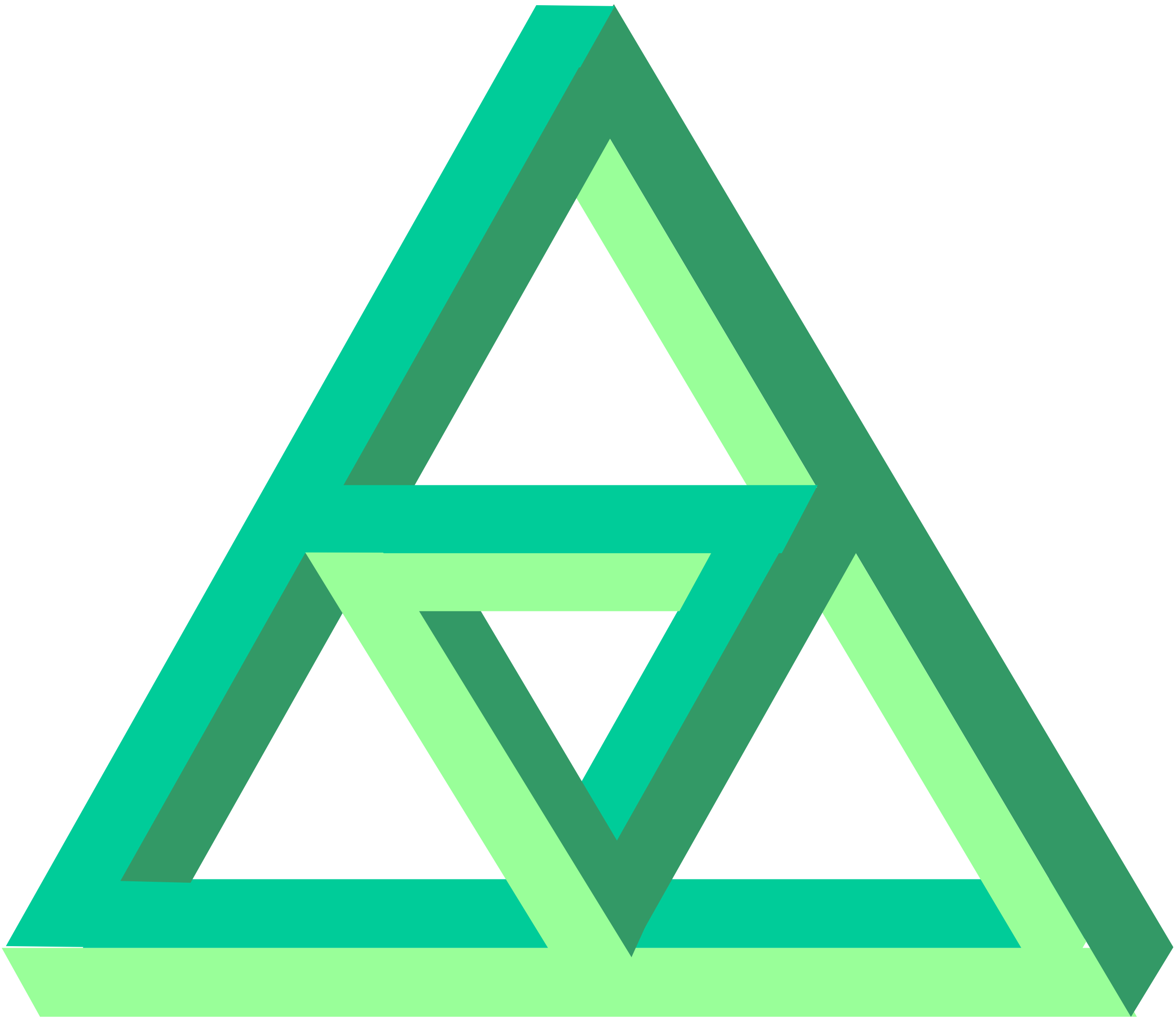
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 05/2026 (Mai 2026)

25. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mehrere Aufgaben der 3. Runde (Landesausscheid) der 65. MO bestätigen das Konzept der „Mathematischen Kostproben“: Mittels intensiver Nachbereitung der bislang gestellten Aufgaben lassen sich Lösungsansätze für aktuelle Problemstellungen effektiver finden. Selbstverständlich wird im Allgemeinen nicht erwartet, dass damit eine Vorlage für die Lösungsdarstellung gegeben ist. Aber die vielseitige Beschäftigung mit der Thematik hilft, typische Strategien auszuprobieren.

Mit den Aufgaben **MO650931/MO651031** nehmen wir Bezug zum Thema 23 „Quersummen und Querprodukte“. Mit der Aufgabe **MO651036** erinnern wir an das Thema „Summe von Quadratzahlen“. Schließlich zeigen die Aufgaben **MO650934/MO651034** bekannte Lösungsansätze aus dem Thema „Bewegungsaufgaben“.

Im historischen Rückblick zeigen wir einen Ausschnitt aus der **Altindischen Mathematik**, die für viele Algorithmen für (Kopf-) Rechenvorteile bekannt ist (vedische Mathematik). Ausgehend von der Teilbarkeit durch 9 mittels Quersummenbildung lassen sich Verallgemeinerungen für die Teilbarkeitsregeln durch auf 9 endenden Zahlen formulieren.

Wir blicken auf die **15. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen** (EGMO) zurück, auf der das deutsche Team einmal mehr sehr erfolgreich abschnitt. Schließlich berichten wir vom **8. Tag der Mathematik** der TU Chemnitz, der sich weiterhin großer Belibetheit unter Jugendlichen erfreut.

---

[1] www.mathematik-olympiaden.de

[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 23 (Nachtrag) – Quersummen und Querprodukte[3]

Aufgabe 23.19 – MO650931. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft $3n^2 + Q(n) = 13080$, wobei $Q(n)$ die Quersumme von n ist.

Hinweis: Die Quersumme von 537 ist $Q(537) = 5 + 3 + 7 = 15$.

Lösungshinweise: N kann nicht einstellig sein, weil für $n < 10$ die Ungleichung $3n^2 + Q(n) < 310$ folgt. N kann aber auch nicht größer 99 sein, weil für $n \geq 100$ die Ungleichung $3n^2 + Q(n) \geq 30000$ folgt.

Wir setzen deshalb $n = 10a + b$ mit einstelligen Zahlen a und b. Die Gleichung lautet für diesen Fall

$$3n^2 + Q(n) = 300 \cdot a^2 + 60 \cdot ab + 3b^2 + a + b = 13080$$

Wegen $0 \leq b \leq 9$ können wir abschätzen

$$\begin{aligned} &300 \cdot a^2 + a - 13080 \leq 0\text{, also } \ a^2 - 44 \leq 0 \\ &300 \cdot a^2 + 541 \cdot a - 12010 \geq 0\text{, also } \ a^2 + 2 \cdot a - 40 > 0 \end{aligned}$$

Daraus erkennen wir einerseits $a < 7$ und andererseits $a > 5$. Also kann nur $a = 6$ gelten. Dann finden wir:

$$\begin{aligned} &3n^2 + Q(n) = 10806 + 361b + 3b^2 = 13080 \\ &3b^2 + 361b - 2274 = 0 \\ &b^2 + \frac{361}{3}b - 758 = 0 \\ &b_{1,2} = -\frac{361}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{361}{6}\right)^2 + 758} = -\frac{361}{6} \pm \frac{397}{6} \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq b \leq 9$ kann nur die positive Lösung $b_2 = 6$ die Bedingung erfüllen.

Lösungsvariante: Da $Q(n) \geq 1$ ist, folgt

$$3 \cdot n^2 \leq 13079 < 13467 = 3 \cdot 4489 = 3 \cdot 67^2$$

und damit $n < 67$. Wir erhalten für die Quersumme folglich $Q(n) \leq 14 = Q(59)$. Aus der Ausgangsgleichung kann damit $3n^2 \geq 13080 - 14 = 13066$, und daraus $n^2 \geq 4356 = 66^2$ und $n \geq 66$ gefolgert werden. Damit ist $n = 66$ der einzige Lösungskandidat.

Lösungsvariante: Wegen $3 \cdot 70^2 = 14700 > 13080$ muss n in grober Abschätzung kleiner als 70 sein. Da 13080 die Quersumme 12 besitzt, ist 13080 durch 3 teilbar. Weil $3 \cdot n^2$ ebenfalls durch 3 teilbar ist, muss dies auch auf $Q(n)$ und damit auf

[3] S. Hefte 07/2023 und 08/2023

n selbst zutreffen. Somit ist n unter den durch 3 teilbaren Zahlen zu suchen, die kleiner als 70 sind. Damit gilt $Q(n) < 16$, was wegen $3 \cdot 60^2 = 10800$ auf $3 \cdot 60^2 + Q(n) < 10800 + 16 < 13080$ und somit in ebenfalls grober Abschätzung auf $n > 60$ führt. Von den zwischen 60 und 70 liegenden durch 3 teilbaren Zahlen erfüllt nur 66 die Bedingung der Aufgabe.

Probe für jede der Lösungsvarianten: Die Probe $3 \cdot 66^2 + Q(66) = 13068 + 12 = 13080$ zeigt, dass 66 tatsächlich Lösung ist.

Aufgabe 23.20 – MO651031. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft $40n + Q(n) = n^2 + 402$, wobei $Q(n)$ die Quersumme von n ist.

Lösungshinweise: Wir formen die Ausgangsgleichung äquivalent um zu

$$Q(n) = (n - 20)^2 + 2$$

Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich der Anzahl der Stellen von n.
Fall 1: n ist einstellig. Dann können wir abschätzen:

$$10 > Q(n) = (n - 20)^2 + 2 \geq 11^2 + 2 = 123.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass es in diesem Fall keine Lösung geben kann.

Fall 2: n ist zweistellig, also $n = 10a + b$ mit den Ziffern a und b. Setzen wir $a = 1$ in die zu lösende Gleichung ein, erhalten wir aus

$$b + 1 = (10 + b - 20)^2 + 2 = (b - 10)^2 + 2$$
$$b^2 - 21b + 101 = 0$$

Diese Gleichung hat mit $b_{1,2} = \frac{21}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2 - 101} = \frac{1}{2} \cdot \left(21 \pm \sqrt{845}\right)$ keine ganzzahligen Lösungen.

Für $a = 2$ ergibt sich aus $2 + b = b^2 + 2$, also $b = b^2$, die Auswahl $b \in \{0, 1\}$.

Für $a \geq 3$ folgt, dass $18 \geq a + b = (n - 20)^2 + 2 \geq 10^2 + 2 = 102$ gelten muss. Dieser Widerspruch zeigt, dass es in diesem Fall keine weiteren Lösungen gibt.

Fall 3: n ist mindestens dreistellig. Offensichtlich gilt dann $n - 20 \geq 80$, und wegen $n^2 > 20$ gilt $n - 20 > n^2$, durch Multiplikation folgt also $(n - 20)^2 > 80 \cdot \frac{n}{2} = 40n$. Offensichtlich ist $n > Q(n)$, insgesamt gilt also $(n - 20)^2 > 40n > n > Q(n)$. Dies zeigt, dass es in diesem Fall keine weiteren Lösungen gibt.

Damit sind $n = 20$ und $n = 21$ die einzigen Lösungskandidaten. Die Proben

$$40 \cdot 20 + 2 = 802 = 20^2 + 402 \text{ und } 40 \cdot 21 + 3 = 843 = 21^2 + 402$$

zeigen, dass sie tatsächlich Lösungen sind. ❑

Hinweis: Anstelle der Analyse für $a \geq 3$ im Fall 2 können wir auch $n' = n - 20$ untersuchen. Ist $n < 100$, so gilt

$$Q(n') + 2 = (n')^2 + 2$$

Da eine Zahl stets mindestens so groß wie ihre Quersumme ist, kann die Gleichheit nur im Fall $n' = 0$ oder $n' = 1$ und damit $n = 20$ bzw. $n = 21$ gelten

Lösungsvariante: Da für alle natürlichen Zahlen n die Ungleichung $Q(n) \leq n$ gilt, muss wegen $40n + Q(n) = n^2 + 402$ auch $40n + n \geq n^2 + 402$ gelten, was auf $0 \geq n^2 - 41n + 402$ und damit auf $20{,}5 - \sqrt{18{,}25} \leq n \leq 20.5 + \sqrt{18{,}25}$ führt. Das schränkt die Lösungssuche auf $n \in \{17, 18, \ldots, 24\}$ ein. Das Einsetzen dieser verbleibenden Möglichkeiten zeigt die beiden Lösungen $n = 20$ und $n = 21$ und schließt die übrigen Werte aus.

Passend dazu diskutierten wir bereits im Heft 08/2023 die

Aufgabe 23.12 – MO440924. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihres Querproduktes $QP(n)$ beträgt 2015.

Die Lösungsstrategie beruhte ebenso wie oben zunächst auf der Eingrenzung des Wertebereiches für n, um anschließend durch systematisches Probieren die Lösungsmenge zu bestimmen. Sogar ein vollständiges Probieren für alle Zahlen n<2015 wäre zwar nicht elegant, aber korrekt, da die zu probierende Menge endlich ist. Allerdings müsste in der Lösungsdarstellung für den Korrektor ohne Rechenaufwand erkennbar werden, dass die Lösungsmenge korrekt und vollständig ist. Dies ist stets mit einer tabellarischen Übersicht möglich, aber eventuell mit großem Schreibaufwand verbunden. Auch die folgende Aufgabe folgt der Lösungsstrategie.

Aufgabe 23.21 – MO441024/KZM-5-1. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen *n*, für die gilt: Die Summe aus *n*, ihrer Quersumme *Q*(*n*) und deren Quersumme (*Q*(*Q*(*n*)) beträgt 2022.

Lösungshinweise: Offenbar $ist\, n \leq 2020$, wegen $Q(n) + (Q(Q(n)) \geq 2$ und $n + Q(n) + (Q(Q(n)) = 2020$.

Fall 1: Es gelte $n \geq 2000$, d.h. es gibt eine Zahl $m = 10a + b$ mit $0 \leq m \leq 22$, also $(a = 0{,}1{,}2)$ und $b = (0, \ldots, 9)$. Dann gilt:

$$2022 = n + Q(n) + Q(Q(n)) = 2000 + 10a + b + 2 + a + b + Q(2 + a + b)$$

also

$$11a + 2b + Q(2 + a + b) = 20.$$

Für $a = 0$ folgt $2b + Q(2 + b) = 20$, was nach Probieren mit allen einstelligen Zahlen b nur für $b = 6$ und $b = 9$ erfüllt ist.

Für $a = 1$ folgt $2b + Q(3 + b) = 9$, was nach Probieren mit allen einstelligen Zahlen b nur für $b = 2$ erfüllt ist.

Für $a = 2$ folgt $2b + Q(4 + b) < 0$, so dass es keine weiteren Lösungen geben kann.

Fall 2: Angenommen, es sei $n \leq 1900$. Dann gilt $Q(n) \leq Q(1899) = 27$ und folglich gilt $Q(Q(n)) \leq Q(19) = 10$. Damit kann die geforderte Summe 2022 nicht mit $n + Q(n) + (Q(Q(n)) < 1900 + 27 + 10 = 1937$ erreicht werden.

Leicht stellen wir fest, dass wir diese Abschätzung auch für größere Schwellen als 1900 führen können. Für $n \leq 1980$ gilt nämlich auch $Q(n) \leq Q(1899) = 27$ und folglich gilt ebenfalls $Q(Q(n)) \leq Q(19) = 10$. Damit kann die geforderte Summe 2022 nicht mit $n + Q(n) + (Q(Q(n)) < 1980 + 27 + 10 = 2017$ erreicht werden.

Fall 3: Es gelte $1980 < n < 2000$, d.h. es gibt eine Zahl $m = 10a + b$ mit $0 < m < 20$, also $(a = 0; 1)$ und $b = (0, \dots, 9)$. Dann gilt:

$$2022 = n + Q(n) + Q(Q(n)) = 1980 + 10a + b + 18 + a + b + Q(18 + a + b)$$

also

$$11a + 2b + Q(18 + a + b) = 24.$$

Für $a = 0$ folgt $2b + Q(18 + b) = 24$.

- Setzen wir $b = 9$, erhalten wir $2 \cdot 9 + Q(18 + 9) = 27 > 24$.
- Setzen wir $b = 8$, erhalten wir $2 \cdot 8 + Q(18 + 8) = 24$.
- Setzen wir $b = 7$, erhalten wir $2 \cdot 7 + Q(18 + 7) = 21 < 24$.
- Setzen wir $b < 7$ ergibt sich $2 \cdot b + Q(18 + b) < 2 \cdot 7 + Q(19) < 24$.

Für $a = 1$ folgt $11 + 2b + Q(19 + b) = 24$, also $2b + Q(19 + b) = 13$.

- Setzen wir $b = 6$, erhalten wir $2 \cdot 6 + Q(19 + 6) = 19 > 13$.
- Setzen wir $b = 5$, erhalten wir $2 \cdot 5 + Q(19 + 5) = 16 > 13$.
- Setzen wir $b = 4$, erhalten wir $2 \cdot 4 + Q(19 + 4) = 13$.
- Setzen wir $b < 4$, erhalten wir $2 \cdot b + Q(19 + b) < 8 + 5 < 13$.

Somit gibt es genau fünf Lösungen: 1988, 1994, 2006, 2009, 2012:

$$1988 + Q(1988) + Q\big(Q(1988)\big) = 1988 + 26 + Q(26) = 2014 + 8 = 2022,$$
$$1994 + Q(1994) + Q(Q(1994)) = 1994 + 23 + Q(23) = 2017 + 5 = 2022,$$
$$2006 + Q(2006) + Q(Q(2006)) = 2006 + 8 + Q(8) = 2014 + 8 = 2022,$$
$$2009 + Q(2009) + Q(Q(2009)) = 2009 + 11 + Q(11) = 2020 + 2 = 2022,$$
$$2012 + Q(2012) + Q(Q(2012)) = 2012 + 5 + Q(5) = 2017 + 5 = 2022.$$

❑

Aufgaben mit Jahreszahlen (in der ursprünglichen Aufgabe aus der 44. MO war die Summe 2004 zu untersuchen) verleiten für Übungszwecke, die aktuelle Jahreszahkl zu verwenden:

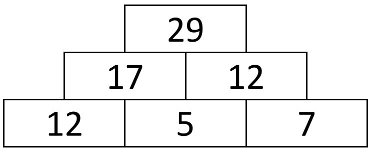
Aufgabe 23.22. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus n, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $Q(Q(n))$ beträgt 2026.

Lösungshinweise: Es gibt keine natürliche Zahl n mit der geforderten Eigenschaft.

Lässt nämlich n bei Division durch 3 den Rest r $(r = 0, 1, 2)$ so lässt auch $Q(n)$ und damit auch $Q(Q(n))$ den gleichen Rest r. Somit lässt die Summe der drei Zahlen den Rest $3 \cdot r$, d.h. die Summe ist durch 3 teilbar. Da aber 2026 nicht durch 3 teilbar ist, kann es keine natürliche Zahl mit der geforderten Eigenschaft geben. ❑

Thema 9 (Nachtrag) – Summen von Quadratzahlen[4]

Aufgabe 9.29 – MO651036. Eine Zahlenmauer mit n Schichten besteht aus kongruenten Rechtecken, die pyramidenförmig aufgeschichtet sind, siehe Abbildung für ein Beispiel mit $n = 3$. Die n Schichten sind von unten nach oben von 1 bis n durchnummeriert, wobei Schicht k $(k = 1, \ldots, n)$ genau $n - k + 1$ Rechtecke enthält und die Rechtecke dabei so aufgeschichtet sind, dass jedes Rechteck einer oberen Schicht über genau zwei benachbarten Rechtecken der darunterliegenden Schicht platziert ist. In jedem Rechteck steht eine positive ganze Zahl, wobei sich für Rechtecke in oberen Schichten diese Zahl als Summe der beiden Zahlen in den zwei benachbarten Rechtecken der darunterliegenden Schicht ergibt. Die Zahlen in Schicht 1 können also beliebig vorgegeben werden, woraus sich dann die Zahlen in den anderen Schichten eindeutig durch Addition ergeben. In der Abbildung ist eine solche Zahlenmauer für $n = 3$ dargestellt.



a) Geben Sie ein Beispiel einer Zahlenmauer mit $n = 3$ Schichten an, in der alle sechs Zahlen positive Quadratzahlen sind.
b) Beweisen Sie, dass es unendlich viele Zahlenmauern mit $n = 3$ Schichten gibt, in denen alle sechs Zahlen positive Quadratzahlen sind und der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen in der untersten Schicht gleich 1 ist.
c) Beweisen Sie, dass es für jedes $n \geq 2$ eine Zahlenmauer aus n Schichten gibt, in der alle Zahlen positive Quadratzahlen sind.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Zahl in der Schicht k im Rechteck i, gezählt von links, mit $z_{k,i}$ und schreiben $(z_{k,i}, z_{k,i+1}, z_{k+1,i})$ für die Zahl $z_{k+1,i}$ in der Schicht $k + 1$ und die beiden Zahlen $z_{k,i}$ und $z_{k,i+1}$ in den zwei benachbarten Rechtecken der

[4] s. Hefte 09/2021, 11/2022, 04/2024 und 05/2025

darunterliegenden Schicht, für die laut Aufgabenstellung $z_{k+1,i} = z_{k,i} + z_{k,i+1}$ gelten muss.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Eine Zahlenmauer, in der alle Zahlen Quadratzahlen sind, enthält viele pythagoräische Zahlentripel. Um eine solche Zahlenmauer zu bauen, starten wir mit einem pythagoräischen Zahlentripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$ und erzeugen daraus durch Vielfachenbildung weitere pythagoräische Zahlentripel, aus denen sich dann die geforderte Mauer aufbauen lässt. Wir beginnen mit

$$(z_{11},\ z_{12}, z_{21}) = (a \cdot a)^2\,, (a \cdot b)^2\,, (a \cdot c)^2$$

und

$$(z_{12},\ z_{13}, z_{22}) = (b \cdot a)^2\,, (b \cdot b)^2\,, (b \cdot c)^2$$

Dann ergibt sich

$$(z_{21},\ z_{22}, z_{31}) = (c \cdot a)^2\,, (c \cdot b)^2\,, (c \cdot c)^2$$

Beispiel: Für $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ erhalten wir

$$z_{11} = (3 \cdot 3)^2 = 81, z_{12} = (3 \cdot 4)^2 = 144, z_{13} = (4 \cdot 4)^2 = 256,$$
$$z_{21} = 81 + 144 = 225 = (5 \cdot 3)^2, z_{22} = 144 + 256 = 400 = (5 \cdot 4)^2$$

und

$$z_{31} = 225 + 400 = 625 = (5 \cdot 5)^2.$$

	625	
225		400
81	144	256

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Es gibt unendlich viele pythagoräische Zahlentripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$ und a, b teilerfremd. Dann gilt aber auch $ggT(a^2, b^2) = 1$ und $ggT(a^2, ab, b^2) = 1$, und es gibt eine Zahlenmauer mit der unteren Schicht $(a^2)^2, (ab)^2, (b^2)^2$, der mittleren Schicht $(ac)^2$, $(bc)^2$ und der oberen Schicht $(c^2)^2$. Das Beispiel aus Lösungsteil a) ist von dieser Form für $a = 3, b = 4, c = 5$.

Eine unendliche Familie geeigneter pythagoräischer Zahlentripel (a, b, c) ist z. B. durch

$$(a, b, c) = \left(\frac{m^2 - 1}{2}, m, \frac{m^2 + 1}{2}\right)$$

für ungerade Zahlen $m \geq 3$ gegeben. In der Tat gilt

$$a^2 + b^2 = \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{4} + m^2 = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{4} = c^2$$

wobei jeder gemeinsame Teiler von a und b auch $b^2 - 2a = 1$ teilt, womit $ggT(a,b) = 1$ folgt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe c): Zu jedem pythagoräischen Zahlentripel (a,b,c) positiver ganzer Zahlen a,b,c ist durch

$$z_{k,i} = \left(a^{n-k-i+1} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2$$

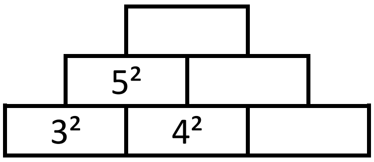
für alle $1 \le k \le n$ und $1 \le i \le n-k+1$ eine geeignete Zahlenmauer aus n Schichten gegeben. In der Tat gilt für alle $1 \le k < n$ und $1 \le i < n-k+1$

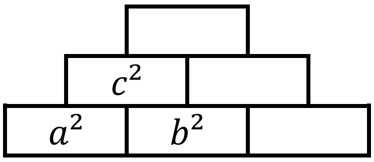
$$\begin{aligned} &z_{k,i} + z_{k,i+1} = \left(a^{n-k-i+1} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 + \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i} \cdot c^{k-1}\right)^2 \\ &= a^2 \cdot \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 + b^2 \cdot \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 \\ &= c^2 \cdot \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k-1}\right)^2 = \left(a^{n-k-i} \cdot b^{i-1} \cdot c^{k}\right)^2 = z_{k+1,i} \end{aligned}$$

❑

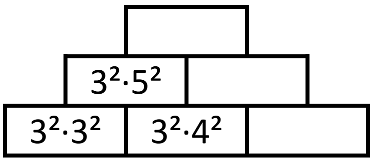
Hinweise: Der offizielle Lösungshinweis zu Teilaufgabe c) wirkt wenig konstruktiv – und rechtfertig die resignierende Frage „Wie sollen wir darauf kommen?“. Versuchen wir die Teilaufgabe konstruktiv zu lösen, so finden wir einen zielführenden Ansatz:

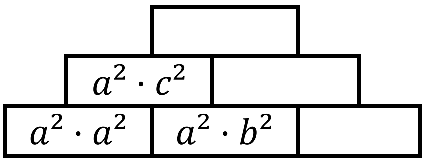
Wir beginnen in der linken unteren Ecke mit einem bekannten pythagoreischen Tripel (a,b,c).



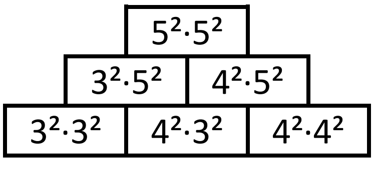


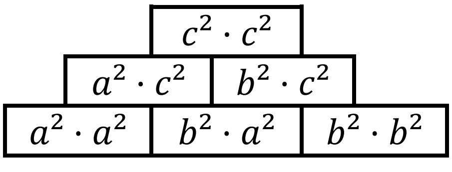
Beim Versuch, die untere Schicht zu vervollständigen, stellen wir fest, dass wir keine pythagoreischen Tripel kennen, die mit 4 beginnen. Wir untersuchen deshalb Vielfache des verwendeten Tripels und kommen dabei nach wenigen Versuchen auf die folgende Idee:





Vertauschen wir im mittleren Feld der unteren Schicht die Faktoren, ist die Lösungsidee erkennbar und leicht zu vervollständigen. So füllen wir die Rechenmauer aus:





Damit ist zugleich die Teilaufgabe b) beantwortet. Um einen Lösungsansatz für die Teilaufgabe c) zu finden, verallgemeinern wir die Vervollständigung: Wir multiplizieren die untere Schicht nochmals mit a^2 und können anschließend das rechte Feld der unteren Schicht mit $b^4 \cdot b^2$ vervollständigen. Es zeigt sich, dass damit die Rechenmauer wie gefordert gefüllt werden kann.

	$c^2 \cdot c^2 \cdot c^2$		
	$a^2 \cdot c^2 \cdot c^2$	$b^2 \cdot c^2 \cdot c^2$	
$a^4 \cdot c^2$	$(a^2 \cdot b^2) \cdot c^2$	$b^4 \cdot c^2$	
$a^4 \cdot a^2$	$a^4 \cdot b^2$	$b^4 \cdot a^2$	$b^4 \cdot b^2$

Damit können wir eine Beschreibung formulieren, mit der wir aus einer Rechenmauer mit n Schichten konstruktiv eine Rechenmauer mit $n + 1$ Schichten erhalten.

Thema 13 (Nachtrag) - Bewegungsaufgaben[5]

Aufgabe 13.09 - MO650934/MO651034. Die Häuser von Alfons und Bertram sind durch einen langen geradlinigen Waldweg verbunden. Eines Tages machen sich beide von zu Hause mit dem Fahrrad auf den Weg zum Haus des jeweils anderen. Sie starten zur gleichen Uhrzeit, jeder fährt mit einer eigenen konstanten Geschwindigkeit bis zum Haus des jeweils anderen. Von den Fahrten ist bekannt:

(1) Als Alfons 30 km gefahren ist, ist er von Bertram 7 km entfernt.
(2) Als Bertram 30 km gefahren ist, ist er von Alfons 18 km entfernt.

Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für die Gesamtlänge des Waldweges.

Hinweis: Es ist nicht bekannt, in welcher Reihenfolge (1) und (2) stattfanden.

Lösungshinweise: Wir bezeichnen mit v_A die Geschwindigkeit von Alfons und mit v_B die Geschwindigkeit von Bertram. Es gibt eine positive (reelle) Zahl x mit $v_B = x \cdot v_A$. Zu einem Zeitpunkt t legte Alfons die Strecke $s = v_A \cdot t$ zurück. Alle Zahlenangaben verstehen sich (soweit nicht anders angegeben) als Kilometer-Angabe.

Wir betrachten die möglichen Situationen, wann die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sein können.

Fall 1a: Zum Zeitpunkt t gemäß (1) haben sich Alfons und Bertram noch nicht getroffen. Alfons hat zu diesem Zeitpunkt $v_A \cdot t = 30$ zurückgelegt. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_A \cdot t + 7 + v_B \cdot t = v_A \cdot t + 7 + x \cdot v_A \cdot t = 37 + x \cdot 30.$$

Fall 1b: Zum Zeitpunkt t gemäß (1) hatten sich Alfons und Bertram bereits getroffen und sind (sich wieder entfernend) weitergefahren. Alfons hat zu diesem Zeitpunkt $v_A \cdot t = 30$ zurückgelegt. Bertram ist noch nicht am Haus von Alfons angekommen, denn

[5] s. Heft 01/2022 und 10/2023.

dann wäre ihr Abstand 30 km. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_A \cdot t - 7 + v_B \cdot t = v_A \cdot t - 7 + x \cdot v_A \cdot t = 23 + x \cdot 30.$$

Fall 2a: Zum Zeitpunkt t gemäß (2) haben sich Alfons und Bertram noch nicht getroffen. Bertram hat zu diesem Zeitpunkt $v_B \cdot t = 30$ zurückgelegt. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_B \cdot t + 18 + v_A \cdot t = v_B \cdot t + 18 + \frac{v_B \cdot t}{x} = 48 + \frac{30}{x}.$$

Fall 2b: Zum Zeitpunkt t gemäß (2) hatten sich Alfons und Bertram bereits getroffen und sind (sich wieder entfernend) weitergefahren. Bertram hat zu diesem Zeitpunkt $v_B \cdot t = 30$ zurückgelegt. Alfons ist noch nicht am Haus von Bertram angekommen, denn dann wäre ihr Abstand 30 km. Dann können wir die Weglänge W mittels folgender Gleichung beschreiben:

$$W = v_B \cdot t - 18 + v_A \cdot t = v_B \cdot t - 18 + \frac{v_B \cdot t}{x} = 12 + \frac{30}{x}.$$

Nun können wir jeden Ansatz aus dem Fall 1 mit jedem Ansatz aus dem Fall 2 kombinieren und erhalten durch Gleichsetzung der gegebenen Ausdrücke vier quadratische Gleichungen in x, deren positive Lösungen zu möglichen Weglängen führen.

Fälle 1a und 2a:

$$37 + 30x = 48 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - \frac{11}{30} \cdot x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11}{60} \pm \frac{1}{60} \cdot \sqrt{121 + 3600} = \frac{11}{60} \pm \frac{61}{60}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{72}{60} = \frac{6}{5}$ und daraus $W = 37 + 30 \cdot \frac{6}{5} = 73$.

Probe[6]*:*

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(x \cdot 30 = \frac{6}{5} \cdot 30 =\right)$ 36 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|73 - 30 - 36| =)$ 7 km[7].

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{5}{6} \cdot 30 =\right)$ 25 km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|73 - 25 - 30| =)$ 18 km.

[6] Da die Lösung der quadratischen Gleichung auf äquivalenten Umformungen beruht, ist eine Probe im engeren Sinne nicht erforderlich. Da aber eine Probe auch die Richtigkeit des Modellansatzes prüft, ist deren Durchführung zu empfehlen.

[7] Ist die Differenz innerhalb der Betragszeichen positiv, so sind sich beide noch nicht begegnet. Ist die Differenz innerhalb der Betragszeichen dagegen negativ, fand das Treffen bereits statt und beide entfernen sich wieder.

Fälle 1a und 2b:

$$37 + 30x = 12 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{5}{6} \cdot x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{5}{12} \pm \frac{1}{12} \cdot \sqrt{25 + 144} = -\frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ und daraus $W = 37 + 30 \cdot \frac{2}{3} = 57$.

Probe:

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(x \cdot 30 = \frac{2}{3} \cdot 30 =\right)$ 20 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|57 - 30 - 20| =)$ 7 km.

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{3}{2} \cdot 30 =\right)$ 45 km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|57 - 45 - 30| =)$ 18 km.

Fälle 1b und 2a:

$$23 + 30x = 48 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - \frac{5}{6} \cdot x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \frac{1}{12} \cdot \sqrt{25 + 144} = \frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ und daraus $W = 23 + 30 \cdot \frac{3}{2} = 68$.

Probe:

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(\frac{30}{x} = \frac{2}{3} \cdot 30 =\right)$ 20 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|68 - 30 - 20| =)$ 18 km.

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{3}{2} \cdot 30 =\right)$ 45 km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|68 - 45 - 30| =)$ 7 km.

Fälle 1b und 2b:

$$23 + 30x = 12 + \frac{30}{x} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{11}{30} \cdot x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{11}{60} \pm \frac{1}{60} \cdot \sqrt{121 + 3600} = -\frac{11}{60} \pm \frac{61}{60}$$

Wegen $x > 0$ finden wir als Lösung $x = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$ und daraus $W = 23 + 30 \cdot \frac{5}{6} = 48$.

Probe:

Zum Zeitpunkt gemäß (1) haben Alfons 30 km und Bertram $\left(\frac{30}{x} = \frac{6}{5} \cdot 30 =\right)$ 25 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|48 - 30 - 25| =)$ 7 km.

Zum Zeitpunkt gemäß (2) haben Alfons $\left(\frac{30}{x} = \frac{6}{5} \cdot 30 =\right)$ 36 km und Bertram 30 km zurückgelegt. Damit beträgt ihr Abstand $(|48 - 30 - 36| =)$ 18 km.

Zusammenfassung: Für die Gesamtlänge des Weges gibt es genau die vier Möglichkeiten 48 km, 57 km, 68 km und 73 km. ❑

Die besondere Anforderung der aktuellen Aufgabe besteht in der wechselnden Sichtweise auf die Bewegung. In (1) werden die Berechnungen aus Sicht von Alfons und in (2) aus Sicht von Bertram geführt. Damit wird die Lösung über quadratische Gleichungen gefunden. Üblicherweise genügt aber ein linearer Lösungsansatz, wie in dem folgenden Aufgabenpaar.

Aufgabe 13.10 – MO490932. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C um 9:00 Uhr eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig um 21:30 Uhr ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Hinweis: Der Einfachheit halber wird für diese Aufgabe angenommen, dass die Züge auf den jeweiligen Strecken mit konstanter Geschwindigkeit fahren.

Lösungshinweise: Sofern Missverständnisse nicht möglich sind, lassen wir die Maßeinheiten weg und verstehen Längen in km, Zeiten in Stunden und Geschwindigkeiten in km/h. Die Zeitmessung erfolgt mit dem Losfahren der Züge in C. Mit a, b, d und e werden die Abstände von C zu A, B, D bzw. E bezeichnet.

Es ergeben sich aus den Geschwindigkeiten der Regionalbahn (RB) bzw. des Regionalexpresses (RE) und der Gesamtzeit zwischen 09:00 Uhr und 21:30 Uhr von 12,5 Stunden die Entfernungen $a = v_{RB} \cdot t = 25 \cdot 12{,}5 = 312{,}5$ und $e = v_{RE} \cdot t = 40 \cdot 12{,}5 = 500$.

Für den Punkt B gilt, dass er von der Regionalbahn in der Zeit t_B erreicht wird und dass der ICE in der Zeit $12{,}5 - t_B$ die Strecke $e + b$, also die Strecke $e + 25 \cdot t_B$ zurücklegt. Damit ergibt sich

$$100 \cdot (12{,}5 - t_B) = 500 + 25 \cdot t_B \,,$$

also

$$t_B = 6 \quad \Longrightarrow \quad b = 25 \cdot t_B = 150 \,.$$

Für den Punkt D gilt, dass er vom Regionalexpress in der Zeit t_D erreicht wird und dass der IC in der Zeit $12{,}5 - t_D$ die Strecke $a + 40 \cdot t_D$ zurücklegt. Somit gilt

$$62{,}5 \cdot (12{,}5 - t_D) = 312{,}5 + 40 \cdot t_D \,,$$

also

$$t_D = \frac{375}{82} \quad \Longrightarrow \quad d = 40 \cdot t_D = \frac{7500}{41} \,.$$

ICE und IC treffen sich folglich 16:30 Uhr in C, da die Gesamtzeit für das Erreichen von C jeweils 7,5 Stunden beträgt:

$$6+\frac{150}{100}=\frac{15}{2}\quad;\quad\frac{375}{82}+\frac{\frac{7500}{41}}{62{,}5}=\frac{15}{2}\ .$$

Für die Geschwindigkeiten der Güterzüge ergibt sich

$$\frac{b}{12{,}5-t_B}=\frac{150}{6{,}5}=\frac{300}{13}\quad;\quad\frac{d}{12{,}5-t_D}=\frac{40\cdot\frac{375}{82}}{12{,}5-\frac{375}{82}}=\frac{300}{13}\,.$$

Die Geschwindigkeiten sind folglich gleich. ❑

Im Vergleich beider Klassenstufe 9 und 10 werden nun die Zeitangaben im Aufgabentext weggelassen. Somit ist die Gesamtfahrzeit nicht gegeben. Es zeigt sich, dass diese zur Beantwortung der Fragen nicht erforderlich ist.

Aufgabe 13.10 – MO491032. Auf einer Zugstrecke liegen die Bahnhöfe A, B, C, D und E in dieser Reihenfolge. Zeitgleich fahren in C eine Regionalbahn mit 25 km/h nach A und ein Regionalexpress mit 40 km/h nach E los. Als die Regionalbahn in B ist, fahren von dort ein ICE mit 100 km/h nach E und ein Güterzug nach C ab. Als der Regionalexpress in D ist, fahren von dort ein IC mit 62,5 km/h nach A und ein Güterzug nach C ab. Alle Züge erreichen gleichzeitig ihr Ziel.

a) Zeigen Sie, dass sich der ICE und der IC in C begegnen.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Güterzüge gleich schnell sind.

Lösungshinweise: Wie oben verstehen sich Längen in km, Zeiten in Stunden und Geschwindigkeiten in km/h.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe a): Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass der ICE für die Strecke von C nach E genauso lange braucht wie der IC für die Strecke von C nach A („alle Züge erreichen zur gleichen Zeit ihr Ziel“). Der ICE braucht für die Strecke von C nach E genau $\frac{40}{100}=0{,}4$ mal so lange, wie der Regionalexpress für diese Strecke benötigt, und der IC braucht für die Strecke von C nach A genau $\frac{25}{62{,}5}=0{,}4$ mal so lange, wie die Regionalbahn für die Strecke von C nach A benötigt. Regionalexpress und Regionalbahn brauchen für ihre jeweiligen Strecken aber gleich lange, da alle Züge gleichzeitig ihr Ziel erreichen. Damit ist Teilaufgabe a) gezeigt.

Lösungshinweise zur Teilaufgabe b): Wir bezeichnen mit a, b, d und e die Abstände von C zu A, B, D bzw. E. Der Güterzug von B nach C habe die Geschwindigkeit v, der Güterzug von D nach C habe die Geschwindigkeit w. Wir müssen $v=w$ zeigen.

Die Zeit t_1, in der der ICE bzw. die Regionalbahn von B nach E bzw. A fahren, ist genauso lang wie die Zeit, die der Güterzug von B nach C braucht. Das heißt

$$t_1 = \frac{b+e}{100} = \frac{a-b}{25} = \frac{b}{v}.$$

Verwenden wir die Beziehung $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \implies \frac{p}{q} = \frac{m+r}{n+s}$ für reelle Zahlen m, n, r, s, p und q, finden wir

$$\frac{a+e}{25+100} = \frac{b}{v}.$$

Analog ist die Zeit t_2, die der IC und Regionalexpress von D nach A bzw. E brauchen, genauso lang wie die Zeit, die der Güterzug von D nach C braucht. Das heißt

$$\frac{a+e}{62{,}5+40} = \frac{d}{40}.$$

Lassen wir aber zunächst die Regionalbahn von C nach B und dann den ICE von B nach C fahren, dauert dies (gemäß Teilaufgabe a) genauso lange, wie wenn man den Regionalexpress von C nach D und dann den IC von D nach C fahren lässt. Also

$$\frac{b}{25} + \frac{b}{100} = \frac{5b}{100} = \frac{d}{40} + \frac{d}{62{,}5} = \frac{102{,}5d}{2500}$$

woraus folgt

$$\frac{b}{d} = \frac{102{,}5 \cdot 100}{2500 \cdot 5} = \frac{41}{50}.$$

Dividieren wir die Quotienten $\frac{b}{v} : \frac{d}{w}$, ergibt sich

$$\frac{b}{v} : \frac{d}{w} = \frac{b}{d} \cdot \frac{v}{w} = \frac{102{,}5}{125} = \frac{41}{50}.$$

Damit finden wir wegen $\frac{b}{d} = \frac{41}{50}$ die Gleichheit $v = w$. ❑

15. Europäische Mathematik-Olympiade für Mädchen

Vom 9. bis 15. April 2026 fand in Bordeaux (Frankreich) die europäische Mathematik-Olympiade (European Girl’s Mathematical Olympiad – EGMO) für junge Frauen statt. Obwohl die 1. EGMO in Cambridge (UK, 2012) als europäischer Wettbewerb ausgeschrieben war, nahmen bereits drei nicht-europäische Teams teil. In diesem Jahr stellten sich 67 Teams mit 260 Teilnehmerinnen dem Wettbewerb, darunter 161 aus 41 europäischen Ländern.

Die vier talentiertesten Nachwuchsmathematikerinnen aus den bundesweiten Mathematik-Wettbewerben nahmen als deutsche Delegation sehr erfolgreich teil – sie erreichten drei Silber- und eine Bronzemedaille. Insgesamt wurden 30-mal Gold (12.5% aller Teilnehmerinnen, mindestens 23 Punkte), 39-mal Silber (15.0%, mindestens 18 Punkte) und 59-mal Bronze (22.7%, mindestens 11 Punkte) vergeben, so dass 128 der 260 Starterinnen (49.2%, darunter 80 von 161 Europäerinnen, 49.7%) Preise errangen.

Die Ausrichtung der EGMO orientiert sich an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO). Es werden zwei Klausuren (4½ Stunden) mit je drei Aufgaben geschrieben. Pro Aufgabe werden maximal sieben Punkte ergeben (gesamt 42 Punkte). Die deutschen Teilnehmerinnen qualifizierten sich über das Auswahlverfahren zu IMO. Die Teamstärke ist auf vier begrenzt.

Für die Länderwertung werden die erreichten Punktzahlen der vier Teilnehmerinnen addiert, so dass maximal 168 Punkte möglich sind. Mit 80 Punkten nahm Deutschland den 7. Platz ein. Angeführt wird die Länderliste von der Volksrepublik China (148 Punkte, 4 Goldmedaillen), Rumänien (94 Punkte, 3 Gold-, 1 Bronzemedaille) und Türkei (86 Punkte, 2 Gold-, 2 Silbermedaillen). Die nächsten Plätze belegten Australien, Indien und die USA, so dass Deutschland wie im Vorjahr wieder den dritten Platz unter den europäischen Ländern schaffte!

Die 16. EGMO wird im April 2027 in Šibenik (Kroatien) stattfinden.

Aufgaben der 15. EGMO

Hinweis: Zur Einschätzung des Schwierigkeitsgrades der Aufgaben: Jedes Team aus vier Teilnehmerinnen konnte pro Aufgabe 28 Punkte erreichen.

Durchschnittlich erreichte Punktzahl	Gesamt	Top Ten	Deutschland
Aufgabe 1	15.7	25.2	27
Aufgabe 2	7.0	16.6	17
Aufgabe 3	1.6	5.8	1
Aufgabe 4	14.7	23.3	25
Aufgabe 5	6.5	14.1	10
Aufgabe 6	0.6	3.4	0

Aufgabe 1. Ein 2026×2026 Brett heiße *bordeaux*, falls mindestens eines seiner 2026^2 Felder rot ist. Eine rechteckige Fläche von Feldern heiße toll, falls sie eine ungerade Anzahl roter Felder enthält.

Bestimme die größte positive ganze Zahl M, sodass in jedem möglichen 2026×2026 bordeaux Brett eine tolle rechteckige Fläche mit mindestens M Feldern existiert.

Bemerkung: Die Seiten einer rechteckigen Fläche sind parallel zu den Seiten des Bretts.

Aufgabe 2. Sei n eine positive ganze Zahl. Marie spielt ein Spiel, in dem sie mit der Zahl 1 an der Tafel beginnt. Sie kann beliebig oft eine ganze Zahl j mit $1 \leq j \leq n$ auswählen und die Zahl V an der Tafel durch die Zahl $j \cdot R\left(\frac{V}{j}\right)$ ersetzen. Dabei bezeichne $R(x)$ die am nächsten an x gelegene ganze Zahl; wobei aufgerundet wird, falls x genau in der Mitte zwischen zwei ganzen Zahlen liegt. Zum Beispiel gilt $R(1{,}3) = 1$ und $R(1{,}5) = R(1{,}8) = 2$.

a) Zeige, dass es für jedes n eine positive ganze Zahl B gibt, sodass Marie nie eine Zahl größer als B an die Tafel schreiben kann.
b) Für ein gegebenes n sei $f(n)$ die größte Zahl, die durch endlich viele Ersetzungen erreicht werden kann. Zeige, dass es eine positive ganze Zahl N gibt, sodass für alle $n \geq N$ gilt, dass 2026 die Zahl $f(n)$ teilt.

Aufgabe 3. Sei R die Menge der reellen Zahlen. Bestimme alle Funktionen$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen x, y gilt, dass

$$f((f(x) + f(y))^2) = (x + y) \cdot f(x + y).$$

Aufgabe 4. Sei $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$ eine unendliche Folge reeller Zahlen, sodass $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt. Zeige, dass für $r = 2026^{2026}$ gilt, dass

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Aufgabe 5. Sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $|\overline{AC}| > |\overline{AB}|$, Umkreis ω und Umkreismittelpunkt O. Sei K der Schnittpunkt der beiden Tangenten an ω bei B und C. Der Kreis durch A, B und K schneide die Gerade BC erneut in $Z \neq B$. Sei L der Mittelpunkt von $\overline{ZK}$, und X der Schnittpunkt der Geraden ZK und AB. Sei V derjenige Punkt auf dem Kreis durch A, B und L, der auf der gleichen Seite von BC wie A liegt, sodass OV senkrecht auf ZK steht.

Zeige, dass LV senkrecht auf CX steht.

Aufgabe 6. Sei p eine Primzahl und n eine positive ganze Zahl, sodass p die Zahl n **nicht** teilt. Sei k die Anzahl positiver Teiler von n und seien $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ die positiven Teiler von n. Für $i = 1, 2, \dots, k$ sei c_i die Anzahl positiver Teiler ℓ von d_i^2, sodass $d_i - \ell$ durch p teilbar ist.

Zeige, dass $(p-1) \cdot (c_1 + c_2 + \cdots + c_k) \geq k^2$.

Rückblick auf den 8. Tag der Mathematik[8]

Am Samstag, dem 21. März 2026, fand der 8. Tag der Mathematik (TdM) der Technischen Universität Chemnitz statt. Der Rektor der TUC, Prof. Dr. GERD STROHMEIER, begrüßte alle, die die Gelegenheit nutzen wollten, sich mit vielen Facetten der Mathematik zu beschäftigen, darunter 240 Jugendliche, die sich zum Teamwettbewerb anmeldeten. Der Dekan der Fakultät, Prof. Dr. ALOIS PICHLER, beschrieb in einem Einführungsbeitrag die Rolle der Mathematik als universelle Sprache der Naturwissenschaften.

Mit 19 Mannschaften in den Klassenstufen 8 bis 10 sowie 38 Mannschaften in den Klassenstufen 11 und 12 war die Neugierde auf die Aufgaben-Rallye wieder groß wie im Vorjahr. Unter den Teilnehmenden konnten erneut Schülerinnen und Schüler aus Polen, Tschechien und der Ukraine begrüßt werden.

Parallel zur Rallye nutzten zahlreiche Lehrkräfte die angebotenen Fortbildungen. So stieß der Vortrag von Prof. Dr. OLIVER ERNST zum Thema „Signifikant oder nicht: Hypothesentests und Konfidenzintervalle” ebenso auf großes Interesse wie die anschließende Diskussionsrunde zur Weiterentwicklung der mathematischen Bildung an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule. Diese wurden von Prof. Dr. MARTIN STOLL, Inhaber der Professur Wissenschaftliches Rechnen an der TU Chemnitz, begleitet. Beide Vorträge wurden in Sachsen als Fortbildungsveranstaltung anerkannt.

Nach der Mittagspause – in der man in einer interaktiven Mitmach-Ausstellung vielfältige Möglichkeiten hatte, Mathematik praktisch zu erleben und die Vielfalt der Mathematik sowie deren berufliche Perspektiven kennenzulernen – zeigte im anschließenden Plenarvortrag Prof. Dr. MARTIN STOLL anschaulich, wie mathematische Methoden in der Musiktechnologie Anwendung finden. Unter dem Titel „Von Lil Uzi zu Cher: Die Mathematik von Autotune“ erklärte er die Funktionsweise der automatischen Tonhöhenkorrektur am Beispiel von Hip-Hop-Musik und schlug damit eine Brücke zwischen Mathematik, Digitalisierung und Popkultur.

In der Zwischenzeit lief im Hintergrund fieberhaft die Auswertung der Lösungen zu den Stationsaufgaben, denn bis zur Siegerehrung blieb nicht viel Zeit[9]. Im Rahmen der folgenden feierlichen Preisverleihung wurden die besten Teams der beiden Altersklassen für ihre Leistungen ausgezeichnet. Die Auszeichnung wurde durch den Hochschulratsvorsitzenden der TU Chemnitz und Chemnitzer Bürgermeister für Personal, Finanzen und Bildung, RALPH BURGHART, den Dekan der Fakultät für Mathematik, Prof. Dr. ALOIS PICHLER, sowie die wissenschaftliche Mitarbeiterin der Professur Finanzmathematik, Dr. DANA UHLIG, vorgenommen.

[8] Auszug aus https://www.tu-chemnitz.de/tu/pressestelle/aktuell/13400 (Stand 24.03.2026)

[9] Ausführliche Ergebnisse unter https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/2026/eval.php

In der Klassenstufe 8 bis 10 setzte sich die Mannschaft „DIE PARALLEN UNGERADEN“ aus dem Chemnitzer KEPLER-Gymn. mit deutlichem Vorsprung vor dem Team „EGT RUNNER“ aus dem Evangelischen Gymn. Tharandt durch. Mit einem Punkt Rückstand erreichten die Mannschaften „SCH8ER“ aus dem HERDER-Gymn. Schneeberg und „SPINAT-KÄSESOẞE“ aus dem KEPLER-Gymn. Chemnitz punktgleich die nächsten Plätze, wobei aufgrund der kürzeren Gesamtzeit der dritte Preis nach Schneeberg ging.

In der Klassenstufe 11/12 siegte „DIE RIEMANNSCHAFT“, eine gemischte Mannschaft aus dem Freien Gymn. Naunhof, dem OSTWALD-Gymn. Leipzig, dem BIP Kreativitätsgymn. Leipzig und der Landesschule Pforta. Sie verwiesen jeweils knapp die Teams „NULLKOMMANIX“ aus dem LESSING-Gymn. Hohenstein-Ernstthal und „IMAGINÄRE KEPLER-KONSTANTEN“ aus dem KEPLER-Gymn. Chemnitz auf die Plätze.

In alten Mathe-Büchern geblättert

In *Schonard A., Kokot C. Der Matheknüller – Schnellere und leichtere Rechenmethoden neu entdeckt. CPI books GmbH, Ulm 2013,* werden Algorithmen gezeigt, die ihren Ursprung in der Altindischen Mathematik haben, heute auch unter vedischer Mathematik bekannt[10]. Solche Rechenregeln wurden Anfangs des 20. Jahrhundert von BHARATI KRISHNA TIRTHAJI (1884 – 1960) zusammengetragen und posthum 1965 veröffentlicht. Allerdings sind diese Ergebnisse nicht historisch belegbar, da aus Indien erst um ca. 500 n. Chr. schriftliche Überlieferungen bekannt sind.

Die Berechnung der Quersumme kann für die Untersuchung der Teilbarkeit durch 3 und 9 eingesetzt werden. Ist eine ganze Zahl n mit den $k+1$ Ziffern $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ gegeben, so wird die Quersumme $Q(n)$ als Summe ihrer Ziffern ermittelt, $Q(n) = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$. Statt dieser einfachen Prozedur können wir aber auch ein iteratives Verfahren beschreiben:

Wir setzen $n_0 = n$ und berechnen für jedes $0 \leq j$ die Summen

$$n_{j+1} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1}} + a_j \,.$$

so lange, bis problemlos entschieden werden kann, ob die zuletzt berechnete Zahl durch 9 teilbar ist. Beispiel:

$$\begin{aligned}
n &= n_0 = 281619\,, \\
n_1 &= 28161 + 9 = 28170\,, \\
n_2 &= 2817 + 0 = 2817\,, \\
n_3 &= 281 + 7 = 288\,, \\
n_4 &= 28 + 8 = 36\,, \\
n_5 &= 3 + 6 = 9\,.
\end{aligned}$$

[10] S. auch: Herrmann, D. Mathematik im Mittelalter. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016, Abschnitt 3 „Mathematik in Indien bis 1400“, S. 65ff.

Bereits bei n_4 und erst recht bei n_5 erkennen wir, dass n durch 9 ohne Rest teilbar ist. Die Richtigkeit des Verfahrens beweisen wir mit dem bekannten Hilfssatz „*Eine ganze Zahl x ist genau dann durch eine ganze Zahl w teilbar, wenn die Summe $y = x + w$ durch w teilbar ist.*

Somit gilt in jedem Schritt des Verfahrens

$n_j = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_j}$ ist genau dann durch 9 teilbar, wenn $n_{j+1} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1}} + a_j = \frac{(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} 0} + 10 a_j)}{10} = \frac{(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} a_j} + 9 a_j)}{10}$ durch 9 teilbar ist.

Da aber die Division durch 10 wegen $g.g.T(9;10) = 1$ die Teilbarkeit durch 9 nicht verändert, gilt die Aussage „n_j ist genau dann durch 9 teilbar, wenn n_{j+1} durch 9 teilbar ist“ für alle $j \geq 0$.

Der umständlich wirkende Algorithmus hat den Vorteil, dass er verallgemeinert werden kann, um für jede Zahl $10 \cdot x + 9$ mit nichtnegativer ganzer Zahl x die Teilbarkeit einer ganzen Zahl n durch $10 \cdot x + 9$ zu prüfen:

$$n_{j+1} = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1}} + (x+1) \cdot a_j$$
$$= \frac{\left(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} 0} + 10 \cdot (x+1) \cdot a_j\right)}{10} = \frac{\left(\overline{a_k a_{k-1} \dots a_{j+1} a_j} + (10 \cdot x + 9) \cdot a_j\right)}{10}$$

Beispiel: Wir prüfen die Teilbarkeit der Zahl $n = 281619$ durch 29:

$$n = n_0 = 281619\,,$$
$$n_1 = 28161 + 3 \cdot 9 = 28188\,,$$
$$n_2 = 2818 + 3 \cdot 8 = 2842\,,$$
$$n_3 = 284 + 3 \cdot 2 = 290\,,$$
$$n_4 = 29 + 3 \cdot 0 = 29\,,$$
$$(n_5 = 2 + 3 \cdot 9 = 29)\,.$$

Mit n_4 haben wir die Bestätigung der Teilbarkeit gefunden. Die Fortsetzung des Algorithmus führt zu keinen weiteren Veränderungen.

Termine

Finale des 61. Bundeswettbewerbs „Jugend forscht“, 28. bis 31. Mai 2026, Herzogenaurach, Freistaat Bayern (Bundespate: Schaeffler AG)

Bundesrunde der 65. Mathematik-Olympiade, 07. bis 10 Juni 2026, Hamburg.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2025/26)

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgaben**
05/2026	Thema 13 (Nachtrag)	Bewegungsaufgaben	MO650934, MO651034, MO491032, MO490932
05/2026	Thema 9 (Nachtrag)	Summen von Quadratzahlen	MO651036
05/2026	Thema 23 (Nachtrag)	Quersummen und Querprodukte	MO651031, MO650931, MO441024, MO440924
04/2026	.	Methode der vollständigen Induktion	MO631016, MO611033, MO471022, MO470924
04/2026	-	Quadratische Gleichungen	MO650922, MO651022, MO380935, MO381035, MO360945
03/2026	Thema 7.3	Kryptogramme	MO651021, MO650921, MO561013, MO451044, MO081014
03/2026	Thema 4.1	Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung	MO601023, MO450924, MO431024
01+02/2026	Thema 24.6	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651024 MO650923
01+02/2026	Thema 9.5	Differenzen und Summen von Quadratzahlen	MO651012
01+02/2026	Thema 35.2	Diophantische Gleichungen	

[11] Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (bino@hrz.tu-chemnitz.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

12/2025	Thema 35.1	Diophantische Gleichungen	
12/2025	Thema 24.5	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651011
11/2025	Thema 24.4	Klassische Wahrscheinlichkeit	MO651014
11/2025	Thema 31.5	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO651015, MO651016
10/2025	Thema 33.2	Rationale Zahlen	MO641041, MO601033
09/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgaben-formulierungen	
08/2025	Thema 34.2	Zyklische Aufgabenformulierungen	MO640946 MO641046
08/2025	Thema 31.4	Lösungsstrategien im Koordinatensystem	MO641043
08/2025	Thema 25.3	Gleichungen und Ungleichungen mit Wurzelausdrücken	MO640942 MO641042

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: bino@hrz.tu-chemnitz.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz