Elementen heißt Transposition. Jede Permutation von  $n$  Elementen kann in eine andere Permutation dieser Elemente mit endlich vielen Transpositionen umgewandelt werden.

Eine Transposition ist ein Zyklus der Länge 2, wie z.B. (24).

Die Transpositionen sind für die Permutationen das, was die Primzahlen für die natürlichen Zahlen sind, denn es gilt:

Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen darstellen.

Im Gegensatz zur Primzahlzerlegung ist die Zerlegung einer Permutation in ein Produkt von Transpositionen nicht eindeutig. Jedes solches Produkt kann durch Multiplikation mit einem Transpositionspaar der Form  $(\pi_k \pi_i)(\pi_i \pi_k)$  in ein weiteres Produkt überführt werden.

Das Signum (sgn) ist eine Vorzeichenfunktion für Permutationen, vergleichbar dem Vorzeichen von reellen Zahlen. Die Anzahl der Transpositionen, in der eine Permutation zerlegt wird, ist trotz der Mehrdeutigkeit dieser Produkte für eine feste Permutation immer gerade oder ungerade.

Man definiert das Signum oder Vorzeichen einer Permutation  $\pi$  als + 1, wenn sich  $\pi$  als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen lässt und -1, wenn die Anzahl der Faktoren ungerade ist. Nach Anzahl der Faktoren heißen die Permutationen auch gerade bzw. ungerade Permutationen.

Beispiel: Für  $\pi = (1423)$  wird  $\text{sgn } \pi = -1$ , da  $(1234) = (14)(13)(12)$ .

Für zwei Permutationen  $\pi$  und  $\sigma$  gilt:  $\text{sgn}(\pi\sigma) = \text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \sigma$   
 Für eine Permutation  $\pi$  einer  $n$ -elementigen Menge gilt:  $\text{sgn } \pi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\pi(i) - \pi(j)) / (i - j)$

## Euler-Zahlen (Kombinatorik)

Die nach Leonhard Euler benannte Euler-Zahl  $A_{n,k}$  in der Kombinatorik, auch geschrieben als  $E(n,k)$  oder  $\langle^n_k \rangle$ , gibt die Anzahl der Permutationen von  $1, \dots, n$  an, in denen genau  $k$  Elemente größer als das vorhergehende sind, die also genau  $k$  Anstiege enthalten.

Nach einer zweiten Definition sind die Euler-Zahlen  $a(n,k)$  die Anzahlen der Permutationen von  $1, \dots, n$  mit genau  $k$  maximalen monoton ansteigenden Abschnitten, wodurch der zweite Parameter gegenüber der hier verwendeten Definition um eins verschoben ist:  $a(n,k) = A_{n,k-1}$ .

Wie die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck können die Euler-Zahlen im Euler-Dreieck angeordnet werden (erste Zeile  $n = 1$ , erste Spalte  $k = 0$ ):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 4 & 1 & \\
 & & 1 & 11 & 11 & 1 & \\
 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & \\
 1 & 57 & 302 & 302 & 57 & 1 & \\
 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \dots
 \end{array}$$

Mit der folgenden Rekursionsformel kann jeder Eintrag aus den beiden darüberstehenden berechnet werden

$$A_{n,k} = (n-k) A_{n-1,k-1} + (k+1) A_{n-1,k}$$

für  $n > 0$  mit  $A_{0,0} = 1$  und  $A_{0,k} = 0$  für  $k > 0$ .

Für die Euler-Zahlen mit  $A_{n,k} = (n-k) A_{n-1,k-1} + (k+1) A_{n-1,k}$  für  $n > 0$  mit  $A_{0,0} = 1$  und  $A_{0,k} = 0$  für  $k > 0$  ergeben sich aus der Definition

$$A_{n,0} = 1 \text{ für } n \geq 0 \quad A_{n,n-1-k} = A_{n,k} \text{ für } n > 0, k \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^n A_{n,k} = n! \text{ für } n \geq 0$$

Aus den Binomialkoeffizienten können die Euler-Zahlen mit der Formel

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+1}{k-i} (k+1-i)^n$$

für  $n, k \geq 0$  berechnet werden. Insbesondere sind

$$A_{n,1} = 2^n - (n+1) \quad A_{n,2} = 3^n - 2^n(n+1) + n/2(n+1)$$

Es gilt die Worpitzky-Identität; nach Julius Worpitzky;

$$\sum_{k=0}^n A_{n,k} \binom{n+k}{n} = x^n$$

für  $n \geq 0$ , wobei  $x$  eine Variable und  $\binom{x+k}{n}$  ein verallgemeinerter Binomialkoeffizient ist.

Eine Beziehung zu den Bernoulli-Zahlen  $\beta_m$  wird durch die alternierende Summe

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A_{m-1,k} = (-2)^m (2^m - 1) \beta_m / m$$

für  $m > 0$  hergestellt.

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{1(p-1)} \\
 b &= \frac{p+1}{1 \cdot 2(p-1)^2} \\
 c &= \frac{pp+4p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3(p-1)^3} \\
 d &= \frac{p^3+11p^2+11p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(p-1)^4} \\
 e &= \frac{p^4+26p^3+66p^2+26p+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(p-1)^5}
 \end{aligned}$$

## Schulmädchen-Problem von Kirkman

Son	Mon	Die	Mit	Don	Fre	Sam
ABC	ADE	AFG	AHI	AJK	ALM	ANO
DHL	BIK	BHJ	BEG	BDF	BEF	BDG
EJN	CMO	CLN	CMN	CLO	CIJ	CHK
FIO	FHN	DIM	DJO	EHM	DKN	EIL
GKM	GJL	EKO	FKL	GIN	GHO	FJM

Aufgabe: 15 Schülerinnen gehen täglich den Weg zur Schule (auch Sonntags!) in Gruppen von jeweils 3 Mädchen.

Gibt es eine Möglichkeit, dass jedes Mädchen genau einmal in einer Woche mit jeder anderen Schülerin den Weg absolviert?

Eine Lösung, von genau sieben bis auf Permutation der Buchstaben verschiedenen Lösungen, siehe Tabelle. Dieses Problem ist äquivalent zur Konstruktion eines Kirkman Triple-Systems der Ordnung 2.

Thomas Penyngton Kirkman (1850):

"Fifteen young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession: it is required to arrange them daily, so that no two shall walk twice abreast."

"Fünfzehn Schulmädchen spazieren sieben Tage hintereinander in Dreiergruppen, man teile sie täglich so ein, dass keine zwei Schulmädchen zweimal zusammen spazieren."

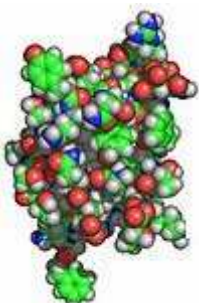
Die Verallgemeinerung fragt nach  $n$  Mädchen (für eine Lösung muss  $n$  durch 3 teilbar sein), die für  $(n-1)/2$  Tage jeweils zu dritt zur Schule gehen. Die Lösungen für  $n = 9, 15$  und  $27$  wurden 1850 gefunden; eine allgemeine Lösung existiert noch nicht.

## Kombinatorik-Beispiele

### Insulin-Struktur

Das Insulin-Molekül besteht aus zwei Peptidketten, der A-Kette mit 21 und der B-Kette mit 30 Aminosäuren, welche durch zwei Disulfidbrücken verbunden sind.

Die B-Kette besteht aus den Aminosäuren: 3 mal Glyzin, 1 Alanin, 3 Valin, 4 Leuzin, 1 Serin, 2 Threonin, 1 Asparginsäure, 2 Glutaminsäure, 1 Glutamin, 1 Lysin, 1 Arginin, 2



Cystein, 3 Phenylalanin, 2 Tyrosin, 2 Histidin und 1 Prolin.

Allein für diese Aminosäuren existieren dann

$$30! / (3! 1! 3! 4! 1! 2! 1! 2! 1! 1! 1! 1! 2! 3! 2! 1!) = 1,598988 \cdot 10^{27}$$

verschiedene Permutationen. Und genau eine ist Insulin.

### Llanfairpwllgwyngyllgogerychwyrndrobwll-llantysiliogogoch

In Süden der Insel Anglesey im Nordwesten von Wales gibt es einen Ort mit dem oben genannten Namen. Mit 58 Buchstaben hat das Dorf den längsten Ortsnamen Europas. Übersetzt bedeutet dies in etwa

"Marienkirche in einer Mulde weißer Haseln in der Nähe eines schnellen Wirbels und in der Gegend der Thysiliokirche, die bei einer roten Höhle liegt".

Für die 58 Buchstaben gibt es auf Grund der Mehrfachheit  $58! / (2! 2! 3! 3! 4! 4! 4! 5! 6! 7! 11!) = 6,793215 \cdot 10^{55}$

Möglichkeiten der Anordnung.

Testet ein Computer je Sekunde 1 Billion Möglichkeiten, so würde er für alle über  $10^{36}$  Jahre benötigen.

### Golf-Kurse

Ein Golf-Kurs besteht im Normalfall aus 18 "Löchern", für die 3, 4 oder 5 Schläge als Vorgabe geplant sind. Insgesamt werden für den ganzen Kurs 72 Schläge veranschlagt. Erreicht man dies wird von "Par" gesprochen.

Allerdings ist die Reihenfolge und die Anzahl der 3-Par, 4-Par und 5-Par Löcher nicht vorgegeben. Damit ergeben sich sehr viele unterschiedliche Möglichkeiten.

### Bowling

Bowling ist eine Ende des 19. Jahrhunderts in den USA Staaten entstandene Variante des Kegelns. Dabei wird ein mit Bohrungen für die Finger versehener Ball auf zehn Pins genannte Kegel geworfen.

Ein Spiel besteht aus zehn Durchgängen (Frames). Ziel ist es, in jedem Frame alle zehn Pins umzuwerfen. Dazu hat ein Spieler je Frame maximal zwei Würfe.

Räumt ein Spieler beim ersten Wurf alle zehn Pins ab, nennt man dies Strike. Werden alle Pins erst mit Hilfe des zweiten Wurfes in einem Frame abgeräumt, so ist das ein Spare.

Für die Punkte werden pro Frame die umgeworfenen Pins gezählt. Bei einem Spare werden zusätzlich zu den 10 Punkten auch die Punkte des nächsten Wurfs gezählt. Beim Strike werden sogar die nächsten zwei Würfe mitgezählt.

Wird im letzten Frame des Spiels ein Spare erzielt, darf noch ein dritter Ball geworfen werden, um das Ergebnis zu ermitteln. Wird ein Strike geworfen, folgen noch zwei Extrawürfe. Das höchste zu erreichende Ergebnis ist damit 300 Pins.

Durch die komplizierte Regel im 10. Frame gibt es insgesamt

$$11^9 \cdot 6^9 \cdot (55 + 10 \cdot 11 + 65 + 11) = 5726805883325784576$$

mögliche Spielverläufe im Bowling.

### Anzahl verschiedener n-Tupel

Die Tabelle enthält die Anzahl verschiedener, nicht geordneter, Paare, Tripel und Quadrupel natürlicher Zahlen mit  $p > q > r > s > 0$ .

Tupel	Anzahl	Tupel	Anzahl	Tupel	Anzahl
(p,0)	2	(p,q)	2	(±p,0)	4
(±p,±p)	4	(±p,±q)	8	(p,0,0)	3
(p,p,0)	3	(p,q,0)	6	(p,p,q)	3
(p,q,r)	6	(±p,0,0)	6	(±p,±p,0) 12	
(±p,±q,0)	24	(±p,±p,±p)	8	(±p,±p,±q)	24
(±p,±q,±r)	48	(p,0,0,0)	4	(p,p,0,0)	6
(p,q,0,0)	12	(p,p,p,0)	4	(p,p,q,0)	12
(p,q,r,0)	24	(p,p,p,q)	4	(p,p,q,q)	6
(p,p,q,r)	12	(p,q,r,s)	24	(±p,0,0,0) 8	
(±p,±p,0,0)	24	(±p,±q,0,0)	48	(±p,±p,±p,0)	32
(±p,±p,±q,0)	96	(±p,±q,±r,0)	192	(±p,±p,±p,±p)	16
(±p,±p,±p,±q)	64	(±p,±p,±q,±q)	96	(±p,±p,±q,±r)	192
(±p,±q,±r,±s)	384				

## Genetischer Code

Proteine und Nucleinsäuren sind die Grundlage der Vererbung. Nachdem der prinzipielle Ablauf der Eiweißsynthese entdeckt wurde, ergab sich ein Problem, dass als Problem des genetischen Codes bezeichnet wurde. Proteine sind aus 20 verschiedenen Aminosäuren aufgebaut, die in wechselnder Häufigkeit und Reihenfolge miteinander kettenförmig verbunden sind. Demgegenüber sind aber am Aufbau der Nucleinsäuren nur vier Nucleotidsorten beteiligt.

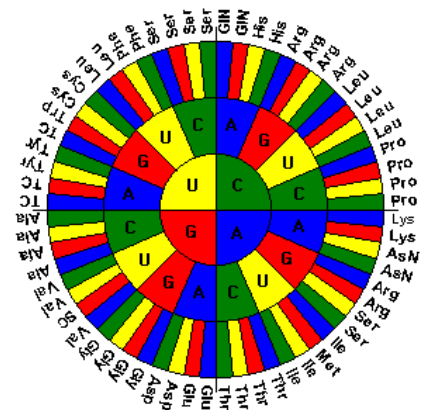
Die Zuordnung beider Makromolekülsorten kann also nicht eindeutig erfolgen, da dann nur vier Aminosäuren in der DNA (Desoxyribonucleinsäure bzw. -acid) codiert werden könnten. Vielmehr ist ein sogenanntes "Codon" zur Verschlüsselung nötig, eine Folge von verschiedenen Nucleotidsorten. Da eine Zweiergruppe nur 16 Aminosorten beschreiben könnte, sind für die 20 tatsächlich vorkommenden Dreiergruppen notwendig. Ein Codon besteht damit aus drei aufeinanderfolgenden Nucleinsäuren, welche 64 verschiedene Säuren codieren könnten.

In den Jahren 1961 bis 1966 befanden sich weltweit mehrere Laboratorien im Wettstreit, diesen genetischen Code zu entschlüsseln. 1968 erhielten Nirenberg, Holley, und Khorona den Nobelpreis. Das Ergebnis dieser jahrelangen Suche ist eine Tabelle, in welcher für jede mögliche Folge der Nucleinsäuren die entsprechende Aminosäure zugeordnet wird.

Durch die Kodierung mit jeweils 3 Nucleinsäuren könnten 64 verschiedene Aminosäuren bestimmt werden. Da aber nur für 20 die Notwendigkeit besteht, ergeben verschiedene Codons teilweise gleiche Aminosäuren. Zum Beispiel erhält man für die Folgen GGA, GGU, GGG, GGC jeweils Glyzin, für AGA, AGG, CGA, CGC, CGG und CGU Arginin.

Aus welchem Grund z.B. für Arginin 5 verschiedene Codons existieren, für Methionin jedoch z.B. nur ein Codon (AUG) ist eine offene Frage der Genetik. Welche Codons zu welcher Aminosäure führen, kann man an der „Genetischen Code-Sonne“ ablesen.

Faszinierend ist, wenn man sich einmal veranschaulicht, welcher Informationsgehalt durch diese "einfache" Anordnung der Nucleinsäuren erreicht werden kann. Eine einfache Amöbe enthält in ihrer DNS Informationen von rund 400 Millionen Bits, d.h. Informationen, welche achtzig 500seitige Bände füllen würden. Für einen Menschen braucht die DNA 5 Milliarden Bits, was einer tausendbändigen Bibliothek entspricht. Und diese Informationsmenge ist in jedem Zellkern einer menschlichen Zelle gespeichert !



Genetische Code-Sonne

## Binomialkoeffizient

**Definition**  $\binom{n}{k} = n! / (k! * (n - k)!) = [n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)] / k!$

### Gesetze

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 & \binom{n}{1} &= n & \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}; \text{ Symmetrie} \\ \binom{n}{k} &= 0; \text{ für } k > n > 0 \text{ (Definition)} & \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n+1}{k+1} \\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k} & \binom{n}{k+1} &= \binom{n}{k} * (n-k) / (k+1) \\ \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k+1} & \binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \dots + \binom{k+n}{n} &= \binom{k+n+1}{n} \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots &= 2^n & \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots &= 2^{n-1} \\ \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots &= 2^{n-1} & \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots &= 0 \\ \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots &= \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Die Binomialkoeffizienten bilden die Einträge im Pascal-Dreieck und damit die Koeffizienten im binomischen Satz. Die Anzahl der möglichen Gitterwege vom Ursprung zum ganzzahligen Punkt (a,b) im Koordinatensystem ist zum Beispiel  $\binom{a+b}{a}$ .

### Binomialkoeffizient - Weitere Beziehungen

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots &= 2^{n-1} & \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots &= 0 \\ \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots &= \binom{2n}{n} & \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} &= n^2 \\ \sum_k \binom{j-k}{k} &= F_{j+1}, \text{ wobei } F_n \text{ die } n\text{-te Fibonacci-Zahl ist} \\ \binom{n+5}{5} - \binom{n+2}{5} &= H_3(n) \end{aligned}$$

$H_3(n)$  ist die Anzahl aller nichtnegativen, ganzzahligen 3x3-Matrizen, bei denen alle Zeilen- und Spaltensummen gleich n sind

$$\sum_{k < m} \binom{-2}{k} = (-1)^{m-1} [m/2], \text{ wobei } [x] \text{ die kleinste ganze Zahl } n \geq x \text{ ist}$$

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{i+j}{i} &= \binom{n}{k} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ \sum_{k=0}^l \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^l \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{l-1} \binom{n-1}{k} & \sum_{j=0}^n \binom{j}{k} &= (n-k+1)/(k+1) \sum_{j=0}^k \binom{n-j+k}{j} \\ \binom{4n^2-2}{2n^2-n-1} - \binom{4n^2-2}{2n^2-n-2} &= \binom{4n^2-2}{2n^2-n} - \binom{4n^2-2}{2n^2-n-1} \end{aligned}$$

Nach "Table of integrals, series, and products" von Gradshteyn und Ryzhik

$$\begin{aligned} \sum_k \binom{n}{3k} &= 1/3 (2^n + 2 \cos(n/3 \pi)) & \sum_k \binom{n}{3k+1} &= 1/3 (2^n + 2 \cos((n-2)/3 \pi)) \\ \sum_k \binom{n}{3k+2} &= 1/3 (2^n + 2 \cos((n-4)/3 \pi)) & \sum_k \binom{n}{4k} &= 1/2 (2^{n-1} + 2^{n/2} \cos(n/4 \pi)) \end{aligned}$$

$$\sum_k \binom{n}{4k+1} = 1/2 (2^{n-1} + 2^{n/2} \cos(n/4 \pi)) \quad \sum_k \binom{n}{4k+2} = 1/2 (2^{n-1} - 2^{n/2} \cos(n/4 \pi))$$

$$\sum_k \binom{n}{4k+3} = 1/2 (2^{n-1} + 2^{n/2} \sin(n/4 \pi))$$

Für alle positive, ganzen Zahlen m und k existiert eine Darstellung

$$m = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} + \dots + \binom{m}{t} \text{ mit } m_k > m_{k-1} > \dots > m_t \geq t \geq 1$$

Nach "Proofs that Really Count" von Benjamin und Quinn;  $F_n \dots$  n-te Fibonacci-Zahl

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{2k+1} = F_{2n} \quad \sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{2k} = F_{2n+1}$$

$$T_n = \sum_{j=1}^n j = \binom{n+1}{2}; T_n \text{ ist die n-te Dreieckszahl}$$

$$\sum_{j=0}^n j^2 = \binom{3n+1}{2} \quad \sum_{j=1}^n (2j-1)^3 = \binom{4n-3}{2}$$

$$\sum_{j=1}^n (2j-1) = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} \quad \sum_{i=0}^n \binom{i}{k-1} = (n+1)/(n-k+1) \binom{n}{k}$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k-1} = (n+1)/k \binom{n}{k-1} \quad \binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$$

### Davidsternregel, Sechseckregel

Nach "Concrete Mathematics" gilt für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k+1} \binom{n+1}{k} \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k-1} \binom{n-1}{k} \binom{n+1}{k+1}$$

Für die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck bedeutet dies, dass je drei der sechs Zahlen um einen Eintrag im Pascal-Dreieck in Form eines Davidsterns das gleiche Produkt besitzen.

In der Abbildung gilt für die 6 Zahlen um 330:

$$120 \cdot 462 \cdot 495 = 27442800$$

$$210 \cdot 165 \cdot 792 = 27442800$$

### Binomialkoeffizient - Weitere Beziehungen

$$\prod_{k=1}^n \binom{2n-k}{k} = \prod_{k=1}^n \binom{2k-1}{k}$$

$$\prod_{k=1}^n \binom{2n-k+1}{k} = 2^n \prod_{k=1}^n \binom{2k-1}{k}$$

$$\binom{n}{k+1} = (n-k)/(k+1) \binom{n}{k} \quad \binom{n+1}{k} = (n+1)/(n-k+1) \binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = (n+1)/(k+1) \binom{n}{k} \quad \binom{2n}{n} = (4n-2)/n \binom{2n-2}{n-1}$$

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$$

### Verallgemeinerte binomische Reihe

$$B_t(z) = \sum_{k \geq 0} \binom{t+k-1}{k} z^k$$

**Catalansche Zahlen** für  $t=2$  wird  $C_n = 1/(2n+1) \binom{2n+1}{n} = 1/(n+1) \binom{2n}{n}$

**Narayana Zahlen**  $N(n,k) = 1/n \binom{n}{k} \binom{n-k}{k-1}$

Die Summe der n-ten Reihe des Narayana-Dreiecks ist gleich der n-ten Catalanschen Zahl  $C_n$ .

### Narayana-Dreieck

k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	
n=1	1					
n=2	1	1				
n=3	1	3	1			
n=4	1	6	6	1		
n=5	1	10	20	10	1	
n=6	1	15	50	50	15	1

### Binomialkoeffizient - Weitere Beziehungen

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{i+j+k=n} \binom{i+1}{i} \binom{j+k}{j} \binom{i+k}{k} = \sum_{0 \leq j \leq n} \binom{2j}{j}$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$
; Spezialfall
$$\sum_{k=0}^l \binom{l-k}{m} \binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1}$$
 für alle nichtnegativen  $n \geq q$ 

$$\sum_{k=0}^l \binom{l-k}{m} \binom{k}{n} = \binom{l+1}{m+n+1}$$

$$\sum_{k \geq 0} \binom{2n}{2k}^4 = 1/2 ((\binom{4n}{2n}) + (-1)^n \binom{2n}{n})$$

$$\sum_{k \geq 0} \binom{2n}{2k+1}^2 = 1/2 ((\binom{4n}{2n}) - (-1)^n \binom{2n}{n})$$

$$\sum_{m=0}^k \binom{2m+1}{2m+1} \binom{n-m-1}{k-m} = 2^{2k+1} \binom{n+k}{2k+1} \sum_{m=0}^k \binom{2n+1}{2m} \binom{n-m-1}{k-m} = 2^{2k} \binom{n+k}{2k}$$

$$\sum_{m=0}^k \binom{2n+1}{2m+1} \binom{n-m-1}{k-m} = (2n-1)/(2k+1) 2^{2k} \binom{n+k-1}{2k}$$

$$\sum_{m=0}^k \binom{2n}{2m} \binom{n-m}{k-m} = n/k 2^{2k-1} \binom{n+k-1}{2k-1}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \binom{2k}{m} = 2^{n-m-1} \binom{n}{m}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} / \binom{n}{k} = (n+1)/(n+1-m), \text{ für } n \geq m$$

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} / \binom{x+k}{k} = x/(x+n)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^4 = \sum_{r,s} (-1)^{n+r+s} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} \binom{2n-r-s}{n}$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} 1/\binom{j}{2} = 2$$

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = f_{2n+2}, \text{ wobei } f_n \text{ die n-te Fibonacci-Zahl ist}$$

$$\sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n}{j-k} = \binom{n-1}{j}$$

$$\sum_{k=0}^i (-1)^{k+1} \binom{n}{j+k} = \binom{n-1}{j}$$

$$3 \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{2n}{2}$$

$$3 \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \binom{2n+1}{2}$$

$$(2k+1)^2 \binom{n}{2} + \binom{k+1}{2} = \binom{(2k+1)n-k}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{m-k-1}{m-n-1} = \binom{m}{n+1}$$

$$\binom{n-m}{m-k} \equiv \binom{n/p}{[m/p]} \binom{n_0 m_0 - k}{m_0 - k} \pmod{p}; \text{ Lucas-Regel 1878}$$

Dabei sind  $n_0, m_0$  die kleinsten nichtnegativen Reste von  $n$  mod  $p$  und  $m$  mod  $p$ .  $[x]$  gibt die größte ganze Zahl  $\leq x$  an.

$1/z! = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^z \binom{n+z}{n}$  für alle komplexen  $z$  und positiven natürlichen  $n$  (Euler)

$D(n,n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$ , wobei  $D(n,n)$  zentrale Delannoy-Zahlen sind

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{m+2k} \binom{2k}{k} (-1)^k / (k+1) = \binom{n-1}{m-1}, m, n > 0$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 0} \binom{x+1}{2k+1} \binom{x-2k}{n-k} 2^{2k+1} = \binom{2x+2}{2n+1} \quad \sum_k (-2)^{2n-k} \binom{2n}{k} \binom{2k}{k} = \binom{2n}{n} \\
& \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{2k}{k} \binom{4n-2k}{2n-k} = \binom{2n}{n}^2 \quad \sum_k \binom{n}{k}^2 = n/2 \binom{2n}{n} \quad \binom{(n^2)_2}{2} = 3 \left( \binom{n^2}{4} + \binom{n^2}{3} \right) \\
& \sum_k \binom{n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n} \quad \sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s+k}{n} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l} \\
& \sum_{k < l+1} \binom{l-k}{m} \binom{s-k-n}{n} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m-1}{l-m-n} \quad \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{r_k}{r_{2n-k}} = (-1)^n \binom{r_n}{r_n} \\
& \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \delta_{0n}; \text{ Kronecker Delta-Funktion bei } 0 \\
& \sum_{k=0}^m (-1)^{n+k} \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \delta_{mn}; \text{ Kronecker Delta-Funktion über } m \text{ und } n \\
& \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \binom{k}{i} = \delta_{nj} k^n; \text{ für } j = 0, 1, \dots, n \text{ und nichtnegatives } k \\
& \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n-k}{k} = 1 \text{ für } n = 0 \text{ oder } 1 \text{ mod } 6; = 0 \text{ für } n = 2 \text{ mod } 3; = -1 \text{ für } n = 3 \text{ oder } 4 \text{ mod } 6 \\
& \sum_{k > 0} (-1)^{n-k} \binom{n-k}{k} = 1 \text{ für } n = 0 \text{ mod } 3; = 0 \text{ für } n = 2 \text{ mod } 3; = -1 \text{ für } n = 1 \text{ mod } 3 \\
& \sum_k (-1)^k \binom{a+b}{a+k} \binom{b+c}{b+k} \binom{c+a}{c+k} = \binom{a+b+c}{a,b,c} = (a+b+c)! / (a!b!c!); \text{ Dixon Identität } 1903 \\
& \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n (3n)! / n!^3 \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (z_i) = (-1)^n / n! \prod_{i=1}^n (z-i) \text{ für alle komplexen } z \\
& \sum_k \binom{n}{k} \binom{s}{k} k = s \binom{n+s-1}{n-1} \text{ wenn } n \text{ nichtnegativ} \\
& \sum_{k > 0} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} (-1)^k / (k+m+1) = (-1)^n m! n / (m+n+1)! \binom{m}{n} \text{ für positive } m \text{ und } n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k > 0} \binom{n}{k} (-1)^k / (x+k) = 1 / (x \binom{x+n}{n}) \text{ für } x \text{ verschieden von } 0, -1, -2, \dots, -n \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x / (x+k) = 1 / \binom{x+n}{n} \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) 2^{n-2} = \binom{n+1}{2} 2^{n-1} \\
& \sum_{m > k} \binom{m-k}{n} \binom{m+n+1}{k} (-1/2)^k = 2^{n-m} \binom{(m+n)/2}{n} \text{ für gerades } m+n \\
& (x+m+1) \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{x+y+n}{m-n} \binom{y+2n}{n} = \sum_{n=0}^m (-4)^n \binom{x+n}{m-n} + (x-m) \binom{x}{m} \\
& (x+(m+1)z) \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{x+y+nz}{m-n} \binom{y+n(z+1)}{n} = z \sum_{0 < i < n < m} (-1)^n \binom{n}{i} (1+z)^{n+i} \\
& \quad + (x-m) \binom{x}{m} \\
& \sum_k (-1/2)^k \binom{2p-m}{m+k} \binom{2p+k}{k} = (-1/4)^p \binom{2p-m}{p} \\
& \sum_k \binom{n}{k} (x+k)^k (y+n-k)^{n-k} = \sum_k \binom{n}{k} k! (x+y+n)^{n-k}; \text{ Cauchy-Formel} \\
& \sum_{j=0}^n 1/2^{2j} \binom{2j}{j} = (n+1)/2^{2n} \binom{2n+1}{n} \\
& \sum_{k > 0} (-1)^k n / (n-k) \binom{n-k}{k} = 2 \text{ für } n = 0 \text{ mod } 6; 1 \text{ für } n^2 = 1 \text{ mod } 6; -1 \text{ für } n^2 = 0 \text{ mod } 6, \text{ sonst } -2 \\
& \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1} \\
& \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} / k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n 1/k; \text{ binomialharmonische Identität} \\
& \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (x-i)^n = n! \text{ für alle komplexen } x \\
& \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^k (n-k-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k / k!; \text{ Umordnungsformel} \\
& \sum_{k > 0} \binom{n+k}{2k} \binom{2k}{k} (-1)^k / (k+1) = 1 \text{ für } n = 0, \text{ anderfalls für } n > 0 \text{ gleich } 0
\end{aligned}$$

$n^k = \sum_{i=1}^k i! \binom{n}{i}^k$ , wobei  $k_n$  eine Stirling-Zahl 2. Art ist

Beispiele:  $n^2 = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}$   
 $n^3 = \binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3}$   
 $n^4 = \binom{n}{1} + 14 \binom{n}{2} + 36 \binom{n}{3} + 24 \binom{n}{4}$   
 $n^5 = \binom{n}{1} + 30 \binom{n}{2} + 150 \binom{n}{3} + 240 \binom{n}{4} + 120 \binom{n}{5}$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(1+x)/(1-x)} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} (x^{2n} + x^{2n+1}) / 4^n \\
& 2 (\arcsin x/2)^2 = \sum_{n \geq 1} x^{2n} / (n^2 \binom{2n}{n}) \quad \text{Sonderfall } x=1: \sum_{n \geq 1} 1 / (n^2 \binom{2n}{n}) = \pi^2/18 \\
& 1/(1-2n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 4^k / \binom{2k}{k} \quad 1/(1-z)^{n+1} = \sum_{k \geq 0} z^k \binom{n+k}{n} \\
& z^n / (1-z)^{n+1} = \sum_{k \geq 0} z^k \binom{n}{k} \quad \sum_{k \geq n} 2^{-k} \binom{n+k}{k} = 2^n \\
& \sum_{k \geq n} z^k \binom{n-k}{k} = 1/\sqrt{(1+4z)} \left( \frac{(1+\sqrt{(1+4z)})}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{(1-\sqrt{(1+4z)})}{2} \right)^{n+1} \\
& \sum_{k \geq 0} 2^k \binom{2n-k}{n} = 2^{2n} \binom{2n}{n} \quad \sum_{k \leq n} (-2)^k \binom{n}{k} (2n+1)/(2n+1-k) = (-4)^n \\
& \sum_k (-1/2)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} / \binom{n+b+k}{k} = 2^{-n} (b/2)! (b+n)! / (b! (b/2+n)!) \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{m} \binom{n}{k} k! (-1)^{n-k-m} = \langle n, k \rangle, \text{ Zusammenhang von Stirling-Zahlen 2. Art und Euler-Zahlen} \\
& \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (m+1-k)^n (-1)^k = \langle n, m \rangle \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{n-m} \langle n, k \rangle = m! \{n, m\} \\
& \sum_k \binom{k}{m} [n, k] = [n+1, k+1], \text{ rekursive Beziehung von Stirling-Zahlen 1. Art} \\
& \sum_k \binom{k}{m} [n+1, k+1] (-1)^{m-k} = [n, m] \quad \sum_k \binom{n}{k} [n-k, m] [k] = [n+1, m] \binom{m}{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [n, m] = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} m^{m+k}; \text{ Stirling-Zahlen 1. und 2. Art} \\
& \{n+1, m+1\} = \sum_k \binom{n}{k} \{k, m\} \quad \{n, m\} = \sum_k \binom{n}{k} \{k+1, m+1\} (-1)^{n-k} \\
& m! \{n, m\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k} \quad \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} k^n (-1)^k = 0, \text{ für } 0 < n < m \\
& \{n+1, m\} = \sum_k \binom{n}{k} \{k, m\} \quad \{n, m\} = \sum_k \binom{m-n}{m+k} \binom{m+n}{n+k} [m+k, k] \\
& \sum_k 2^k n / (n-k) \binom{n-k}{2k} = 2^{n-1} + \cos(n\pi/2) \sum_k (-1)^{k+1} k \binom{n}{k} = 0; \text{ für } n > 1 \\
& \sum_k (-1)^k (a+k)^n \binom{n}{k} = (-1)^n n! \quad \sum_k (-1)^k k^n \binom{n}{k} = (-1)^n n! \\
& \binom{n}{2} + 6 \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2} = (2n+1)^2 \\
& \sum_k \binom{n}{k} a^{k+1} / (k+1) = ((a+1)^{n+1} - 1) / (n+1), \text{ für } a \text{ nicht } -1 \\
& \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{k+1} / (k+1) = n / (n+1) \quad \sum_{k < m+1} (-1)^k (a+k)^{n-1} \binom{m}{k} = 0 \\
& n+1 = \sum_k (-1)^k 4^{n-k} \binom{2n-k+1}{k} \quad 2n+1 = \sum_k (-1)^{n-k} 4^k \binom{n+k}{2k} \\
& \sum_k (-1)^k n / (n-k) \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = 2 \quad (\sum_{j \geq 0} x^j)^n = \sum_k \binom{n+k-1}{k} x^k \\
& \sum_k \binom{n}{k} f_t^k f_{t-1}^{n-k} f_{m+k} = f_{m+nt}; \text{ wobei die } f_t \text{ Fibonacci-Zahlen sind}
\end{aligned}$$

### Abelsche Identität

$$\begin{aligned}
& A_n(x, y; p, q) = \sum_k \binom{n}{k} (x+k)^{k+p} (y+n-k)^{n-k+q} \\
& A_n(x, y; -1, 0) = 1/x (x+y+n)^n \quad A_n(x, y; -1, -1) = (1/x + 1/y) (x+y+n)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod p, \text{ für } 1 < k < p \quad \binom{p+j}{k} \equiv 0 \pmod p, \text{ für } j < k < p$$

$$\begin{aligned}
\binom{2p}{p} &\equiv 2 \pmod{p} & \binom{pa}{pb} &\equiv \binom{a}{b} \pmod{p^2} \\
\binom{pa}{pb} &\equiv \binom{a}{b} \pmod{p^3}, \text{ für } p > 4 & \binom{p^2}{p} &\equiv p \pmod{p^5}, \text{ für } p > 4 \\
\binom{n}{k} &\equiv \prod_{i \geq 0} \binom{n_i}{k_i} \pmod{p}, \text{ mit } k = \sum_{i \geq 0} k_i p^i \text{ und } n = \sum_{i \geq 0} n_i p^i \\
8 \binom{3p}{2p} &\equiv 3 \binom{2p}{p}^3 \pmod{p^5}, \text{ für } p > 6 & 3 \binom{4p}{2p} &\equiv 2 \binom{3p}{p}^2 \pmod{p^5}, \text{ für } p > 6 \\
3^4 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \binom{26p}{13p} &\equiv 46 \binom{21p}{8p}^2 \pmod{p^5}, \text{ für } p \text{ ungleich } 2, 3, 5, 7, 17, 19 \\
\binom{n}{k} &\equiv \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor} \pmod{2} & \binom{m}{p} &\equiv [m/p] \pmod{p} \\
\binom{n}{k} \binom{n}{k+1} &\equiv 0 \pmod{n}
\end{aligned}$$

### Primzahl und Binomialkoeffizient

Satz:  $p$  sei eine Primzahl. Dann gilt

- (a) Wenn  $0 < k < p$  ist, so ist  $\binom{p}{k}$  durch  $p$  teilbar
- (b) für alle ganzen Zahlen  $a$  und  $b$  ist  $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$

Nachweis (a):

Es gilt  $p! = \binom{p}{k} k! (p-k)!$ . Dividiert man  $p!$  mit  $p$ , so teilt  $p$  die Terme  $k!$  und  $(p-k)!$  nicht, d.h. den Binomialkoeffizienten  $\binom{p}{k}$ .

Nachweis (b): Nach dem binomischen Satz gilt

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$$

Nach dem Teil (a) sind alle Summanden für  $0 < k < p$  durch  $p$  teilbar.

Damit ist  $(a+b)^p$  kongruent modulo  $p$  zur Summe der zwei Terme für  $k = 0$  und  $k = p$ . Diese Summe ist gerade  $a^p + b^p$ .

Aus diesem Satz folgt der kleine Satz von Fermat: Ist  $p$  eine Primzahl, so gilt

- (a) für alle ganzen Zahlen  $a$  ist  $a^p \equiv a \pmod{p}$
- (b) Wenn  $a$  nicht durch  $p$  teilbar ist, dann  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

Nachweis: Der Fall  $a = 1$  ist offensichtlich. Für  $a > 1$  wird mit  $(a-1)^p \equiv (a-1) \pmod{p}$  und dem obigen Satz  $a^p = ((a-1) + 1)^p \equiv (a-1)^p + 1 \pmod{p} \equiv (a-1) + 1 \pmod{p} = a$

### Kombinatorische Identitäten

Für alle natürliche  $n, k$  mit  $n \geq k$  gilt:

$$\binom{a+b}{a+n} \binom{a+c}{c+n} \binom{b+c}{b+n} = \sum (a+b+c-k)! / [(a-k)! (b-k)! (c-k)! (k+n)! (k-n)!],$$

Summenbildung über  $k = 0, \dots, n$

$$\binom{m+n}{k} = \sum \binom{m}{k-l} \binom{n}{l}, \text{ Summenbildung über } l = 0, \dots, \text{Maximum}(k, n)$$

Pochhammer-Symbol  $((a))_n = a (a-1) \dots (a-n+1)$

Chu-Vandermonde-Identität  $((x+a))_n = \sum \binom{n}{k} ((a))_k ((x))_{n-k}$

Summenbildung für  $k = 0, 1, \dots, \infty$

### Allgemeiner Binomialkoeffizient

$$\binom{r}{k} = [r(r-1)(r-2) \dots (r-k+1)] / k!, \text{ für reelles } r \text{ und natürliches } k$$

d.h.  $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k+1} (2k)! / (2^{2k} (k!)^2 (2k-1))$

$$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k (2k)! / (2^{2k} (k!)^2)$$

## Binomische Formel

### Binomischer Satz

Für alle reellen Zahl  $a$  und  $b$  und natürliche Zahlen  $n > 1$  gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

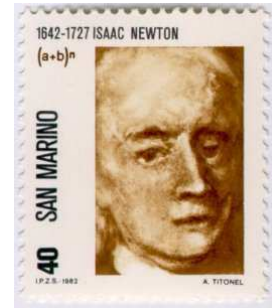
$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$$

$$(a^n - b^n) = (a-b) * (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Die bei diesem Satz benötigten Werte des Binomialkoeffizienten bilden jeweils eine Zeile im Pascalschen Dreieck.

Für  $a = b = 1$  wird als Sonderfall  $(a+b)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

Auf der Briefmarke San Marinos wird Isaac Newton als Entdecker des binomischen Satzes gewürdigt.



### Binomischer Satz von Newton, allgemeiner binomischer Satz

1665 wurde durch Isaac Newton eine verallgemeinerte Form des binomischen Satzes angegeben. Die ursprüngliche Form

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots +$$

gilt nur für natürliche Exponenten  $n$ . Nach Newton gilt allgemein

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + m/n AQ + (m-n)/(2n) BQ + (m-2n)/(3n) CQ + (m-3n)/(4n) DQ + \dots$$

Dabei sind die  $A, B, \dots$  Koeffizienten, die schrittweise ermittelt werden

$$A = P^{m/n}$$

$$B = m/n AQ = m/n P^{m/n}Q$$

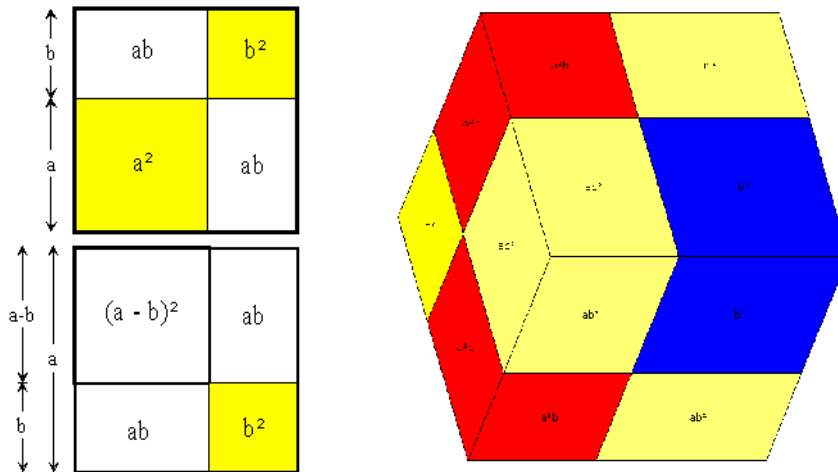
$$C = \dots = (m/n)(m/n - 1)/2 P^{m/n}Q^2$$

$$D = \dots = (m/n)(m/n - 1)(m/n - 2)/(2 \cdot 3) P^{m/n}Q^3$$

Einsetzen und Ausklammern von  $P^{m/n}$  ergibt

$$(1 + Q)^{m/n} = 1 + m/n Q + (m/n)(m/n - 1)/2 Q^2 + (m/n)(m/n - 1)(m/n - 2)/(2 \cdot 3) Q^3 + \dots$$

Für natürliche  $m$  und  $n = 1$  ergibt sich der klassische binomische Satz.



obere Abbildung: grafische Veranschaulichung des 1. und 2. binomischen Formel

1. binomische Formel  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, vermehrt um das doppelte Produkt.

2. binomische Formel  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe der Quadrate der Zahlen, vermindert um das doppelte Produkt.

3. binomische Formel  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz der Quadrate der beiden Zahlen.

Weitere binomische Formeln

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

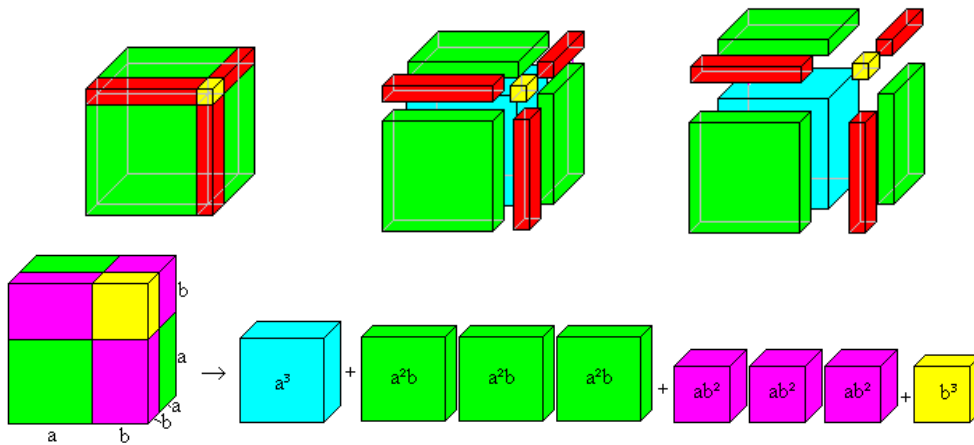
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$(a+b)^2 (a-b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

Zur grafischen Veranschaulichung der binomischen Formel  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  benötigt man eine räumliche Darstellung. Hier wird ein Würfel der Kantenlänge  $a+b$  aus einem Würfel der Länge  $a$ , einem Würfel der Länge  $b$  und jeweils 3 Quadern mit den Kantenlängen  $a, a, b$  bzw.  $a, b, b$  zusammengesetzt. Diese Zusammensetzung erkennt man auch gut in den nachfolgenden Abbildungen

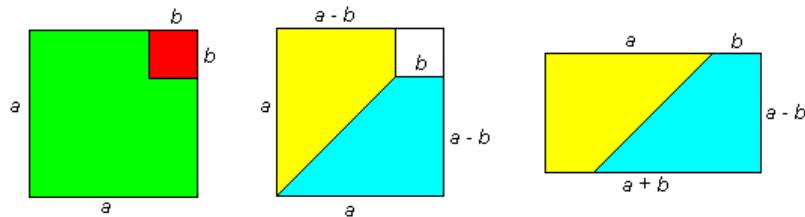


Auch die dritte binomische Formel  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$  kann geometrisch veranschaulicht werden.

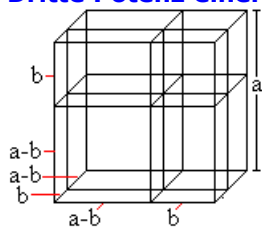
Die rechte Gleichungsseite stellt die Differenz zweier Quadrate dar, d.h. von einem Quadrat  $a^2$  ist ein Quadrat  $b^2$  zu entfernen (erste und zweite Abbildung).

Die Restfläche wird in zwei kongruente Trapeze geteilt, welche die Seitenlängen  $a, b$  und  $a-b$  haben.

Wird eines der Trapeze gespiegelt und wie in der dritten Abbildung angelegt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen  $a+b$  und  $a-b$ . Dessen Flächeninhalt ist  $(a+b)(a-b)$ , womit die dritte binomische Formel gezeigt ist.



### Dritte Potenz einer Differenz



Die Formel ist  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

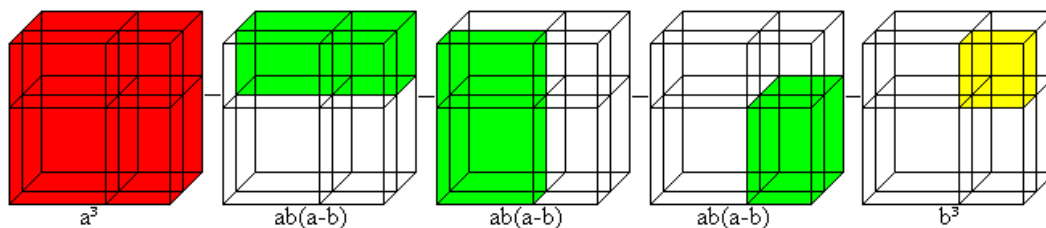
Für eine Veranschaulichung wandelt man sie um in

$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ .

Man gibt die Zeichnung zur Formel für  $(a+b)^3$  vor und setzt an Stelle von  $a$  die Differenz  $a-b$ . Dann ergeben sich im Würfel  $a^3$  die Kanten  $(a-b)+b$  in verschiedenen Variationen (links). Der Term  $(a-b)^3$  wird durch einen anderen Würfel dargestellt.

Man erhält diesen Würfel auch, wenn man vom roten Würfel die drei grünen

Quader und den gelben Würfel wegnimmt:



### Binomische Formeln, Aufgaben

Einfache Aufgaben zum Kürzen von Brüchen unter Verwendung von binomischen Formeln:

- 1  $(x^2-25) / (x^2+10x+25) = (x+5)(x-5) / (x+5)^2 = (x-5) / (x+5)$
- 2  $(x^2-2x+1) / (x^2-x) = (x-1)^2 / (x(x-1)) = (x-1) / x$
- 3  $(a^4-1) / (a^2+1) = (a^2+1)(a^2-1) / (a^2+1) = a^2-1$
- 4  $(x^2-2xy+y^2) / (2x-2y) = (x-y)^2 / (2(x-y)) = (x-y) / 2$
- 5  $(4a^2-20ab+25b^2) / (2ac-5bc) = (2a-5b)^2 / (c(2a-5b)) = (2a-5b) / c$
- 6  $(x^2-y^2) / (x^4-y^4) = (x^2-y^2) / ((x^2+y^2)(x^2-y^2)) = 1 / (x^2+y^2)$
- 7  $(9x^2-16y) / (28y-6x) = (3x+4y)(3x-4y) / (-2(-4y+3x)) = -(3x+4y) / 2$
- 8  $(5x-5z) / (x^2-z^2) = 5(x-z) / ((x+z)(x-z)) = 5 / (x+z)$
- 9  $(x^3-2x^2+x) / (2x-2) = x(x^2-2x+1) / (2(x-1)) = x(x-1)^2 / (2(x-1)) = x(x-1) / 2$

$$10 \quad (x^4 - 2x^2 + 1) / (x^3 - x) = (x^2 - 1)^2 / (x(x^2 - 1)) = (x^2 - 1) / x$$

$$11 \quad (4x - 4ax) / (4a^2 - 4) = 4x(1-a) / (4(a^2 - 1)) = -4x(-1+a) / (4(a+1)(a-1)) = -x / (a+1)$$

$$12 \quad (x^4 - 16) / (x+2) = (x^2 + 4)(x^2 - 4) / (x+2) = (x^2 + 4)(x+2)(x-2) / (x+2) = (x^2 + 4)(x-2)$$

### Binomische Formel höheren Grades

Binomische Formeln können auch für das Produkt von mehr als Binomen aufgestellt werden:

2. Grades  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$   
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

3. Grades  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$   $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$   
 $(a+b)^2(a-b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$   
 $(a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

4. Grades  $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$   
 $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$   
 $(a+b)^3(a-b) = a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4$   
 $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$   
 $(a+b)(a-b)^3 = a^4 - 2a^3b + 2ab^3 - b^4$

Höheren Grades

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

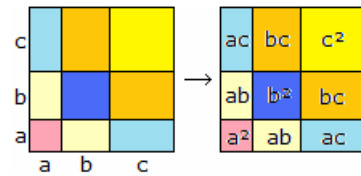
$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

$$(a-b)^9 = a^9 - 9a^8b + 36a^7b^2 - 84a^6b^3 + 126a^5b^4 - 126a^4b^5 + 84a^3b^6 - 36a^2b^7 + 9ab^8 - b^9$$

### Trinomische Formel

Ersetzt man in den binomischen Formeln die Summe  $a+b$  bzw. Differenz durch dreigliedrige Summen  $a+b+c$  und Differenzen, so entstehen die trinomischen Formeln



$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$(a+b+c)(a+b-c) = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$$

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2 - b^2 + c^2 + 2ac$$

$$(a+b+c)(a-b-c) = a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$$

Für die 1. Gleichung ergibt sich eine grafische Herleitung (siehe Abbildung) bzw. die analytische

$$((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Analog kann man tetranomische Gleichungen und noch höheren Grades entwickeln

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

### Polynomischer Satz

Für jedes  $r$ -Tupel reeller Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_r$  und jede natürliche Zahl  $n$  gilt:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$$

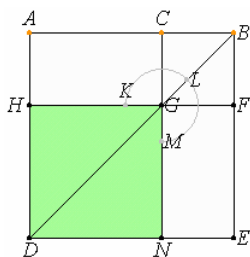
Dabei ist die Summe über alle  $r$ -Tupel natürlicher Zahlen  $(k_1, \dots, k_r)$  zu erstrecken, für die  $\sum_{i=1}^r k_i = n$  ist.

Für  $r = 2$  erhält man den binomischen Satz, für  $r = 3$  den trinomischen Satz.

Beispiel:

$$(a+b+c)^3 = \binom{3}{3,0,0} a^3 + \binom{3}{2,1,0} a^2b + \binom{3}{2,0,1} a^2c + \binom{3}{1,2,0} ab^2 + \binom{3}{1,1,1} abc + \binom{3}{1,0,2} ac^2 + \binom{3}{0,3,0} b^3 + \binom{3}{0,2,1} b^2c + \binom{3}{0,1,2} bc^2 + \binom{3}{0,0,3} c^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$$

Sind alle  $a_i = 1$ , so ergibt sich  $\sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = r^n$



Euklids „Elemente“, Buch II § 7 (L. 7):

Teilt man eine Strecke, wie er gerade trifft, so sind die Quadrate über der ganzen Strecke und über einem ihrer Abschnitte beide zusammen gleich zweimal dem Rechteck aus der ganzen Strecke und dem genannten Abschnitt und dem Quadrat über dem anderen Abschnitt zusammen.

Eine Strecke  $AB$  teile man beliebig, im Punkte  $C$ . Ich behaupte, dass  $AB^2 + BC^2 = 2 AB \cdot AC + CA^2$ .

Man zeichne über  $AB$  das Quadrat  $ADEB$  und zeichne die Figur fertig. Hier ist

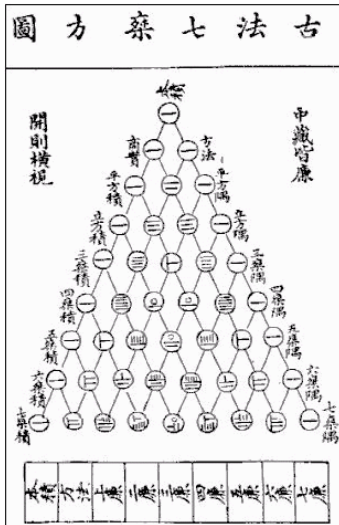
Parallelogramm  $AG = GE$  (I, 43); man füge daher  $CF$  beiderseits hinzu; dann ist das ganze Parallelogramm  $AF$  dem ganzen  $CE$  gleich; also  $AF + CE = 2 AF$ .



## Pascalsches und Sierpinski Dreieck

Zwischen dem Pascalschen Dreieck der Binomialkoeffizienten und dem aus der Chaostheorie bekannten Sierpinski-Dreieck besteht eine unmittelbare Beziehung.

Mit Hilfe vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass das Sierpinski-Dreieck gerade aus den ungeraden Knoten des Pascalschen Dreiecks besteht.



## Lucas-Theorem

Nummeriert man von oben nach unten die Zeilen mit  $n=0,1,2,\dots$  und von links nach rechts die Elemente einer Zeile mit  $m=0,1,2,\dots$ , so ist das Element  $C(n,m)$  des Pascalschen Dreiecks ungerade, wenn  $A_m \subset A_n$  gilt. Dabei ist  $A_n$  die Menge der Position der Nicht-Null-Ziffern in der Darstellung von  $n$  im Dualsystem.

Beispiel:  $C(5,2) = 10$

$$[2]_{10} = [10]_2, \text{ d.h. } A_2 = \{1\};$$

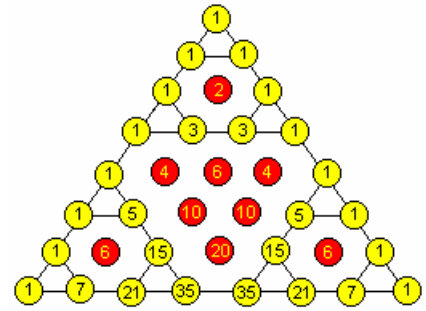
$$[5]_{10} = [101]_2, \text{ d.h. } A_5 = \{0,2\}$$

$A_2$  ist keine Teilmenge von  $A_5$ , wodurch  $C(5,2)$  gerade ist  $C(6,4) = 15$

$$[4]_{10} = [100]_2, \text{ d.h. } A_4 = \{2\}$$

$$[6]_{10} = [110]_2, \text{ d.h. } A_6 = \{1,2\}$$

$A_4$  ist Teilmenge von  $A_6$ , wodurch  $C(6,4)$  ungerade ist



## Beziehung von Landau

Der Quotient aus der größten Zahl in der  $n$ -ten Reihe des Pascal-Dreiecks und der Summe der  $n$ -ten Reihe konvergiert mit wachsendem  $n$  gegen  $2 / \sqrt{(2n\pi)}$ .

## Pascalsches Dreieck, Arithmetisches Dreieck

... nach Zhu-Shi-Lie

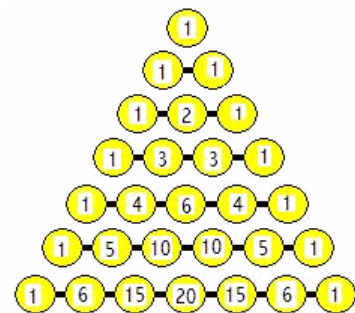
In jedem Dreieck gilt, dass die Summe der Zellen einer Basis eine Zahl ist, die gleich dem Doppelten einer mit Eins beginnenden Progression ist. D.h., dass die Summe der Zahlen in der  $n$ -ten Zeile  $2^n$  ergibt (die oberste Zeile wird eigentlich weggelassen, sie ist die 0. Zeile).

Die erste Diagonale enthält Einsen, die zweite die natürlichen Zahlen, die dritte die Dreieckszahlen, die vierte die Tetraederzahlen (1, 4, 10, 20, 35...). Die nachfolgenden Diagonalen lassen sich als höherdimensionale Anordnungen interpretieren, beginnend mit der vierten Dimension.

Die Einträge in  $p$ -ten Zeile sind mit Ausnahme der Einsen nur dann durch  $p$  teilbar, wenn  $p$  eine Primzahl ist. Die "kurzen Diagonalen" 1, 1-1, 1-2, 1-3-1, 1-4-3, 1-5-6-1 ... ergeben summiert die Fibonacci-Folge 1-1-2-3-5-8-13...

Es gibt unendlich viele Zeilen, die drei Zahlen in arithmetischer Progression enthalten (z.B. 7-21-35), die nächsten sind 1001-2002-3003 und 490314-817190-1144066. Allerdings gibt es keine Zahlentripel, die in geometrischer oder harmonischer Progression stehen.

In China wird das Pascalsche Dreieck Yanghui-Dreieck genannt. 1261 berechnete der chinesische Mathematiker Yang Hui die Koeffizienten für  $(a+b)^1$  bis  $(a+b)^6$ .



## Pascalsches Dreieck

Problem: Welche Zahl größer 1 tritt am häufigsten im Pascalschen Dreieck auf?

Während die 1 in jeder Zeile zweimal auftritt, findet man jede natürliche Zahl  $n$  zweimal in der  $n$ -ten Zeile,  $\binom{n}{1}$  und  $\binom{n}{n-1}$ .

Einige Zahlen treten auch in zwei Zeilen auf, wie zum Beispiel die 10:

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \binom{10}{1} = \binom{10}{9}$$

Zahlen, die in drei Reihen vorhanden sind, können über eine Beziehung der Fibonacci-Zahlen gefunden werden. Die ersten Fibonacci-Zahlen ab Index 1 sind

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

wobei die Zahlen alternierend markiert sind. Betrachtet werden

$$n = F_{2k} \cdot F_{2k+1} \text{ und } m = F_{2k-1} \cdot F_{2k}$$

Aus diesen Zahlen wird die natürliche Zahl  $r$  gebildet mit

$$r = \binom{n}{1} = \binom{n}{m-1} = \binom{n-1}{m}$$

wodurch  $r$  in drei Zeilen des Pascalschen Dreiecks auftritt. Die Gleichheit der drei Binomialkoeffizienten ergibt sich aus den Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen.

Die ersten Zahlen sind  $n = 3 \cdot 5 = 15$ ,  $m = 2 \cdot 3 = 6$  und somit

$$r = 3003 = \binom{15}{5} = \binom{14}{6} = \binom{3003}{1}$$

Die zweite Zahl ergibt sich aus  $n = 8 \cdot 13 = 104$  und  $m = 5 \cdot 8 = 40$  und  $r =$

61218182743304701891431482520

Das dritte  $r$  ist

57279 23611 03685 77113 44639 38331 92585 15644 97000 65899 29649 88127 41776 75943 26796  
 55153 86221 28587 56528 61414 50652 74397 83272 66310 57157 52847 58237 90184 70859 00520  
 20001 83503 21491 13840 09457 38691 63880 55479 95567 77926 41200

Da es unendlich viele Fibonacci-Zahlen gibt, treten auch unendliche viele Zahlen im Pascal-Dreieck in drei verschiedenen Zeilen auf.

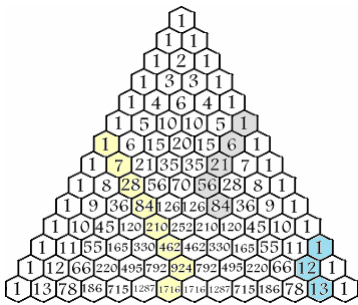
Eine Besonderheit ist die  $3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ . Diese Zahl tritt in der 14., 15. und 3003. Zeile auf, aber auch in der 78.

Trotz intensiver Suche; bis  $10^{23}$ ; konnte keine weitere natürliche Zahl größer 1 gefunden werden, die auch in vier oder mehr Reihen im Pascal-Dreieck auftritt.

Schreibt man die Zahlen in den Zeilen des Pascalschen Dreiecks nebeneinander und fasst diese zu einer Zahl zusammen, so entsteht stets eine durch 11 teilbare Zahl.

Zu beachten ist dabei, dass von rechts nach links bei mehrstelligen Zahlen die Überträge durchgeführt werden müssen:

- $11^0 = 1$
- $11^1 = 11$
- $11^2 = 121$
- $11^3 = 1331$
- $11^4 = 14641$
- $11^5 = 161051 = [1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1]$
- $11^6 = 1771561 = [1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1]$
- $11^7 = 19487171 = [1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1]$
- $11^8 = 214358881 = [1\ 8\ 28\ 56\ 70\ 56\ 28\ 8\ 1]$
- $11^9 = 2357947691 = [1\ 9\ 36\ 84\ 126\ 126\ 84\ 36\ 9\ 1]$
- $11^{10} = 25937424601 = [1\ 10\ 45\ 120\ 210\ 252\ 210\ 120\ 45\ 10\ 1]$
- $11^{11} = 285311670611 = [1\ 11\ 55\ 165\ 330\ 462\ 462\ 330\ 165\ 55\ 11\ 1]$  usw.



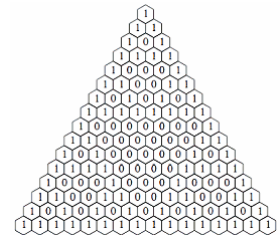
$1 + 12 = 13$

**Zahlenfolgen im Pascalschen Dreieck**

Eine weitere interessante Eigenschaft der Zahlen im Pascalschen Dreiecke ist folgende:

Beginnt man bei einer Rand-1 und bildet eine Zahlenfolge, in dem man entweder links oder nach rechts längs einer Diagonalen weitergeht, so ist die Summe der auftretenden Zahlen gleich der Zahl, die in der nächsten Zeile aber nicht in der gleichen Diagonalen liegt, d.h. zum Beispiel

$1 + 6 + 21 + 56 = 84$   
 $1 + 7 + 28 + 84 + 210 + 462 + 924 = 1716$

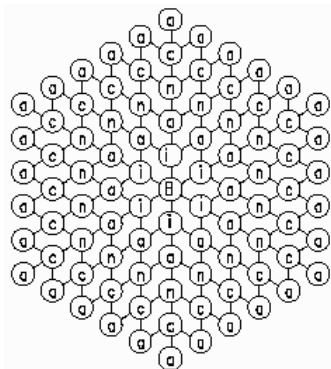
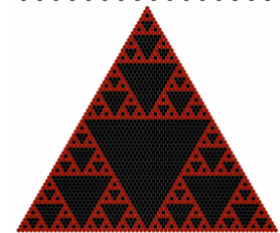


**Pascalsches Dreieck modulo m**

Wie schon unter Pascalsches Dreieck (3) gezeigt, besteht ein Zusammenhang zwischen Pascalschen Dreieck und Sierpinski-Dreieck.

Da das Pascalsche Dreieck die Binomialkoeffizienten ( $\binom{n}{k}$ ) enthält, werden diese modulo einer natürlichen Zahl m betrachtet und in Form eines Pascalschen Dreiecks eingetragen.

Ist  $m = 2$ , d.h. gerade und ungerade Binomialkoeffizienten werden unterschieden, so ergibt sich die obere Darstellung. Färbt man 0 = schwarz und 1 = rot und vergrößert den Darstellungsbereich, so erhält man eine Darstellung des Sierpinski-Dreiecks (untere Abbildung).



**Pascalsches Dreieck, Anwendung**

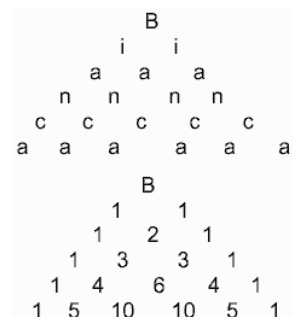
**Fürther Mathematikolympiade 1995, Klasse 10, 2.Stufe:**

In einer niederländischen Zeitschrift war das nebenstehende Exlibris abgebildet, das der holländische Graphiker W. van Strens für seine Tochter entworfen hat. Ein Exlibris ist ein auf die Innenseite des vorderen Buchdeckels geklebter, künstlerisch gestalteter Zettel mit einem Hinweis auf den Eigentümer.

Auf wie viele Arten lässt sich in der Abbildung nun der Name Bianca lesen? Man beschreibe eine Methode, wie man ohne mühsames Auszählen die Anzahl der Lesemöglichkeiten relativ schnell bestimmen kann.

**Lösung**

Man kann das Problem auf die zweite abgebildete Figur reduzieren, ein Pascalsches Dreieck. Die verschiedenen Lesemöglichkeiten ergeben sich aus der analogen Anordnung der dritten. Figur. Das sind zusammen  $1+5+10+10+5+1 = 32$  verschiedene Möglichkeiten. Für die vollständige Figur





erhalten wir somit :  $6 \times 30 + 6 = 186$  unterschiedliche Lesarten.

### Programmtext zum Pascalschen Dreieck

Programm zur Berechnung der ersten n Zeilen des Pascalschen Dreiecks.

```

program Pascal;
const  MaxArray = 32;
var    i, j, n: integer; a: array [0..MaxArray] of integer;
begin  writeln('Berechnung eines Pascalschen Dreiecks');    writeln;
      writeln('Bis zur wievielten Zeile soll das Dreieck berechnet werden?'); readln(n);
      if n > MaxArray then begin writeln('n ist zu groß'); halt end;
      for i:=1 to n do begin  a[i] := 1;
      for j:=i-1 downto 2 do begin  a[j] := a[j] + a[j-1]    end;
      for j:=1 to i do begin  write(a[j], ' '); end;
      writeln;end end.

```

### Pascalsches Dreieck

Zwischen dem Pascalschen Dreieck und den Abständen der Planeten in unserem Sonnensystem besteht ein merkwürdiger, empirischer Zusammenhang.

Nummeriert man die Planeten beginnend bei Merkur mit  $n = 0, 1, \dots$  durch, so gilt für die Abstände der Himmelskörper zur Sonne in Astronomischen Einheiten in etwa

$$d(n) = (3 a_n + 4) / 10$$

wobei  $a_n = 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$  zu setzen ist. Setzt man als 5. Planeten den größten Planetoiden Ceres und für  $n = 8$  vorerst 9. Planet, so erhält man

Planet	n	Summe der n.ten Zeile im Pascalschen Dreieck	Abstand in AE
Merkur	0	$0 = 0$	0,4
Venus	1	$1 = 1$	0,7
Erde	2	$1 + 1 = 2$	1
Mars	3	$1 + 2 + 1 = 4$	1,6
Ceres	4	$1 + 3 + 3 + 1 = 8$	2,8
Jupiter	5	$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$	5,2
Saturn	6	$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$	10
Uranus	7	$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$	19,6
9. Planet	8	$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$	38,8

Bis  $n = 7$  stimmen die Werte mit den realen erstaunlich gut überein. Für den Planeten Neptun ergibt sich keine Übereinstimmung, jedoch für den Kleinplaneten Pluto, dessen Werte dem hier 9. Planet genannten entsprechen.

Da die Neptun- und Plutobahn, nach der Theorie, aber vor langer Zeit gestört wurden, und Neptun aus seiner ursprünglichen Bahn abwich, könnte auch dieser Wert früher günstig gewesen sein.

Die verblüffende Beziehung der Planetenbahnen zum Pascalschen Dreieck ergibt sich aus der Titius-Bode-Reihe.

Warum diese Reihe aber so gut die Planeten beschreibt, weiß man nicht. Vielleicht ist es purer Zufall.

j	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
$n^1$	1				
$n^2$	1	2			
$n^3$	1	6	6		
$n^4$	1	14	36	24	
$n^5$	1	30	150	240	120

### Potenzendreieck

Für Potenzen mit beliebiger Basis existiert ein Zahlendreieck, ähnlich dem Pascalschen Dreieck, anderer Art. (siehe Abbildung)

Zu dieser Dreiecksmatrix gelangt man durch Inversion der Matrix der Koeffizienten der Terme, die die Kombinationen ohne Wiederholung der Form  $\binom{n}{k}$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  usw. darstellen.

Beispiel  $n^5 = 1 \cdot \binom{n}{1} + 30 \cdot \binom{n}{2} + 150 \cdot \binom{n}{3} + 240 \cdot \binom{n}{4} + 120 \cdot \binom{n}{5}$ , d.h.

$$6^5 = 1 \cdot 6 + 30 \cdot 15 + 150 \cdot 20 + 240 \cdot 15 + 120 \cdot 6 = 7776$$

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten lautet für den Koeffizienten in Zeile i und

Spalte j:

$$E(i, j) = [E(i-1, j-1) + E(i-1, j)] \cdot j$$

Mit Hilfe dieses Dreiecks gewinnt man unmittelbare Einblicke in die Teilbarkeit von Potenzen.

So ist jede Primzahlpotenz  $n^p$  für  $p > 3$  äquivalent  $n$  modulo  $6p$ . Dies ist im Wesentlichen der Inhalt des kleinen Fermatschen Satzes. Zusätzlich wird jedoch gezeigt, dass der Ausdruck  $a^p - a$  für alle  $a$  nicht nur durch  $p$ , sondern für  $p > 3$  auch durch  $6$  teilbar ist. Der größte gemeinsame Teiler der Matrixkoeffizienten ab dem zweiten Koeffizienten der Primzahlexponenten für  $n$  entspricht stets dem Nenner der jeweiligen Bernoullischen Zahl.

### Bernoulli-Dreieck, Quadratzahldreieck

Ein weiteres Zahlendreieck wurde erstmals von Bernoulli angegeben und heute Bernoulli-Dreieck oder Quadratzahldreieck genannt. Die Einträge dieses Zahlendreiecks bestehen aus den Summen der Binomialkoeffizienten

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$$

Bernoulli-Dreieck

1					
1	2				
1	3	4			
1	4	7	8		
1	5	11	15	16	
1	6	16	26	31	32

Damit ergibt sich für die letzte Zahl jeder Reihe eine Zweierpotenz. Bis auf diese letzte Zahl und den Zeilanfang 1 sind auch hier die Glieder Summe der beiden darüberliegenden Werte.

Eine alternative Darstellung der  $a_{n,k}$  mit Hilfe der Gamma-Funktion  $\Gamma(x)$  und der hypergeometrischen Funktion  ${}_2F_1(a,b;c;a)$  ist

$$a_{n,k} = 2^n \cdot \Gamma(n+1) \cdot {}_2F_1(1, k-n+1; k+2; -1) / (\Gamma(k+2) \Gamma(n-k))$$

$\frac{1}{1}$						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$

### Harmonisches Dreieck, Leibniz-Dreieck

Gegeben sei die harmonische Zahlenfolge  $a_n = 1/n$ . Aus dieser bildet man die Differenzenfolge

$$b_n = a_n - a_{n+1}$$

davon die erneute Differenzenfolge usw. Man erhält

$a_n$	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...	1/n
$b_n$	1/2	1/6	1/12	1/20	1/30	...		1/[n(n+1)]
$c_n$	1/3	1/12	1/30	1/60	...			2/[n(n+1)(n+2)]
$d_n$	1/4	1/20	1/60	...				6/[n(n+1)(n+2)(n+3)]

Dann gilt  $b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 - a_{n+1}$ . Die Folge  $a_n$  und die anderen Folgen konvergieren gegen 0. Die Summe der unendlichen Reihe  $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$  ist daher gleich  $a_1$ :

$$1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30 + \dots = 1$$

Dasselbe gilt auch für alle anderen Zeilen.

weitere Eigenschaften siehe

Gottfried Wilhelm Leibniz untersuchte diese Folgen bei der Ausarbeitung seines Differenzial- und Integralkalküls. U.a. versuchte er die Summe der reziproken Dreieckszahlen zu berechnen. Ordnet man die Glieder der Zahlenfolgen wie in der Abbildung an, ergibt sich das harmonische Dreieck. Es ist mit dem Pascalschen Dreieck verwandt - die Zahlen in der n-ten Zeile sind die Kehrwerte der entsprechenden Zahlen des Pascalschen Dreiecks, dividiert durch  $(n+1)$ . Jede Zahl ist die Summe der beiden darunterliegenden Zahlen; im Gegensatz zum Pascalschen Dreieck. siehe auch <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Combinatorics/LeibnitzTriangle.shtml>

Die n-te Zeile des Dreiecks beginnt und schließt am Rand mit  $1/n$ . Jede Zahl ist die Summe der beiden unter ihr stehenden Zahlen.

Die Einträge werden mit dem Symbol  $[\overset{n}{k}]$  bezeichnet, wobei die Nummerierung der Zeilen und Spalten mit 1 beginnt.

Es gilt die Rekursion  $[\overset{n}{1}] = [\overset{n}{n}] = 1/n$   $[\overset{n}{k}] = [\overset{n+1}{k}] + [\overset{n+1}{k+1}] ; n > 0$   
 Der Zusammenhang mit den Binomialkoeffizienten ist  $[\overset{n}{k}] = 1 / (k \binom{n}{k}) = 1 / (n \binom{n-1}{k-1})$   
 womit die Einträge Stammbrüche sind. Für die Summe der Nenner in der n-ten Zeile wird  $n \cdot 2^{n-1}$ .

### Teleskopsumme

Für die Summe einer Diagonale ergibt sich die Teleskopsumme  $[\overset{n+k}{k}] = [\overset{n+k-1}{k}] - [\overset{n+k}{k+1}]$

### Lozanitsch-Dreieck

Das Lozanitsch-Dreieck ist eine Anordnung von Binomialkoeffizienten in ähnlicher Form wie das Pascalsche Dreieck. Es ist nach dem serbischen Chemiker Sima Lozanic benannt. Die ersten Zeilen des Dreiecks sind

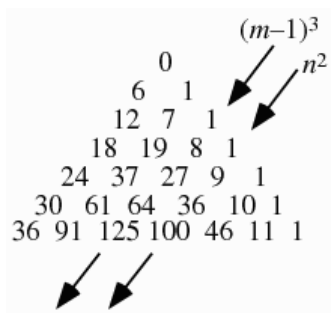
1																		
	1	1																
		1	1	1														
			1	2	2	1												
				1	2	4	2	1										
					1	3	6	6	3	1								
						1	3	9	10	9	3	1						
							1	4	12	19	19	12	4	1				
								1	4	16	28	38	28	16	4	1		
									1	5	20	44	66	66	44	20	5	1

1	5	25	60	110	126	110	60	25	5	1					
1	6	30	85	170	236	236	170	85	30	6	1				
1	6	36	110	255	396	472	396	255	110	36	6	1			
1	7	42	146	365	651	868	868	651	365	146	42	7	1		
1	7	49	182	511	1001	1519	1716	1519	1001	511	182	49	7	1	
1	8	56	231	693	1512	2520	3235	3235	2520	1512	693	231	56	8	1

Wie im Pascal-Dreieck sind Zahlen meist die Summe der beiden darüberliegenden Werte. Allerdings wird für die Zahl mit geradem Index  $k$  in einer Zeile mit ungerader Nummer  $n$  von der Summe noch der Zahlenwert an Position  $(k - 1)/2$  in der Zeile  $n/2 - 1$  des Pascalschen Dreiecks subtrahiert. In der dritten Diagonale wechseln sich Quadratzahlen und Proniczahlen ab. In der nachfolgenden Diagonalen findet man die Alkan-Zahlen  $l(6, n)$ ,  $l(7, n)$ , ... , welche die Anzahl der Isomeren von Alkan-Verbindungen beschreiben. Die Summe der  $n$ . Zeile des Lozanitsch-Dreiecks ist  $2^{n-2} + 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$ . Die Summen der Diagonalen wechseln zwischen

$$(F_{2n-1} F_{n+1}) / 2 \text{ und } (F_{2n} F_n) / 2$$

wobei die  $F_i$  Fibonacci-Zahlen sind.



### Clark-Dreieck

Das Clark-Dreieck ist ein Zahlendreieck, dessen Spitze die 0 enthält, eine Diagonale mit Einsen und die zweite Diagonale mit Vielfachen einer natürlichen Zahl  $f$  gefüllt werden. Die anderen Einträge des Dreiecks ergeben sich als Summe der beiden darüber befindlichen Zahlen.

Wird die erste Spalte mit  $n = 0$  und die letzte mit  $m = n$  bezeichnet, so wird

$$c_{m0} = f m$$

$$c_{mm} = 1$$

und die Rekursion

$$c_{mn} = c_{m-1n-1} + c_{m-1n}$$

Analytisch wird

$$c_{mn} = f \binom{m}{n+1} + \binom{m-1}{n-1}$$

wobei  $\binom{m}{n}$  der Binomialkoeffizient ist.

Für  $f = 6$  ergeben sich überraschender Weise

$$c_{m2} = (m-1)^3$$

$$c_{m3} = 1/4 (m-1)^2 (m-2)^2$$

d.h. aufeinanderfolgende Kuben  $(m-1)^3$  und nicht aufeinanderfolgende Quadrate  $n^2 = ((m-1)(m-2)/2)^2$ . Für die Summe der  $m$ -ten Reihe ( $m > 0$ ) ergibt sich  $\sum_{n=0}^m c_{mn} = 2^{m-1} + f(2^m - 1)$

### Zentraler Binomialkoeffizient

... spezieller Binomialkoeffizient mit  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

wobei unter  $\lfloor n/2 \rfloor$  der ganzzahlige Anteil der Division von  $n$  mit 2 verstanden wird. Die ersten Werte für  $n = 1, 2, 3, \dots$  sind 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126, 252, ...

### Alternativer Binomialkoeffizient, mittlerer Binomialkoeffizient

Der alternative Binomialkoeffizient ist ein spezieller Binomialkoeffizient mit  $\binom{2n}{n} = (2n)! / (n!)^2$

Der Name "mittlerer Binomialkoeffizient" wird genutzt, dass diese Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck genau in der Zeilenmitte liegen.

Die ersten Werte für steigendes  $n$  sind 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, 184756, ...

Erdős-Vermutung: Der alternative Binomialkoeffizient ist für alle  $n > 4$  nicht quadratfrei.

Die Erdős-Vermutung wurde 1996 von Granville und Ramare bewiesen.

Weiterhin gilt (alle Summen werden für  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$  gebildet):

$$\sum 1/\binom{2n}{n} = 1/27 (2\pi\sqrt{3} + 9) = 0.7363998587 \dots$$

$$\sum 1/(n \cdot \binom{2n}{n}) = \pi/9 \sqrt{3} = 0.6045997881 \dots$$

$$\sum 1/(n^2 \cdot \binom{2n}{n}) = 1/3 \zeta(2) = \pi^2 / 8$$

$$\sum 1/(n^4 \cdot \binom{2n}{n}) = 17/36 \zeta(4) = 17/3240 \pi^4$$

### Polynomialkoeffizient, Multinomialkoeffizient

Der Polynomialkoeffizient oder Multinomialkoeffizient ist eine Erweiterung des Binomialkoeffizienten.

Für nichtnegative ganze Zahlen  $n, k_1, \dots, k_r$  mit  $k_1 + \dots + k_r = n$  ist er definiert als

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = n! / (k_1! \cdot \dots \cdot k_r!)$$

Dieser ist stets eine natürliche Zahl. Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  ist ein Sonderfall des

Polynomialkoeffizienten mit  $\binom{n}{k_1, k_2}$  und  $k_1 = k, k_2 = n-k$ . Ist  $r = 3$  spricht man vom

Trinomialkoeffizienten.

In Verallgemeinerung des binomischen Satzes gilt der sogenannte Polynomialsatz oder Multinomialatz

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{k_1 + \dots + k_r = n} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_r^{k_r}$$

Anwendung findet der Multinomialkoeffizient in der Multinomialverteilung, einer

Wahrscheinlichkeitsverteilung diskreter Zufallsvariablen.

Beispiele:

$$1) \quad \binom{9}{4, 3, 1, 1} = 9! / (4! 3! 1! 1!) = \binom{9}{4} \binom{5}{3} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 2520$$

2) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die 32 Karten eines Skatspiels zu je 10 Karten an die 3 Spieler sowie zu 2 Restkarten in den Skat zu legen?

Die Antwort liefert der Polynomkoeffizient:  $\binom{32}{10,10,10,2} = 32! / (10! 10! 10! 2!) = 2\,753\,294\,408\,504\,640$

### Pascalsche Pyramide, Trinomialkoeffizient

Die Pascalsche Pyramide ist eine dreidimensionale Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks. Sie enthält die Multi- bzw. Polynomkoeffizienten dritter Ordnung, die Trinomialkoeffizienten, d.h. die Koeffizienten von  $(a + b + c)^n$  stehen auf Ebene  $n+1$ .

Wie im Pascalschen Dreieck beginnt die Pascalsche Pyramide mit einer einzelnen 1 auf der obersten Ebene, der Spitze der Pyramide. Jede weitere Zahl ist die Summe der drei über ihr stehenden Zahlen. Alle besonderen Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks lassen sich sinngemäß auch auf die Pascalsche Pyramide anwenden.

Die Trinomialkoeffizienten sind gegeben durch  $\frac{(i+j+k)!}{(i! j! k!)}$  mit  $i+j+k = n$ . Die Identität  $\frac{(i+j+k)!}{(i! j! k!)} = \frac{(i+j+k)!}{((i+j)! k!)} \cdot \frac{(i+j)!}{(i! j!)}$  ergibt die Konstruktionsvorschrift für die  $(n+1)$ -te Ebene

1) Bilde zunächst die drei Seiten des Dreiecks. Diese entsprechen der  $(n+1)$ -ten Zeile im Pascalschen Dreieck.

2) Fülle die  $m$ -te Zeile mit den Einträgen aus der  $m$ -ten Zeile des Pascalschen Dreiecks, multipliziert mit dem an den Seiten bereits eingetragenen Faktor.

Die Summe aller Zahlen der  $n$ -ten Ebene ist  $3^n - 1$ . Die Summe aller Zahlen von der ersten bis zur  $n$ -ten Ebene ist gleich  $(3^n - 1)/2$ .

### Bell-Dreieck

Zahlendreieck, welches die Bell-Zahlen enthält.

$B_n = \sum_{k=1}^n n_k$   
 $\{n_k\}$  ist die Stirlingsche-Zahl 2.Art

1	2	5	15	52	203	877	...
1	3	10	37	151	674	...	
	2	7	27	114	523	...	
		5	10	87	409	...	
			15	67	322	...	
				52	255	...	
					203	...	

Rekursion:  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n B_k \binom{n}{k}$

Die ersten Bell-Zahlen sind

1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147, 82864869804, 682076806159, 5832742205057, 51724158235372, 474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346, 445958869294805289, 4638590332229999353, ...

### Ackermann-Zahl

Ein Zahl der Form  $n \uparrow \dots \uparrow n$  (mit  $n$ -mal  $\uparrow$ -Operator) heißt Ackermann-Zahl. Dabei stellt  $\uparrow$  die Pfeil-Notation dar. Die ersten Ackermann-Zahlen sind damit:

$1 \uparrow 1 = 1$        $2 \uparrow \uparrow 2 = 4$        $3 \uparrow \uparrow \uparrow 3 = 3^{3^{3^{\dots^{3^3}}}}$ , d.h. 7625597484987 mal eine „3“

### Bell-Zahl

Diese Zahlen wurden nach Eric Temple Bell benannt. Die Bellzahl bezeichnet die Anzahl möglicher Partitionen über eine Menge mit  $n$  Elementen. Es gilt

$$B_n = \sum_{k=1}^n \{n_k\}$$

wobei  $\{n_k\}$  die Stirlingsche-Zahl 2.Art ist.

Rekursion:  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n B_k \binom{n}{k}$

Beispielsweise ist die Bellzahl für eine 3-elementige Menge die 5, da sich die Menge  $\{a,b,c\}$  in folgende 5 Möglichkeiten partitionieren lässt:

1.  $\{a,b,c\}$ ; 2.  $\{a,b\}$  und  $\{c\}$ ; 3.  $\{a,c\}$  und  $\{b\}$ ; 4.  $\{b,c\}$  und  $\{a\}$ ; 5.  $\{a\}$  und  $\{b\}$  und  $\{c\}$ .

Die ersten Bell-Zahlen sind

1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678570, 4213597, 27644437, 190899322, 1382958545, 10480142147, 82864869804, 682076806159, 5832742205057, 51724158235372, 474869816156751, 4506715738447323, 44152005855084346, 445958869294805289, 4638590332229999353, ...

Die größte bekannte prime Bellzahl  $B_{2841}$  hat 6539 Ziffern und wurde 2004 von Canestro gefunden.

### Stirling-Zahlen

In der Mathematik kennt man zwei verschiedene Typen von Stirling-Zahlen, die erster und zweiter Art; benannt nach James Stirling. Die Stirling-Zahl erster Art oder Stirling-Zyklus-Zahl  $s(n,r) = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right]$  beschreibt die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten eine Permutation mit  $n$  Elementen in  $r$  Zyklen zu zerlegen. Dabei gilt

$$s(n,r) = s(n-1,r-1) + (n-1) \cdot s(n-1,r)$$

mit den Anfangswerten  $s(0,0) = 1$ ;  $s(n,n) = 1$ ;  $s(n,0) = 0$  für  $n > 0$ ;  $s(0,r) = 0$  für  $r > 0$

Zum Beispiel ist  $s(4,2) = 11$ , da die Menge  $M\{a,b,c,d\}$  auf 11 verschiedenen Arten in zwei Zyklen ( $r = 2$ ) zerlegt werden:

$a,b,c,d \mid a,c,b,d \mid a,b,d,c \mid a,d,b,c \mid a,c,d,b \mid a,d,c,b \mid a,b,c,d \mid a,b,d,c \mid a,b,c,d \mid a,c,b,d \mid a,d,b,c$

Die Stirling-Zahl zweiter Art oder Stirling-Mengen-Zahl

$$S(n,r) = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\}$$

beschreibt die Anzahl der unterschiedlichen Möglichkeiten aus einer Menge mit  $n$  Elementen  $r$  nichtleere, disjunkte Teilmengen zu bilden. Jede solche Möglichkeit ist eine Partition mit  $r$  Teilmengen. Hier gilt:

$$S(n,r) = S(n-1,r-1) + r \cdot S(n-1,r)$$

mit den Anfangsbedingungen  $S(0,0) = 1$ ;  $S(n,n) = 1$ ;  $S(n,0) = 0$  für  $n > 0$ ;  $S(0,r) = 0$  für  $r > 0$

Für das Beispiel gilt  $S(4,2) = 7$ . Die Menge  $M = \{a,b,c,d\}$  kann auf sieben verschiedenen Arten in 2 nichtleere, disjunkte Teilmengen zerlegt werden:  $\{a,b\},\{c,d\}$  |  $\{a,c\},\{b,d\}$  |  $\{a,d\},\{b,c\}$  |  $\{a,b,c\},\{d\}$  |  $\{a,b,d\},\{c\}$  |  $\{b,c,d\},\{a\}$  |  $\{a,c,d\},\{b\}$

n	Stirling-Zahlen				Bell-Zahl	
1				1	1	Für die Stirling-Zahlen existiert eine Analogie zu den Binomialkoeffizienten. Es gilt
2		1		1	2	$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + (n-1) \cdot \binom{n-1}{k}$
3			1	3	5	und $\{n_k\} = \{n-1_{k-1}\} + k \cdot \{n-1_k\}$
4	1			7	15	Die Stirling-Zahlen 2.Art können in einem dem Pascalschen Dreieck ähnlichen Muster angeordnet werden.
5	1	1		15	52	
6	1	31		90	203	

Im Stirling-Dreieck der Stirling-Zahlen 2.Art  $\{n_k\}$  ergibt sich damit eine Zahl, in dem die links darüberstehende Zahl mit dem  $k$ -fachen der rechts darüberstehenden Zahl addiert wird. Die Summe der Zahlen einer  $n$ -ten Spalte ergibt gerade die  $n$ -te Bell-Zahl  $B_n$ .

Für die Stirling-Zykluszahlen gilt:  $\{n_1\} + \{n_2\} + \dots + \{n_n\} = n!$

### Langford-Problem

Durch den englischen Mathematiker C.Dudley Langford wurde folgendes Problem veröffentlicht: Gesucht sind alle Zahlen, die jede Ziffer von 1 bis  $n$  genau zweimal enthalten, und bei denen zwischen den beiden Einsen eine andere Ziffer steht, zwischen den beiden Zweien zwei andere Ziffern, zwischen den beiden Dreien drei Ziffern usw.

Für  $n = 1, 2, 5$  und  $6$  existieren derartige Zahlen nicht. Für  $n = 3$  und  $4$  gibt es, abgesehen von den beiden Umkehrzahlen, nur die Lösungen 231213 und 23421314.

Für  $n = 7$  existieren 26 Lösungen (Umkehrung nicht berücksichtigt):

17125623475364	17126425374635	23726351417654	24723645317165
26721514637543	27423564371516	35723625417164	35743625427161
36713145627425	37463254276151	41716425327635	51716254237643
52732653417164	57141653472362	57236253471614	57263254376141
57416154372632	62742356437151	71316435724625	71416354732652
72452634753161	72462354736151	72632453764151	73161345726425
73625324765141	74151643752362		

Das Langford-Problem ist nur für solche  $n$  lösbar, die bei der Division mit 4 keinen Rest oder einen Rest von 3 lassen.

Bis  $n = 22$  sind alle möglichen Lösungen bekannt. Für  $n = 23$  konnten 2004 mit Computerhilfe insgesamt 3 799 455 942 515 488 verschiedene Lösungen berechnet werden.

Das Langford-Problem kann für kleinere  $n$  relativ schnell mittels Computer gelöst werden. Dazu bietet sich vor allem ein rekursiver Algorithmus an. Eine mögliche Umsetzung in Pascal/Delphi ist:

```

procedure langfordberechnen;
var feld:array[1..32] of integer; n,n2:integer;
procedure setzen(ziffer:integer);
var position,pE : integer;
begin
  IF Ziffer = 1 then position := n else position :=1;
  pE :=position+ziffer+1;
  repeat
    if feld[position]=feld[pE] then begin
      feld[position]:=ziffer; feld[pE]:=ziffer;
      IF Ziffer < n then setzen(ziffer+1)
      else ... //hier Ausgabe der Ergebnisse
      feld[position]:=0; feld[pE]:=0;
    end;
    inc(pE); inc(position);
  until pE > n2;
end;
begin
  n:=... //Eingabe von n
  n2:= 2*n;
  fillchar(feld,SizeOf(feld),#0);
  setzen(1);
end;

```

## Proportionen

*Aber du hast alles geordnet mit mas, zahl und gewicht.  
(Weis. 11,21, übersetzt von Martin Luther)*

... Verhältnis  $a : b$  zweier Zahlen ; lat. proportio = Ebenmaß

Es gilt  $a / b = c / d$  ist äquivalent zu  $a \cdot d = b \cdot c$  ;  $b$  und  $d \neq 0$

Die Gleichung  $a / b = c / d$  wird Verhältnisgleichung genannt.  $a$  und  $d$  heißen Außenglieder,  $b$  und  $c$  Innenglieder,  $a$  und  $c$  Vorderglieder,  $b$  und  $d$  Hinterglieder.

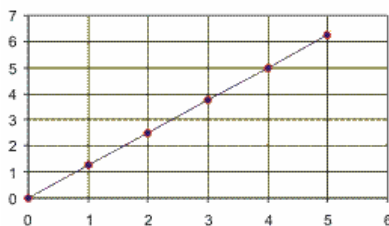
Seien  $a, b, c, d$  Variable und  $a/b$  bzw.  $c/d$  Verhältnisse, dann heißen  $a/b$  und  $c/d$  zueinander proportional, wenn in der Gleichung  $a/b = k \cdot c/d$ ,  $k$  eine Konstante ist.

### Produktgleichung

In jeder Proportion ist das Produkt der Innenglieder gleich dem Produkt der Außenglieder.

### Vertauschungssätze

In jeder Proportion führt das Vertauschen der beiden Außenglieder, der beiden Innenglieder oder der Innenglieder mit den Außengliedern wieder zu wahren Proportionen.



### Direkte und indirekte Proportionalität

Eine Zuordnung von Größen heißt direkte Proportionalität, wenn zwei veränderliche Größen  $x$  und  $y$  immer den gleichen Quotienten  $k$  bilden, d.h. eine Größe  $y$  heißt direkt proportional zu  $x$ , wenn  $y = k \cdot x$  oder  $y / x = k$  gilt.

Man schreibt:  $y \sim x$

Der Faktor  $k$  heißt dann Proportionalitätsfaktor.

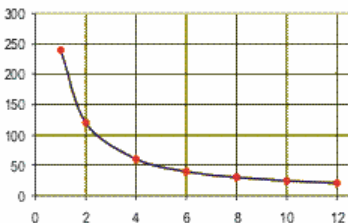
Merkmale der direkten Proportionalität: Je größer die eine Größe ist, desto größer ist auch die andere Größe. Wird eine Größe verdoppelt, so verdoppelt sich auch die andere Größe. Wird die Größe halbiert, so halbiert sich auch die andere.

Alle Quotienten einander zugeordneter Paare sind gleich.

Man kann alle Werte der einen Größe mit demselben Faktor, dem Proportionalitätsfaktor  $k$ , multiplizieren und erhält stets den zugeordneten Wert.

Wird der Zusammenhang zwischen den beiden Größen grafisch dargestellt, so liegen alle Punkte auf einer Geraden. Diese verläuft durch den Koordinatenursprung, aber sie fällt mit keiner der beiden Achsen zusammen.

Der Anstieg der Geraden entspricht dem Proportionalitätsfaktor.



### Indirekte Proportionalität, Antiproportionalität

Eine Zuordnung von Werten heißt indirekte Proportionalität, wenn zwei veränderliche Größen  $x$  und  $y$  stets das gleiche Produkt  $k$  bilden, d.h. eine Größe  $y$  heißt indirekt proportional oder antiproportional zu  $x$ , wenn  $y = k / x$  oder  $y \cdot x = k$  gilt und  $k$  eine Konstante ist.

Man schreibt:  $y \sim 1/x$

Merkmale der indirekten Proportionalität: Je größer die eine Größe ist, desto kleiner ist die andere Größe. Wird eine Größe verdoppelt, so halbiert sich die andere Größe.

Wird eine Größe halbiert, so verdoppelt sich die andere. Alle Produkte einander zugeordneter Paare sind gleich.

Wird der Zusammenhang zwischen den beiden Größen grafisch dargestellt, so liegen alle Punkte auf einer gekrümmten Linie. Diese Linie nennt man einen Hyperbelast.

### Historische Proportionen

In der darstellenden und bildenden Kunst der Renaissance spielten Proportionen eine wichtige Rolle. Um als "schön" zu gelten, mussten folgende Proportionen in Gemälden und Plastiken eingehalten werden.

**Mensch** Kopf : Körperlänge =  $1 : 8$  ; Kopf : Gesicht =  $5 : 4$  ; Rumpf : Oberschenkel =  
Oberschenkel : Unterschenkel

**Gebäude** Höhe eines Gebäudes : Breite eines Gebäudes =  $3 : 7$

### Proportionen bei Euklid

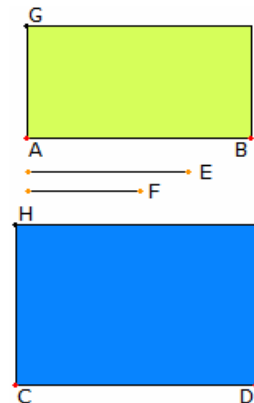
Im VI. Buch der "Elemente" zeigt Euklid mehrere Beziehungen für Proportionen, u.a. dass aus  $a : b = c : d$  auch  $a \cdot d = b \cdot c$  folgt.

$$c = a \cdot d / b \quad d = b \cdot c / a$$

Euklids "Elemente" Buch VI: § 16 (L. 11):

**Stehen vier Strecken in Proportion, so ist das Rechteck aus den äußeren dem Rechteck aus den mittleren gleich. Und wenn das Rechteck aus den äußeren Strecken dem Rechteck aus den mittleren gleich ist, dann müssen die vier Strecken in Proportion stehen.**

AB, CD, E, F seien vier in Proportion stehende Strecken,  $AB : CD = E : F$ . Ich behaupte, dass  $AB \cdot F = CD \cdot E$ . Man ziehe AG, CH von den Punkten A, C aus rechtwinklig zu den geraden Linien AB, CD, mache  $AG = F$ ,  $CH = E$  und vervollständige die Parallelogramme BG, DH.  
 Da  $AB : CD = E : F$ , während  $E = CH$ ,  $F = AG$ , so ist  $AB : CD = CH : AG$ . In den Parallelogrammen BG, DH sind also die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional. Winkelgleiche Parallelogramme, in denen die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional sind, sind aber gleich (VI, 14); also ist Parallelogramm BG = Parallelogramm DH.  
 Hier ist  $BG = AB \cdot F$ ; denn  $AG = F$ ; und DH ist  $CD \cdot E$ ; denn  $E = CH$ . Also ist  $AB \cdot F = CD \cdot E$ .  
 Zweitens sei  $AB \cdot F = CD \cdot E$ . Ich behaupte, dass die vier Strecken in Proportion stehen,  $AB : CD = E : F$ . Man konstruiere ebenso.  
 Dann ist, da  $AB \cdot F = CD \cdot E$ , während  $AB \cdot F$  wegen  $AG = F$  das Parallelogramm BG und  $CD \cdot E$  wegen  $CH = E$  das Parallelogramm DH ist,  $BG = DH$ ; und sie sind winkelgleich.  
 In gleichen winkelgleichen Parallelogrammen sind aber die Seiten um gleiche Winkel umgekehrt proportional (VI, 14); also ist  $AB : CD = CH : AG$ . Nun ist  $CH = E$ ,  $AG = F$ . Also ist  $AB : CD = E : F$ . S.  
 Anmerkung: Übersetzung des Originaltextes von Clemens Thaer (1937)



**Korrespondierende Addition und Subtraktion**

Aus  $a : b = c : d$  folgt

$$(a \pm b) : a = (c \pm d) : c \qquad (a \pm b) : b = (c \pm d) : d$$

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d) \qquad (pa \pm qb) : (ra \pm sb) = (pc \pm qd) : (rc \pm sd)$$

**Stetige Proportion**

$a : b = b : c$ ; gleiche Innenglieder

**3. Proportionale**

$x = b^2/a$

**Vierte Proportionale**

$x = bc/a$

**Mittlere Proportionale**

$x = \sqrt{ab}$

**Stetige harmonische Proportion**

$(a - x) : (x - b) = a : b$

$x = 2ab / (a+b)$

$1/x = 1/2 (1/a + 1/b)$

**Fortlaufende Proportion**

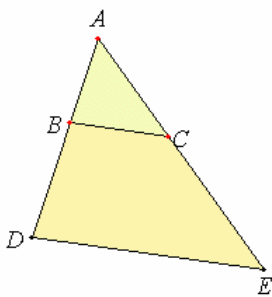
Für die Zahlen A, B, C, p, q und r gelte:  
 Dann gilt

$A : B = p ; B : C = q ; C : A = r$   
 $A : B : C = \sqrt[3]{(p/r)} : \sqrt[3]{(q/p)} : \sqrt[3]{(r/q)}$   
 $A : B : C = \sqrt[3]{(p^2 q)} : \sqrt[3]{(q^2 r)} : \sqrt[3]{(r^2 p)}$

**Dritte Proportionale bei Euklid**

"Elemente" Buch VI: § 11 (A. 3):

**Zu zwei gegebenen Strecken die Dritte Proportionale zu finden.**



Die gegebenen Strecken seien BA, AC; man habe sie so gelegt, dass sie einen beliebigen Winkel umfassen. Man soll zu BA, AC die Dritte Proportionale finden. Man verlängere die Strecken nach den Punkten D, E, mache  $BD = AC$ , ziehe BC und hierzu parallel DE durch D (I, 29, 16, Post. 5).  
 Da man im Dreieck ADE  $BC \parallel DE$ , einer der Seiten gezogen hat, so stehen in Proportion  $AB : BD = AC : CE$  (VI, 2). Nun ist  $BD = AC$ ; also ist  $AB : AC = AC : CE$ . Also hat man zu zwei gegebenen Strecken AB, AC ihre Dritte Proportionale gefunden, nämlich CE - dies hatte man ausführen sollen.

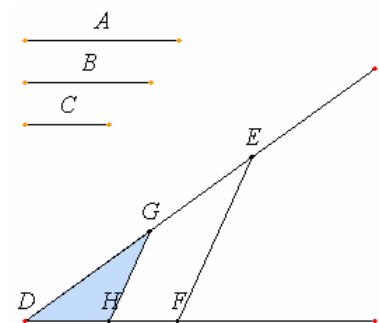
**Vierte Proportionale bei Euklid**

"Elemente" Buch VI: § 12 (A. 4):

**Zu drei gegebenen Strecken die Vierte Proportionale zu finden.**

Die drei gegebenen Strecken seien a, b, c. Man soll zu a, b, c die Vierte Proportionale finden.

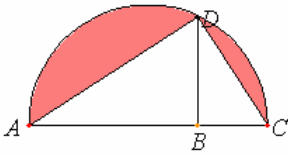
Man ziehe zwei gerade Linien DE, DF, die einen beliebigen Winkel EDF umfassen, trage  $DG = a$ ,  $GE = b$ , und  $DH = c$ , ziehe GH und hierzu parallel EF durch E (I, 29, 16, Post. 5) Da man im Dreieck DEF GH  $\parallel EF$ , einer der Seiten gezogen hat, ist  $DG : GE = DH : HF$  (VI, 2). Nun ist  $DG = a$ ,  $GE = b$ ,  $DH = c$ , also ist  $a : b = c : HF$ .  
 Also hat man zu drei gegebenen Strecken a, b, c die Vierte Proportionale gefunden, nämlich HF - dies hatte man ausführen sollen.



## Mittlere Proportionale bei Euklid

"Elemente" Buch VI: § 13 (A. 5):

**Zu zwei gegebenen Strecken die Mittlere Proportionale zu finden.**



Die zwei gegebenen Strecken seien AB, BC. Man soll zu AB, BC die Mittlere Proportionale finden.

Man habe die Strecken in gerade Fortsetzung voneinander gelegt. Dann zeichne man über AC den Halbkreis ADC, ziehe BD vom Punkte B aus rechtwinklig zur geraden Linie AC und ziehe AD, DC. Als Winkel im Halbkreis ist ADC ein Rechter (III, 31). Und da man im rechtwinkligen Dreieck ADC aus dem

rechten Winkel auf die Grundlinie das Lot DB gefällt hat, so ist DB Mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Grundlinie, AB und BC (VI, 8, Zus.). Also hat man zu zwei gegebenen Strecken AB, BC die Mittlere Proportionale gefunden, nämlich DB - dies hatte man ausführen sollen.

## Allgemeine Proportionen

Entsprechend ihrer Philosophie "Alles ist Zahl" untersuchten die Pythagoreer ganze Zahlen und deren Proportionen. Neben dem arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel sind auch andere Verhältnisse konstruierbar.

Im 1. Jahrhundert v.u.Z. lebte die pythagoreische Bewegung in Form der Neupythagoreer wieder auf. Diese betrachteten zehn mögliche Proportionen von drei Zahlen a, b und c:

Proportion      Beispielfolge

(1)  $(c - b)/(b - a) = c/c \Rightarrow b = (a+c)/2$ , arithmetisches Verhältnis (1, 2, 3, 4, ...)  
 $\Rightarrow c = 2b - a$

(2)  $(c - b)/(b - a) = c/b \Rightarrow b = \sqrt{ac}$ , geometrisches Verhältnis (1, 2, 4, 8, ...)  
 $\Rightarrow c = b^2/a$

(3)  $(c - b)/(b - a) = c/a \Rightarrow b = 2ac/(a+c)$ , harmonisches Verhältnis (2, 3, 6)  
 $\Rightarrow c = ab/(2a-b)$

(4)  $(b - a)/(c - b) = c/a \Rightarrow b = (a^2+c^2)/(a+c)$  (3, 5, 6,  $3+\sqrt{14}$ , ...)  
 $\Rightarrow c = (\sqrt{b^2+4ab-4a^2}+b)/2$

(5)  $(b - a)/(c - b) = b/a \Rightarrow b = (\sqrt{5a^2-2ac+c^2}-a+c)/2$  (2, 4, 5,  $29/5$ , ...)  
 $\Rightarrow c = -(a^2-ab-b^2)/b$

(6)  $(b - a)/(c - b) = c/b \Rightarrow b = (\sqrt{a^2-2ac+5c^2}+a-c)/2$  (1, 4, 6,  $3+\sqrt{21}$ , ...)  
 $\Rightarrow c = (b-\sqrt{5b^2-4ab})/2$

(7)  $(c - a)/(b - a) = c/a \Rightarrow b = a(2c-a)/c$  (6, 8, 9,  $64/7$ , ...)  
 $\Rightarrow c = a^2/(2a-b)$

(8)  $(c - a)/(c - b) = c/a \Rightarrow b = (a^2-ac+c^2)/c$  (6, 7, 9,  $8+\sqrt{15}$ , ...)  
 $\Rightarrow c = (\sqrt{b^2+2ab-3a^2}+a+b)/2$

(9)  $(c - a)/(b - a) = b/a \Rightarrow b = (\sqrt{4ac-3a^2}+a)/2$  (4, 6, 7,  $43/6$ , ...)  
 $\Rightarrow c = (a^2-ab+b^2)/a$

(10)  $(c - a)/(c - b) = b/a \Rightarrow b = c-a$ , Fibonacci-Reihe (3, 5, 8, 13, 21, ...)  
 $\Rightarrow c = a+b$

Überraschend ist, dass das letzte Verhältnis die Fibonacci-Reihe ergibt.

## Arithmetik bei Euklid

Im Buch II der "Elemente" gibt Euklid grundlegende Regeln der Arithmetik an; in der damals üblichen geometrischen Behandlungsweise.

"Elemente" Buch II: § 1 (L. 1):

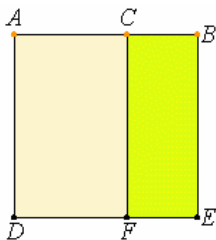
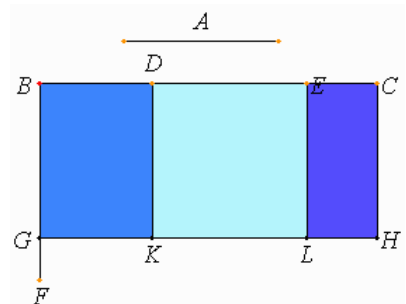
**Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.**

Die zwei Strecken seien A, BC; man teile BC beliebig, in den Punkten D, E. Ich behaupte, dass  $A * BC = A * BD + A * DE + A * EC$ .

Man ziehe nämlich von B aus  $BF \perp BC$ , trage  $BG = A$  ab, ziehe durch G  $GH \parallel BC$  und durch D, E, CD  $K$ ,  $EL$ ,  $CH \parallel BG$ .

Hier ist Parallelogramm  $BH = BK + DL + EH$ .  $BH$  ist nun  $A * BC$ ; denn es wird von  $GB$ ,  $BC$  umfasst (II, Definition 1), und  $BG = A$ . Und  $BK$  ist  $A * BD$ ; denn es wird von  $GB$ ,  $BD$  umfasst, und  $BG = A$ . Und  $DL$  ist  $A * DE$ ; denn  $DK$ , d.h.  $BG$  (I, 34) =  $A$ . Ähnlich ist  $EH$  schließlich  $A * EC$ . Also ist  $A * BC = A * BD + A * DE + A * EC - S$ .

Moderne Schreibweise:  $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$



"Elemente" Buch II: § 2 (L. 2):

**Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so sind die Rechtecke aus der ganzen Strecke und den beiden einzelnen Abschnitten zusammen dem Quadrat über der ganzen Strecke gleich.**

Man teile die Strecke AB beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass  $AB * BC + BA * AC = AB^2$ .



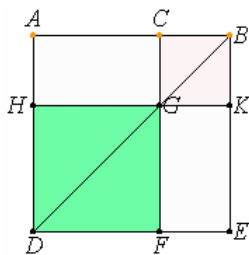
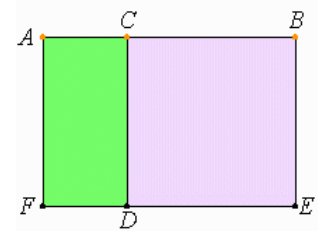
$AC = AB^2$ .

Man zeichne nämlich über AB das Quadrat ADEB und ziehe durch C CF || AD oder BE. Hier ist Parallelogramm AE = AF + CE; AE ist nun  $AB^2$ . Und AF ist  $BA * AC$ ; denn es wird von DA, AC umfasst, und AD = AB. Und CE ist  $AB * BC$ ; denn BE = AB. Also sind  $BA * AC + AB * BC = AB^2 - S$ .

Moderne Schreibweise:  $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$

"Elemente" Buch II: § 3 (L. 3):

**Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte dem Rechteck aus den Abschnitten und dem Quadrat über vorgenanntem Abschnitt zusammen gleich.**



Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, dass  $AB * BC = AC * CB + BC^2$ . Man zeichne nämlich über CB das Quadrat CDEB, verlängere ED nach F und ziehe durch A AF || CD oder BE. Hier ist Parallelogramm AE = AD + CE. AE ist nun  $AB * BC$ , denn es wird von AB, BE umfasst, und BE = BC. Und AD ist  $AC * CB$ ; denn DC = CB. Und DB ist  $CB^2$ . Also ist  $AB * BC = AC * CB + BC^2 - S$ . Moderne Schreibweise:  $(a + b)a = a^2 + ab$

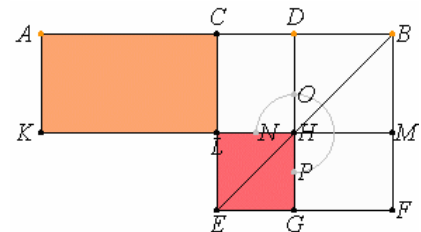
**Klammersetze bei Euklid**

Euklids "Elemente" Buch II: § 4 (L. 4):

**Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.**

Man teile die Strecke AB beliebig, in C. Ich behaupte, dass  $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 AC * CB$ . Man zeichne nämlich über AB das Quadrat ADEB, ziehe BD, ferner durch C CF || AD oder EB und durch G HK || AB oder DE.

Da CF || AD, und BD sie schneidet, so ist der äußere Winkel CGB dem innen gegenüberliegenden ADB gleich (I, 29). Aber ADB = ABD, da die Seite BA = AD (I, 5); also ist auch  $\angle CGB = \angle GBC$  (Ax. 1), so dass auch die Seite BC = der Seite CG (I, 6). Andererseits ist  $CB = GK$  (I, 34) und  $CG = KB$ ; also ist auch  $GK = KB$  (Ax. 1); also ist CGKB gleichseitig. Ich behaupte, dass es auch rechtwinklig ist. Da nämlich  $CG || BK$  und die gerade Linie CB sie schneidet, so sind  $\angle KBC + \angle GCB = 2 R$ . (I, 29). KBC ist aber ein Rechter; also ist auch BCG ein Rechter (Ax. 3); daher sind auch die gegenüberliegenden Winkel CGK, GKB Rechte (I, 34). CGKB ist also rechtwinklig. Die Gleichseitigkeit ist oben bewiesen. Also ist es ein Quadrat, und zwar über CB.



Aus demselben Grunde ist auch HF ein Quadrat, und zwar über HG, d.h. über AC (I, 34); HF, KC sind also  $AC^2, CB^2$ . Da ferner Pgm.  $AG = GE$  (I, 43) und  $AG = AC * CB$ , weil  $GC = CB$ , so ist auch  $GE = AC * CB$ , also  $AG + GE = 2 AC * CB$ . Man hat aber auch  $AC^2, CB^2$ , nämlich HF, CK; also sind  $HF + CK + AG + GE = AC^2 + CB^2 + 2 AC * CB$ . HF, CK, AG, GE bilden aber zusammen ADEB, d.h.  $AB^2$ . Also ist  $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2 AC * CB$ .

Zusatz: Hiernach ist klar, dass in jedem Quadrat die Parallelogramme um die Diagonale Quadrate sind.

Hinweis: In moderner algebraischer Schreibweise beweist Euklid in § 4 die Gleichung

$$(a + b + c + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + \dots + 2bc + \dots$$

Euklids "Elemente" Buch II: § 5 (L. 5):

**Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.**

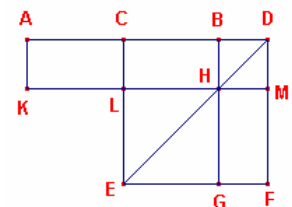
Eine Strecke AB teile man in gleiche Abschnitte in C und in ungleiche in D. Ich behaupte, dass  $AD * DB + CD^2 = CB^2$ .

Man zeichne über CD das Quadrat CEFB, ziehe BE, ferner durch D DG || CE oder BF, ebenso durch H KM || AB oder EF, und ebenso durch A AK || CL oder BM.

Hier ist die Ergänzung CH der Ergänzung HF gleich (I, 43); man füge daher DM beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm. CM dem ganzen DF gleich. Andererseits ist Pgm.  $CM = AL$ , da  $AC = CB$  (I, 36); also ist auch Pgm.  $AL = DF$ . Man füge CH beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm. AH = Gnomon NOP (II, Def. 2).

AH ist aber  $AD * DB$ ; denn  $DH = DB$  (II, 4); also ist Gnomon NOP =  $AD * DB$ . Man füge  $LG = CD^2$  beiderseits hinzu; dann sind Gnomon NOP + LG =  $AD * DB + CD^2$ . Gnomon NOP und LG bilden aber zusammen das Quadrat CEFB, d.h.  $CB^2$ . Also sind  $AD * DB + CD^2 = CB^2$ .

Hinweis: Setzt man  $AD = a, BD = b$ , so wird in moderner algebraischer



Schreibweise  $CB = (a+b)/2$  und  $CD = (a-b)/2$  und folglich

$$a * b + [(a-b)/2]^2 = [(a+b)/2]^2. \text{ Wird nun } a = 2n^2 \text{ und } b = 2 \text{ gesetzt, ergibt sich } (2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$$

Für  $a = m^2$  und  $b = 1$  ergibt sich

$$m^2 + [(m-1)/2]^2 = [(m+1)/2]^2$$

und somit die platonische bzw. pythagoreische Regel zur Erzeugung von pythagoreischen Zahltripeln.

### Binomische Formel bei Euklid

Euklids "Elemente" Buch II: § 6 (L. 6):

**Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.**

Eine Strecke AB halbiere man im Punkte C und setze ihr eine Strecke BD gerade an. Ich behaupte, dass  $AD * DB + CB^2 = CD^2$ .

Man zeichne über CD das Quadrat CEFD, ziehe DE, ferner durch Punkt B  $BG \parallel EC$  oder  $DF$ , durch Punkt H  $KM \parallel AB$  oder  $EF$ , schließlich durch A  $AK \parallel CL$  oder  $DM$ .

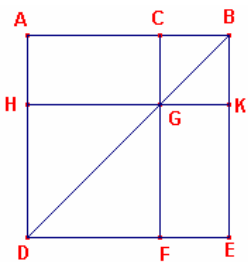
Da hier  $AC = CB$ , ist auch Pgm.  $AL = CH$  (I, 36). Andererseits ist Pgm.  $CH = HF$  (I, 43); also ist auch Pgm.  $AL = HF$ . Man füge  $CM$  beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm.  $AM =$  Gnomon  $NOP$ .

$AM$  ist aber  $AD * DB$ ; denn  $DM = DB$ ; also ist Gnomon  $NOP = AD * DB$ . Man füge  $LG = BC^2$  beiderseits hinzu; dann sind  $AD * DB + CB^2 =$  Gnomon  $NOP + LG$ . Gnomon  $NOP$  und  $LG$  bilden aber zusammen das Quadrat  $CEFD$ , d.h.  $CD^2$ . Also sind  $AD * DB + CB^2 = CD^2$ . Hinweis: Setzt man  $AC = a$ ,  $CD = b$ , so wird in moderner algebraischer Schreibweise

$$(a + b)(b - a) + a^2 = b^2$$

$$(a + b)(b - a) = b^2 - a^2$$

und somit die heute 3.binomische Formel genannte Gleichung.



Euklids "Elemente" Buch II: § 7 (L. 7):

**Teilt man eine Strecke, wie er gerade trifft, so sind die Quadrate über der ganzen Strecke und über einem ihrer Abschnitte beide zusammen gleich zweimal dem Rechteck aus der ganzen Strecke und dem genannten Abschnitt und dem Quadrat über dem anderen Abschnitt zusammen.**

Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass  $AB^2 + BC^2 = 2 AB * AC + CA^2$ .

Man zeichne über AB das Quadrat ADEB und zeichne die Figur fertig. Hier ist Pgm.  $AG = GE$  (I, 43); man füge daher  $CF$  beiderseits hinzu; dann ist das ganze Pgm.

$AF$  dem ganzen  $CE$  gleich; also  $AF + CE = 2 AF$ .

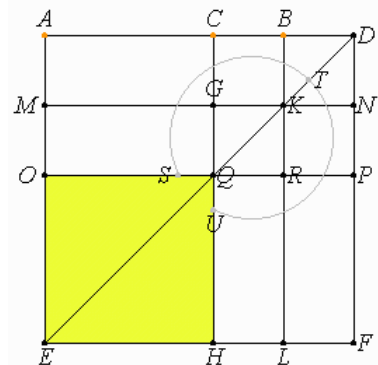
Andererseits bilden  $AF + CE$  Gnomon  $KLM +$  Quadrat  $CF$ ; also sind Gnomon  $KLM +$  Quadrat  $CF = 2 AF$ .  $2 AF$  ist aber auch  $2 AB * BC$ ; denn  $BF = BC$ . Also sind Gnomon  $KLM +$  Quadrat  $CF = 2 AB * BC$ .

Man füge  $DG$ , d.h.  $AC^2$  beiderseits hinzu; dann sind Gnomon  $KLM$  und die Quadrate  $BG, GD$  zusammen =  $2 AB * BC + AC^2$ . Gnomon  $KLM$  und Quadrate  $BG, GD$  bilden aber zusammen  $ADEB + CF$ , d.h.  $AB^2 + BC^2$ . Also sind  $AB^2 + BC^2 = 2 AB * BC + AC^2$ .

Hinweis: Setzt man  $AB = a$ ,  $BC = b$ , so wird in moderner algebraischer Schreibweise

$$a^2 + b^2 = 2 a b + (a - b)^2 \quad (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 a b$$

und somit die heute 2.binomische Formel genannte Gleichung.

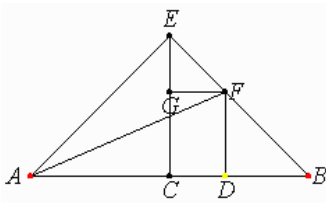


"Elemente" Buch II: § 8 (L. 8):

Teil man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist viermal das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte zusammen mit dem Quadrat über dem anderen Abschnitt dem über der ganzen Strecke und genanntem Abschnitt vereint gezeichneten Quadrat gleich.

Eine Strecke AB teile man beliebig, im Punkte C. Ich behaupte, dass  $4 AB * BC + AC^2 = (AB + BC)^2$ . Man setze nämlich  $BD$  an  $AB$  gerade an, mache  $BD = CB$ , zeichne über  $AD$  das Quadrat  $AEDF$  und zeichne die Doppelfigur fertig.

Da hier  $CB = BC$ , andererseits  $CB = GK$  und  $BD = KN$  (I, 34), so ist auch  $GK = KN$ . Aus demselben Grunde ist auch  $QR = RP$ . Und da sowohl  $BC = BD$  als auch  $GK = KN$ , so ist auch sowohl Pgm.  $CK = KD$  als auch Pgm.  $GR = RN$  (I, 36). Andererseits ist  $CK = RN$ ; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm  $CP$  (I, 43). Also ist auch Pgm.  $KD = GR$  (Ax. 1); also sind  $DK, CK, GR, RN$  alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also =  $4 CK$ . Ebenso ist, da  $CB = BD$ , andererseits  $BD = BK$ , d.h. =  $CG$ , und  $CB = GK$ , d.h. =  $GQ$ , auch  $CG = GQ$ . Und da sowohl  $CG = GQ$  also auch  $QR = RP$ , ist auch sowohl Pgm.  $AG = MQ$  als auch Pgm.  $QL = RF$ . Andererseits ist  $MQ = QL$ ; denn sie sind Ergänzungen im Parallelogramm  $ML$ . Also ist auch Pgm.  $AG = RF$ ; also sind  $AG, MQ, QL, RF$  alle vier einander gleich. Alle vier zusammen sind also =  $4 AG$ .



Wie oben bewiesen, sind  $CK + KD + GR + RN = 4 CK$ ; also sind die acht Flächenstücke, die den Gnomon STU bilden,  $= 4 AK$ . Da  $AK$  hier  $AB * BD$  ist, weil  $BK = BD$ , so ist  $4 AB * BD = 4 AK$ . Wie oben bewiesen, ist auch Gnomon STU  $= 4 AK$ ; also ist  $4 AB * BD + AC^2 = \text{Gnomon STU}$ . Man füge  $OH = AC^2$  beiderseits hinzu; dann sind  $4 AB * BD + AC^2 = \text{Gnomon STU} + OH$ . Andererseits bilden Gnomon STU + OH das Quadrat AEFD, d.h.  $AD^2$ ; also sind  $4 AB * BD + AC^2 = AD^2$ . Aber  $BD = BC$ ; also sind  $4 AB * BC + AC^2 = AD^2$ , d.h.  $= (AB + BC)^2 - S$ . Moderne Schreibweise:  $4 a b + (a - b)^2 = (a +$

b)<sup>2</sup>

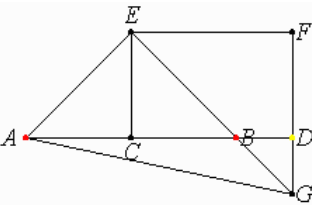
"Elemente" Buch II: § 9 (L. 9):

**Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so sind die Quadrate über den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke doppelt so groß wie die Quadrate über der Hälfte und über der Strecke zwischen den Teilpunkten zusammen.**

Eine Strecke AB teile man in gleiche Abschnitte in C und in ungleiche in D. Ich behaupte, dass  $AD^2 + DB^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$ . Man ziehe CE von C aus  $\perp$  AB und mache es sowohl AC als auch CB gleich, ziehe ferner EA, EB sowie durch D DF  $\parallel$  EC und durch F FG  $\parallel$  AB, und ziehe AF.

Da hier  $AC = CE$ , ist auch  $\angle EAC = AEC$  (I, 5). Und da der Winkel bei C ein Rechter ist, so sind die übrigen  $\angle EAC + AEC = 1 R.$  (I, 32); dabei sind sie gleich; also ist jeder der beiden  $\angle CEA, CAE = \frac{1}{2} R.$  Aus demselben Grunde ist auch jeder der beiden  $\angle CEB, EBC = \frac{1}{2} R.$ ; der ganze  $\angle AEB$  ist also ein Rechter. Und da  $GEF = \frac{1}{2} R.$ , EGF aber ein Rechter, weil dem innen gegenüberliegenden  $\angle ECB$  gleich (I, 29), so ist der letzte  $\angle EFG = \frac{1}{2} R.$  (I, 32); also ist  $\angle GEF = EFG$ ; folglich auch die Seite  $EG = GF$  (I, 6). Ebenso ist, da der Winkel bei B  $= \frac{1}{2} R.$  und FDB ein Rechter, weil wieder dem innen gegenüberliegenden  $\angle ECB$  gleich, der letzte  $\angle BFD = \frac{1}{2} R.$ ; also ist der Winkel bei B  $= DFB$ ; folglich auch Seite  $FD =$  Seite  $DB$ . Und da  $AC = CE$ , ist auch  $AC^2 = CE^2$ ; also sind  $AC^2 + CE^2 = 2 AC^2$ . Aber  $AC^2 + CE^2 = EA^2$ ; denn  $\angle ACE$  ist ein Rechter (I, 47); also ist  $EA^2 = 2 AC^2$ .

Ebenso ist, da  $EG = GF$ , auch  $EG^2 = GF^2$ ; also  $EG^2 + GF^2 = 2 GF^2$ . Aber  $EG^2 + GF^2 = EF^2$ ; also ist  $EF^2 = 2 GF^2$ . Aber  $GF = CD$  (I, 34); also ist  $EF^2 = 2 CD^2$ . Aber auch  $EA^2 = 2 AC^2$ ; also sind  $AE^2 + EF^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$ . Aber  $AE^2 + EF^2 = AF^2$ ; denn  $\angle AEF$  ist ein Rechter (I, 47); also ist  $AF^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$ . Aber  $AF^2 = AD^2 + DF^2$ ; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); also sind  $AD^2 + DF^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$ . Aber  $DF = DB$ ; also sind  $AD^2 + DB^2 = 2 (AC^2 + CD^2)$  - S. Moderne Schreibweise:  $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 (a^2 + b^2)$



"Elemente" Buch II: § 10 (L. 10):

**Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so sind die Quadrate über den ganzen Strecke mit Verlängerung und über der Verlängerung beide zusammen doppelt so groß wie das Quadrat über der Hälfte und das über der Hälfte und Verlängerung vereint gezeichnete Quadrat zusammen.**

Moderne Schreibweise:  $x^2 + (x + 2b)^2 = 2 (b^2 + (b + x)^2)$  und damit

$$[(2b + x)^2 - 2 (b + x)^2] = - (x^2 - 2b^2)$$

Setzt man in diese Gleichung  $x : b = 1 : 1$  ein, so ergibt  $(2b + x) : (b + x) = 3 : 2$ . Wiederholt man diesen Vorgang ergeben sich die Verhältnisse  $7/5, 17/12, 41/29, 99/70, \dots$  Diese Folge konvergiert gegen  $\sqrt{2}$ . Nach Proklos soll dieses Verfahren zur näherungsweisen Ermittlung von  $\sqrt{2}$  schon Pythagoras bekannt gewesen sein.

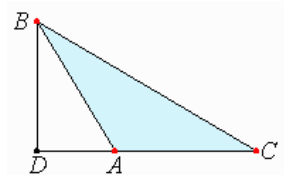
"Elemente" Buch II: § 12 (L. 11):

An jedem stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer als die Quadrate über den den stumpfen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um den stumpfen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot außen abgeschnittenen Strecke an der stumpfen Ecke.

ABC sei ein stumpfwinkliges Dreieck mit dem stumpfen Winkel BAC; und vom Punkte B sei auf die Verlängerung von CA das Lot BD gefällt. Ich behaupte, dass  $BC^2$  um  $2 CA * AD$  größer ist als  $BA^2 + AC^2$ . Da die Strecke CD im Punkte A beliebig geteilt ist, so ist  $DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2 CA * AD$  (II, 4). Man füge  $DB^2$  beiderseits hinzu; dann sind  $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2 CA * AD$ . Aber  $CD^2 + DB^2 = CB^2$ ; denn der Winkel bei D ist ein Rechter (I, 47); und  $AD^2 + DB^2 = AB^2$  (I, 47); also ist  $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2 CA * AD$ . Folglich ist  $CB^2$  um  $2 CA * AD$  größer als  $CA^2 + AB^2$  - S.

"Elemente" Buch II: § 13 (L. 12):

An jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite kleiner als die Quadrate über den diesen spitzen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um diesen spitzen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot innen abgeschnittenen Strecke an dieser spitzen Ecke.



## Mischungsrechnung, Konzentration einer Mischlösung

Die Grundaufgabe besteht darin zwei Substanzen A und B, deren Konzentration bekannt ist, so zu mischen, dass die entstehende Lösung M eine gewünschte Konzentration besitzt. Das Programm ermittelt das Verhältnis, in welchem die Substanzen A und B gemischt werden müssen. Tragen Sie zur Rechnung die drei Konzentrationen ein und betätigen Sie den Schalter Berechnung.

Beispiel: 30 % Salzsäure soll durch Vermischung mit reinem Wasser auf eine Konzentration von 12 % reduziert werden. Eintragen der Werte 30, 0 und 12 in den Eingabezeilen ergibt ein Verhältnis:  $A : B = 12 : 18 = 2 : 3$ , d.h. auf 2 Teile Salzsäure kommen 3 Teile Wasser.

### Achtung beim Experimentieren!

Bei der Verdünnung von Säuren ist unbedingt darauf zu achten, dass niemals das Wasser in die Säure gegeben wird. Dabei kann es zu extremer Wärmeentwicklung kommen, welche die Ursache von sehr gefährlichen Verletzungen sein kann. Es ist stets die Säure vorsichtig in das Wasser zu gießen.

## Mischungsrechnung - Aufgaben

### Aufgabe 1

Ein Kaufmann will aus zwei Kaffeesorten eine Mischung von 100 kg zu 15 € je kg herstellen. Sorte I kostet 12 € je kg. Sorte II 17 € je kg. Wie viel kg muss er von jeder Sorte nehmen?

Lösung:  $x$  kg von I  
 $12x + (100 - x)17 = 100 \cdot 15 \dots x = 40$ , d.h. I 40 kg, II 60 kg

### Aufgabe 2

Es werden zwei Teesorten gemischt: Sorte I 30 kg zu 25 € je kg und Sorte II 60 kg zu 22 € je kg. Wie viel € kostet 1 kg der Mischung?

Lösung:  $x$  € je kg der Mischung  
 $30 \cdot 25 + 60 \cdot 22 = 90x \dots x = 23$ , d.h. 23 € je kg

### Aufgabe 3

Ein Kaufmann mischt 20 kg einer Sorte mit 40 kg einer zweiten Sorte. 1 kg der Sorte II kostet 3 € weniger als 1 kg der Sorte I. Wie viel € kostet 1 kg jeder Sorte, wenn der Mischungspreis 9 € beträgt?

Lösung:  $x$  € je kg von I  $\rightarrow 20x + 40(x-3) = 60 \cdot 9 \dots x = 11$ , d.h. für I 11 € je kg, für II 8 € je kg

### Aufgabe 4

Ein Feinkostgeschäft mischt 40 kg Rosinen mit Mandeln und Nüssen zu Studentenfutter. 1 kg Mandeln kostet 12 €, 1 kg Nüsse 10 €, 1 kg Rosinen 4 €. Die Mischung soll 9 € je kg kosten. Wie viel kg sind von den Mandeln und Nüssen zu nehmen, wenn von beiden Sorten gleich viel kg genommen werden?

Lösung:  $x$  kg Mandeln,  $x$  kg Nüsse  
 $12x + 10x + 40 \cdot 4 = (2x + 40) \cdot 9 \dots x = 50$ , d.h. je 50 kg Mandeln und Nüsse

### Aufgabe 5

Es werden gemischt: 50 Liter 60%iger Alkohol, 60 Liter 75 %iger Alkohol und 10 Liter Wasser. Wie viel prozentig wird die Mischung?

Lösung:  $50 \cdot 60/100 + 60 \cdot 75/100 + 10 \cdot 0/100 = 120 \cdot x/100 \rightarrow x = 62,5$  %iger Alkohol

### Aufgabe 6

Ein Kaufmann soll 75 Liter 60 %igen Alkohol liefern. Er hat nur 40 %igen und 70 %igen Alkohol vorrätig. Wie viel Liter muss er von jeder Sorte für die Mischung nehmen?

Lösung:  $x$  Liter von Sorte I,  $75-x$  Liter von Sorte II  
 $x \cdot 40/100 + (75-x) \cdot 70/100 = 75 \cdot 60/100 \dots x = 25 \rightarrow 25$  Liter der 1. Sorte und 50 Liter der 2. Sorte

### Aufgabe 7

90 Liter einer 40 %igen Fruchtsaftlösung sollen durch Entzug von Wasser eine 60 %ige Lösung ergeben. Wie viel Liter Wasser sind durch Verdampfen zu entziehen?

Lösung  $90 \cdot 40/100 - x \cdot 0/100 = (90-x) \cdot 60/100 \dots x = 30$  Liter Wasser

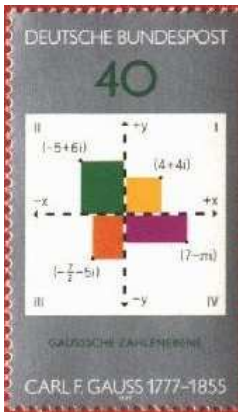
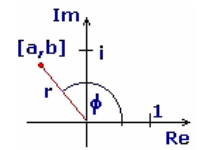
### Aufgabe 8

Aus zwei Sorten Messing (Legierung aus Zink und Kupfer) mit 60 % und 70 % Kupfergehalt sollen 150 kg Messing mit 64 % Kupfergehalt hergestellt werden. Wie viel kg sind von jeder Sorte zu nehmen?

Lösung:  $x$  kg von Sorte I;  $150-x$  kg von Sorte II  
 $x \cdot 60/100 + (150-x) \cdot 70/100 = 150 \cdot 64/100 \dots x = 90$  kg von Sorte I

## Komplexe Zahlen

"Die abstrakte Mathematik von heute ist die Theoretische Physik von morgen und die Technik von übermorgen."



Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung des Zahlenbereichs der reellen Zahlen dar, welche man durch die Forderung nach uneingeschränkter Radizierung der reellen Zahlen; speziell der negativen; erhalten kann.

Eine komplexe Zahl  $z$  ist ein geordnetes Paar  $[a, b]$  reeller Zahlen.  
 $a$  ... Realteil  $\text{Re}(z)$  (auch als imaginärer Teil bezeichnet),  $b$  ... Imaginärteil  $\text{Im}(z)$

**imaginäre Einheit  $i$  mit  $i^2 = -1$**

### Darstellungsformen

... untere Darstellung

geordnetes Paar  $z = [a, b]$  linear  $z = a + b \cdot i$

trigonometrisch  $z = r \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi)$

Exponentialform  $z = r \cdot e^{i\phi}$

### Umrechnungsformeln

$$a = r \cos \phi ; b = r \sin \phi \qquad r^2 = a^2 + b^2$$

$$\cos \phi = a/r ; \sin \phi = b/r$$

$|r|$  ... Betrag,  $\phi$  ... Argument für  $z = 0$  ist  $\phi$  unbestimmt

**Abbildung:** Gaußsche Zahlenebene der komplexen Zahlen

Die Gaußsche Zahlenebene wird in den englischsprachigen Ländern auch Argand-Diagramm genannt.

### Imaginäre Einheit

Als imaginäre Einheit wird eine Zahl  $i$  eingeführt, deren Quadrat  $-1$  ist.

Die Einführung der imaginären Einheit führt zu einer Verallgemeinerung des Zahlbegriffs, zu den komplexen Zahlen, die in der Algebra und Analysis eine große Rolle spielen und in Geometrie und Physik eine Reihe konkreter Interpretationen bzw. neuer Beschreibungsmöglichkeiten ergaben.

**$i$  mit  $i^2 = -1$**

Zahlen der Form  $i$  y ( $y$  ... reell) heißen imaginäre Zahlen. Zahlen der Form  $x + i$  y ( $x, y$  ... reell) sind komplexe Zahlen. Für  $i$  gilt:

$$\sqrt{i} = \pm (i+1) / \sqrt{2} \qquad i = e^{i\pi/2}$$

$$i^i = e^{-\pi/2} = 0.207879 \dots \text{ und ist damit reell !}$$

In Physik und Technik wird  $j$  als Bezeichner für die imaginäre Einheit verwendet um Verwechslung mit der Stromstärke zu vermeiden.

Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung des Zahlenbereichs der reellen Zahlen dar, welche man durch die Forderung nach uneingeschränkter Radizierung der reellen Zahlen; speziell der negativen; erhalten kann.

Die Gaußsche Zahlenebene wird in den englischsprachigen Ländern auch Argand-Diagramm genannt.

### Eulersche Formel

... beschreibt Zusammenhang zwischen trigonometrischer und exponentieller Darstellungsform komplexer Zahlen

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \cdot \sin \phi = e^{i(\phi+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

### Potenzen der imaginären Einheit

$$i^{4k} = 1 \qquad i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1 \qquad i^{4k+3} = -i, k \in \mathbb{Z}$$

### Spezielle Werte

$$e^{2i\pi} = 1 \qquad e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi/2} = i \qquad e^{3i\pi/2} = -i$$

### Abgeschlossenheit

Der Bereich der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen, d.h. jede algebraische Gleichung mit komplexen Koeffizienten ist in ihm auflösbar.

### Ordnungsrelation

Die Punkte einer Ebene lassen sich nicht hintereinander anordnen wie die reellen Zahlen, deshalb gibt es keine Ungleichungen in  $\mathbb{C}$ , d.h. es ist sinnlos!

**Gleichheit von komplexen Zahlen**  $z_1 = a+bi, z_2 = c+di: z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d)$

### Geschichte der komplexen Zahlen

1572 ... erste Begründung durch Raffaele Bombelli ; Weiterentwicklung durch: Johann Bernoulli, Leonhard Euler und Carl Friedrich Gauß

### Herleitung der Eulerschen Formel

Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x = e^{i(x + 2k\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

Aus der Taylor-Entwicklung von  $e^x$   $e^x = 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \dots$

unter Einsetzen des Arguments  $ix$  ergibt sich

$$e^{ix} = 1 + ix/1! - x^2/2! - ix^3/3! + x^4/4! + \dots = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots + i(x/1! - x^3/3! + x^5/5! - \dots) \quad (*)$$

Die Potenzreihen der trigonometrischen Funktionen  $\sin x$  und  $\cos x$  sind

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots = x (1 - x^2/(2*3)) (1 - x^2/(4*5)) (1 - x^2/(6*7)) \dots$$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots = 1 - x^2/(1*2) (1 - x^2/(3*4)) (1 - x^2/(5*6)) \dots$$

Vergleich mit der Gleichung (\*) ergibt somit  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

### Betrag einer komplexen Zahl, Modul einer komplexen Zahl

Die reelle Zahl  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  einer komplexen Zahl  $z = a + bi$  wird Betrag oder Modul der komplexen Zahl genannt.

Für den Betrag gilt

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z| \text{ und } -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

$$|z| \leq 0 \text{ für alle komplexen Zahlen } z; |z| = 0 \text{ gilt nur für } z = 0$$

Konjugiert komplexe Zahl

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|; \bar{\bar{z}} = z \quad |z + 1| \geq 1/\sqrt{2} \text{ und } |1 + z^2| < 1$$

$$|z^n| = |z|^n; n \text{ ganzzahlig} \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

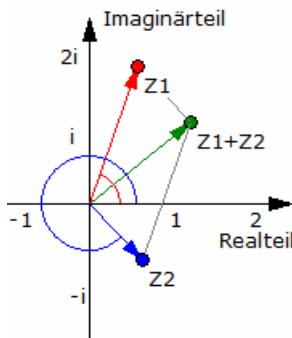
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, \text{ wenn } z_2 \neq 0$$

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}, \text{ wenn } z \neq 0$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \text{ Dreiecksungleichung}$$

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

In der Ungleichung  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  gilt das Gleichheitszeichen, wenn  $\operatorname{Re}(z_1 z_2^{-1}) = |z_1| |z_2|^{-1}$ , d.h.  $z_1 = t \cdot z_2$ , wobei  $t$  eine nichtnegative reelle Zahl ist. Wenn  $|z_1| = |z_2| = 1$  und  $z_1 z_2 \neq -1$  sind, dann ist  $(z_1 + z_2) / (1 + z_1 z_2)$  reelle Zahl.



### Rechenoperationen komplexer Zahlen

#### Addition

$$z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2]$$

Graphische Addition entspricht der Vektoraddition

$$\text{Es gilt: } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Da komplexe Zahlen als zweidimensionale Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden können, führt das grafische Addieren von komplexen Zahlen auf eine Vektoraddition. An den Vektor  $z_1 \rightarrow$  wird durch Parallelverschiebung der Vektor  $z_2 \rightarrow$  angefügt. Der Summenvektor ist  $z_1 \rightarrow + z_2 \rightarrow$ .

#### Multiplikation

$$z_1 * z_2 = [a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2]$$

$$\text{Es gilt: } |z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$$

Graphische Multiplikation

1. Addition der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$
2. Ermittlung des Winkels  $\omega$  in 1
3. Antragen von  $\omega$  in  $z$

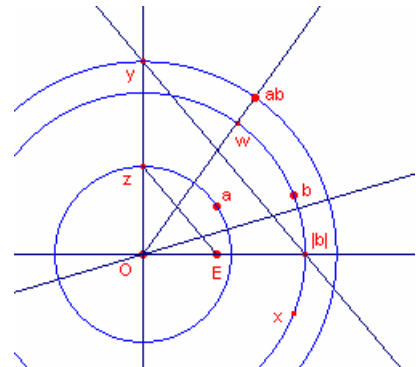
$$\text{goniometrisch} = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]$$

$$\text{exponentiell} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\text{Es gilt: } z^2 = a^2 + 2ab i - b^2$$

$$z^3 = a^3 + 3a^2 b i - 3ab^2 - b^3 i$$

$$z^4 = a^4 + 4a^3 b i - 6a^2 b^2 - 4ab^3 i + b^4$$



### Konstruktion des Produktes komplexer Zahlen

... 2. Konstruktionsmöglichkeit

Gegeben: Komplexe Zahlen  $a, b$ , Einheit  $E = (1; 0)$     Gesucht: Produkt  $a*b$

Konstruktion:

1. Strecke OE zeichnen, Senkrechte zu OE in O zeichnen
2. Kreise um O mit Radius  $a$  (Kreis 1) und Radius  $b$  (Kreis 2) konstruieren
3.  $|b|$  ist der Schnittpunkt des Strahls OE mit dem Kreis 2
4.  $z$  ist der Schnittpunkt der Senkrechten in OE mit dem Kreis 1
5. Konstruktion der Parallelen zur Strecke  $Ez$  durch  $|b|$
6.  $y$  ist der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Senkrechten
7. Kreis um O durch  $y$  zeichnen
8. Konstruktion der Winkelhalbierenden  $h$  des Winkels  $aOE$
9.  $x$  ist der Spiegelpunkt von  $b$  an OE
10.  $w$  ist der Spiegelpunkt von  $x$  an der gezeichneten Winkelhalbierenden

Das gesuchte Produkt  $a*b$  ist dann der Schnittpunkt des Strahls  $Ow$  mit dem Radius durch  $y$ .

Diese Multiplikation entspricht einer Drehstreckung, d.h., die Längen der entsprechenden Vektoren werden multipliziert und die entsprechenden Winkel addiert.

### Division komplexer Zahlen

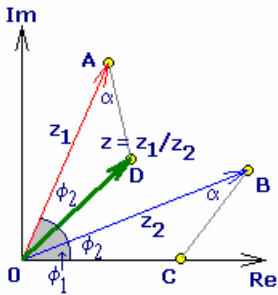
Gegeben  $z_1 = [ a_1 ; a_2 ]$  und  $z_2 = [ b_1 ; b_2 ]$

$$z_1 / z_2 = [ ( a_1 a_2 + b_1 b_2 ) / ( a_2^2 + b_2^2 ) , ( b_1 a_2 - b_2 a_1 ) / ( a_2^2 + b_2^2 ) ]$$

Für diese Art der Division wird der Bruch praktisch mit der konjugiert komplexen Zahl von  $z_2$  erweitert.

goniometrisch  $z_1 / z_2 = r_1 / r_2 [ \cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2) ]$

exponentiell  $z_1 / z_2 = r_1 / r_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$



### Grafische Division komplexer Zahlen

Aus  $z_1 / z_2 = r_1 / r_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)} = z = r e^{i\phi}$  ergibt sich für den Winkel  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  und für den Modul  $r = r_1 / r_2$ . Die letzte Gleichung lässt sich umformen in  $r : 1 = r_1 : r_2$ .

Konstruktion:

- 1.Schritt: Zeichnen der den komplexen Zahlen entsprechenden Vektoren OA und OB.
- 2.Schritt: Antragen des Winkels  $\phi_2$  an den Vektor OA im negativen Sinne gemäß  $\phi = \phi_1 - \phi_2$
- 3.Schritt: Von O aus auf der reellen Achse die Strecke 1 abtragen (Punkt C)
- 4.Schritt: Verbinden von B und C

5.Schritt: Antragen des Winkels  $\text{OBC} = \alpha$  an die Strecke OA im Punkt A.

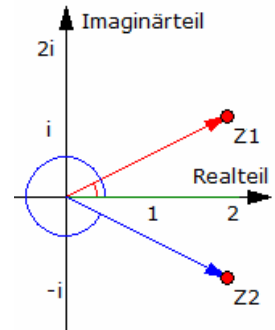
Der Schnittpunkt D seines freien Schenkels mit dem freien Schenkel des angetragenen Winkels  $\phi_2$  bestimmt den Vektor des Ergebnisses.

### Konjugiert komplexe Zahlen

$z_2 = a - bi$  ist zu  $z_1 = a + bi$  konjugiert komplex und es gilt

$$z_1 + z_2 = 2a \quad z_1 - z_2 = 2b i$$

Die komplexe Zahl wird in der Gaußschen Zahlenebene an der reellen Achse gespiegelt. In der Abbildung sind die komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  zueinander konjugiert komplex.



### Norm einer komplexen Zahl

$$z_1 * z_2 = a^2 + b^2 \text{ (Norm)} \quad 1/z_1 = z_2 / |z_1|^2$$

Schreibweise:  $z_2 = z_1^-$

Für komplexe Zahlen gilt auch der Satz von Vieta:

$$z^2 + pz + q = 0 ; p, q \in \mathbb{C}$$

Für die komplexen Lösungen  $z_1, z_2$  gilt dann

$$z_1 + z_2 = -p \quad z_1 * z_2 = q$$

$$z^2 + pz + q = (z - z_1) (z - z_2)$$

Für vier beliebige komplexe Zahlen  $a, b, c, d$  gilt  $(a - b)(c - d) + (a - d)(b - c) = (a - c)(b - d)$

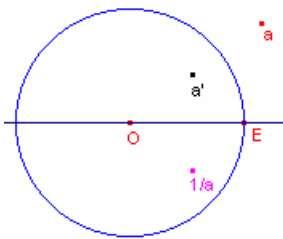
### Reziprokes einer komplexen Zahl

Konstruktion des Reziproken einer komplexen Zahl.

1. Konstruktion eines Einheitskreises um den Koordinatenursprung. Der Schnittpunkt mit der reellen Achse sei E.
2. Konstruktion des inversen von a bezüglich des Kreises (Kreisinverson)
3. Spiegeln des Punktes a' an der reellen Achse

Rechnerisch ergibt sich:  $1/z = 1/r [ \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) ]$

Der Wert von a' entspricht dem Reziproken der zu a konjugiert komplexen Zahl.



### Quotient komplexer Zahlen

Zur grafischen Konstruktion des Quotienten  $Z_1/Z_2$  zweier komplexer Zahlen

wird zuerst mit dem obigen Verfahren das Reziproke  $1/Z_2$  konstruiert. Mit der Konstruktion des komplexen Produktes wird anschließend  $Z_1 * 1/Z_2$  erzeugt.

### Möbius-Transformierte

Unter der Möbius-Transformierten einer komplexen Zahl  $z$  versteht man den Ausdruck

$$w = f(z) = (az + b) / (cz + d),$$

wobei  $a, b, c$  und  $d$  selbst komplexe Zahlen darstellen und  $ad - bc \neq 0$  sein muss.

Mit Hilfe der konstruktiven Verfahren zur Ermittlung des Produktes (Produkt komplexer Zahlen, Konstruktion), des Quotienten (Quotient komplexer Zahlen) und der Summe der komplexen Zahlen, kann auch die Möbius-Transformierte konstruiert werden.

Abfolge:

1. Produkt von  $a z$
2. Summe  $az + b$

3. Produkt  $cz$

4. Summe  $cz + d$

5. Quotient aus den beiden Summen  $az + b$  und  $cz + d$

Abbildung: Menge (blau) der Möbius-Transformierten der auf dem Rechteck liegenden komplexen Zahlen der Gaußschen Zahlenebene

### Multiplikation und Division komplexer Zahlen mit Hilfe von Polarkoordinaten

geg.: Komplexe Zahlen  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ;  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

#### Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1; \varphi_1) (r_2; \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2; \varphi_1 + \varphi_2)$$

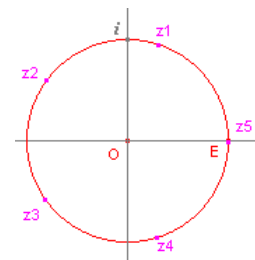
Beim Multiplizieren von komplexen Zahlen werden die Radien multipliziert und die Winkel addiert.

#### Division

$$\begin{aligned} z_1/z_2 &= [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)] / [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ &= [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)] / [r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)] = \\ &= [r_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2))] / [r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)] = \\ &= [r_1 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]] / [r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)] = r_1/r_2 [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$z_1/z_2 = (r_1; \varphi_1)/(r_2; \varphi_2) = (r_1/r_2; \varphi_1 - \varphi_2)$$

Beim Dividieren von komplexen Zahlen werden die Radien dividiert und die Winkel subtrahiert.



### Moivresche Formel

... beschreibt die Potenz einer komplexen Zahl

$$z^n = r^n \cdot [\cos (n\phi) + i \sin (n\phi)] = r^n e^{in\phi}$$

da n nichtganzzahlig sein muss, existiert damit eine Möglichkeit des Radizierens einer komplexen Zahl

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/2) + i \sin (\phi/2)] = \sqrt[n]{r} e^{i\phi/2}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/2) + i \sin (\phi/2)] = \sqrt[n]{r} e^{i\phi/2}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/2 + \pi) + i \sin (\phi/2 + \pi/2)] = \sqrt[n]{r} e^{i(\phi/2 + \pi/2)}$$

$$3\sqrt[n]{z} = 3\sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/3) + i \sin (\phi/3)] = 3\sqrt[n]{r} e^{i\phi/3}$$

$$3\sqrt[n]{z} = 3\sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/3 + \pi/3) + i \sin (\phi/3 + \pi/3)] = 3\sqrt[n]{r} e^{i(\phi/3 + \pi/3)}$$

$$3\sqrt[n]{z} = 3\sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/3 + 2\pi/3) + i \sin (\phi/3 + 2\pi/3)] = 3\sqrt[n]{r} e^{i(\phi/3 + 2\pi/3)}$$

$$4\sqrt[n]{z} = 4\sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/4) + i \sin (\phi/4)] = 4\sqrt[n]{r} e^{i\phi/4}$$

$$4\sqrt[n]{z} = 4\sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/4 + \pi/4) + i \sin (\phi/4 + \pi/4)] = 4\sqrt[n]{r} e^{i(\phi/4 + \pi/4)}$$

$$4\sqrt[n]{z} = 4\sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/4 + 2\pi/4) + i \sin (\phi/4 + 2\pi/4)] = 4\sqrt[n]{r} e^{i(\phi/4 + 2\pi/4)}$$

$$4\sqrt[n]{z} = 4\sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/4 + 3\pi/4) + i \sin (\phi/4 + 3\pi/4)] = 4\sqrt[n]{r} e^{i(\phi/4 + 3\pi/4)}$$

und allgemein

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot [\cos (\phi/n + k\pi/n) + i \sin (\phi/n + k\pi/n)] = \sqrt[n]{r} e^{i(\phi/n + k\pi/n)}$$

mit  $k = 0, 1, \dots, n-1$

### Einheitswurzel

$$\sqrt[n]{1} = \cos ((2\pi k)/n) + i \sin ((2\pi k)/n) = e^{(2\pi k)/n i}$$

Die Einheitswurzeln können mittels Grundkonstruktionen grafisch erzeugt werden. Für  $z^5 = 1$  wird zum Beispiel als Konstruktion:

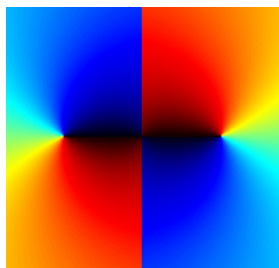
$$z = z_1$$

$$z_2 = C\text{Quadrat}(z_1, O, E)$$

$$z_3 = C\text{Product}(z_1, z_2, O, E)$$

$$z_4 = C\text{Quadrat}(z_2, O, E)$$

$$z_5 = C\text{Product}(z_2, z_3, O, E)$$



### Natürlicher komplexer Logarithmus

$$z = \int_1^z dt/t = r e^{i\phi}, z \neq 0 \Rightarrow \ln z = \ln [r (\cos \phi + i \sin \phi)] = \ln r + i (\phi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Der Logarithmus ist periodisch.  $\ln r$  wird der Hauptzweig genannt.

Für den komplexen Logarithmus gelten die im Reellen gültigen

Operationsgesetze analog.

Die Abbildung zeigt einen Phasenplot von  $f(z) = \ln z$ .

Reihenentwicklungen:

$$\ln (1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \dots; |z| \leq 1, z \neq -1$$

$$\ln z = (z-1)/z + 1/2 (z-1)^2/z^2 + 1/3 (z-1)^3/z^3 + \dots; \text{Re}(z) \geq 1/2$$

$$\ln z = (z-1) - 1/2 (z-1)^2 + 1/3 (z-1)^3 - \dots; |z-1| \leq 1, z \neq 0$$

$$\ln z = 2(z-1)/(z+1) + 2/3 (z-1)^3/(z+1)^3 + 2/5 (z-1)^5/(z+1)^5 + \dots; \text{Re}(z) > 0$$

### Übungen zu komplexen Zahlen

1. Berechne die Summe  $z_1 + z_2$  und die Differenz  $z_1 - z_2$ :

a.  $z_1 = 7 + i, z_2 = 1 + 3i$  Lösungen  $8 + 4i; 6 - 2i$

b.  $z_1 = 4 + 3i, z_2 = 1 - 2i$   $5 + i; 3 + 5i$

c.  $z_1 = 7 - 4i, z_2 = 3 + 2i$   $10 - 2i; 4 - 6i$

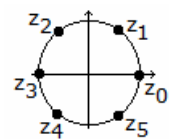
2. Berechne das Produkt  $z_1 \cdot z_2$ :

a.  $z_1 = 5 - 7i, z_2 = -2 + 4i$   $18 + 34i$

b.  $z_1 = -3 + 5i, z_2 = -2 - 2i$   $16 - 4i$



- c.  $z_1 = 1,5i, z_2 = 0,6 + 0,8i$   $-1,2 + 0,9i$
3. Berechne den Quotienten  $z_1/z_2$ :
- a.  $z_1 = 5 - 7i, z_2 = -2 + 4i$   $-1,9 - 0,3i$
- b.  $z_1 = -3 + 5i, z_2 = -2 - 2i$   $-0,5 - 2i$
- c.  $z_1 = 1,5i, z_2 = 0,6 + 0,8i$   $1,2 + 0,9i$
4. Berechne mit Hilfe der Binomischen Formeln:
- a.  $(3 + i)^2$   $8 + 6i$
- b.  $(-1 + 5i)^2$   $-24 - 10i$
- c.  $(2 + i)^3$   $-24 - 10i$
5. Löse die folgenden Gleichungen über der Grundmenge C:
- a.  $x^2 + 16 = 0$   $\{\pm 4i\}$
- b.  $5x^2 - 12x + 20 = 0$   $\{1,2 \pm 1,6i\}$
- c.  $x^3 - 1 = 0$   $\{1, -0,5 \pm 0,866i\}$
- d.  $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$   $\{2, 1 \pm 2i\}$
6. Schreibe in Polarform:
- a.  $4 + 3i$  ; Lösung  $(5; 36,87^\circ)$
- b.  $-5 + 12i$  ; Lösung  $(13; 112,62^\circ)$
- c.  $-2 - 2i$  ; Lösung  $(2,828; 225^\circ)$
7. Schreibe in Komponentenform  $(a + bi)$ :
- a.  $(3; 90^\circ)$  ; Lösung  $3i$
- b.  $(5; 180^\circ)$  ; Lösung  $-5$
- c.  $(4; 135^\circ)$  ; Lösung  $-2,828 + 2,828i$



### Komplexe Einheitswurzel, Einheitswurzel

Abbildungsbeispiel:  $\sqrt[n]{z}$  mit Betrag ... 1 und Winkel ...  $k \cdot 60^\circ$

Die Lösungen, Wurzeln der komplexen Gleichung  $z^n + 1 = 0$  werden n-te Einheitswurzeln odr Moivre-Zahlen n-ter Ordnung genannt. Ausgehend von der Formel von Moivre wird

$$\sqrt[n]{1} = \cos((2\pi k)/n) + i \sin((2\pi k)/n) = e^{(2\pi k)/n i} \text{ mit } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Dabei wird

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

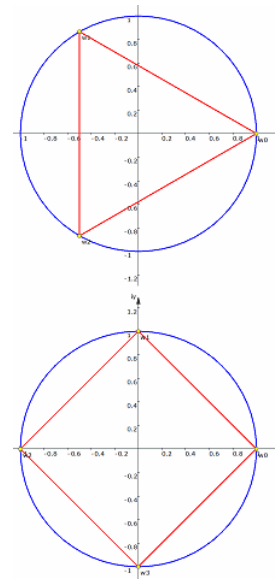
$$\varepsilon_1 = \cos 2\pi/n + i \sin 2\pi/n = \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = \cos 4\pi/n + i \sin 4\pi/n = \varepsilon^2 \dots$$

$$\varepsilon_{n-1} = \cos 2(n-1)\pi/n + i \sin 2(n-1)\pi/n = \varepsilon^{n-1}$$

Die Menge  $U_n = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}\}$  der komplexen Einheitswurzeln kann von der Einheitswurzel  $\varepsilon$  erzeugt werden.

Die zu den n-ten Einheitswurzeln gehörenden Punkte in der komplexen Ebene bilden ein regelmäßiges N-Eck, das in den Einheitskreis eingeschrieben ist. Eine Ecke des N-Ecks liegt bei 1.



### Quadratische Einheitswurzeln

Ausgehend von der Wurzelformel komplexer Zahlen

$$\sqrt[n]{1} = \cos((2\pi k)/n) + i \sin((2\pi k)/n) = e^{(2\pi k)/n i} \text{ mit } k = 0, 1, \dots, n-1$$

ergeben sich für die Gleichungen  $z^n + 1 = 0$  mit  $n = 2, 3, 4, 5$  die Lösungen:

$$z^2 - 1 = 0$$

quadratische Einheitswurzeln: 1 und -1

$$z^3 - 1 = 0$$

kubische Einheitswurzeln:  $\varepsilon_0 = 1$  (obere Abbildung)

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3) = -1/2 + i/2 \sqrt{3} = \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = \cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3) = -1/2 - i/2 \sqrt{3} = \varepsilon^2$$

$$z^4 - 1 = 0$$

Einheitswurzeln 4.Grades:  $\varepsilon_0 = 1$  (untere Abbildung)

$$\varepsilon_1 = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i = \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = -1 = \varepsilon^2 \text{ und } \varepsilon_3 = -i = \varepsilon^3$$

$$z^5 - 1 = 0$$

Einheitswurzeln 5.Grades:  $\varepsilon_0 = 1$

$$\varepsilon_1 = 1/4 (\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{((5 + \sqrt{5})/8)} = \varepsilon \quad \varepsilon_2 = 1/4 (-\sqrt{5} - 1) + i \sqrt{((5 + \sqrt{5})/8)} = \varepsilon^2$$

$$\varepsilon_3 = 1/4 (-\sqrt{5} - 1) - i \sqrt{((5 + \sqrt{5})/8)} = \varepsilon^3 \quad \varepsilon_4 = 1/4 (\sqrt{5} - 1) - i \sqrt{((5 + \sqrt{5})/8)} = \varepsilon^4$$

$$z^6 - 1 = 0$$

Einheitswurzeln 6.Grades:  $\varepsilon_0 = 1$

$$\varepsilon_1 = 1/2 + i \sqrt{3}/2 = \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = -1/2 + i \sqrt{3}/2 = \varepsilon^2$$

$$\varepsilon_3 = -1 = \varepsilon^3$$

$$\varepsilon_4 = -1/2 - i \sqrt{3}/2 = \varepsilon^4$$

$$\varepsilon_5 = 1/2 - i\sqrt{3}/2 = \varepsilon^5$$

$$z^8 - 1 = 0$$

Einheitswurzeln 8. Grades:  $\varepsilon_0 = 1$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2 = \varepsilon$$

$$\varepsilon_2 = i = \varepsilon^2$$

$$\varepsilon_3 = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2 = \varepsilon^3$$

$$\varepsilon_4 = -1 = \varepsilon^4$$

$$\varepsilon_5 = -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2 = \varepsilon^5$$

$$\varepsilon_6 = -i = \varepsilon^6$$

$$\varepsilon_7 = \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2 = \varepsilon^7$$

### Primitive Einheitswurzel

n-te Einheitswurzeln  $\varepsilon_k$  werden primitive Einheitswurzeln n-ten Grades genannt, wenn für alle natürlichen  $m < n$  die Beziehung  $\varepsilon_k^m \neq 1$  gilt, d.h. die Wurzel  $\varepsilon_k$  bei keinem Polynom kleineren Grades als n schon einmal auftritt.

Die primitiven Einheitswurzeln von  $z^m - 1 = 0$  sind die  $\varepsilon_k = \cos 2k\pi/m + i \sin 2k\pi/m$  mit  $0 \leq k \leq m$  und  $\text{ggT}(k,m) = 1$ .

$$z^m - 1 = 0$$

$$\varepsilon_k = \cos 2k\pi/m + i \sin 2k\pi/m$$

Weiterhin gilt: 1) Wenn q Teiler von n ist, so ist jede Einheitswurzel von  $z^n - 1 = 0$  auch Einheitswurzel von  $z^q - 1 = 0$ .

2) Die gemeinsamen Einheitswurzeln von  $z^m - 1 = 0$  und  $z^n - 1 = 0$  sind die Wurzeln von  $z^d - 1 = 0$ , wobei d der größte gemeinsame Teiler von m und n ist.

3) Die Gleichungen  $z^m - 1 = 0$  und  $z^n - 1 = 0$  haben nur dann nur die 1 als gemeinsame Wurzel, wenn m und n teilerfremd sind.

### Kreisteilungspolynom, zyklotomisches Polynom

Die primitiven Einheitswurzeln des Polynoms  $z^m - 1 = 0$

sind die  $\varepsilon_k = \cos 2k\pi/m + i \sin 2k\pi/m$  mit  $0 \leq k \leq m$  und  $\text{ggT}(k,m) = 1$

Unter dem n-ten Kreisteilungspolynom bzw. dem n-ten zyklotomischen Polynom versteht man dann

$$\phi_n(x) = \prod (x - \varepsilon_n^k)$$

wobei das Produkt über  $1 \leq k \leq n-1$  und  $\text{ggT}(k,n) = 1$  gebildet wird.

Der Grad des Kreisteilungspolynoms  $\phi_n(x)$  ist gleich der Eulerschen Funktion von n, d.h. gleich der Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen unterhalb n. Das Polynom ist über den rationalen Zahlen irreduzibel. Es gilt

$$\text{für ungerade } q > 1 \text{ ist } \phi_{2q}(x) = \phi_q(-x)$$

$$\text{wenn } n > 1, \text{ so ist } \phi_n(1) = p, \text{ wenn } n \text{ Potenz einer Primzahl } p \text{ ist, andernfalls gleich } 1$$

Die Bezeichnung Kreisteilungspolynom stammt vom geometrischen Problem der Kreisteilung, d.h. der Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks mit Zirkel und Lineal.

Die ersten Kreisteilungspolynome sind

$$\phi_1(z) = z-1$$

$$\phi_2(z) = (z^2-1)/(z-1) = z+1$$

$$\phi_3(z) = (z^3-1)/(z-1) = z^2+z+1$$

$$\phi_4(z) = (z^4-1)/(z^2-1) = z^2+1$$

$$\phi_5(z) = (z^5-1)/(z-1) = z^4+z^3+z^2+z+1$$

$$\phi_6(z) = (z^6-1)/((z^3-1) \cdot (z^2-1) \cdot (z-1)) = z^2-z+1$$

$$\phi_7(z) = (z^7-1)/(z-1) = z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 \quad \phi_8(z) = z^4+1$$

$$\phi_9(z) = z^6+z^3+1$$

$$\phi_{10}(z) = z^4-z^3+z^2-z+1$$

$$\phi_{11}(z) = z^{10}+z^9+\dots+z^3+z^2+z+1$$

$$\phi_{12}(z) = z^4-z^2+1$$

### Potenzen einer komplexen Zahl

Für die Potenz  $(a + bi)^n$  ergibt sich

N Zahl

$$2 \quad a^2 - b^2 + 2i \cdot a \cdot b$$

$$3 \quad a \cdot (a^2 - 3b^2) + i \cdot b \cdot (3a^2 - b^2)$$

$$4 \quad a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + 4i \cdot a \cdot b \cdot (a^2 - b^2)$$

$$5 \quad a \cdot (a^4 - 10a^2b^2 + 5b^4) + i \cdot b \cdot (5a^4 - 10a^2b^2 + b^4)$$

$$6 \quad (a^2 - b^2) \cdot (a^4 - 14a^2b^2 + b^4) + 2i \cdot a \cdot b \cdot (3a^4 - 10a^2b^2 + 3b^4)$$

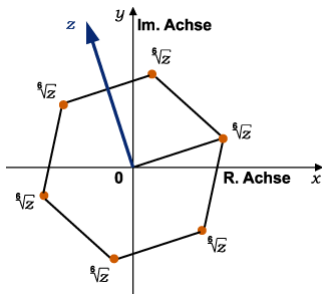
$$7 \quad a \cdot (a^6 - 21a^4b^2 + 35a^2b^4 - 7b^6) + i \cdot b \cdot (7a^6 - 35a^4b^2 + 21a^2b^4 - b^6)$$

$$8 \quad a^8 - 28a^6b^2 + 70a^4b^4 - 28a^2b^6 + b^8 + 8i \cdot a \cdot b \cdot (a^2 - b^2) \cdot (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)$$

$$9 \quad a \cdot (a^8 - 36a^6b^2 + 126a^4b^4 - 84a^2b^6 + 9b^8) + i \cdot b \cdot (9a^8 - 84a^6b^2 + 126a^4b^4 - 36a^2b^6 + b^8)$$

$$10 \quad (a^2 - b^2) \cdot (a^8 - 44a^6b^2 + 166a^4b^4 - 44a^2b^6 + b^8) + 2i \cdot a \cdot b \cdot (5a^8 - 60a^6b^2 + 126a^4b^4 - 60a^2b^6 + 5b^8)$$

$$11 \quad a \cdot (a^{10} - 55a^8b^2 + 330a^6b^4 - 462a^4b^6 + 165a^2b^8 - 11b^{10}) + i \cdot b \cdot (11a^{10} - 165a^8b^2 + 462a^6b^4 - 330a^4b^6 + 55a^2b^8 - b^{10})$$



## Wurzelziehen (Radizieren) von komplexen Zahlen

Radizieren oder Ziehen der n-ten Wurzel aus einer komplexen Zahl ist eine zum Potenzieren inverse Operation.

Definition:  $\zeta \in \mathbb{C}$  heißt n-te Wurzel aus  $z \in \mathbb{C}$ , wenn  $\zeta^n = z$  ist

Schreibweise:  $\zeta = \sqrt[n]{z}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$

Während Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten zu eindeutigen Ergebnissen führen, liefert das Ziehen der n-ten Wurzel stets n verschiedene Lösungen  $\omega_k$ .

Geometrisch interpretiert sind die Punkte  $\omega_k$  die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. In der Abbildung sind die 6 Werte für  $\sqrt[6]{z}$  dargestellt.

### Radizieren mit Binomialform

$$\sqrt{(2i) = a+bi \quad |^2$$

$$2i = a^2 + 2abi - b^2$$

$$0 = a^2 - b^2$$

$$0 = 1/b^2 - b^2 \quad | \cdot b^2$$

$$b^4 = 1 \Rightarrow b^2 = +/(-) 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \quad \rightarrow$$

$$b_1=1, a_1=1 \text{ und } b_2=-1, a_2=-1$$

$$\text{d.h. } \sqrt{(2i) = 1+i \text{ bzw. } = -1-i$$

$$0 + 2i = (a^2 - b^2) + 2abi \quad \dots\dots \text{Koeffizientenvergleich}$$

$$\rightarrow 2 = 2ab \Rightarrow a = 1/b$$

$$\rightarrow 1 - b^4 = 0$$

### Radizieren mit Polarkoordinaten

$$\zeta_1 = \sqrt{(2i) = \sqrt{[(2; 90^\circ)]} = (\sqrt{2}; 90^\circ/2) = (\sqrt{2}; 45^\circ) = 1+i$$

$$\zeta_2 = (\sqrt{2}; (360^\circ + 90^\circ)/2) = (\sqrt{2}; 450^\circ/2) = (\sqrt{2}; 225^\circ) = -1-i$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{[(r; \varphi)]} = (\sqrt[n]{r}; (\varphi + 0 \cdot 360^\circ)/n) \dots\dots 1. \text{ Nebenwert}$$

$$= (\sqrt[n]{r}; (\varphi + 1 \cdot 360^\circ)/n) \dots\dots 2. \text{ Nebenwert}$$

$$= (\sqrt[n]{r}; (\varphi + 2 \cdot 360^\circ)/n) \dots\dots 3. \text{ Nebenwert}$$

$$= (\sqrt[n]{r}; (\varphi + (n-1) \cdot 360^\circ)/n) \dots\dots n. \text{ Nebenwert}$$

$$= (\sqrt[n]{r}; (\varphi + (k-1) \cdot 360^\circ)/n) \quad k=1,2,3,\dots,n$$

Eine Wurzel aus einer komplexen Zahl ist wieder eine komplexe Zahl.

### Beispiel zum Wurzelziehen komplexer Zahlen

Berechne  $\sqrt{(-1/2 - i\sqrt{3}/2)}$  auf zwei Arten (mit, ohne Polarkoordinaten) und zeige, dass eine Lösung eine dritte Einheitswurzel ist.

$$\sqrt{(-1/2 - i\sqrt{3}/2) = a + bi \quad |^2 \quad \rightarrow$$

$$-1/2 = a^2 - b^2 \quad \rightarrow$$

$$-1/2 = 3/(16b^2) - b^2 \quad | \cdot 16b^2 \quad \rightarrow$$

$$16b^4 - 8b^2 - 3 = 0 \quad \text{Substitution } b^2 = u \quad \rightarrow$$

$$u_{1,2} = (8 \pm \sqrt{(64 + 192)})/32 = (8 \pm \sqrt{(256)})/32 = (8 \pm 16)/32$$

$$u_1 = 24/32 = 3/4 \text{ und } u_2 = -8/32 = -1/4$$

$$b^2 = 3/4 \Rightarrow b_{1,2} = \pm \sqrt{3}/2 \quad \rightarrow$$

$$a_{1,2} = \pm \sqrt{3}/(2\sqrt{3}) = \pm 1/2$$

$$\mathbf{L = \{-1/2 + \sqrt{3}/2 i; 1/2 - \sqrt{3}/2 i\}}$$

$$r = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(1/4 + 3/4)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\varphi = \arctan(b/a) = \arctan((- \sqrt{3}/2)/(-1/2)) = \arctan \sqrt{3} = 240^\circ$$

$$\sqrt{(-1/2 - i\sqrt{3}/2) = \sqrt{[(1; 240^\circ)]} = (\sqrt{1}; 240^\circ/2) = (1; 120^\circ) = -1/2 + \sqrt{3}/2 i$$

$$\sqrt{[(1; 240^\circ)]} = (\sqrt{1}; (240^\circ + 360^\circ)/2) = (\sqrt{1}; 600^\circ/2) = (1; 300^\circ) = 1/2 - \sqrt{3}/2 i$$

$$\mathbf{L = \{-1/2 + \sqrt{3}/2 i; 1/2 - \sqrt{3}/2 i\}}$$

$$z^3 - 1 = 0 = (z - 1)(z^2 + z + 1) \quad \rightarrow \quad z_1 = 1$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \rightarrow \quad z_{2,3} = -1/2 \pm \sqrt{(1/4 - 1)} = -1/2 \pm \sqrt{(-3/4)} = -1/2 \pm \sqrt{3}/2 i$$

$$z_2 = -1/2 + \sqrt{3}/2 i \quad \rightarrow \quad z_3 = -1/2 - \sqrt{3}/2 i$$

### Funktionen komplexer Zahlen

#### Exponential- und Logarithmusfunktion

$$e^{x+iy} = e^x \cdot \cos y + i e^x \cdot \sin y = (\cosh x + \sinh x) \cdot (\cos y + i \sin y)$$

$$\log(x+iy) = 1/2 [\log(x^2 + y^2) + i \arctan(y/x)]$$

$$\ln(x+iy) = 1/2 \ln(x^2 + y^2) + i [\arctan(y/x) + 2k\pi]$$

$$z^z = e^{z \cdot \log z}$$

#### Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Der Sinus, Kosinus, hyperbolischer Sinus und Kosinus im Komplexen sind definiert durch die der reellen Funktion analogen Potenzreihenentwicklung:

$$\sin(x+iy) = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y$$

$$\sin(z) = 1/(2i) (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \cdot \sinh y$$

$$\begin{aligned} \cos(z) &= 1/2 (e^{iz} + e^{-iz}) \\ \tan(x+iy) &= \sin 2x / (\cos 2x + \cosh 2y) + i \sinh 2y / (\cos 2x + \cosh 2y) \\ \cot(x+iy) &= (\sin 2x - i \sinh 2y) / (\cosh 2y - \cos 2x) \\ \sinh(x+iy) &= \sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \sin y \\ \sinh(z) &= 1/2 (e^z - e^{-z}) \\ \cosh(x+iy) &= \cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \sin y \\ \tanh(x+iy) &= \sinh 2x / (\cosh 2x + \cos 2y) + i \sin 2y / (\cosh 2x + \cos 2y) \\ \coth(x+iy) &= (\sinh 2x - i \sin 2y) / (\cosh 2x - \cos 2y) \\ |\sin z| &= \sqrt{(\sin^2 x + \sinh^2 y)} = \sqrt{1/2 (\cosh 2y - \cos 2x)} \\ |\cos z| &= \sqrt{(\cos^2 x + \sinh^2 y)} = \sqrt{1/2 (\cosh 2y + \cos 2x)} \\ |\tan z| &= \sqrt{(\cosh 2y - \cos 2x) / (\cosh 2y + \cos 2x)} \end{aligned}$$

Die Periode von Sinus und Kosinus ist  $2\pi$ . Die Nullstellen liegen wie im Reellen, durch die Fortsetzung ins Komplexe kommen keine weiteren Nullstellen dazu. Die Periode des hyperbolischen Sinus und Kosinus ist  $2\pi i$ . Die Nullstellen liegen bei

$$\sinh z: 0, \pm i\pi, \pm 2i\pi, \pm 3i\pi, \dots \quad \cosh z: \pm i\pi/2, \pm 3i\pi/2, \pm 5i\pi/2, \dots$$

Die Periode des hyperbolischen Tangens und Kotangens ist  $\pi i$ . Inverse trigonometrische Funktionen und inverse hyperbolische Funktionen im Komplexen werden analog zum Reellen definiert.

### Additionstheoreme

Für komplexe Zahlen  $z, u, z_1, z_2$  gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1 & \tan z &= \sin z / \cos z \\ \sec^2 z + \tan^2 z &= 1 & \csc^2 z - \cot^2 z &= 1 \\ \sin(-z) &= -\sin z & \cos(-z) &= \cos z & \tan(-z) &= -\tan z \\ \sin z/2 &= \pm \sqrt{(1 - \cos z)/2} & \cos z/2 &= \pm \sqrt{(1 + \cos z)/2} \\ \tan z/2 &= \pm \sqrt{(1 - \cos z)/(1 + \cos z)} = (1 - \cos z) / \sin z = \sin z / (1 + \cos z) \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \\ \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \tan(z_1+z_2) &= (\tan z_1 + \tan z_2) / (1 - \tan z_1 \tan z_2) \\ \cot(z_1+z_2) &= (\cot z_1 \cot z_2 - 1) / (\cot z_1 + \cot z_2) \\ \sin 2z &= 2 \sin z \cos z = 2 \tan z / (1 + \tan^2 z) \\ \cos 2z &= 2 \cos^2 z - 1 = 1 - 2 \sin^2 z = \cos^2 z - \sin^2 z = (1 - \tan^2 z) / (1 + \tan^2 z) \\ \tan 2z &= 2 \tan z / (1 - \tan^2 z) = 2 \cot z / (\cot^2 z - 1) = 2 / (\cot z - \tan z) \\ \sin 3z &= 3 \sin z - 4 \sin^3 z & \cos 3z &= -3 \cos z + 4 \cos^3 z \\ \sin 4z &= 8 \cos^3 z \sin z - 4 \cos z \sin z & \cos 4z &= 8 \cos^4 z - 8 \cos^2 z + 1 \\ \sin z_1 + \sin z_2 &= 2 \sin(z_1 + z_2)/2 \cos(z_1 - z_2)/2 \\ \sin z_1 - \sin z_2 &= 2 \cos(z_1 + z_2)/2 \sin(z_1 - z_2)/2 \\ \cos z_1 + \cos z_2 &= 2 \cos(z_1 + z_2)/2 \cos(z_1 - z_2)/2 \\ \cos z_1 - \cos z_2 &= -2 \sin(z_1 + z_2)/2 \sin(z_1 - z_2)/2 \\ \tan z_1 \pm \tan z_2 &= \sin(z_1 \pm z_2) / (\cos z_1 \cos z_2) \end{aligned}$$

Wenn  $\tan u/2 = z$  ist, so gilt

$$\sin u = 2z / (1 + z^2); \quad \cos u = (1 - z^2) / (1 + z^2); \quad du = 2 / (1 + z^2) dz$$

### Funktionswerte für das Argument $x = i$

Funktion	$\sin(i)$	$\cos(i)$	$\tan(i)$	$\sinh(i)$	$\ln(i)$
Funktionswert	$(e/2 - e^{-1}/2) i$	$e/2 + e^{-1}/2$	$(e^2-1)/(e^2+1) i$	$\sin(1) i$	$\pi/2 i$

### Logarithmus komplexer Zahlen

**Positive imaginäre Zahl  $b*i$  ( $a = 0, b > 0$ )**  $\ln(b*i) = \ln b + i(\pi/2 + 2k\pi); k \in \mathbb{G}$

Logarithmen positiver imaginärer Zahlen sind komplexe Zahlen.

**Negative imaginäre Zahl  $-b*i$  ( $a = 0, b > 0$ )**  $\ln(-b*i) = \ln b + i(3\pi/2 + 2k\pi); k \in \mathbb{G}$

**Positive reelle Zahl  $a$  ( $a > 0, b = 0$ )**  $\ln(a) = \ln a + 2k\pi i; k \in \mathbb{G}$

**Negative reelle Zahl  $-a$  ( $a > 0, b = 0$ )**  $\ln(-a) = \ln a + (\pi + 2k\pi) i; k \in \mathbb{G}$

Sonderfälle:

$$\ln 1 = 2k\pi i \quad \ln(-1) = (\pi + 2k\pi) i \quad \ln i = (\pi/2 + 2k\pi) i \quad \ln(-i) = (3\pi/2 + 2k\pi) i$$

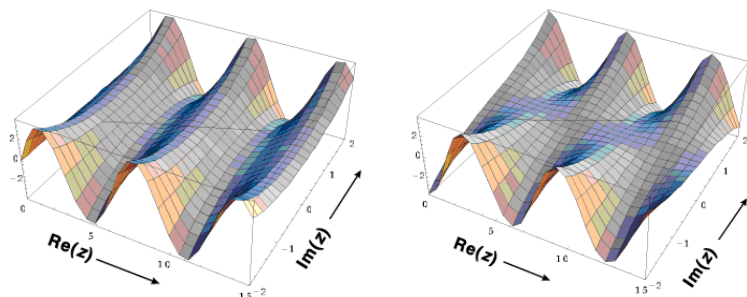
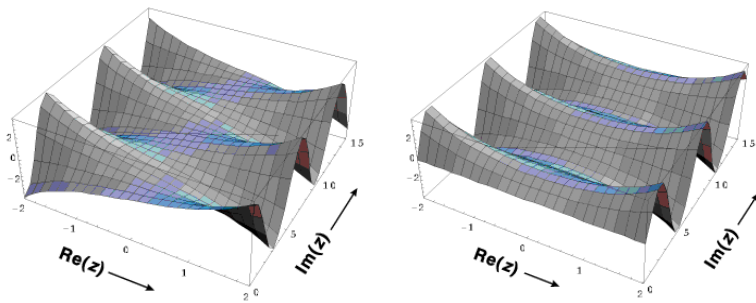


Abbildung:  
Realteil und Imaginärteil des komplexen Sinus, erzeugt mit Mathematica



Realteil und Imaginärteil des komplexen hyperbolischen Sinus, erzeugt mit Mathematica

### Berechnungsbeispiel für eine komplexe Zahl

Hinweis zur Schreibweise: Zur Abkürzung der trigonometrischen Form wird mitunter auch  $CIS(w) = \cos(w) + i \sin(w)$  genutzt.

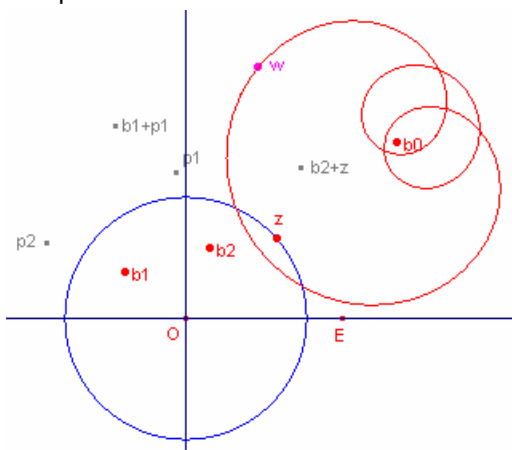
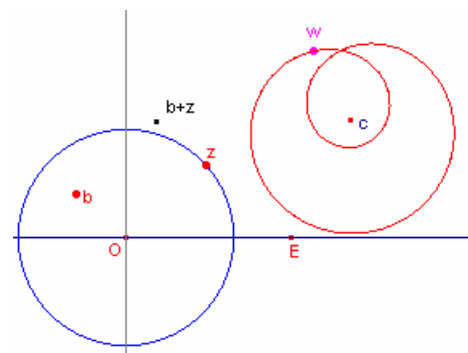
	Zahl	Betrag	Winkel w
Komplexe Zahl z1	1 - i	1,41421356	-0,78539816
Absoluter Betrag  z	1.41421356		
Konjugierte Zahl	1 + i	1,41421356	0,78539816
Reziprokes 1/z	0,5 + 0,5 i	0,70710678	0,78539816
Komplexe Zahl z <sup>2</sup>	0 - 2 i	2,00000000	-1,57079633
Komplexe Zahl z <sup>3</sup>	-2 - 2 i	2,82842712	-2,35619449
Komplexe Zahl $\sqrt{z^3}$	0,64359425 - 1,55377397 i	1,68179283	-1,17809725
Komplexe Zahl z <sup>i</sup>	0,42882901 - 0,15487175 i	0,45593813	-0,34657359
Komplexe Zahl i <sup>z</sup>	0 - 0,20787958 i	0,20787958	-1,57079633
Komplexe Zahl z <sup>z</sup>	0,27395725 - 0,58370076 i	0,64479388	-1,13197175
Komplexe Zahl $\sqrt{z}$	1,09868411 - 0,45508986 i	1,18920712	-0,39269908
Komplexe Zahl $\sqrt{z}$	-1,09868411 + 0,45508986 i	1,18920712	2,74889357
Komplexe Zahl $\sqrt[3]{z}$	1,08421508 - 0,29051456 i	1,12246205	-0,26179939
Komplexe Zahl $\sqrt[3]{z}$	-0,29051456 + 1,08421508 i	1,12246205	1,83259571
Komplexe Zahl $\sqrt[3]{z}$	-0,79370053 - 0,79370053 i	1,12246205	-1,235619449
Logarithmus ln(z)	0,34657359 - 0,78539816 i	0,85846580	-1,15522494
Potenz e <sup>z</sup>	1,46869394 - 2,2873529 i	2,71828183	-1,00000000
Kosinus cos(z)	0,83373003 + 0,98889771 i	1,29345446	0,87032742
Sinus sin(z)	1,29845758 - 0,63496391 i	1,44539658	-0,45482023
Tangens tan(z)	0,27175259 - 1,08392333 i	1,11747002	-1,32514766
Sekans sec(z)	0,49833703 - 0,59108384 i	0,77312347	-0,87032742
Kosinus hyperbolicus cosh(z)	0,83373003 - 0,98889771 i	1,29345446	-0,87032742
Sinus hyperbolicus sinh(z)	0,63496391 - 1,29845758 i	1,44539658	-1,11597609
Tangens hyperbolicus tanh(z)	1,08392333 - 0,27175259 i	1,11747002	-0,24564867
Gamma-Funktion GAMMA(z)	0,49801567 + 0,15494983 i	0,52156405	0,30164032

### Polynom komplexer Zahlen

Grafische Veranschaulichung eines Polynoms komplexer Zahlen. Der Definitionsbereich wird auf die Menge der komplexen Zahlen mit dem Betrag  $|z| = \text{konstant}$  gesetzt.

$$w = f(z) = c + b z + z^2 = c + z (b + z)$$

In der Gaußschen Zahlenebene bildet dann der Definitionsbereich einen konzentrischen Kreis um (0;0). Der Wertebereich ist eine geschlossene Kurve um c. Die Form der Kurve hängt von den beiden komplexen Konstanten b und c ab. Grafische Veranschaulichung eines kubischen Polynoms komplexer Zahlen. Der Definitionsbereich wird auf die Menge der komplexen Zahlen mit dem Betrag  $|z| = \text{konstant}$  gesetzt.



$$w = f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + z^3 = b_0 + z (b_1 + z (b_2 + z))$$

In der Gaußschen Zahlenebene bildet dann der Definitionsbereich einen konzentrischen Kreis um (0;0). Der Wertebereich ist eine geschlossene Kurve um d. Die Form der Kurve hängt von den drei komplexen Konstanten b, c und d ab.

## Körper der komplexen Zahlen C

### C ist ein Körper

(1)  $(C; +)$  ist kommutative Gruppe

a) Abgeschlossenheit:  $\forall z_1, z_2 \in C: z_1 + z_2 = z_3 \in C$

b) Assoziativgesetz (AG):  $\forall z_1, z_2, z_3 \in C: (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

c) neutrales Element  $n$ :  $\forall z \in C \exists n \in C$  mit  $z + n = n + z = z$

$$n = 0 = 0 + 0i \in C$$

d) inverses Element  $z^*$ :  $\forall z \in C \exists z^* \in C$  mit

$$z + z^* = z^* + z = n = 0 \quad z^* = -z \in C$$

e) Kommutativgesetz (KG):  $\forall z_1, z_2 \in C: z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(2)  $(C \setminus \{0\}; \cdot)$  kommutative Gruppe

a) Abgeschlossenheit:  $\forall z_1, z_2 \in C \setminus \{0\}: z_1 \cdot z_2 = z_3 \in C \setminus \{0\}$

b) Assoziativgesetz (AG):  $\forall z_1, z_2, z_3 \in C \setminus \{0\}: (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

c) neutrales Element  $n_1$ :  $\forall z \in C \setminus \{0\} \exists n_1 \in C \setminus \{0\}$  mit

$$z \cdot n_1 = n_1 \cdot z = z \quad n_1 = 1 = 1 + 0i$$

d) inverses Element  $z^*$ :  $\forall z \in C \setminus \{0\} \exists z^* \in C \setminus \{0\}$  mit

$$z \cdot z^* = z^* \cdot z = n_1 = 1 \quad z \cdot z^* = 1 \quad /: z \neq 0$$

$$z^* = 1/z = 1/[a+bi]$$

e) Kommutativgesetz (KG):  $\forall z_1, z_2 \in C \setminus \{0\}: z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(3) es müssen die beiden Distributivgesetze (DG) gelten

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in C: \quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

**$\Rightarrow C$  ist ein nicht geordneter Körper**

## Kreisteilungszahl, zyklotomische Zahl

... sind ganze Zahlen und eng verbunden mit den Zahlen der Lucas Folgen  $U_n(P, Q)$ .

Sind  $P, Q, D$  und die Wurzeln definiert wie bei der Lucas Folge, dann sind die Kreisteilungszahlen

$$Q_n = \prod (\alpha - \xi^r \beta) ; \text{Produktbildung über } r$$

dabei ist

$$\xi = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$$

eine primitive Wurzel der 1 und  $r$  erfüllt folgende Bedingungen  $0 < r < n$

$$\text{ggT}(r, n) = 1, \text{ d.h. } r \text{ und } n \text{ sind teilerfremd}$$

$r$  ist eine natürliche Zahl.

Der Zusammenhang zu den Lucas Zahlen besteht dann in der Relation  $U_n = \prod Q_d$ ; Produkt über alle  $d | n$

## Riemannsche Zahlenkugel

Kugel im euklidischen Koordinatensystem  $(\xi, \eta, \zeta)$  (mit  $\xi$ -Achse  $x$ -Achse der komplexen Ebene,  $\eta$ -Achse =  $y$ -Achse der komplexen Ebene) um den Punkt  $(0, 0, 1/2)$  mit Radius  $1/2$ . Die Kugeloberfläche erfüllt die Gleichung  $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4$ .

Die komplexe Ebene lässt sich auf die Oberfläche der Riemannschen Zahlenkugel abbilden:

Abbildung eines Punktes  $P(z_1) = (x_1, y_1, 0)$ ,  $z_1 = x_1 + i y_1$ , auf der komplexen Ebene auf einen Punkt

$K(z_1) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  auf der Oberfläche der Riemannschen Zahlenkugel:

Schnittpunkt der Geraden zwischen  $P(z_1)$  und dem Nordpol  $N$  der Riemannschen Zahlenkugel mit der Oberfläche der Zahlenkugel. Ist  $P(z_1) = (x_1, y_1, 0)$  gegeben, dann ist

$$K(z_1) = (x_1/(1+x_1^2+y_1^2), y_1/(1+x_1^2+y_1^2), (x_1^2+y_1^2)/(1+x_1^2+y_1^2)).$$

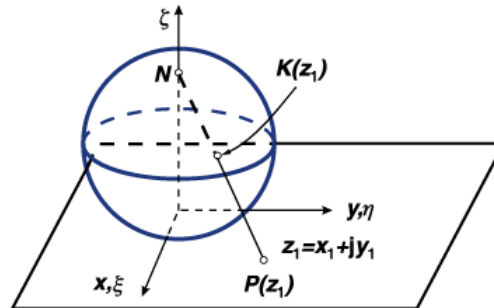
Ist  $K(z_1) = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \neq N$  gegeben, dann ist  $P(z_1) = (\xi_1/(1-\zeta_1), \eta_1/(1-\zeta_1), 0)$ , wobei  $z_1 = (\xi_1 + i \eta_1) / (1 - \zeta_1)$ . Dem Nordpol  $N$  wird formal der Punkt  $z = \infty$

zugeordnet.  $\infty$  ist keine komplexe Zahl. Es gelten durch

Definition die Rechenregeln:

$$z + \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad z / \infty = 0, \quad z / 0 = \infty.$$

Wird eine Figur der komplexen Zahlenebene auf die Riemannsche Kugel abgebildet, so spricht man von einer Riemann-Projektion.



## Gaußsche ganze Zahlen, Gaußsche Zahlen

Eine Gaußsche ganze Zahl oder Gaußsche Zahl ist eine komplexe Zahl

$$z = a + bi,$$

wobei  $a$  und  $b$  ganze Zahlen sind.

Gaußsche Zahlen gehören zum imaginären quadratische Körper  $Q(\sqrt{-1})$  und bilden einen Ring  $Z[i]$ . Die Summe, Differenz und das Produkt zweier Gaußscher Zahlen ist wieder eine Gaußsche Zahl.

Der Quotient zweier Gaußscher Zahlen  $a + bi$  und  $c + di$  ist nur dann Gaußsche Zahl, wenn es ein  $e + fi$  gibt, so dass  $(a + bi) / (c + di) = e + fi$

gilt.

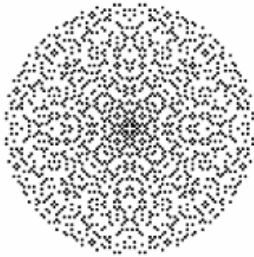
Gaußsche Zahlen können eindeutig in ein Produkt von Gaußschen Primzahlen faktorisiert werden. Die Einheiten von  $Z[i]$  sind  $\pm 1$  und  $\pm i$ .

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Gaußsche Zahl zueinander relativ prim sind, ist

$P_{\text{Gauß}}((a, b) = 1) = 6 / (\pi^2 K) = 0,66370\dots$   
wobei K die Catalansche Konstante ist.

### Gaußsche Primzahlen

Eine Gaußsche Primzahl ist eine Gaußsche ganze Zahl  $a + b \cdot i$ , d.h. a und b sind ganze Zahlen, die eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllen muss:



1. Sind a und b verschieden von Null, dann ist  $a + b \cdot i$  Gaußsche Primzahl genau dann, wenn  $a^2 + b^2$  in den natürlichen Zahlen gewöhnliche Primzahl ist.
2. Ist  $a = 0$ , dann ist  $b \cdot i$  Gaußsche Primzahl, wenn  $|b|$  gewöhnliche Primzahl ist und  $|b| \equiv 3 \pmod{4}$  gilt
3. Ist  $b = 0$ , dann ist a Gaußsche Primzahl, wenn  $|a|$  gewöhnliche Primzahl ist und  $|a| \equiv 3 \pmod{4}$  gilt

In der Abbildung wurden in die komplexe Zahlenebene Gaußsche Primzahlen in der Nähe von 0 eingetragen. Die ersten natürlichen Primzahlen, die auch Gaußsche Primzahlen sind, sind 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, ... Gaußsche Primzahlen

mit  $|a|, |b| \leq 4$  sind  $\pm 4 \pm i, \pm 3 \pm 2i, \pm 3, \pm 2 \pm 3i, \pm 2 \pm i, \pm 1 \pm 4i, \pm 1 \pm 2i, \pm 1 \pm i, \pm 3i$ . Die Anzahl der Gaußschen Primzahlen z mit dem komplexen Betrag  $|z| \leq 10^n$  für  $n = 1, 2, \dots$  sind 0, 100, 4928, 313752, 23046512, ...

Die größte (2008) bekannte Gaußsche Primzahl ist  $(1 + i)^{991961} - 1$ , welche 149305 Ziffern hat (Caldwell).

### Gaußscher Primzahlzyklus

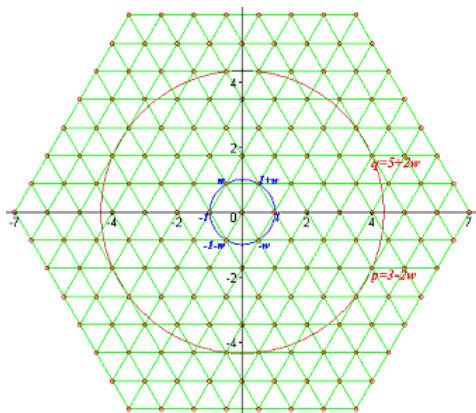
Eine Gaußsche Primzahl ist eine Gaußsche ganze Zahl  $a + b \cdot i$ , die nicht in andere Gaußsche Primzahlen zerlegbar ist.

Ist  $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$  eine Gaußsche Primzahl so kann ein interessanter Zyklus betrachtet werden.

Ausgehend von  $z_1$  wird die nächste Gaußsche Primzahl  $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$  gesucht, die den gleichen Realteil jedoch einen höheren Imaginärteil besitzt.

Von  $z_2$  ausgehend, wird die Primzahl  $z_3$  ermittelt, deren Imaginärteil kleiner ist, der Realteil gleich. Nach  $z_3$  sucht man  $z_4$  mit kleinerem Realteil,  $z_5$  mit höherem Imaginärteil, usw.

In der komplexen Gaußschen Zahlenebene bedeutet dies, dass beim Erreichen einer Primzahl die Suchrichtung um  $90^\circ$  nach rechts gedreht wird. Der Zyklus stoppt, sobald man die Ausgangszahl  $z_1$  erreicht und der Graph symmetrisch ist.



### Eisenstein-Zahlen

Die Eisenstein-Zahlen sind eine Verallgemeinerung der ganzen Zahlen auf die komplexen Zahlen. Sie sind nach dem deutschen Mathematiker Ferdinand Eisenstein, einem Schüler von Gauß, benannt.

Die Gaußschen Zahlen sind eine andere Verallgemeinerung der ganzen Zahlen auf die komplexen Zahlen.

Die Eisenstein-Zahlen sind der Ganzheitsring des quadratischen Zahlkörpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . Sie treten beispielsweise bei der Formulierung des kubischen Reziprozitätsgesetzes auf.

Eine Zahl E ist eine Eisenstein-Zahl, wenn sie sich in der Form

$$E = a + b \omega \quad \text{mit} \quad \omega = e^{2\pi i/3} = -1/2 + i/2 \sqrt{3}$$

und ganzen Zahlen a und b darstellen lässt.

$\omega$  ist eine primitive dritte Einheitswurzel und erfüllt damit die

Gleichung

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0.$$

Die Eisenstein-Zahlen bilden ein Dreiecksgitter in der gaußschen Zahlenebene. Sie entsprechen den Mittelpunkten einer dichtesten Kugelpackung in zwei Dimensionen.

Auf den Eisenstein-Zahlen lässt sich Zahlentheorie betreiben. Man kann Primzahlen definieren und zeigen, dass die Primfaktordarstellung einer Eisenstein-Zahl eindeutig ist.

Ganze Zahlen der Form  $m^2 + 3n^2$  sind in den Eisenstein-Zahlen immer zerlegbar. Daher sind die Zahlen 3, 7, 13, 19, ... keine Primzahlen in den Eisenstein-Zahlen.

### Blum-Zahlen

Eine natürliche Zahl n wird Blum-Zahl genannt, wenn sie die Form  $n = pq$  besitzt und p und q verschiedene Primzahlen kongruent  $3 \pmod{4}$  sind. Eine Blum-Zahl ist damit semiprim.

Da die Faktoren p und q die Form  $4t+3$  besitzen, sind sie Gaußsche Primzahlen ohne imaginären Teil.

Die ersten Blum-Zahlen sind

21, 33, 57, 69, 77, 93, 129, 133, 141, 161, 177, 201, 209, 213, 217, 237, 249, 253, 301, 309, 321, 329, 341, 381, 393, 413, 417, 437, 453, 469, 473, 489, 497, 501, 517, 537, 553, 573, 581, 589, 597, 633, 649, 669, 681, 713, 717, 721, 737, 749, 753, 781, 789, ...

Die Zahlen wurden nach dem venezuelanischen Computerwissenschaftler Manuel Blum (geb. 1938) benannt. 1984 veröffentlichte er das asymmetrische Verschlüsselungssystem Blum-Goldwasser-Kryptosystem.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Blum-Goldwasser\\_cryptosystem](http://en.wikipedia.org/wiki/Blum-Goldwasser_cryptosystem)

Ist  $n = pq$  Blum-Zahl,  $Q_n$  die Menge aller quadratischen Reste modulo  $n$  sowie  $a \in Q_n$ , dann gilt

- 1)  $a$  besitzt genau vier quadratische Wurzeln modulo  $n$ , von denen genau eine in  $Q_n$  liegt
- 2) die Einheitswurzel von  $a$  in  $Q_n$  ist die Hauptwurzel von  $a$  modulo  $n$
- 3) die Funktion  $f: Q_n \rightarrow Q_n$  mit  $f(x) = x^2 \pmod n$  ist Permutation. Die Umkehrfunktion von  $f$  ist:  $f^{-1}(x) = x^{((p-1)(q-1)+4)/8} \pmod n$ .

Vor der Einführung moderner Faktorisierungsverfahren wurden Blum-Zahlen gern als Grundzahlen des RSA-Verfahrens genutzt.

Da Blum-Zahlen aber heute (2009) genau so schnell faktorisiert werden können, wie jedes andere Primzahlprodukt, ist ihre Bedeutung für Verschlüsselungsverfahren zurückgegangen.

## Heegner-Zahlen

In den Gaußschen Zahlen und den Eisenstein-Zahlen existiert eine eindeutige Primfaktorzerlegung. Die Frage entstand, für welche anderen Erweiterungen der ganzen Zahlen dies ebenfalls der Fall ist. Schränkt man sich auf Ganzheitsringe von Erweiterungen  $Q(\sqrt{d})$  der rationalen Zahlen durch Adjunktion der Quadratwurzel aus einer quadratfreien negativen ganzen Zahl  $d$  ein, so zeigt sich, dass die Primfaktorzerlegung genau dann eindeutig ist, wenn  $d$  eine Heegner-Zahl ist.

Heegner-Zahlen (nach Kurt Heegner) sind die Zahlen  $-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67$  und  $-163$ . Genau diese neun Zahlen führen als Diskriminante in einem imaginären quadratischen Zahlkörper zu einer eindeutigen Primzerlegung.

Die Gaußschen Zahlen und die Eisensteinzahlen sind dabei die Fälle  $d = -1$  bzw.  $d = -3$ .

Die Lösung des Problems vermutete schon Carl Friedrich Gauß. Vor 1952 war bekannt, dass es höchstens 10 solche Zahlen geben kann. Kurt Heegner bewies 1952, dass es genau 9 solche Zahlen gibt.

Die Tatsache, dass  $((2x+1)/2)^2 + (1/2 \sqrt{-163})^2 = x^2 \pm x - (1 - (-163))/4 = x^2 \pm x + 41$

für  $x = 0, 1, 2, \dots, 40$  nur Primzahlen liefert, hängt unmittelbar mit den Heegner-Zahl  $-163$  zusammen.

Auch die zu den kleineren Heegner-Zahlen gehörenden Polynome

$$x^2 - x + 17, x^2 - x + 11, x^2 - x + 5, x^2 - x + 3, x^2 - x + 2$$

liefern für alle  $n$  von 1 bis dem Absolutglied-1 nur Primzahlen.

Da es nur 9 Heegner-Zahlen gibt, existieren auch nur 9 solcher Polynome der Form  $x^2 \pm x + a$ , für die von  $x = 0, \dots, a-1$  nur Primzahlen auftreten.

Erstaunlich ist, dass  $e^{\pi\sqrt{n}}$  gerade für die Heegner-Zahlen  $n$  die Ramanujan-Zahlen liefern, d.h. fast ganze Zahlen. So ist

$$e^{\pi\sqrt{43}} = 884736743, 999\,777466 \dots$$

$$e^{\pi\sqrt{67}} = 147197952743, 99999\,8662454 \dots$$

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743, 999999999999\,250072 \dots$$

## Gleichungen im Komplexen

Gleichungen, die im Bereich der reellen Zahlen, unlösbar sind, können im Bereich der komplexen Zahlen durchaus korrekte Lösungen haben:

### cos x = 2

$$\cos x = 2 = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \text{ und mit } e^{ix} = t \text{ wird}$$

$$4 = t + 1/t, \text{ d.h. } 0 = t^2 - 4t + 1$$

$$e^{ix} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

### 1^x = 2

$$\text{Es gilt } e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{mit } 2 = e^{\ln 2} \text{ wird}$$

$$1^x = (e^{2k\pi i})^x = e^{x \cdot 2k\pi i} = 2 = e^{\ln 2}$$

$$\text{Exponentenvergleich ergibt } x \cdot 2k\pi i = \ln 2 \text{ und somit}$$

$$x = -i/(2k\pi) \cdot \ln 2, k \in \mathbb{Z}, \text{ also unendlich viele Lösungen}$$

## Bikomplexe Zahlen

Unter einer bikomplexen Zahl versteht man eine Zahl der Form  $a + b i_1 + c i_2 + d j$

wobei  $a, b, c, d$  reelle Zahlen und  $i_1, i_2, j$  imaginäre Einheiten sind.

Sind  $A = a + b i_1$  und  $B = c + d i_1$  komplexe Zahlen, so kann eine bikomplexe Zahl in der Form  $A + B i_2$  geschrieben werden.

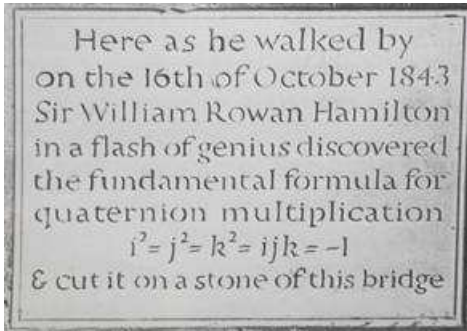
Damit sind bikomplexe Zahlen denn komplexen ähnlich, wobei aber die Komponenten  $A$  und  $B$  im Allgemeinen keine reellen Zahlen sind. Sind  $A$  und  $B$  reell, so wird die bikomplexe Zahl zu einer komplexen.

Die Menge der bikomplexen Zahlen bildet einen kommutativen Ring mit Einselement. Die Multiplikation bikomplexer Zahlen ist kommutativ, assoziativ und distributiv zur Addition. Für die Multiplikation der drei imaginären Einheiten gilt

$$i_1 \cdot i_1 = -1 \quad i_2 \cdot i_2 = -1 \quad j \cdot j = 1 \quad i_1 \cdot i_2 = j \quad i_1 \cdot j = -i_2 \quad i_2 \cdot j = -i_1$$



Eine Division kann auf den bikomplexen Zahlen nicht definiert werden, da das Produkt zweier bikomplexer Zahlen Null werden kann, zum Beispiel für  $1 + j$  und  $i_1 + i_2$ .  
 $(1 + j) \cdot (i_1 + i_2) = i_1 + i_2 + j \cdot i_1 + j \cdot i_2 = i_1 + i_2 - i_2 - i_1 = 0$



### Quaternionen

Täglich führte der Weg Hamilton an der Brougham Bridge vorbei, die heute Broombridge heißt. An dieser Stelle hatte Hamilton den Geistesblitz, der längst zur Folklore der Mathematikgeschichte gehört: Er fand geeignete Multiplikationsregeln für Quaternionen. Und sogleich ritzte er sie mit einem Taschenmesser in einen Stein der Brücke. Leider sind diese Zeichen längst verwittert. An der Brücke ist eine Gedenktafel angebracht: Die Quaternionen bilden eine Ausweitung des Konzepts der komplexen Zahlen: Statt einer imaginären Einheit  $i$  gibt es hier drei ( $i, j, k$ ), so dass ein Quaternion eine Zahl der Form  $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$  ist.

Die Addition von Quaternionen ist wie bei den komplexen Zahlen komponentenweise definiert. Hamilton hatte lange Zeit nach einer geeigneten Multiplikation gesucht:

$$\begin{array}{llll} i^2 = j^2 = k^2 = -1 & i \cdot j = k & j \cdot k = i & k \cdot i = j \\ j \cdot i = -k & k \cdot j = -i & i \cdot k = -j & \end{array}$$

Diese Multiplikation ist nicht kommutativ. Einer Gedenktafel an der Brücke ist zu entnehmen, dass Hamilton die kürzere Version  $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$  in den Stein geritzt hat.

In Mathematik und Physik gibt es Anwendungen der Quaternionen, aber sie haben nicht die Bedeutung erlangt, die Hamilton ihnen vorhergesagt hat. Ein aktuelles Anwendungsbeispiel sind 3D-Rotationen; diese lassen sich auch mit Quaternionen beschreiben, wovon in der Computergraphik Gebrauch gemacht wird.

Quaternionen sind eine vierdimensionale Divisionsalgebra über dem Körper der reellen Zahlen mit einer nicht kommutativen Multiplikation. Als vierdimensionale reelle Algebra sind die Quaternionen ein vierdimensionaler reeller Vektorraum. Daher ist jedes Quaternion durch vier reelle Komponenten

$$x_0, x_1, x_2, x_3$$

eindeutig bestimmt. Als Basiselemente dieses Vektorraums werden vier Elemente mit der Länge 1 gewählt, die senkrecht aufeinander stehen; sie werden mit  $1, i, j, k$  bezeichnet. Die Linearkombination der vier Komponenten mit den vier Basiselementen ist

$$x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

Dabei ist  $\mathbb{R}$  eingebettet als Elemente der Form  $x_0$ , d.h. mit  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

Die Menge der komplexen Zahlen kann auf verschiedene Weisen in die Quaternionen eingebettet werden; die Quaternionen sind jedoch keine  $\mathbb{C}$ -Algebra.

### Rechenregeln

Überträgt man die aus den Körpern  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  bekannten Operationen  $+$  (Addition) und  $\cdot$  (Multiplikation) auf die Quaternionen  $H$ , erhält man einen Schiefkörper.

Die Addition ist dabei identisch mit der Addition des Vektorraums und die Skalarmultiplikation des Vektorraums wird für die Multiplikation übernommen. Dadurch ist zur Definition der Multiplikation nur noch das Produkt von Basiselementen des Vektorraums anzugeben.

Addition  $(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) + (y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) = (x_0 + y_0) + (x_1 + y_1) i + (x_2 + y_2) j + (x_3 + y_3) k$

Multiplikation nach Graßmann

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) \cdot (y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k) &= (x_0 \cdot y_0 - x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) + (x_0 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_0 + x_2 \cdot y_3 - \\ & x_3 \cdot y_2) i + \\ &= (x_0 \cdot y_2 - x_1 \cdot y_3 + x_2 \cdot y_0 + x_3 \cdot y_1) j + (x_0 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_0) k \end{aligned}$$

Die Addition ist assoziativ und kommutativ, die Multiplikation ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

Die besondere Stellung der Komponente  $x_0$  bezeichnet man analog zu den Komplexen Zahlen als Realteil oder Skalarteil  $s = x_0$ , während die Komponenten  $x_1, x_2$  und  $x_3$  Imaginärteil  $x_1 i + x_2 j + x_3 k$  oder Vektorteil  $v = (x_1, x_2, x_3)$  genannt werden. Ein Quaternion, dessen Realteil 0 ist, nennt man reines Quaternion.

Für Quaternionen sind verschiedene Arten der Multiplikation definiert. Man unterscheidet grundsätzlich zwischen der Multiplikation nach Graßmann (siehe vorhergehende Seite) und der Multiplikation nach Euklid, sowie dem Produkt, dem Geradenprodukt und dem Ungeradenprodukt.

Geraden sind definiert durch die Gleichung  $\text{Geraden}(q_1, q_2) = (q_1 q_2 + q_2 q_1) / 2$

und die Ungeraden durch  $\text{Ungeraden}(q_1, q_2) = (q_1 q_2 - q_2 q_1) / 2$

### Graßmann-Geradenprodukt

Das Graßmann-Geradenprodukt der Quaternionen wird selten verwendet. Dieses Produkt ist kommutativ, d.h. es gilt  $\text{Even}(q_1, q_2) = \text{Even}(q_2, q_1)$ .

$$\text{Even}(q_1, q_2) = (q_1 q_2 + q_2 q_1) / 2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + i (a_1 b_2 + b_1 a_2) + j (a_1 c_2 + c_1 a_2) + k (a_1 d_2 + d_1 a_2)$$

### Graßmann-Ungeradenprodukt

Das Kreuzprodukt oder auch Graßmann-Ungeradenprodukt zweier Quaternionen ist das Äquivalent zum Vektorprodukt. Es entspricht dem Vektorprodukt der beiden Vektorteile dieser Quaternionen

$$q_1 \times q_2 = (q_1 q_2 - q_2 q_1) / 2 = i (c_1 d_2 - d_1 c_2) + j (d_1 b_2 - b_1 d_2) + k (b_1 c_2 - c_1 b_2)$$

### Euklidisches Produkt

$$\text{EuklidProd}(q_1, q_2) = (a_1 a_2 + u \rightarrow v \rightarrow, a_1 v \rightarrow - u \rightarrow a_2 - u \rightarrow \times v \rightarrow)$$

### Euklidisches Geradenprodukt

Das Punktprodukt, auch Skalarprodukt, Euklidisches Geradenprodukt oder inneres euklidisches Produkt genannt, entspricht dem Punktprodukt eines 4-wertigen Vektors:  $\langle q_1, q_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$   
 Man kann das Punktprodukt in das Graßmann-Produkt, d.h. die ursprüngliche Multiplikation, umformen

$$\langle q_1, q_2 \rangle = (q_1^{-1} q_2 + q_2 q_1^{-1}) / 2$$

mit  $q_1^{-1}$  ... Konjugation des Quaternions  $q_1$ . Punktprodukte sind nützlich, wenn man ein einzelnes Element eines Quaternions isolieren möchte:  $\langle q, i \rangle = b$

### Euklidisches Ungeradenprodukt

Das Euklidische Ungeradenprodukt, auch äußeres euklidisches Produkt genannt, wird nur selten benötigt. Es ist ähnlich zum inneren euklidischen Produkt und wird deshalb als Paar mit diesem behandelt

$$\text{Outer}(q_1, q_2) = i (a_1 b_2 - b_1 a_2 - c_1 d_2 + d_1 c_2) + j (a_1 c_2 + b_1 d_2 - c_1 a_2 - d_1 b_2) + k (a_1 d_2 - b_1 c_2 + c_1 b_2 - d_1 a_2)$$

### Division von Quaternionen

Die Division zweier Quaternionen wird nicht mit einem Bruchstrich, sondern unter Verwendung eines negativen Exponenten dargestellt, da die Multiplikation von Quaternionen nicht kommutativ ist und man daher zwischen  $q_1 q_2^{-1}$  und  $q_2^{-1} q_1$  unterscheiden muss. Wenn das Quaternion normalisiert wurde, so gilt:

$$q^{-1} = q^{-}$$

Wobei  $q^{-}$  die Konjugation des Quaternions  $q$  ist. Daher gilt  $q q^{-} = 1$

Besitzt das Quaternion eine andere Einheit, teilt man das konjugierte Quaternion durch einen skalaren Wert, welcher sich aus dem Quadrat der Amplitude des Quaternions ergibt, um den reziproken Wert zu erhalten. Damit ergibt sich die Form:

$$(a + i b + j c + k d)^{-1} = (a - i b - j c - k d) / (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

### Hurwitzquaternion

Hurwitzquaternionen oder Hurwitz-Ganzzahlen sind spezielle Quaternionen, deren Koeffizienten entweder alle 4 ganzzahlig oder alle 4 halbzahlig, d.h. Hälften einer ungeraden ganzen Zahl; sind. Die Menge aller Hurwitzquaternionen ist

$$H = \{a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z} \text{ oder } a,b,c,d \in \mathbb{Z} + 1/2\}$$

Der Ring  $H$  der Hurwitz-Quaternionen ist ein nichtkommutativer Unterring des Rings aller Quaternionen. Lipschitzquaternionen oder Lipschitz-Ganzzahlen sind Quaternionen, deren Koeffizienten alle ganzzahlig sind. Der Ring der Lipschitzquaternionen ist ein nichtkommutativer Unterring der Hurwitzquaternionen  $H$ .

Die Norm einer Hurwitzquaternion  $a^2+b^2+c^2+d^2$  ist eine ganze Zahl. Aus dem Vier-Quadrate-Satz von Lagrange folgt, dass jede nicht negative, ganze Zahl Norm einer Lipschitz-Quaternion ist.

Eine Hurwitzquaternion ist in  $H$  genau dann prim, wenn ihre Norm prim ist. Der Ring der Hurwitzquaternionen ist euklidisch. Die Gruppe  $H$  hat ein Erzeugendensystem  $\{1/2(1+i+j+k), i, j, k\}$ .

### Oktaven, Cayley-Zahlen

Bildet man ein Paar von Quaternionen, so entstehen die Cayley-Zahlen oder Oktaven. Die Multiplikations- und Konjugationsregel ist mit denen für die Quaternionen definierten identisch. So wie die komplexen Zahlen und Quaternionen können auch Oktaven als Linearkombination der imaginären Einheiten geschrieben werden. Diese werden mit  $e_1$  bis  $e_7$  bezeichnet.

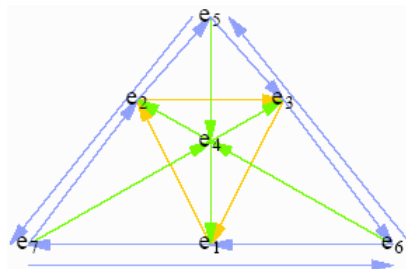
Wie bei den Quaternionen ist  $e_i^2 = -1$ , und sie sind bezüglich der Multiplikation antikommutativ, d.h.  $e_i e_k = -e_k e_i$ .

Zum schnellen Bestimmen des Produktes zweier  $e_i$  nutzt man die Fano-Ebene, ein Gebilde der projektiven Geometrie.

Die Einheiten werden multipliziert, in dem man den Pfeilen der Fano-Ebene folgt, z.B.  $e_7 e_2 = e_5$  oder  $e_6 e_4 = e_2$ .

Alle vier Zahlenbereiche (reelle Zahlen, komplexe Zahlen, Quaternionen und Oktaven) sind Divisionsalgebren, d.h. zu einer Zahl existiert ein multiplikativ inverses Element. Bildet man Paare von Oktaven, so ist dies nicht mehr der Fall.

Die reellen und komplexen Zahlen sind kommutativ bezüglich der Multiplikation, Quaternionen und Oktaven sind dies nicht. Während die Quaternionenmultiplikation nicht assoziativ ist, gilt dies für die Oktaven nicht mehr.



## Sedenionen

Die Sedenionen sind 16-dimensionale hyperkomplexe Zahlen, die mittels Verdopplungsverfahrens aus den Oktakten (Oktonionen) entstehen.

Die Multiplikation der Sedenionen ist weder kommutativ noch assoziativ und auch nicht alternativ. Sie ist nur noch potenz-assoziativ und flexibel.

Die Sedenionen bilden eine nichtkommutative Jordan-Algebra und besitzen Nullteiler.

Jedes Sedenion ist eine reelle Linearkombination der Einheiten  $e_i$  ( $i = 0, \dots, 15$ ), wobei  $e_0 = 1$  ist.

Eine mögliche Multiplikationstafel der Einheiten ist:

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$
$e_1$	$e_1$	-1	$e_3$	- $e_2$	$e_5$	- $e_4$	- $e_7$	$e_6$	$e_9$	- $e_8$	- $e_{11}$	$e_{10}$	- $e_{13}$	$e_{12}$	$e_{15}$	- $e_{14}$
$e_2$	$e_2$	- $e_3$	-1	$e_1$	$e_6$	$e_7$	- $e_4$	- $e_5$	$e_{10}$	$e_{11}$	- $e_8$	- $e_9$	- $e_{14}$	- $e_{15}$	$e_{12}$	$e_{13}$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	-1	-1	$e_7$	- $e_6$	$e_5$	- $e_4$	$e_{11}$	- $e_{10}$	$e_9$	- $e_8$	- $e_{15}$	$e_{14}$	- $e_{13}$	$e_{12}$
$e_4$	$e_4$	- $e_5$	- $e_6$	- $e_7$	-1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	- $e_8$	- $e_9$	- $e_{10}$	- $e_{11}$
$e_5$	$e_5$	$e_4$	- $e_7$	$e_6$	- $e_1$	-1	- $e_3$	$e_2$	$e_{13}$	- $e_{12}$	$e_{15}$	- $e_{14}$	$e_9$	- $e_8$	$e_{11}$	- $e_{10}$
$e_6$	$e_6$	$e_7$	$e_4$	- $e_5$	- $e_2$	$e_3$	-1	- $e_1$	$e_{14}$	- $e_{15}$	- $e_{12}$	$e_{13}$	$e_{10}$	- $e_{11}$	- $e_8$	$e_9$
$e_7$	$e_7$	- $e_6$	$e_5$	$e_4$	- $e_3$	- $e_2$	$e_1$	-1	$e_{15}$	$e_{14}$	- $e_{13}$	- $e_{12}$	$e_{11}$	$e_{10}$	- $e_9$	- $e_8$
$e_8$	$e_8$	- $e_9$	- $e_{10}$	- $e_{11}$	- $e_{12}$	- $e_{13}$	- $e_{14}$	- $e_{15}$	-1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_9$	$e_9$	$e_8$	- $e_{11}$	$e_{10}$	- $e_{13}$	$e_{12}$	$e_{15}$	- $e_{14}$	- $e_1$	-1	- $e_3$	$e_2$	- $e_5$	$e_4$	$e_7$	- $e_6$
$e_{10}$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_8$	- $e_9$	- $e_{14}$	- $e_{15}$	$e_{12}$	$e_{13}$	- $e_2$	$e_3$	-1	- $e_1$	- $e_6$	- $e_7$	$e_4$	$e_5$
$e_{11}$	$e_{11}$	- $e_{10}$	$e_9$	$e_8$	- $e_{15}$	$e_{14}$	- $e_{13}$	$e_{12}$	- $e_3$	- $e_2$	$e_1$	-1	- $e_7$	$e_6$	- $e_5$	$e_4$
$e_{12}$	$e_{12}$	$e_{13}$	$e_{14}$	$e_{15}$	$e_8$	- $e_9$	- $e_{10}$	- $e_{11}$	- $e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	-1	- $e_1$	- $e_2$	- $e_3$
$e_{13}$	$e_{13}$	- $e_{12}$	$e_{15}$	- $e_{14}$	$e_9$	$e_8$	$e_{11}$	- $e_{10}$	- $e_5$	- $e_4$	$e_7$	- $e_6$	$e_1$	-1	$e_3$	- $e_2$
$e_{14}$	$e_{14}$	- $e_{15}$	- $e_{12}$	$e_{13}$	$e_{10}$	- $e_{11}$	$e_8$	$e_9$	- $e_6$	- $e_7$	- $e_4$	$e_5$	$e_2$	- $e_3$	-1	$e_1$
$e_{15}$	$e_{15}$	$e_{14}$	- $e_{13}$	- $e_{12}$	$e_{11}$	$e_{10}$	- $e_9$	$e_8$	- $e_7$	$e_6$	- $e_5$	- $e_4$	$e_3$	$e_2$	- $e_1$	-1

## Hyperreelle Zahl

Quelle: [http://mathforum.org/dr.math/faq/analysis\\_hyperreals.html](http://mathforum.org/dr.math/faq/analysis_hyperreals.html)

In der Mathematik sind hyperreelle Zahlen ein Untersuchungsgegenstand der Nichtstandardanalysis. Die Menge der hyperreellen Zahlen wird meist als  ${}^*\mathbb{R}$  geschrieben; sie erweitert die reellen Zahlen um ihre infinitesimal benachbarten Zahlen sowie um unendlich große, infinite, Zahlen.

Abraham Robinson (1918-1974) zeigte in den 1960ern, auf welche Weise unendlich große und kleine Zahlen streng formal definiert werden können und eröffnete so das Gebiet der Nichtstandard-Analyse. Durch die hyperreellen Zahlen ist eine Formulierung der Differenzial- und Integralrechnung ohne den Grenzwertbegriff möglich.

Die hyperreellen Zahlen  ${}^*\mathbb{R}$  bilden einen geordneten Körper, der  $\mathbb{R}$  als Teilkörper enthält. Im Gegensatz zu den reellen Zahlen bilden die hyperreellen Zahlen keinen metrischen Raum. Dennoch tragen sie eine Ordnungstopologie.

Eine logische Aussage der Prädikatenlogik erster Stufe heißt im Kontext der Nichtstandard-Analyse wohlgeformt, wenn sie nur bestimmte grundlegende Verknüpfungen (Grundrechenarten, Vergleich) und natürliche Zahlen enthält und nur über reelle Zahlen quantifiziert (Allquantor, Existenzquantor).

Die hyperreellen Zahlen sind auf eine solche Weise definiert, dass jede wohlgeformte Aussage auch zutrifft, wenn man sie über hyperreelle Zahlen quantifiziert.

In  ${}^*\mathbb{R}$  gibt es Zahlen, die in  $\mathbb{R}$  nicht existieren. Zum Beispiel gibt es ein Element  $w$  mit der folgenden Eigenschaft:

$$1 < w, 1+1 < w, 1+1+1 < w, 1+1+1+1 < w, \dots$$

Eine hyperreelle Zahl wie  $w$  nennt man infinit, der Kehrwert einer unendlich großen Zahl ist eine infinitesimale Zahl.

Die hyperreellen Zahlen sind gleichmächtig zu den reellen Zahlen.

Man konstruiert die hyperreellen Zahlen als Folgen reeller Zahlen.  $\mathbb{R}$  wird durch die Identifikation einer reellen Zahl  $r$  mit der konstanten Folge  $(r, r, r, \dots)$  in die so konstruierten Zahlen eingebettet, d.h.

$$0 = (0,0,0,0,\dots), 1 = (1,1,1,1,\dots), \dots$$

Rechenoperationen werden gliedweise definiert

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$$

Analog wird die Multiplikation erklärt. Für jede Folge  $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$  gilt dann z.B.  $a + a = 2a$ .

Damit wurde das abzählbar unendliche direkte Produkt  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des Körpers  $\mathbb{R}$  mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation gebildet. Dieses  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$  ist kein Körper, sondern ein kommutativer unitärer Ring. Zum Beispiel gibt es zu jeder Folge, die auch nur an einer Stelle eine 0 aufweist, kein multiplikatives Inverses.

Um eine Ordnungsrelation einzuführen, wird ein freier Ultrafilter  $U$  auf den natürlichen Zahlen eingeführt. Ein solches  $U$  existiert nach dem Auswahlaxiom, wobei die Wahl des Ultrafilters keine Rolle spielt. Dann ist

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \leq (b_0, b_1, b_2, \dots)$ , falls  $\{n : a_n \leq b_n\}$  in  $U$ .

Damit ist die Menge der reellen Zahlenfolgen total geordnet. Mit der Äquivalenzrelation

$a = b$ , falls  $a \leq b$  und  $b \leq a$ .

ist die Ordnungsrelation eine totale Ordnung. Addition und Multiplikation der Äquivalenzklassen sind wohldefiniert, womit der Körper der hyperreellen Zahlen konstruiert ist.

Eine hyperreelle Zahl  $\epsilon$  heißt infinitesimal, wenn sie kleiner ist als jede positive reelle Zahl, aber größer als jede negative reelle Zahl. Die Zahl Null ist die einzige infinitesimale reelle Zahl, aber es gibt andere hyperreelle infinitesimale Zahlen, z.B.  $a = (1; 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001; \dots)$

Eine hyperreelle Zahl  $x$  heißt endlich, wenn es eine natürliche Zahl  $n$  gibt mit  $-n < x < n$ , anderenfalls heißt  $x$  unendlich. Die Zahl  $a = (1, 10, 100, 1000, \dots)$  ist eine infinite Zahl. Eine von 0 verschiedene Zahl  $x$  ist genau dann unendlich, wenn  $1/x$  infinitesimal ist.

## Hyperkomplexe Zahlen

Hyperkomplexe Zahlen sind Verallgemeinerungen der komplexen Zahlen. Hyperkomplexe Zahlen bilden algebraische Strukturen über den reellen Zahlen mit Addition und Multiplikation. Man fordert die folgenden Eigenschaften:

für die Addition gelten das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz.

die Addition ist invertierbar.

das linksseitige und das rechtsseitige Distributivgesetz gilt.

die Multiplikation von hyperkomplexen Zahlen ist bilinear über den reellen Zahlen, also gilt

$(ax)(by) = ab(xy)$  für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $x, y$  hyperkomplexe Zahlen.

Nicht gefordert werden: für die Multiplikation von hyperkomplexen Zahlen braucht weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz zu gelten.

die Multiplikation braucht nicht nullteilerfrei zu sein.

die Multiplikation ist im Allgemeinen nicht invertierbar.

Hyperkomplexe Zahlen lassen sich wie folgt als Summe darstellen:  $a = a_0 1 + a_1 i_1 + \dots + a_n i_n$

Die Größen  $i_k$  heißen imaginäre Einheiten. Die zu  $a$  konjugierte Zahl entsteht, indem alle imaginären Einheiten durch ihr negatives ersetzt werden. Die zu  $a$  konjugierte komplexe Zahl wird durch  $a^*$  dargestellt. Ihre Summendarstellung ist

$$a^* = a_0 1 - a_1 i_1 - \dots - a_n i_n$$

Beispiele: Die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  sind ein hyperkomplexes Zahlensystem, das durch  $z = a + bi$  mit  $i^2 = -1$  definiert ist.

Die binären Zahlen sind definiert durch  $z = a + b E$  mit  $E^2 = 1$ . Die dualen Zahlen sind definiert durch  $z = a + b \Omega$  mit  $\Omega^2 = 0$ . Dies sind keine(!) Dualzahlen.

Die Quaternionen  $\mathbb{H}$  sind vierdimensionale hyperkomplexe Zahlen mit Division und assoziativer, nicht kommutativer Multiplikation. Die Quaternionen bilden einen Schiefkörper.

Die Oktonionen  $\mathbb{O}$  sind achtdimensionale hyperkomplexe Zahlen mit Division und alternierender Multiplikation.

Die Sedenionen  $\mathbb{S}$  sind sechzehndimensionale hyperkomplexe Zahlen. Ihre Multiplikation ist weder kommutativ, assoziativ oder alternativ. Auch besitzen sie keine Division; stattdessen haben sie Nullteiler. Jede Clifford-Algebra ist ein assoziatives hyperkomplexes Zahlensystem.

## Duale Zahlen

In der algebraischen Geometrie ist der Ring der dualen Zahlen über einem Körper ein algebraisches Objekt, das eng mit dem Begriff des Tangentialvektors zusammenhängt. Es sei  $A$  ein Ring. Dann ist der Ring der dualen Zahlen über  $A$  der Faktoring  $A[\epsilon] = A[X]/(X^2)$

$\epsilon$  ist das Bild der Unbestimmten  $X$  im Quotienten  $A[X]/(X^2)$ .

Erklärung und Eigenschaften : Es sei  $k$  ein Körper.  $k[\epsilon]$  ist ein lokaler artinscher Ring, der als Vektorraum über  $k$  die Dimension 2 hat. Jedes Element hat eine eindeutige Darstellung  $a + b\epsilon$  mit  $a, b \in k$

Das maximale Ideal wird von  $\epsilon$  erzeugt; der Restklassenkörper ist  $k$ . ( $\epsilon$ ) und  $k$  sind als  $k[\epsilon]$ -Moduln isomorph. Für jeden Ring  $A$  ist  $A[\epsilon] = A \otimes Z[\epsilon]$

## Biquaternionen

Die Biquaternionen sind ein hyperkomplexes Zahlensystem, das von William Kingdon Clifford in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts beschrieben wurde.

Die Biquaternionen sind ein 8-dimensionales hyperkomplexes Zahlensystem mit den Einheiten  $1, i, j, k, \omega, \omega i, \omega j, \omega k$ . Hierbei sind  $i, j, k$  die Einheiten der Quaternionen,  $\omega^2 = 1$ , und  $\omega$  kommutiert mit  $i, j, k$ .

Die Biquaternionen bilden einen Ring mit Nullteilern. Jedes Biquaternion  $p$  lässt sich als Summe zweier Quaternionen  $q$  und  $r$  darstellen:

$$p = q + \omega r$$

Die Biquaternionen sind die Clifford-Algebra  $Cl(3, 0, \mathbb{R})$ . Die Verbindung entsteht durch

$$i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k \text{ und } i_1 i_2 i_3 = \omega$$

Die Biquaternionen sind die direkte Summe der Quaternionen mit sich selbst,  $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ .

## p-adische Zahlen

Für jede Primzahl  $p$  bilden die  $p$ -adischen Zahlen einen Erweiterungskörper  $\mathbb{Q}_p$  der rationalen Zahlen; sie wurden 1897 erstmals von Kurt Hensel beschrieben.

Diese Körper werden benutzt, um Probleme in der Zahlentheorie zu lösen, oftmals unter Verwendung des lokal-global-Prinzips von Helmut Hasse, welches vereinfacht aussagt, dass eine Gleichung genau dann über den rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  gelöst werden kann, wenn sie über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und allen  $\mathbb{Q}_p$  gelöst werden kann.

Als metrischer Raum ist  $\mathbb{Q}_p$  vollständig, und erlaubt so die Entwicklung einer  $p$ -adischen Analysis analog zur reellen Analysis.

Ist  $p$  eine fest gewählte Primzahl, dann kann jede ganze Zahl in einer  $p$ -adischen Entwicklung geschrieben werden, d.h. die Zahl wird "zur Basis  $p$  geschrieben":  $\pm \sum_{i=0}^n a_i p^i$   
wobei die  $a_i$  Zahlen aus  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  sind. Zum Beispiel ist die 2-adische Entwicklung die Binärdarstellung.

Eine Verallgemeinerung dieser Beschreibung auf größere Zahlmengen ist die Zulassung unendlicher Summen dieser Form  $\pm \sum_{i=-\infty}^n a_i p^i$

Diese Reihen sind konvergente Partialsummenfolgen bezüglich des gewöhnlichen Absolutbetrags.

Man kann dann zum Beispiel  $1/3$  zur Basis 5 darstellen als Grenzwert der Reihe  $0,13131313\dots_5$ . In diesem System sind die ganzen Zahlen genau diejenigen, für die  $a_i = 0$  ist für alle  $i < 0$ .

Alternativ kann man die Summen am anderen Ende ins Unendliche verlängern, und erhält Reihen  $\pm \sum_{i=k}^{\infty} a_i p^i$

wobei  $k$  eine beliebige ganze Zahl ist. Damit ergibt sich der Körper  $\mathbb{Q}_p$  der  $p$ -adischen Zahlen. Diejenigen  $p$ -adischen Zahlen, für die  $a_i = 0$  für alle  $i < 0$  ist, heißen  $p$ -adische ganze Zahlen.

Mit diesen Reihen kann wie gewohnt gerechnet werden: Addition von rechts nach links mit Übertrag, Multiplikation nach Schulmethode. Dabei können sich Überträge ins Unendliche fortsetzen. Zum Beispiel ergibt die Addition von  $\dots 44444_5$  und  $1_5$  die Zahl  $0_5$ .

## Positionssysteme

### P-adische Darstellung reeller Zahlen

Der Bruch  $22/7 = 3,142857\ 142857, \dots$  entspricht in Potenzschreibweise der unendlichen Reihe

$$22/7 = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + \dots$$

Dabei liegt das Dezimalsystem, also Basis  $B = 10$ , zugrunde. Statt  $B = 10$  kann jede natürliche Zahl  $\geq 2$  als Basis verwendet werden.  $B \in \mathbb{N}$ ,  $B \geq 2$  und  $Z_B = \{0, 1, 2, \dots, B-1\}$  eine Menge von  $B$  Elementen, denen wir in der angeschriebenen Reihenfolge die Zahlenwerte  $0, 1, 2, \dots, B-1$  zuordnen. Dann konvergiert nach dem Majorantenkriterium jede Reihe der Form

$$b_n \cdot B^n + \dots + b_0 \cdot B^0 + b_{-1} \cdot B^{-1} + b_{-2} \cdot B^{-2} + \dots, \quad n \in \mathbb{N}, b_k \in Z_B$$

für alle  $n \leq k$ , und ihre Summe ist eine positive reelle Zahl.

### Komplementärzahl

Gegeben sei ein Zahlensystem zur Basis  $g$  mit den Ziffern  $\{0, 1, 2, \dots, g-1\}$ . Unter der Komplementaritätsbeziehung versteht man die Tatsache, dass es zu jeder Zahl  $a < g$  dann eine Komplementärzahl

$$(g - a - 1)$$

existiert.

Zum Beispiel hat die 6 im Dezimalsystem die Komplementärzahl 3. Im Binärsystem entspricht die Null der Komplementärzahl 1 und die 1 entspricht der Null. Allgemein ist die Komplementärzahl der Null stets die Zahl  $g-1$ , die Komplementärzahl von 1 entsprechend  $g-2$ .

Die vierstellige Zahl  $10(g-2)(g-1)$

wird Repräsentantin des Zahlensystems zur Basis  $g$  genannt. Die 1089 ist die Repräsentantin des Dezimalsystems, die 1001 die im Dualsystem. Jede andere vierstellige Zahl im System zur Basis  $g$ , bei der die Summen aus erster und vierter sowie zweiter und dritter Ziffer gerade  $g-1$  ergeben, wird Mutuante genannt.

Im Dezimalsystem sind zum Beispiel 2178, 3267, 4356, ... Mutuanten.

### Dualsystem, Zweiersystem

Das Zweiersystem ist eine Stellenschreibweise der Zahlen, bei der nur die beiden Ziffern 0 und 1 verwendet werden.

Grundziffern 0, 1

Stellenwert Potenzen von 2

Darstellungsform  $b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0, b_{-1} b_{-2} \dots$

Addition  $0 + 0 = 1 \quad 0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 10$

Multiplikation  $0 * 0 = 0 \quad 0 * 1 = 0 \quad 1 * 1 = 1$

Komplementdarstellung (für negative ganze Zahlen)  $-Z = -Z + 1$

positive Dualzahl  $Z$ ,  $-$  bitweise Negation, d.h.  $-Z$  wird als Differenz  $2^n - Z$  dargestellt

Die Darstellung im Zweiersystem ist ungewöhnlich, schon weil die Anzahl der Stellen schnell wächst, aber im Zeitalter der Informationstechnik hat sie eine große Bedeutung erlangt. 1 und 0 können gedeutet werden als an-aus, wahr-falsch, ja-nein, geschlossen-offen. Das Zweiersystem heißt auch Dualsystem, dyadisches System, Binärsystem oder binäres System.

### Tabelle der ersten Dualzahlen

Dezimal	Dual	Dezimal	Dual	Dezimal	Dual	Dezimal	Dual
1	1	2	10	3	11	4	100
5	101	6	110	7	111	8	1000
9	1001	10	1010	11	1011	12	1100
13	1101	14	1110	15	1111	16	10000
17	10001	18	10010	19	10011	20	10100
21	10101	22	10110	23	10111	24	11000

### Dyadik

Die Dyadik (dyo, griech. = Zwei), d.h. die Darstellung von Zahlen im Dualsystem wurde schon Ende des 17. Jahrhunderts von Leibniz entwickelt. Er sah darin ein so überzeugendes Sinnbild des christlichen Glaubens, dass er damit den chinesischen Kaiser Kangxi überzeugen wollte.

Dazu schrieb er an den französischen Jesuitenpater Bouvet, der als Missionar in China tätig war:

"Zu Beginn des ersten Tages war die 1, das heißt Gott. Zu Beginn des zweiten Tages die 2, denn Himmel und Erde wurden während des ersten geschaffen. Schließlich zu Beginn des siebenten Tages war schon alles da; deshalb ist der letzte Tag der vollkommenste und der Sabbat, denn an ihm ist alles geschaffen und erfüllt, und deshalb schreibt sich die 7 111, also ohne Null.

Und nur wenn man die Zahlen bloß mit 0 und 1 schreibt, erkennt man die Vollkommenheit des siebenten Tages, der als heilig gilt, und von dem noch bemerkenswert ist, dass seine Charaktere einen Bezug zur Dreifaltigkeit haben."

### Vom Zweiersystem zum Zehnersystem

Es stellt sich die Aufgabe, eine Zahl wie  $(100111)_2$  ins Zehnersystem zu übertragen.

... 256er 128er 64er 32er 16er 8er 4er 2er Einer  
 ... 0 0 0 1 0 0 1 1 1

Man trägt die Zahl in die Tabelle ein und liest  $(100111)_2 = 1+2+4+32=39$  ab. Man beginnt bei der Summenbildung auf der rechten Seite. Weitere Beispiele:  $(111000)_2 = 8+16+32=56$ ,  $(110011)_2 = 1+2+16+32=51$ ,  $(11111111)_2 = 1+2+4+8+16+32+64+128=255$ .

### Vom Zehnersystem zum Zweiersystem

Das umgekehrte Problem, zu einer Zahl wie 38 die Schreibweise im Zweiersystem zu finden, erfordert eine Vorbereitung. Man muss 38 in eine Summe von Zweierpotenzen zerlegen. Dabei beginnt man mit der größten Potenz, die kleiner ist als die gegebene Zahl, und zerlegt dann weiter.  $38=32+6=32+4+2$ . Das führt in der Tabelle zu folgendem Eintrag

... 256er 128er 64er 32er 16er 8er 4er 2er Einer  
 ... 0 0 0 1 0 0 1 1 0

Die Zahl 38 hat also die Darstellung  $38=(100110)_2$ . Weitere Beispiele:

$56=32+16+8=(111000)_2$ ,  $51=32+16+2+1=(110011)_2$ ,  $255=128+64+32+16+8+4+2+1=(11111111)_2$

### Halbierungsverfahren mittels Euklidischem Verfahren

In der Schule wird im Allgemeinen gelehrt, dass man eine Liste der Potenzen von 2 erstellt (siehe oben), und nun beginnend mit der größten Potenz von 2, welche noch kleiner ist als die Zahl, durch wiederholte Subtraktion eine Summe von Potenzen zu ermitteln, welche gerade gleich der Zahl ist. So schön wie dieser Algorithmus aussieht, so unpraktisch, langsam und aufwendig ist er. Gerade die Berechnung der Potenzen der Basis ist mühevoll.

Viel eleganter ist der Weg mittels Euklidischen Verfahren. Da hier ausschließlich dividiert wird, erhält man sehr schnell das Gewünschte. Einziger Nachteil: Man erhält die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge. Das wird am Beispiel der Zahl 116 erklärt:

116...58...0	Stelle drei Spalten bereit.
058...29...0	Schreibe oben links in die erste Spalte die gegebene Zahl 116.
029...14...1	Dividiere sie durch 2 und schreibe die halbe Zahl 58 in die zweite Spalte und in die dritte Spalte den Rest 0.
014...07...0	Schreibe die mittlere Zahl 58 in die nächste Zeile und wiederhole das Halbieren.
007...03...1	Führe das Halbieren fort, bis in der mittleren Spalte Null steht.
003...01...1	Notiere die Reste von unten nach oben. Das ist in diesem Falle 1110100. Das ist die Darstellung im Zweiersystem.
001...00...1	

Erklärung: Die Zeilen kann man schreiben als  $116=58*2$ ,  $58=29*2$ ,  $29=14*2+1$ ,  $14=7*2$ ,  $7=3*2+1$ ,  $3=1*2+1$ .

Man ersetzt die halben Zahlen nacheinander:  $116=58*2=(29*2)*2= \dots$   
 $=((((1*2+1)*2+1)*2)*2+1)*2$

Im Term steckt die dritte Spalte:  $((((0*2+1)*2+1)*2+1)*2+1)*2+0$

Multipliziert man diesen Term aus, so erhält man  $116=2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2$ .

### Rechenoperationen im Dualsystem

An Hand der beiden Zahlen  $(100011)_2$  und  $(111)_2$  werden die schriftlichen Rechenverfahren erklärt:

100011  
 + 111  
 ---  
 101010

#### Addition

Man schreibt die Zahlen untereinander und addiert stellenweise von rechts nach links. Man beginnt mit  $1+1=2=10$ . Die Ziffer 0 schreibt man hin und 1 als Übertrag. Dann folgt  $1+1+1=3=11$ . Man schreibt 1 hin und notiert den Übertrag 1.

100011  
 - 111  
 ---  
 11100

#### Subtraktion

Wieder schreibt man die beiden Zahlen untereinander. Die ersten beiden Einsen führen unten zu 0. Dann muss man  $1+x=10$  lösen. Es ist  $1+1=10$ . Man schreibt 1 hin und vermerkt den Übertrag 1. Die gleiche Überlegung erfordern die nächsten beiden Spalten.

100011 : 111  
 100011  
 100011  
 ---  
 11110101

#### Multiplikation

Nach dem üblichen Verfahren schreibt man die Faktoren nebeneinander und beginnt mit der Viererstelle ("Hunderter"):  $100011 * 1 = 100011$ .

Dann folgt die gleiche Zeile noch zweimal, wird aber nach rechts verschoben. Die spaltenweise Addition schließt sich an.

100011 : 111 = 101  
 111  
 ---  
 000111  
 111  
 ---  
 0

#### Division

Die erste Division ist  $1000:111="1"$ . Die zweite Zeile heißt dann 111. Die Differenz ist 1. Holt man die nächste 1 herunter, so ist  $11:111$  nicht möglich. Also steht oben rechts die Zahl 0. Die nächste Stelle, die man herunterholt, führt zu  $111:111=1$ . Also ist 101 der gesuchte Quotient.

## Dualbruch

Unter einem Dualbruch versteht man die Darstellung einer gebrochenen Zahl  $z/n$ , mit  $0 < z/n < 1$ , im Dualsystem.

Da die Basis 2 des Dualsystems nur dem Primteiler 2 besitzt, sind ausschließlich die Brüche mit einer Zweierpotenz als Nenner endlich. Alle anderen Brüche sind periodisch, zum Beispiel

$$\begin{aligned}1/3 &= [0,01, \text{Periode } 01]_2 \\1/5 &= [0,0011, \text{Periode } 0011]_2 \\1/6 &= [0,001, \text{Periode } 01]_2 \\1/7 &= [0,001, \text{Periode } 001]_2\end{aligned}$$

Das nachfolgende, einfache Programm berechnet die Ziffern des Dualbruchs. Die Stellenzahl  $n$  ist dabei unbeschränkt.

```
Eingabe:      Stellenzahl s
             Bruch z/n
Programm:     x1:= z/n;
             for i:=1 to s do begin
             if x1<1/2 then begin write('0'); x1:=2*x1;
             end else begin y[i]:=1; x1:=2*x1-1; end;
             end;
```

## Zweierkomplement, Einerkomplement

### Berechnung des Zweierkomplements einer Zahl

Das Zweierkomplement erhält man, indem man das Einerkomplement bildet und anschließend 1 addiert. Das Einerkomplement erhält man durch bitweises Vertauschen der Werte 0 und 1.

Beispiel: Zweierkomplementdarstellung von -6

Die Binärdarstellung von +6 ist  $0110_2$ . Das Einerkomplement ist nun  $1001_2$ . Mit der Addition von 1 wird dann für die Zweierkomplementdarstellung der Zahl -6

$$1010_2$$

### Addition von Zweierkomplementzahlen

Da das Bilden des Negativen einer Zahl einfach ist, kann die Subtraktion auf eine Negation mit anschließender Addition zurückgeführt werden.

Zur Berechnung von  $2 - 6$ , wird die Addition  $2 + (-6)$  ausgeführt.

$$\begin{array}{r}0010 \quad || = 2_{10} \\+ 1010 \quad || \text{Zweierkomplement von } -6_{10} \\ \hline\end{array}$$

Ergebnis  $1100$

Das erste Bit (1xxx) zeigt, dass das Ergebnis negativ ist. Den Betrag erhält man, indem das Zweierkomplement gebildet wird.

$$\begin{aligned}\text{Einerkomplement von } 1100 &= 0011 \\ \text{Zweierkomplement ... } 0011 + 0001 &= 0100_2 = 4_{10}\end{aligned}$$

Mit der Vorzeicheninformation wird als Ergebnis der Rechnung  $-4_{10}$

## Negabinäre Darstellung

Die binäre Darstellung einer Dezimalzahl  $z$  ist die Faktorfolge der  $f_i \in [0, 1]$  mit

$$z = \dots + f_m 2^m + f_{m-1} 2^{m-1} + \dots + f_2 2^2 + f_1 2^1 + f_0 2^0$$

d.h. die zugehörige Dualzahl.

Unter der negabinären Darstellung versteht man nun die endliche Summe, bei der die Basis 2 durch -2 ersetzt wird. Damit sind alle Summanden mit ungeradem Index negativ.

Zum Beispiel ergibt sich

$$2010 = [1100000101110]_{-2} = (-2)^{12} + (-2)^{11} + (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1$$

Zahlen, die die gleiche binäre und negabinäre Darstellung haben, gehören zur Moser-de Bruijn-Folge:

$$0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, 64, 65, 68, 69, 80, 81, \dots$$

Zur Umwandlung einer Dualzahl in die Negabinärzahl addiert man, nach Schroepfel, die Dualzahl  $\dots 1010101010$  und bildet ziffernweise die XOR-Verknüpfung mit  $\dots 1010101010$ .



1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Karte 1

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Karte 3

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Karte 2

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Karte 4

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Karte 5

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Karte 6

### Binärkartenspiel

Eine einfache Anwendung des Dual- bzw. Binärsystems ist das als Binärkartenspiel (engl. Binary Card Game) bezeichnete Problem.

Auf sechs Karten sind jeweils 32 natürliche Zahlen von 1 bis 63 notiert. Aufgabe ist es, alle die Karten auszuwählen, auf der eine gedachte Zahl von 1 bis 63 notiert ist.

Die gedachte Zahl ergibt sich, indem man die ersten Zahlen der gewählten Karten addiert.

Zum Beispiel ergibt sich für die natürliche Zahl 39 die Dualzahl  $100111 = 25 + 2^2 + 21 + 20 = 32 + 4 + 2 + 1$ . Auf Grund der Dualdarstellung ist die Zahl 39 auf den Karten mit den ersten Zahlen 1, 2, 4 und 32 notiert. Ein analoges Spiel, das Ternärkartenspiel, ergibt sich, wenn Karten auf der Basis des Ternärsystems verwendet werden.

### Ternärsystem

Das Ternärsystem, auch Dreiersystem genannt, ist ein Stellenwertsystem zur Basis 3. Es kommt in zwei Arten vor, als gewöhnliches Ternärsystem mit den Ziffern 0, 1 und 2 sowie als balanciertes Ternärsystem mit den Ziffern

0, 1 und -1.

Eine ternäre Ziffer wird, in Analogie zum Bit, als Trit bezeichnet. 1958 wurde in der Sowjetunion der Setun-Computer entwickelt, der mit ternären Zahlen rechnete.

### Gewöhnliches Ternärsystem

Eine Zahl im gewöhnlichen Ternärsystem wird mit den Ziffern 0, 1, und 2 dargestellt. Falls Verwechslungen auftreten können, wird eine Ternärzahl durch eine angehängte tiefgestellte 3 gekennzeichnet.

Beispiel:  $12_3 = 5$

### Balanciertes Ternärsystem

Eine Zahl im balancierten Ternärsystem wird mit den Ziffern 0, 1, und -1 dargestellt. Die Ziffer -1 wird hier durch Überstreichen  $\bar{1}$  dargestellt. Mitunter wird die 1 auch unterstrichen bzw. vertikal gespiegelt. Falls Verwechslungen auftreten können, wird eine balancierte Ternärzahl durch ein angehängtes tiefgestelltes "3bal" gekennzeichnet.

Beispiel:  $1\bar{1}1_{3bal} = 5$

Im balancierten Ternärsystem benötigt man keine Vorzeichen. Um zur negativen Zahl überzugehen, vertauscht man alle Ziffern 1 mit  $\bar{1}$  und umgekehrt.

Beispiel:  $111_{3bal} = -5$

### Ternäre Darstellung

Jede natürliche Zahl kann aus dem Dezimalsystem in ein Positionssystem zur Basis 3 transformiert werden

So findet man für die Dezimalzahl 143 im Dreiersystem 12022, für 38 die Darstellung 1102, was  $38 = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$  bedeutet.

Ersetzt man nun in der Ziffernfolge des Dreiersystems von rechts nach links jede 2 durch -1 und erhöht die links davon stehende Ziffer um einen Wert (0 wird zu 1, 1 wird zu 2, 2 wird zu 0 mit erneutem Übertrag), so kann jede Zahl als Summe von Dreierpotenzen mit den Faktoren -1, 0 und 1 geschrieben werden.

Für die Beispiele wird  $38 = 3^3 + 3^2 + 3^1 - 3^0$  und  $143 = 3^5 - 3^4 - 3^3 + 3^2 - 3^0$ .

Da bei dieser Darstellungsform, der ternären Darstellung einer Zahl, jede natürliche Zahl bis 40 nur mit den Potenzen  $3^0$  bis  $3^3$  geschrieben werden kann, ergibt sich, das mit Massestücken 1g ( $3^0$ ), 3g, 9g und 27g jede beliebige Masse von 1g bis 40g gewogen werden kann. Benutzt man zusätzlich noch ein Massestück von 81g, wird der Bereich von 1g bis 121g vollständig abgedeckt.

Soll z.B. eine Masse von 38g gewogen werden, legt man die in der ternären Darstellung  $38 = 3^3 + 3^2 + 3^1 - 3^0$  mit dem Faktor 1 versehenen Massestücke auf die andere Waagschale, die mit dem Faktor -1 zur zu wiegenden Masse. Dann ergibt sich  $27g + 9g + 3g = 39g$  und auf der anderen Seite der Waage  $38g + 1g$ , also Gleichgewicht.

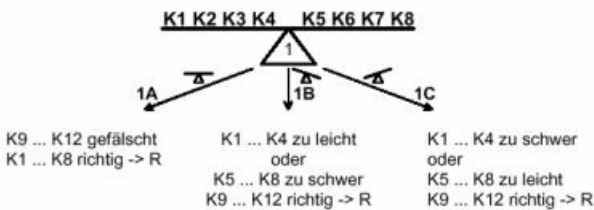
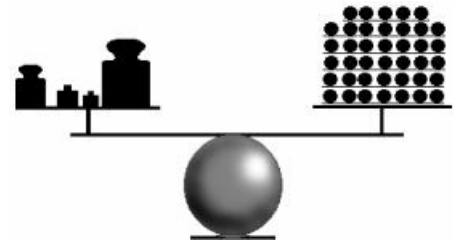
Anmerkung: Erstmals wurde ein exakter Nachweis 1748 durch Leonhard Euler im §330 von "Introductio in Analysin Infinitorum" gegeben. Der beschriebene Wägesatz ist auch unter dem Namen „Wägesatz von Bachet de Méziriac“ bekannt.

**Tabelle der ersten Ternärzahlen**

Dezimal	Ternär	Dezimal	Ternär	Dezimal	Ternär
1	1	2	2	3	10
4	11	5	12	6	20
7	21	8	22	9	100
10	101	11	102	12	110
13	111	14	112	15	120
16	121	17	122	18	200
19	201	20	202		

**Kugelproblem**

Klassisches Problem: Gegeben sind 12 Kugeln, von denen eine leichter oder schwerer als die anderen 11 ist. Es ist nicht bekannt, ob die Kugel leichter ist. Mit nur 3(!) Wägungen ist die abweichende Kugel zu ermitteln und außerdem die Art der Abweichung festzustellen.



**Strategie:**

Die Auswahl der Kugel ist so durchzuführen, dass die Wägungen für die drei Fälle (links zu schwer, gleichschwer, rechts zu schwer) möglichst dieselbe Wahrscheinlichkeit von  $p = 1/3$  bzw. die gleiche Häufigkeit haben.

Es werden zuerst je vier Kugeln  $K_1, K_2, K_3, K_4$  links und  $K_5, K_6, K_7, K_8$  rechts auf der Balkenwaage

verglichen:

Alle drei Wägergebnisse haben dieselbe Wahrscheinlichkeit 1/3. Die restlichen Kugeln werden in der ersten Wägung nicht verwendet und seien  $K_9, K_{10}, K_{11}$  und  $K_{12}$ .

Das Ergebnis der ersten Wägung ist dargestellt.

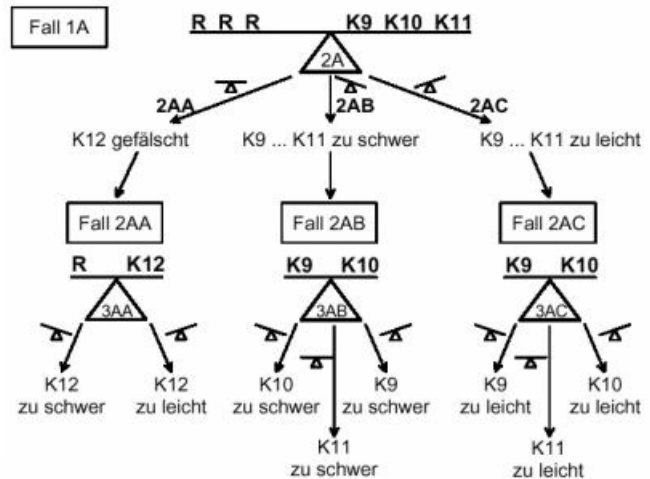
Fall 1: bei Gleichheit befindet sich die gezinkte Kugel in der dritten Gruppe  $K_9$  bis  $K_{12}$ . Die ersten acht Kugeln dienen als Referenzkugeln R.

Fall 2: bei Ungleichheit der Messung ist die falsche Kugel entweder aus  $K_1...K_4$  mit der Aussage zu leicht oder zu schwer bzw. aus  $K_5...K_8$  mit der entsprechenden Aussage.

Fall A:  $l = r$ : eine der Kugeln  $K_9...K_{12}$  weicht ab 2.Wägung: 3 echte und drei unbekannte Kugeln  $K_9, K_{10}, K_{11}$  der dritten Gruppe:

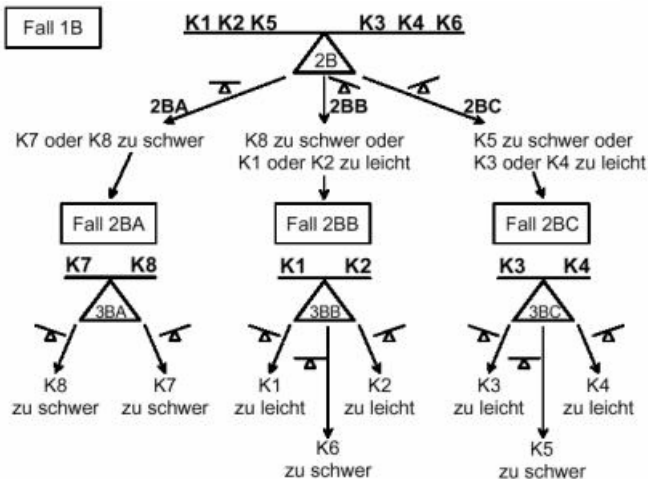
Fall 2AA:  $l = |$  = die Kugel  $K_{12}$  ist die abweichende und mit der letzten Wägung mit einer beliebigen Kugel  $K_1...K_{11}$  zu untersuchen

Fall 2AB und 2AC: die Waage zeigt, dass die gefälschte Kugel  $K_9, K_{10}$  oder  $K_{11}$  zu leicht oder zu schwer ist. Welche abweicht ergibt die



3.Wägung: je 1 echte und eine gefälschte Kugel  $K_9$  und  $K_{10}$  vergleichen:

Wenn die 2.Wägung "zu schwer" ergab, so sagt die 3.Wägung "links zu schwer", dass  $K_9$  zu schwer ist, "rechts zu schwer", dass  $K_{10}$  zu schwer ist. Bei Gleichheit ist  $K_{11}$  zu schwer.



Der Fall 2.Wägung "zu leicht" ergibt sich analog.

Fall B: 1.Wägung ergab "links leichter":

Dies bedeutet, dass entweder eine von  $K_1...K_4$  leichter oder eine von  $K_5...K_8$  schwerer ist.

2.Wägung: 3 Kugel  $K_1, K_2, K_5$  mit 3 Kugeln  $K_3, K_4, K_6$  vergleichen:

Fall 2.1 Gleichheit: Die Kugel  $K_7$  oder  $K_8$  ist zu schwer. Die dritte Wägung von  $K_7$  und  $K_8$  gibt das Ergebnis.

Fall 2.2 links leichter: Die Kugel  $K_1$  oder  $K_2$  ist zu leicht oder die Kugel  $K_6$  ist zu schwer. Die dritte Wägung mit  $K_1$  und  $K_2$  ergibt die zu leichte Kugel oder bei Gleichheit, dass  $K_6$  zu schwer ist.

Fall 2.3 rechts leichter: Die Kugel  $K_3$  oder  $K_4$  ist zu leicht oder die Kugel  $K_5$  zu schwer. Analog

weiter wie bei Fall 2.2

### Fünfersystem

Das Zweisystem benötigt zur Darstellung einer Zahl nur zwei Ziffern. Im Fünfersystem kommt man mit den Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 aus. Das Fünfersystem hat die Stufenzahlen 5,  $5^2=25$ ,  $5^3=125, \dots$ , die zu folgender Tabelle führen.

3125	625	125	25	5	1
1	4	4	1	2	3

Die Zahl 144123 ist eingetragen. Man liest ab:  $(144123)_5 = 1 \cdot 3125 + 4 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 = 6163$ .

### Tabelle der ersten Zahlen im Fünfersystem

Dezimal 5er-System

1	1	2	2	3	3	4	4
5	10	6	11	7	12	8	13
9	14	10	20	11	21	12	22
13	23	14	24	15	30	16	31
17	32	18	33	19	34	20	40

### Oktalsystem

... Positionssystem auf der Basis der 8

\	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	10	11	12	13	14	15	16	17
2	20	21	22	23	24	25	26	27
3	30	31	32	33	34	35	36	37
4	40	41	42	43	44	45	46	47
5	50	51	52	53	54	55	56	57
6	60	61	62	63	64	65	66	67
7	70	71	72	73	74	75	76	77

### Duodezimalsystem

... Positionssystem auf der Basis der 12

1944 wurde in den USA die Duodezimal-Gesellschaft gegründet, mit dem Ziel, das öffentliche Rechnungswesen und die mathematische Ausbildung zu untersuchen mit besonderer Berücksichtigung der Basis Zwölf beim Zählen, in der Mathematik, bei Maßen und Gewichten und in allen anderen Sparten der reinen und angewandten Naturwissenschaft.

Sie schlug vor, den Buchstaben X für die Ziffer 10 und den Buchstaben E für die Ziffer 11 zu verwenden. Jeder könne in einer halben Stunde lernen mit Dutzenden zu zählen. Sie vertrat die Auffassung, die Bezeichnungen Dezimalkomma und -punkt seien, wenn es um andere Basen als Zehn ginge, vollkommen unangebracht. Trotz des Enthusiasmus wurde nie ein Ansatz zur Einführung des Duodezimalsystems gemacht.

\	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
2	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
3	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
4	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
5	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
6	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
7	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
8	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107
9	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
A	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131
B	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143

## Hexadezimalsystem

Grundziffern ... 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Stellenwert ... Potenzen von 16

Darstellungsform  $h_m h_{m-1} \dots h_1 h_0, h_{-1} h_{-2} \dots$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
2	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
3	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
4	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
5	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
6	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111
7	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127
8	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
9	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
A	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
B	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191
C	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
D	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223
E	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239
F	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255

## Sexagesimalsystem

1	𐎶	11	𐎶𐎶	21	𐎶𐎶𐎶	31	𐎶𐎶𐎶𐎶	41	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	51	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
2	𐎶𐎶	12	𐎶𐎶𐎶	22	𐎶𐎶𐎶𐎶	32	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	42	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	52	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
3	𐎶𐎶𐎶	13	𐎶𐎶𐎶𐎶	23	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	33	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	43	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	53	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
4	𐎶𐎶𐎶𐎶	14	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	24	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	34	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	44	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	54	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
5	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	15	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	25	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	35	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	45	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	55	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
6	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	16	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	26	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	36	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	46	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	56	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	17	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	27	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	37	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	47	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	57	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
8	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	18	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	28	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	38	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	48	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	58	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	19	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	29	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	39	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	49	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	59	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶
10	𐎶	20	𐎶𐎶	30	𐎶𐎶𐎶	40	𐎶𐎶𐎶𐎶	50	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶		

Zahlsystem zur Basis 60 ; vor etwa 5000 Jahren zuerst von den Sumerern eingeführt

Wahrscheinliche Ursachen für die Verwendung der 60 als Grundzahl:

1. für die viel verwendeten Bruchteile 1/2, 1/3 und 2/3 wird man runde, ganze Vielfache der kleineren Einheit zu erhalten suchen
2. die Umwandlungszahl soll sich möglichst an das schon in geringem Umfang ausgebaute Zehnersystem anschließen
3. für alle Anwendungsgebiete (Massen, Längen, Flächen, ...) soll möglichst die gleiche Umwandlungszahl gelten bzw. ein kleiner Bruchteil dieser Zahl

Abbildung: Zahldarstellung der Sumerer im Sechzigersystem

Eine günstige Zahl war die 60, da sie zugleich eine runde Zahl für die Anzahl der Tages eines Jahres ergab. Das Jahr wurde zu 360 Tagen und fünf oder sechs Festtagen angesetzt.

Beispiele: Gewichtsmaße und damit zugleich Geldmaße, die bestimmte Gewichte von Silber nutzten:

60 Sekel (1 Sekel etwa 9,5 g) = 1 Mine ; 60 Minen = 1 Talent

Längenmaße 60 Gar (1 Gar etwa 6 m) = 1 us-gis ; 30 Fingerbreiten = 1 Elle = 1/12 Gar

Flächenmaße 60 Sekel = 1 Sar

Flächenmaße waren ursprünglich Saatmaße, d.h. die Flächengröße wird durch die zu seiner Bestellung nötige Getreidemenge bestimmt, und deshalb wie die Gewichtsmaße mit "Sekel" bezeichnet. Im Laufe der Zeit wurde bei den Sumerern das Sexagesimalsystem auf das ganze Zahlensystem ausgedehnt. Überreste finden wir heute noch in den Winkel- und Zeitmaßen.

## Sexagesimalsystem (2)

Der Übergang zur Sechziger-Zählung durch die Sumerer war eine leistungsfähige Idee, dass sich diese über Indien bis nach China für lange Zeit durchsetzte. Auch griechische Astronomen benutzten das Sexagesimalsystem später in abgewandelter Form. Selbst die heute gebräuchlichen Zeit- und Winkel-Einteilungen gehen auf diese Kulturleistung zurück, ebenfalls die gebräuchlichen Packmaße: das Dutzend (12), das Schock (60) und das Gros (12×12).

Diese Untergliederung betrifft sowohl die gehandelten Mengen als auch das Geldwesen und findet sich z.B. aktuell in den 60 Sternzacken einiger Euro-Münzen wieder.



Die Zahl 60 scheint eine natürliche Obergrenze für reguläre Gruppierungen zu

sein. Alle Versuche, den Ursprung des 60er Systems als ein  $6 \times 10$ -er System herzuleiten, scheiterten ebenso wie die haltlose Idee einer Verschmelzung zweier hypothetischer Kulturen: einer mit einem 10-er- und einer anderen mit einem 6-er-System.

Im Tennis geschieht die Punktezahl eines Spiels noch heute in Viertelschritten im Sexagesimalsystem: 15 - 30 - 40 - 60 (Spiel), wobei man die Extra-Silben 'fünf-und-' der Zahl 45 irgendwann einfach hat entfallen lassen.

Der letzte Tribut an die Leistung der Sumerer war die Unterteilung des Wechselstroms in den USA durch Nikola Tesla in 60 Schwingungen pro Sekunde, womit die sexagesimale Unterteilung der Zeit ihre konsequente Fortsetzung fand.

Die Europäer haben es anders gesehen und sich mit 50 Hertz begnügt.

### Unärsystem

Das Unärsystem ist ein Additionssystem, das lediglich ein Symbol mit der Wertigkeit 1 besitzt. Jeder Einer wird durch einen variablen Gegenstand repräsentiert, üblicherweise durch einen senkrechten Strich:

$$[8]_{10} = [|||||]_{\text{unär}}$$

Das Unärsystem ist für einfache Zählaufgaben geeignet, da das Erhöhen einer Zahl um 1 durch einfaches Anhängen eines weiteren Symbols geschieht.

Anwendung findet es zum Beispiel als Strichliste, bei der oft zur besseren Lesbarkeit jeder fünfte Strich quer durch die vier vorherigen gezogen wird. Die entstehende Zahl ist so in Fünferblöcke gruppiert dargestellt und damit leichter überschaubar.

Daneben wird das Unärsystem gelegentlich in der Informatik, insbesondere in der theoretischen Informatik verwendet, z.B. als eine Möglichkeit der Darstellung von Zahlen auf dem Band einer Turingmaschine.

Die Zahl Null ist in einem Unärsystem nicht explizit darstellbar, da es kein entsprechendes Symbol gibt. Die Verwendung eines unären Systems findet man zum Beispiel in Daniel Defoes "Robinson Crusoe" ("The life and strange surprising adventure of Robinson Crusoe of York, Mariner" 1719). Dort heißt es:

"I cut every day a notch with my knife, and every seventh notch was as long again as the rest, and every first day of the month as long again as that long one; and thus I kept my calendar, or weekly, monthly, and yearly reckoning of time."

Robinson schnitt also senkrechte Markierungen in einen Stock, um so die Tage auf der Insel zu zählen. Allerdings kennzeichnete er jeden siebten Tag (Wochenanfang) und jeden Monats- und Jahresanfang extra.

### Weitere Positionssysteme

Eine Zahl kann prinzipiell in jedem anderen Positionssystem als dem Dezimalsystem dargestellt werden.

Die Tabelle enthält das Beispiel „143“:

Dezimalsystem	143				
Einhundertdreiundvierzig		Hexadezimalsystem	8F		
Dualsystem	10001111	Ternärsystem	12022	Oktalsystem	217
BCD-Format	0001 0100 0011			Römische Zahldarstellung	CXLIII
System zur Basis 4	2033			System zur Basis 5	1033
System zur Basis 6	355			System zur Basis 7	263
System zur Basis 9	168			System zur Basis 11	120
System zur Basis 12	BB			System zur Basis 13	B0
System zur Basis 14	A3			System zur Basis 15	98
System zur Basis 17	87			System zur Basis 18	7H
System zur Basis 19	7A			System zur Basis 20	73
System zur Basis 21	6H			System zur Basis 22	6B
System zur Basis 23	65			System zur Basis 24	5N
System zur Basis 25	5I			System zur Basis 26	5D
System zur Basis 27	58			System zur Basis 28	53
System zur Basis 29	4R			System zur Basis 30	4N
System zur Basis 31	4J			System zur Basis 32	4F
System zur Basis 33	4B			System zur Basis 34	47
System zur Basis 35	43			System zur Basis 36	3Z

**Behauptung:** Es gibt nur eine neunstellige Zahl, bei der jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal vorkommt, und bei der die Zahl aus ihrer ersten und zweiten Ziffer, die Zahl aus ihrer zweiten und dritten Ziffer, ... und die Zahl aus ihrer achten und neunten Ziffer alle ein Ergebnis des kleinen Einmaleins darstellen. Welche Zahl ist das?

**Lösung:**

Es gibt kein Ergebnis des kleinen Einmaleins, das mit 9 anfängt. Also muss die 9 ganz hinten stehen. Davor geht es nur mit der 4 ( $49 = 7 * 7$ ). Auf die 7 kann nur die 2 folgen ( $72 = 9 * 8$ ). Vor der 7 kann aber auch nur die 2 stehen ( $27 = 3 * 9$ ). Also muss die 7 ganz vorne stehen. Auf die 8 kann nur die 1 folgen ( $81 = 9 * 9$ ). Vor der 8 kann dann nur noch die 2 stehen, weil die 1 und die 4 schon verwendet wurden. Also steht die 8 auf Platz 3 und die 1 auf Platz 4. Die 3 kann weder auf die 1 folgen, noch kann sie vor der 4 stehen. Also muss sie auf Platz 6. Vor der 3 auf Platz 5 passt nur die 6. Dann bleibt für die 5 nur Platz 7 und dort passt sie tatsächlich. Damit gibt es nur diese eine Lösung:

**728163549**

In anderen Zahlensystemen gibt es entsprechende Lösungen:

03er-Zahlensystem: –            04er-Zahlensystem: –            05er-Zahlensystem: –  
 06er-Zahlensystem: –            07er-Zahlensystem: **513426**            08er-Zahlensystem: **5243617**  
 09er-Zahlensystem: **54627138**, **71546238** und **46271538**  
 10er-Zahlensystem: **728163549**  
 11er-Zahlensystem: **739158264A**

Danach explodiert die Anzahl der Lösungen. Im Duodezimalsystem gibt es elf und im 13er-Zahlensystem schon 51 Lösungen.

### Vergleich von Zahlensystemen

Im täglichen Leben verwenden wir das Dezimalsystem. Die Frage ist, ob das Dezimalsystem gegenüber anderen Positionssystemen Vorteile besitzt. Die folgenden Kriterien erscheinen für geeignete Zahlensysteme sinnvoll:

1. Die Anzahl der Ziffern des Zahlensystems sollte nicht größer sein als etwa die Anzahl der Buchstaben des Alphabets, damit man sich nicht so viele Ziffern merken muss: Geeignete Zahlensysteme sollten also höchstens die Basis 30 haben.
2. Das kleine Einmaleins der Zahlensysteme sollte nicht mehr Multiplikationen haben als das große Einmaleins ( $1 * 1$  bis  $20 * 20$ ) des Dezimalsystems, damit das schriftliche Multiplizieren für einen Menschen mit durchschnittlichem Gedächtnis noch möglich ist: Geeignete Zahlensysteme sollten also höchstens die Basis 20 haben.
3. Die Zahlendarstellung sollte nicht mehr als doppelt so lang sein wie im Dezimalsystem, damit man nicht so viele Ziffern schreiben muss. Im Binärsystem und im 3er-System haben die Zahlen im Durchschnitt mehr als die doppelte Darstellungslänge des Dezimalsystems. Erst das 4er-System hat eine weniger als doppelt so lange Zahlendarstellung: Geeignete Zahlensysteme sollten also mindestens die Basis 4 haben.
4. Es sollte einfache Teilbarkeitsregeln lückenlos für möglichst viele Zahlen ab 2 geben. Einfache Teilbarkeitsregeln sind solche, bei denen man von der zu untersuchenden Zahl entweder nur die letzte Ziffer (Z), die beiden letzten Ziffern (ZZ) oder die Quersumme (Q) prüfen muss. Die folgenden Tabelle zeigt, welche der erwähnten Teilbarkeitsregeln für welche Zahlen der Zahlensysteme mit einer Basis zwischen 4 und 20 angewendet werden können:

Basis	teilbar durch																		
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4	Z	Q	Z	–	ZQ	–	5	Q	–	Q	Z	–	–	–	–	–	–	–	–
6	Z	Z	ZZ	Q	Z	–	7	Q	Q	–	–	Q	Z	–	–	–	–	–	–
8	Z	–	Z	–	–	Q	9	Q	Z	Q	–	–	QZ	–	–	–	–	–	–
10	Z	Q	ZZ	Z	ZQ	–	11	Q	–	–	Q	–	–	–	–	–	–	–	–
12	Z	Z	Z	–	Z	–	13	Q	Q	Q	–	–	–	–	–	–	–	–	–
14	Z	–	ZZ	–	–	Z	15	Q	Z	–	Z	–	–	Q	–	–	–	–	–
16	Z	Q	Z	Q	ZQ	–	17	Q	–	Q	–	–	–	–	–	–	–	–	–
18	Z	Z	ZZ	–	Z	–	19	Q	Q	–	–	–	Q	–	–	–	–	–	–
20	Z	–	Z	Z	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Die einzigen Zahlensysteme mit einer Basis zwischen 4 und 20, die einfache Teilbarkeitsregeln für die Zahlen von 2 bis 6 haben, sind: das 6er-, das 10er- und das 16er-System. Nur das Hexalsystem, das Dezimalsystem und das Hexadezimalsystem erfüllen also alle oben genannten Kriterien und sind somit für den täglichen Gebrauch gut geeignet.

Von den ausgewählten Zahlensystemen kann nur im Hexalsystem die Teilbarkeit durch 2 und 3 mit der einfachsten Teilbarkeitsregel Z geprüft werden. Das bedeutet gleichzeitig, dass man die Brüche  $1/2$  und  $1/3$  als Zahlen mit nur einer Nachkommastelle darstellen kann:  $1/2 = 0.3_6$  und  $1/3 = 0.2_6$ . Soll die Anzahl der Finger des Menschen mit der Basis des benutzten Zahlensystems übereinstimmen, muss man sich für das Dezimalsystem entscheiden. Heute dürften allerdings immer weniger Menschen mit den Fingern zählen, da meistens andere Dinge wie Papier und Bleistift zur Verfügung stehen. Die oben genannte Bedingung hat aber vermutlich die Wahl des Dezimalsystems maßgeblich beeinflusst.

Wenn man ein Geldsystem einführen möchte, das nur die Werte mit einer von Null verschiedenen Ziffer verwendet (wie z.B. 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, ... im Dezimalsystem), bei dem außerdem alle Potenzen der Basis auftauchen (1, 10, 100, ...) und wobei man außerdem möglichst wenig Münzen und

Scheine mitzunehmen braucht, um jeden Geldbetrag bezahlen zu können, funktioniert das nur mit einem  $2^n$ -Zahlensystem. Dann müsste man sich für das Hexadezimalsystem entscheiden. Sowohl das Hexalsystem als auch das Duodezimalsystem (12er-System) schneiden gut ab, wenn man nur die einfachste Teilbarkeitsregel (Z) betrachtet. Im Duodezimalsystem kann sie sogar auf die Zahlen 2, 3, 4 und auch auf die 6 angewendet werden. Entsprechend gilt im Duodezimalsystem:  $1/2 = 0.6$ ;  $1/3 = 0.4$ ;  $1/4 = 0.3$ ;  $1/6 = 0.2$ . Das Hexalsystem und das Duodezimalsystem können dabei davon profitieren, dass 6 und 12 hochzusammengesetzte Zahlen sind. Das Duodezimalsystem wäre also auch ein geeigneter Kandidat für den täglichen Gebrauch.

### Beweis der Quersummenregel im Zahlensystem zur Basis

Darstellung der Zahl  $z$  mit den Ziffern  $z_k, z_{k-1}, \dots, z_2, z_1, z_0$  im Zahlensystem-Basis  $n$ :

$$\begin{aligned} z &= z_k n^k + z_{k-1} n^{k-1} + \dots + z_2 n^2 + z_1 n + z_0 \\ &= z_k (n^k - 1) + z_{k-1} (n^{k-1} - 1) + \dots + z_2 (n^2 - 1) + z_1 (n - 1) + (z_k + z_{k-1} + \dots + z_2 + z_1 + z_0) \\ &\quad (\text{Quersumme}) \\ &= z_k (n - 1) (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1} (n - 1) (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + z_2 \\ &\quad (n - 1) (n + 1) + z_1 (n - 1) + \text{Quersumme} \\ &= (n - 1) (z_k (n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + n^2 + n + 1) + z_{k-1} (n^{k-2} + n^{k-3} + \dots + n^2 + n + 1) + \dots + z_2 (n + 1) + z_1) + \text{Quersumme} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von  $n - 1$  und der Quersumme aufspalten lässt. Ist also im Zahlensystem der Basis  $n$  die Quersumme einer Zahl  $z$  durch  $n - 1$  teilbar, dann ist auch  $z$  selbst durch  $n - 1$  teilbar. Ebenso ist  $z$  genau dann durch jeden Teiler von  $n - 1$  teilbar, wenn die Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die Quersummenregel im Hexadezimalsystem für die Zahlen 3, 5 und 15 verwendet werden.

### Beweis der alternierenden Quersummenregel im $n$ -er-Zahlensystem

Darstellung der Zahl  $z$  mit den Ziffern  $z_k, z_{k-1}, \dots, z_2, z_1, z_0$  im  $n$ -er-Zahlensystem:

$$\begin{aligned} z &= z_k n^k + z_{k-1} n^{k-1} + \dots + z_2 n^2 + z_1 n + z_0 \\ &= z_k (n^k - 1) + z_{k-1} (n^{k-1} + 1) + \dots + z_2 (n^2 - 1) + z_1 (n + 1) + (z_k - z_{k-1} + \dots + z_2 - z_1 + z_0) \\ &\quad (\text{alternierende Quersumme}) \\ &= z_k (n + 1) (n^{k-1} - n^{k-2} + \dots - n^2 + n - 1) + z_{k-1} (n + 1) (n^{k-2} - n^{k-3} + \dots + n^2 - n + 1) + \dots + z_2 \\ &\quad (n + 1) (n - 1) + z_1 (n + 1) + \text{alternierende Quersumme} \\ &= (n + 1) (z_k (n^{k-1} - n^{k-2} + \dots - n^2 + n - 1) + z_{k-1} (n^{k-2} - n^{k-3} + \dots + n^2 - n + 1) + \dots + z_2 (n - 1) + z_1) + \text{alternierende Quersumme} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass sich jede Zahl als Summe eines Vielfachen von  $n + 1$  und der alternierenden Quersumme aufspalten lässt. Ist also im  $n$ -er-Zahlensystem die alternierende Quersumme einer Zahl  $z$  durch  $n + 1$  teilbar, dann ist auch  $z$  selbst durch  $n + 1$  teilbar. Ebenso ist  $z$  genau dann durch jeden Teiler von  $n + 1$  teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch diesen Teiler teilbar ist. Beispielsweise kann die alternierende Quersummenregel im Hexadezimalsystem nur für die Zahl 17 verwendet werden. Für den Beweis wurde eine ungerade Anzahl von Ziffern vorausgesetzt. Wenn die Anzahl der Ziffern gerade ist, müssen nur einige Vorzeichen am Ende einiger Summandenreihen ausgetauscht werden.

### Fakultätsdarstellung

Eine weitere Möglichkeit, Zahlen in einer anderen Form darzustellen, besteht in der Zerlegung in eine Summe von Vielfachen von Fakultäten. Zum Beispiel ergibt sich

$$2000 = (2*6!) + (4*5!) + (3*4!) + (1*3!) + (1*2!) + (0*1!) = 2*720 + 4*120 + 3*24 + 1*6 + 1*2$$

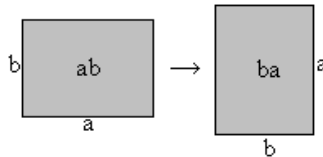
Damit ist die Fakultätsdarstellung für  $2000 = 243110f$ . Das Zeichen  $f$  kennzeichnet diese Darstellungsart. Um eine eindeutige Darstellung zu gewährleisten, fordert man noch, dass die Koeffizienten einer höheren Fakultät größtmöglich ist.

2	$10f = 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$	6	$100f = 1 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$
10	$120f = 1 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$	20	$310f = 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$
50	$2010f = 2 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$	100	$4020f = 4 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$
200	$13110f = 1 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$		
400	$31220f = 3 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$		
500	$40310f = 4 \cdot 5! + 0 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$		
1000	$121220f = 1 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$		

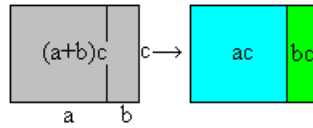
## Mathematische Gleichungen im Bild

Gleichungen sind Aussageformen der Algebra, die für Zahlen einer Definitionsmenge zu richtigen Aussagen werden. Bis auf die Axiome können sie bewiesen werden. Beweisen heißt, aus bekannten Formeln neue Formeln durch logisches Schließen herzuleiten.

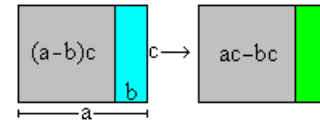
Die Beweisideen und auch die Beweisgänge können anschaulich durch Bilder dargestellt werden.



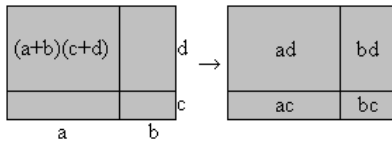
Kommutativgesetz der Multiplikation  
 $ab = ba$



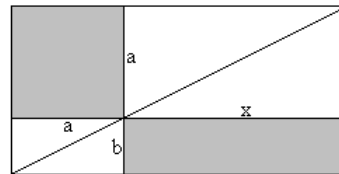
Distributivgesetz  
 $(a+b)c = ac+bc$



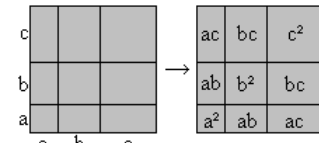
Produkt aus einer Differenz und einer Zahl  
 $(a-b)c = ac-bc$



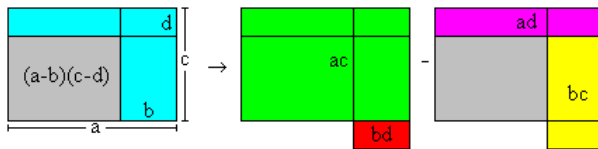
Produkt zweier Summen  
 $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$



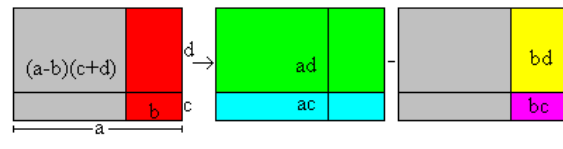
Flächengleiche Ergänzungsparallelogramme  
 $a^2 = bx$



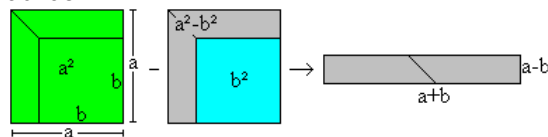
Trinomische Formel  
 $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$



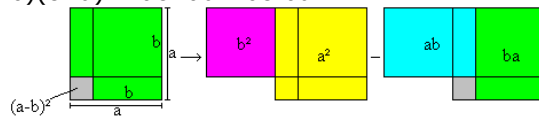
Produkt zweier Differenzen  
 $(a-b)(c-d) = ac+bd - ad-bc$



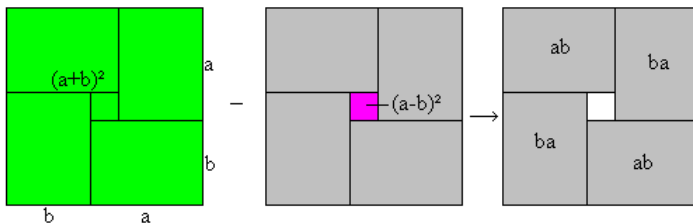
Produkt aus einer Summe und einer Differenz  
 $(a-b)(c+d) = ac+ad -bc-bd$



Dritte binomische Formel  
 $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$



Zweite binomische Formel  
 $(a-b)^2 = b^2+a^2 -2ab$



Differenz der Quadrate aus Summe und Differenz  
 $(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$

## Ungelöste mathematische Probleme

Gegenwärtig existieren eine Vielzahl ungelöster mathematischer Probleme. Zu den wichtigsten bzw. bekanntesten gehören:

1. Nachweis die Riemanschen Hypothese
2. Nachweis der Goldbachschen Vermutung
3. Nachweis der unendlichen Anzahl von Primzahlzwillingen
4. die Rückführung von NP-Problemen auf P-Probleme
5. die Collatz-Folge
6. Nachweis der Unlösbarkeit des 196-Algorithmus
7. Nachweis der Zahlen, die als Summe von drei oder mehr Kubikzahlen dargestellt werden können
8. Beweis, dass die Euler-Mascheroni-Konstante irrational ist
9. Suche nach ungeraden vollkommenen Zahlen
10. Catalansche Vermutung usw...

Durch das Clay Mathematics Institute von Cambridge, Massachusetts, wurde für den Nachweis der Riemanschen Vermutung ein Preis von 1 Million Dollar ausgesetzt.

Weitere offene Fragen wurden schon 1900 von David Hilbert aufgestellt, die allgemein als Hilbertsche Probleme bekannt wurden.



## Forschungsergebnisse

Der Programmator beteiligt sich seit Jahren an der intensiven Suche nach verschiedenen besonderen Zahlenarten. Der aktuelle Stand der gefundenen Ergebnisse:

Größte Primzahl, größte Prothsche Primzahl	$400719 \cdot 2^{121061} + 1$ ... (36449 Ziffern, 19.11.2002)
Größte prime Kerstin-Zahl	$14^{24468} + 8^{24468} + 3^{24468}$ ... (28044 Ziffern, 30.5.2008)
Größte Primzahl der Form $m^n + n$	$99^{10042} + 10042$ ... (20041 Ziffern, 27.6.2011)
Größte Palindrom-Primzahl	$10^{(2 \cdot 7820)} + 3 \cdot 10^{7280} + 1$ ... (15641 Ziffern, 12.2.2002)
Größte verallgemeinerte Cullen-Primzahl	$12509 \cdot 14^{12509} + 1$ ... (14342 Ziffern, 2.7.2001)
Größte verallgemeinerte Woodall-Primzahl	$8281 \cdot 108^{8281} - 1$ ... (16843 Ziffern, 27.1.2016)
Größte Primzahl der Form 1000...000z	$10^{10470} + 3$ ... (10471 Ziffern, 27.11.2005)
Größte verallgemeinerte Repunit-Primzahl	$(178^{4523} - 1) / 177$ ... (10177 Ziffern, 15.4.2014)
Größter Primzahlzwilling	$51315 \cdot 2^{32430} - 1, 51315 \cdot 2^{32430} + 1$ ... (9768 Ziffern, 22.8.2008)
Größte Cunningham-Reihe 2.Art	$326565 \cdot 2^{31720} + 1, 326565 \cdot 2^{31721} + 1$ ... (9555 Ziffern, 16.1.2007)
Größte Primzahl der Form $n^m + m^n$	$70^{5041} + 5041^{70}$ ... (9302 Ziffern, 20.8.2013)
Größte Compositorial-Primzahl	$2532! / 2532\# - 1$ ... (6453 Ziffern, 25.2.2012)
Größte Sophie-Germain-Primzahl	$433377 \cdot 2^{8901} - 1, 433377 \cdot 2^{8902} - 1$ ... (2686 Ziffern)
Größter Primzahlvierling	$10^{291} + 38618869111 + 0, 2, 6, 8$ ... (292 Ziffern)